ΘΩΜΑ ΚΥΒΕΝΤΙΔΗ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

- *Περιληπτική Θεωρία*
- *Λυμένα Προβλήματα*
- *Εφαρμογές*

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ΘΩΜΑΣ Α. ΚΥΒΕΝΤΙΔΗΣ

- Γεννήθηκε το 1947 στο Νέο Πετρίτσι του Ν. Σερρών.
- Το 1965 αποφοίτησε από το εξατάξιο Γυμνάσιο Σιδηροκάστρου του Ν. Σερρών και εγγράφηκε στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης.
- Πήρε το Πτυχίο των Μαθηματικών το 1969.
- Αναγορεύτηκε διδάκτορας στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης το 1979 και από το 1972 μέχρι σήμερα εργάζεται σ' αυτό.

ISBN 960-431-451-3

Δεύτερη έκδοση 1998
Ανατύπωση διορθωμένη 2002, 2006

Φωτοστοιχειοθεσία Εκτύπωση

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 23920 72.222 (10 γραμ.) - Fax: 23920 72.229
e-mail: info@ziti.gr

Βιβλιοπωλείο

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ. 2310 203.720, Fax 2310 211.305
e-mail: sales@ziti.gr

www.ziti.gr

«Από τότε που υπάρχει ο άνθρωπος ψάχνει να βρεί ποια ακριβώς είναι η θέση του στο Σύμπαν. Πού είμαστε, ποιοί είμαστε; Ανακαλύπτουμε ότι ζούμε σε ένα ασήμαντο πλανήτη, χαμένο στα κράσπεδα ενός γαλαξία ο οποίος είναι μέλος μιας αραιοσπαρμένης στοιβάδας γαλαξιών, και καταλαμβάνουμε ένα κάποιο χώρο σε μια ξεχασμένη γωνία ενός Σύμπαντος όπου οι γαλαξίες είναι πολυαριθμότεροι από τους ανθρώπους. Από την εποχή του Αρίσταρχου το κάθε βήμα μας απομακρύνει συνεχώς περισσότερο από τον ρόλο του κεντρικού πρωταγωνιστή στις συμπαντικές υποθέσεις, και μας εμπλέκει συνεχώς βαθύτερα στο κοσμικό δράμα.

Υπάρχουν μερικοί που ενδόμυχα συνεχώς αποδοκιμάζουν τις μεγάλες αυτές ανακαλύψεις, που θεωρούν το κάθε βήμα προόδου σαν υποβάθμιση, που λαχταρούν ακόμη ένα Σύμπαν του οποίου κέντρο και υπομόχλιο είναι η Γη.

Αλλά αν πρόκειται να συνάψουμε σχέσεις με τον κοσμικό χώρο, πρέπει πρώτα να τον κατανοήσουμε. Όντως, αν πραγματικά επιθυμούμε να είναι ο πλανήτης μας σημαντικός, τότε κάτι μπορούμε να κάνουμε γι' αυτό, ο κόσμος μας αποκτά βαρύτητα και σπουδαιότητα μόνο από το θάρρος των ερωτημάτων μας για τη φύση του και από το βάθος των απαντήσεων που κατορθώσαμε να δώσουμε σ' αυτά.»

Carl SAGAN
(1934 - 1996)
Καθηγητής Αστροφυσικός
Συνεργάτης της NASA

Αυτό το βιβλίο αφιερώνεται
στα παιδιά μου

Τάσο και Νίκο

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στις φυσικές και στις κοινωνικές επιστήμες πολλά προβλήματα εκφράζονται με διαφορικές εξισώσεις. Έτσι η χρησιμοποίηση μαθηματικών μεθόδων για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων αποκτά αυξημένο ενδιαφέρον και για μη μαθηματικούς.

Βασικός στόχος του βιβλίου είναι να διδάξει μαθηματικές μεθόδους επίλυσης διαφορικών εξισώσεων χωρίς ο αναγνώστης να επιβαρυνθεί με θεωρητικές αποδείξεις, αλλ' αυτό βέβαια δεν γίνεται σε βάρος της μαθηματικής αυστηρότητας.

Το βιβλίο αυτό περιέχει βασικά θέματα των διαφορικών εξισώσεων, και σκοπός του είναι να παρουσιάσει σύντομα μεθόδους επίλυσής τους.

Σε κάθε θέμα περιέχεται περιληπτική θεωρία και λυμένα προβλήματα έτσι ώστε ο αναγνώστης να κατανοήσει τις διαδικασίες επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων. Αποφεύγουμε όμως να παραθέτουμε πληθώρα λυμένων προβλημάτων σε κάθε θέμα παρά μόνον όσα λυμένα προβλήματα είναι απαραίτητα για την κατανόηση της μεθόδου επίλυσης.

Οι προτεινόμενες ασκήσεις συνοδεύονται με τις απαντήσεις τους.

Ακόμη, στο βιβλίο αυτό περιέχονται διάφορες χαρακτηριστικές και ενδιαφέρουσες εφαρμογές των διαφορικών εξισώσεων.

Σημειώνουμε, τέλος, ότι ο απαιτητικός αναγνώστης θα χρειαστεί οπωσδήποτε ν' ανατρέξει στο σύγγραμμά μου των διαφορικών εξισώσεων που αποτελείται από τρεις αυτοτελείς τόμους, όπου θα βρει τις απαραίτητες αναλύσεις και αποδείξεις για τα θέματα αυτού του βιβλίου, καθώς επίσης και πολλά άλλα επιπλέον θέματα των διαφορικών εξισώσεων.

Θεσσαλονίκη, 1997 — Θ. ΚΥΒΕΝΤΙΔΗΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ LAPLACE

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5
ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6
ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ
ΣΕΙΡΕΣ FOURIER

ΒΑΣΙΚΑ ΣΥΜΒΟΛΑ

$\forall$	για κάθε	$\notin$	δεν ανήκει
$=$	ίσον	$\Rightarrow$	συνεπάγεται
$\neq$	διάφορο	lim	όριο
$\equiv$	ταυτότητα	Re	πραγματικό μέρος
$\subset$	περιέχεται	Im	φανταστικό μέρος
$\in$	ανήκει	i	$\sqrt{-1}$
A^{-1}	ο αντίστροφος πίνακας	$\mathbb{R}$	πραγματικοί αριθμοί

συνάρτηση κλάσης C^k	συνάρτηση με συνεχείς παραγώγους μέχρι τάξη k ($k=0$ συνεχής)
δ.ε.	διαφορική εξίσωση
δ.ε. με μ.π.	διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

ΠΙΝΑΚΑΣ

Ειδικές τιμές των τριγωνομετρικών συναρτήσεων

θ	$0°$ $180°$	$30°$ $150°$	$45°$ $135°$	$60°$ $120°$	$90°$ $270°$
$\eta\mu\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	± 1
$\sigma\upsilon\nu\theta$	± 1	$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	0
$\varepsilon\varphi\theta$	0	$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$	± 1	$\pm\sqrt{3}$	$\pm\infty$
$\sigma\varphi\theta$	$\pm\infty$	$\pm\sqrt{3}$	± 1	$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

- Το άνω πρόσημο αντιστοιχεί στην πρώτη γραμμή των τιμών της γωνίας θ και το κάτω πρόσημο στη δεύτερη γραμμή των τιμών της γωνίας θ.
- Η αντιστοιχία των μοιρών της γωνίας θ σε ακτίνια είναι:

$$0^o \leftrightarrow 0 \qquad 30^o \leftrightarrow \frac{\pi}{6} \qquad 45^o \leftrightarrow \frac{\pi}{4} \qquad 60^o \leftrightarrow \frac{\pi}{3} \qquad 90^o \leftrightarrow \frac{\pi}{2}$$

και

$$180^o \leftrightarrow \pi \qquad 150^o \leftrightarrow \frac{5\pi}{6} \qquad 135^o \leftrightarrow \frac{3\pi}{4} \qquad 120^o \leftrightarrow \frac{2\pi}{3} \qquad 270^o \leftrightarrow \frac{3\pi}{2}$$

ΠΙΝΑΚΑΣ

Ειδικές τιμές των τριγωνομετρικών συναρτήσεων

θ	0° 180°	30° 150°	45° 135°	60° 120°	90° 270°
$\eta\mu\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	± 1
$\sigma\upsilon\nu\theta$	± 1	$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	0
$\varepsilon\varphi\theta$	0	$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$	± 1	$\pm\sqrt{3}$	$\pm\infty$
$\sigma\varphi\theta$	$\pm\infty$	$\pm\sqrt{3}$	± 1	$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

- Το άνω πρόσημο αντιστοιχεί στην πρώτη γραμμή των τιμών της γωνίας θ και το κάτω πρόσημο στη δεύτερη γραμμή των τιμών της γωνίας θ.
- Η αντιστοιχία των μοιρών της γωνίας θ σε ακτίνια είναι:

$$0^o \leftrightarrow 0 \qquad 30^o \leftrightarrow \frac{\pi}{6} \qquad 45^o \leftrightarrow \frac{\pi}{4} \qquad 60^o \leftrightarrow \frac{\pi}{3} \qquad 90^o \leftrightarrow \frac{\pi}{2}$$

και

$$180^o \leftrightarrow \pi \qquad 150^o \leftrightarrow \frac{5\pi}{6} \qquad 135^o \leftrightarrow \frac{3\pi}{4} \qquad 120^o \leftrightarrow \frac{2\pi}{3} \qquad 270^o \leftrightarrow \frac{3\pi}{2}$$

Τυπολόγιο τριγωνομετρικών σχέσεων

$$\eta\mu(\theta_1+\theta_2)=\eta\mu\theta_1\sigma\upsilon\nu\theta_2+\sigma\upsilon\nu\theta_1\eta\mu\theta_2\ ,\quad \eta\mu(\theta_1-\theta_2)=\eta\mu\theta_1\sigma\upsilon\nu\theta_2-\sigma\upsilon\nu\theta_1\eta\mu\theta_2$$

$$\sigma\upsilon\nu(\theta_1+\theta_2)=\sigma\upsilon\nu\theta_1\sigma\upsilon\nu\theta_2-\eta\mu\theta_1\eta\mu\theta_2\ ,\ \sigma\upsilon\nu(\theta_1-\theta_2)=\sigma\upsilon\nu\theta_1\sigma\upsilon\nu\theta_2+\eta\mu\theta_1\eta\mu\theta_2$$

$$\eta\mu 2\theta=2\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta\ ,\qquad \sigma\upsilon\nu 2\theta=\sigma\upsilon\nu^2\theta-\eta\mu^2\theta=2\sigma\upsilon\nu^2\theta-1=1-2\eta\mu^2\theta$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta_1+\sigma\upsilon\nu\theta_2=2\sigma\upsilon\nu\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\ ,$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta_1-\sigma\upsilon\nu\theta_2=-2\eta\mu\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\eta\mu\frac{\theta_1-\theta_2}{2}$$

$$\eta\mu\theta_1+\eta\mu\theta_2=2\eta\mu\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\ ,$$

$$\eta\mu\theta_1-\eta\mu\theta_2=2\eta\mu\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

$$\varepsilon\varphi(\theta_1+\theta_2)=\frac{\varepsilon\varphi\theta_1+\varepsilon\varphi\theta_2}{1-\varepsilon\varphi\theta_1\,\varepsilon\varphi\theta_2}\ ,\quad \varepsilon\varphi(\theta_1-\theta_2)=\frac{\varepsilon\varphi\theta_1-\varepsilon\varphi\theta_2}{1+\varepsilon\varphi\theta_1\,\varepsilon\varphi\theta_2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta_1\,\sigma\upsilon\nu\theta_2=\frac{1}{2}[\sigma\upsilon\nu(\theta_1+\theta_2)+\sigma\upsilon\nu(\theta_1-\theta_2)]$$

$$\eta\mu\theta_1\,\eta\mu\theta_2=\frac{1}{2}[\sigma\upsilon\nu(\theta_1-\theta_2)-\sigma\upsilon\nu(\theta_1+\theta_2)]$$

$$\eta\mu\theta_1\,\sigma\upsilon\nu\theta_2=\frac{1}{2}[\eta\mu(\theta_1+\theta_2)+\eta\mu(\theta_1-\theta_2)]$$

$$\eta\mu 3\theta=3\eta\mu\theta-4\eta\mu^3\theta\ ,\quad \sigma\upsilon\nu 3\theta=4\sigma\upsilon\nu^3\theta-3\sigma\upsilon\nu\theta$$

1^{o} Κεφαλαιο

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Λέγοντας *διαφορική εξίσωση* (θα σημειώνουμε στο εξής δ.ε.) εννοούμε μια σχέση μεταξύ μιας μεταβλητής x, μιας συνάρτησης y της x και ορισμένων (ή όλων) από τις παραγώγους της $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ ως προς x.
Π.χ. $y'+y=0$, $y''+3y'+2y=x^2$.

Η μεγαλύτερη παράγωγος που εμφανίζεται στην εξίσωση λέγεται *τάξη* της δ.ε.

Έτσι οι δ.ε. πρώτης τάξης είναι της μορφής

$$F\big(x,\, y(x),\, y'(x)\big)=0. \tag{1}$$

Λύση της δ.ε. (1) είναι μία συνάρτηση $\varphi\colon I\to\mathbb{R}$, $I\subset\mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$F\big(x,\, \varphi(x),\, \varphi'(x)\big)=0, \quad \forall\, x\in I.$$

Π.χ. η $\varphi(x)=e^x-1$, $x\in\mathbb{R}$ είναι λύση της δ.ε. $y'=y+1$.
Προσοχή! Λύση της δ.ε. είναι πάντοτε συνάρτηση και όχι αριθμός.

Γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε. (1) είναι μία μονοπαραμετρική οικογένεια συναρτήσεων $y=y(x,c)$, c αυθαίρετη σταθερή, που την επαληθεύει.

Ιδιάζουσα λύση της δ.ε. (1) είναι εκείνη που δεν προκύπτει από το γενικό ολοκλήρωμά της.

Γενική λύση της δ.ε. (1) είναι ο τύπος που δίνει *όλες* τις λύσεις της κι αυτό συνήθως συμβαίνει σε γραμμικές δ.ε.
Π.χ. η δ.ε. $y'=y+1$ έχει τη γενική λύση $y=ce^x-1$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή, και για $c=1$ προκύπτει η λύση $y=e^x-1$.

Αρχική συνθήκη για τη δ.ε. (1) είναι η σχέση $y(x_0)=y_0$.

Πρόβλημα της αρχικής τιμής ή *πρόβλημα του Cauchy* είναι

$$F\big(x,\, y(x),\, y'(x)\big)=0\,, \qquad y(x_0)=y_0$$

και σημαίνει να βρεθεί η λύση $\varphi(x)$ της δ.ε. (1) η οποία ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $\varphi(x_0)=y_0$.

Στο γενικό ολοκλήρωμα $y = y(x, c)$ της δ.ε. (1) θέτουμε τις τιμές $x=x_0$, $y=y_0$ και λύνουμε την εξίσωση $y_0 = y(x_0, c)$ ως προς c.

Έστω $c=c_0$ αυτή η λύση, τότε η λύση της δ.ε. (1) που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(x_0) = y_0$ είναι η $y = y(x, c_0)$.

Συνοριακό πρόβλημα είναι

$$F\big(x, y(x), y'(x)\big) = 0, \quad y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2, \quad x_1 < x_2.$$

Π.χ. το πρόβλημα

$$y' = y+1, \quad y(0) = 0$$

είναι πρόβλημα αρχικής τιμής, ενώ το πρόβλημα

$$y' = y+1, \quad y(0)=0, \quad y(1) = e-1$$

είναι συνοριακό πρόβλημα.

Αν δοθεί μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων

$$f(x, y, c) = 0, \quad c \text{ παράμετρος}$$

τότε, με απαλοιφή της c μεταξύ των σχέσεων

$$f(x, y, c) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0,$$

βρίσκουμε τη δ.ε. της οποίας αυτή είναι γενικό ολοκλήρωμα.
Π.χ. η μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων

$$y^2 = 4cx, \quad c \text{ παράμετρος}$$

είναι γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε., που προκύπτει με απαλοιφή της c, μεταξύ των σχέσεων

$$y^2 = 4cx, \quad 2yy' = 4c$$

δηλαδή της δ.ε. $2yy' = \dfrac{y^2}{x}$, $\quad x \neq 0$.

1. Διαφορικές εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών

Στην κατηγορία αυτή ανήκουν οι δ.ε. πρώτης τάξης

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

οι οποίες, με αλγεβρικές πράξεις, μπορούν να πάρουν τη μορφή

$$F_1(x)\,dx+F_2(y)\,dy = 0\,,$$

οπότε το γενικό ολοκλήρωμα προκύπτει με απ' ευθείας ολοκλήρωση

$$\int F_1(x)\,dx+\int F_2(y)\,dy = c\,,$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή.

♦ ***1.*** Να λυθεί η δ.ε. $e^x\,\eta\mu y\,dy = x\,\sigma\upsilon\nu y\,dx,\;\; y\neq k\pi,\;\; y\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\;\; k$ ακέραιος.

Η δ.ε. γράφεται

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x\,\sigma\upsilon\nu y}{e^x\,\eta\mu y}\quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=\frac{xe^{-x}}{\varepsilon\varphi y}\quad\Rightarrow\quad \varepsilon\varphi y\,dy = xe^{-x}\,dx$$

οπότε, με απ' ευθείας ολοκλήρωση, παίρνουμε

$$\int \varepsilon\varphi y\,dy = \int xe^{-x}\,dx - c\;\;\Rightarrow\;\;\int\frac{\eta\mu y}{\sigma\upsilon\nu y}\,dy = \int xe^{-x}\,dx-c$$

$$\Rightarrow\;\; -\int\frac{d\,\sigma\upsilon\nu y}{\sigma\upsilon\nu y} = \int xe^{-x}\,dx-c\;\;\Rightarrow\;\; -ln\,|\sigma\upsilon\nu y| = -(1+x)e^{-x}-c$$

$$\Rightarrow\;\; ln\,|\sigma\upsilon\nu y| = (1+x)e^{-x}+c,\quad c \text{ αυθαίρετη σταθερή}$$

και αυτό είναι το γενικό ολοκλήρωμα της δοσμένης δ.ε.

♦ ***2.*** Να λυθεί η δ.ε. $\varepsilon\varphi x\,\eta\mu^2 y+\sigma\upsilon\nu^2 x\,\sigma\varphi y\cdot y' = 0.$

Η δ.ε. γράφεται $\varepsilon\varphi x\,\eta\mu^2 y\,dx+\sigma\upsilon\nu^2 x\,\sigma\varphi y\,dy = 0$ ή ακόμη

$$\frac{\varepsilon\varphi x}{\sigma\upsilon\nu^2 \mathrm{x}}\,dx+\frac{\sigma\varphi y}{\eta\mu^2 y}\,dy = 0\;\;,$$

και ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$\int\frac{\varepsilon\varphi x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx+\int\frac{\sigma\varphi y}{\eta\mu^2 y}\,dy = c_0\;\;\Rightarrow\;\;\int\varepsilon\varphi x\,d\,\varepsilon\varphi x-\int\sigma\varphi y\,d\,\sigma\varphi \mathrm{y} = c_0$$

$$\Rightarrow\;\;\frac{\varepsilon\varphi^2 x}{2}-\frac{\sigma\varphi^2 y}{2} = c_0\;\;\Rightarrow\;\;\varepsilon\varphi^2 x = \sigma\varphi^2 y+c,$$

όπου $c=2c_0$ είναι αυθαίρετη σταθερή, το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε.

♦ **3.** Να λυθεί η δ.ε. $\theta(1+\varrho^2)\,d\theta+\varrho(1+\theta^2)\,d\varrho=0.$

Η δ.ε. γράφεται

$$\varrho(1+\theta^2)\,d\varrho=-\theta(1+\varrho^2)\,d\theta \;\Rightarrow\; \frac{\varrho d\varrho}{1+\varrho^2}=-\frac{\theta d\theta}{1+\theta^2}$$

και με ολοκλήρωση παίρνουμε

$$\int\frac{\varrho d\varrho}{1+\varrho^2}=-\int\frac{\theta d\theta}{1+\theta^2}+\frac{1}{2}\ln|c_0| \;\Rightarrow \frac{1}{2}\ln(1+\varrho^2)=-\frac{1}{2}\ln(1+\theta^2)+\frac{1}{2}\ln|c_0|$$

$$\Rightarrow\; \ln(1+\varrho^2)=\ln\frac{|c_0|}{1+\theta^2} \;\Rightarrow\; 1+\varrho^2=\frac{|c_0|}{1+\theta^2} \;\Rightarrow\; (1+\varrho^2)(1+\theta^2)=c\,,$$

όπου $c=\pm c_0$ είναι αυθαίρετη σταθερή, το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε.

Λόγω της μορφής των ολοκληρωμάτων επιλέξαμε, αντί της σταθερής c_0 της ολοκλήρωσης, την επίσης σταθερή $\frac{1}{2}\ln|c_0|$.

♦ **4.** Να βρεθεί η λύση της δ.ε. $(1+x^3)dy-x^2y\,dx=0,$ που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(1)=2.$

Διαιρούμε και τα δύο μέλη της δ.ε. με $(1+x^3)y,$ οπότε έχουμε

$$\frac{dy}{y}=\frac{x^2}{1+x^3}dx \;\Rightarrow\; \int\frac{dy}{y}=\int\frac{x^2}{1+x^3}dx+\ln|c_0|\,,\quad 1+x^3\neq 0\,,\; y\neq 0$$

$$\Rightarrow\; \ln|y|=\frac{1}{3}\ln|1+x^3|+\ln|c_0|$$

$$\Rightarrow\; \ln|y|^3=\ln|1+x^3|+\ln|c_0|^3$$

$$\Rightarrow\; \ln|y|^3=\ln|1+x^3|\,|c_0|^3 \Rightarrow y^3=(1+x^3)c\;,$$

όπου $c=(\pm c_0)^3$ *είν*αι αυθαίρετη σταθερή.

Από την αρχική συνθήκη $y(1)=2$ παίρνουμε

$$2^3=(1+1^3)\cdot c \;\Rightarrow\; 8=2c \;\Rightarrow\; c=4$$

οπότε η ζητούμενη λύση της δ.ε. είναι η

$$y^3=4(1+x^3).$$

♦ **5.** Να βρεθεί η λύση της δ.ε. $\frac{dy}{dx}=e^{x+y}$ που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(0)=0.$

Η δ.ε. γράφεται

$$\frac{dy}{dx}=e^x\cdot e^y \;\Rightarrow\; e^{-y}dy=e^x dx$$

και με ολοκλήρωση παίρνουμε

$$\int e^{-y}\,dy = \int e^{x}\,dx + c \quad \Rightarrow \quad -e^{-y} = e^{x} + c\,,$$

c, αυθ. σταθερή, το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε.

Από την αρχική συνθήκη $y(0) = 0$ έχουμε

$$-e^{-0} = e^{0} + c \quad \Rightarrow \quad c = -2$$

και η ζητούμενη λύση της δ.ε. είναι η

$$e^{-y} = 2 - e^{x}.$$

♦ ***6.*** Να βρεθεί η συνάρτηση $y = y(x)$ που επαληθεύει την εξίσωση

$$x\int_0^x y(t)\,dt - (x+1)\int_0^x t\,y(t)\,dt = 0\,. \tag{1}$$

Παραγωγίζουμε την (1) ως προς x και έχουμε

$$\int_0^x y(t)\,dt + xy(x) - \int_0^x y(t)\,dt - (x+1)\,xy(x) = 0\,. \tag{2}$$

Παραγωγίζουμε πάλι την (2) ως προς x και παίρνουμε

$$y + y + xy' - xy - 2xy - x^2y' - y - xy' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1-3x}{x^2}\,y, \qquad x \neq 0\,. \tag{3}$$

Η (3) έχει την προφανή λύση $y(x) \equiv 0$ που επαληθεύει και την (1).
Για $y \neq 0$ η (3) δίνει

$$\frac{dy}{y} = \frac{1-3x}{x^2}\,dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{1-3x}{x^2}\,dx - \ln|c_0|$$

$$\Rightarrow \quad \ln|y| = -x^{-1} - 3\ln|x| - \ln|c_0|$$

$$\Rightarrow \quad \ln|c_0| + \ln|y| + \ln|x|^3 = -\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \ln|c_0\,yx^3| = -\frac{1}{x} \Rightarrow |c_0\,yx^3| = e^{-\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow \quad y = cx^{-3}\,e^{-\frac{1}{x}}\,,$$

όπου $c = \pm c_0^{-1}$ αυθαίρετη σταθερή, που επαληθεύει την εξίσωση (1).

2. Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις

Στην κατηγορία αυτή ανήκουν οι δ.ε. πρώτης τάξης

$$P(x, y)\, dx+Q(x, y)\, dy = 0$$

στις οποίες οι συναρτήσεις $P(x, y), Q(x, y)$ είναι ομογενείς *του ίδιου βαθμού* ομογενείας δηλαδή όταν ισχύουν οι σχέσεις

$$P(tx, ty) = t^m P(x, y), \quad Q(tx, ty) = t^m Q(x, y)\,, \qquad t>0.$$

Οι δ.ε. αυτής της μορφής μπορούν να πάρουν τη μορφή

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right) \quad \left(ή \;\; \frac{dx}{dy} = F_0\left(\frac{x}{y}\right)\right).$$

Με την αλλαγή της εξαρτημένης μεταβλητής

$$y(x) = xz(x), \quad \text{οπότε} \quad y' = z+xz'\,,$$

καταλήγουμε στη δ.ε. χωριζομένων μεταβλητών

$$\frac{dz}{F(z)-z} = \frac{dx}{x}\,, \quad x\neq 0\,, \quad F(z)\neq z$$

απ' όπου με ολοκλήρωση παίρνουμε το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε.

$$\int \frac{dz}{F(z)-z} = \int \frac{dx}{x} + c\,,$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή.

♦ ***1.*** Να λυθεί η δ.ε. $y^2 dx = (xy - x^2)\, dy$.

Η δ.ε. γράφεται

$$y^2 = (xy-x^2)\frac{dy}{dx} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy-x^2}$$

και φαίνεται ότι είναι ομογενής ως προς x, y.

Κάνουμε την αλλαγή της εξαρτημένης μεταβλητής

$$y(x) = xz(x)\,, \quad \text{οπότε} \quad y' = z+xz'$$

και η τελευταία δ.ε. γίνεται

$$z+x\frac{dz}{dx} = \frac{z^2}{z-1}\,, \qquad z\neq 1$$

$$\Rightarrow\ x\frac{dz}{dx}=\frac{z^2-z^2+z}{z-1}\ \Rightarrow\ x\frac{dz}{dx}=\frac{z}{z-1}\ \Rightarrow\ \frac{z-1}{z}\,dz=\frac{dx}{x},\qquad x\neq 0.$$

Με ολοκλήρωση παίρνουμε

$$\int\left(1-\frac{1}{z}\right)dz=\int\frac{dx}{x}+ln\,|c_0|\quad\Rightarrow\quad z-ln\,|z|=ln\,|x|+ln\,|c_0|$$

$$\Rightarrow\ z=ln\,|z|\cdot|x|\cdot|c_0|\ \Rightarrow\ |zxc_0|=e^z\ \Rightarrow\ czx=e^z\,,\quad c=\pm c_0\,,$$

$$\Rightarrow\ c\,\frac{y}{x}\,x=e^{\frac{y}{x}}\ \Rightarrow\ cy=e^{\frac{y}{x}}\ ,\quad x\neq 0,$$

c αυθαίρετη σταθερή, το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε.

♦ **2.** Να λυθεί η δ.ε. $\dfrac{y}{x}+\sqrt{1+\dfrac{y^2}{x^2}}=\dfrac{dy}{dx}$.

Θέτουμε $y(x)=xz(x)$, οπότε $y'=z+xz'$, και η δ.ε. γίνεται

$$z+\sqrt{1+z^2}=z+x\frac{dz}{dx}\ \Rightarrow\ \sqrt{1+z^2}=x\frac{dz}{dx}\ \Rightarrow\ \frac{dx}{x}=\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}\quad,\quad x\neq 0.$$

Με ολοκλήρωση παίρνουμε

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}+ln\,|c_0|\ \Rightarrow\ ln\,|x|=ln\,|z+\sqrt{1+z^2}|+ln\,|c_0|$$

$$\Rightarrow\ x=c(z+\sqrt{1+z^2})\,,\quad c=\pm c_0\ \text{ αυθαίρετη σταθερή}$$

$$\Rightarrow\ x=c\left(\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\right)\Rightarrow\ x^2=c(y+\sqrt{x^2+y^2})$$

το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε.

♦ **3.** Να βρεθεί η λύση της δ.ε. $xy\dfrac{dy}{dx}+x^2+y^2=0$ που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(1)=1$.

Η δ.ε. γράφεται $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=0$, $x\neq 0$, $y\neq 0$.

Θέτουμε $y(x)=xz(x)$, οπότε $y'=z+xz'$, και η δ.ε. γίνεται

$$z+x\frac{dz}{dx}+\frac{1}{z}+z=0\ \Rightarrow\ x\frac{dz}{dx}+2z+\frac{1}{z}=0$$

$$\Rightarrow\ x\frac{dz}{dx}+\frac{2z^2+1}{z}=0\ \Rightarrow\ \frac{zdz}{2z^2+1}+\frac{dx}{x}=0.$$

Με ολοκλήρωση παίρνουμε

$$\int \frac{zdz}{2z^2+1} + \int \frac{dx}{x} = ln\,|c_0| \;\Rightarrow\; \frac{1}{4}\int \frac{4zdz}{2z^2+1} + ln\,|x| = ln\,|c_0|$$

$$\Rightarrow\; \frac{1}{4}\int \frac{d(2z^2+1)}{2z^2+1} + ln\,|x| = ln\,|c_0| \;\Rightarrow\; \frac{1}{4}\,ln\,|2z^2+1| = ln\,|c_0| - ln\,|x|$$

$$\Rightarrow\; ln\,|2z^2+1| = 4ln\left|\frac{c_0}{x}\right| \;\Rightarrow\; 2z^2+1 = \frac{c_0^4}{x^4}$$

$$\Rightarrow\; c = x^4(2z^2+1) \;\Rightarrow\; c = x^4\left(2\frac{y^2}{x^2}+1\right) \;\Rightarrow\; c = x^2(x^2+2y^2)\,,$$

όπου $c = c_0^4$ αυθαίρετη σταθερή, το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε.

Από την αρχική συνθήκη έχουμε

$$y(1) = 1 \;\Rightarrow\; c = 1^2(1^2+2\cdot 1^2) \;\Rightarrow\; c=3$$

οπότε η ζητούμενη λύση της δ.ε. είναι

$$x^4+2x^2y^2 = 3.$$

Δ.ε. της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1}{\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2}\right) \tag{1}$$

με $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1 \neq 0$ και $\gamma_1\neq 0$ ή $\gamma_2\neq 0$.

Λύνουμε το γραμμικό σύστημα

$$\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 = 0\,,$$
$$\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 = 0\,,$$

ως προς x και y.

Θέτουμε $x = X+h,\; y = Y+k,$ όπου h, k είναι η λύση αυτού του γραμμικού συστήματος. Τότε, επειδή $dx = dX,\; dy = dY$, η δ.ε. (1) γίνεται

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{\alpha_1 X+\beta_1 Y}{\alpha_2 X+\beta_2 Y}\right) \tag{2}$$

που είναι ομογενής δ.ε.

Γεωμετρικά, η αντικατάσταση $x = X+h,\; y = Y+k$ σημαίνει ότι μελετάμε τη δ.ε. στο νέο σύστημα συντεταγμένων $O(h, k)XY$.

Στην περίπτωση που είναι $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1 = 0$ τότε κάνουμε την αντικατάσταση $\alpha_1 x+\beta_1 y = z,$ οπότε είναι $\alpha_2 x+\beta_2 y = \lambda z$ όπου $\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\beta_1}$.

♦ ***4.*** Να λυθεί η δ.ε. $(2x+3y+1)dx+(3x+4y+1)dy = 0.$

Εδώ είναι $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1 = 2\cdot4-3\cdot3 = -1 \neq 0$ και το γραμμικό σύστημα $2x+3y+1 = 0,\ 3x+4y+1 = 0$ έχει τη λύση $x=h=1,\ y=k=-1.$

Θέτουμε $x = Y+1,\ y = Y-1$ και η δ.ε. γίνεται

$$(2X+3Y)dX+(3X+4Y)dY = 0$$

που είναι ομογενής δ.ε.

Θέτουμε $Y=XZ$, οπότε $Y' = Z+XZ'$, και παίρνουμε

$$(2+6Z+4Z^2)dX+X(3+4Z)dZ = 0 \ \Rightarrow\ \frac{dX}{X}+\frac{3+4Z}{2+6Z+4Z^2}dZ = 0.$$

Με ολοκλήρωση βρίσκουμε

$$\int\frac{dX}{X}+\int\frac{4Z+3}{4Z^2+6Z+2}dZ = ln\,|c_0|$$

$$\Rightarrow\ ln\,|X|+\frac{1}{2}ln\,|4Z^2+6Z+2| = ln\,|c_0|$$

$$\Rightarrow 2ln\,|X|+ln\,|4Z^2+6Z+2| = 2ln\,|c_0|$$

$$\Rightarrow\ X^2(4Z^2+6Z+2) = c,\ \ \text{όπου}\ \ c=c_0^2\ \text{αυθαίρετη σταθερή},$$

$$\Rightarrow\ X^2\left(4\frac{Y^2}{X^2}+6\frac{Y}{X}+2\right)=c\ \Rightarrow\ (4Y^2+6YX+2X^2) = c$$

$$\Rightarrow\ [4(y+1)^2+6(x-1)\,(y+1)+2(x-1)^2] = c$$

$$\Rightarrow\ 2x^2+4y^2+2x+2y+6xy = c,$$

που είναι το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε.

♦ **5.** Να λυθεί η δ.ε. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+2y-3}{2x+y-3}$ (1).

Εδώ είναι $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1 = 1\cdot1-2\cdot2 = -3\neq0$ και το γραμμικό σύστημα $x+2y-3 = 0,\ 2x+y-3 = 0$ έχει τη λύση $x=h=1,\ y=k=1.$

Θέτουμε $x = X+1,\ y = Y+1$ και η δ.ε. γίνεται

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X+2Y}{2X+Y} \tag{2}$$

που είναι ομογενής δ.ε.

Θέτουμε $Y = XZ,$ οπότε $Y' = Z+XZ'$, και η δ.ε. (2) γίνεται

$$Z+X\frac{dZ}{dX}=\frac{1+2Z}{2+Z} \quad \Rightarrow \quad \frac{dX}{X}=\frac{2+Z}{1-Z^2}\,dZ\,.$$

Με ολοκλήρωση παίρνουμε

$$\int \frac{dX}{X}=\int \frac{2+Z}{1-Z^2}\,dZ-ln\,|c_0| \quad \Rightarrow \quad ln\,|Xc_0|=\int\left[\frac{1}{2(1+Z)}+\frac{3}{2(1-Z)}\right]dZ$$

$$\Rightarrow \ 2ln\,|Xc_o| = ln\,|1+Z|-ln\,|1-Z|^3 \ \Rightarrow \ |Xc_0|^2=\left|\frac{1+Z}{(1-Z)^3}\right|$$

$$\Rightarrow \ X^2c=\frac{1+Z}{(1-Z)^3},$$

όπου $c=\pm c_0^2$ είναι αυθαίρετη σταθερή.

Θέτουμε $Z=\dfrac{Y}{X}$ και έχουμε

$$X+Y=c(X-Y)^3 \qquad \text{ή} \qquad x-1+y-1=c(x-1-y+1)^3 \ \Rightarrow \ x+y-2=c(x-y)^3$$

που είναι το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε.

♦ ***6.*** Να λυθεί η δ.ε. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{x-2y+9}{3x-6y+19}=0.$

Εδώ είναι $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1=1\cdot(-6)-3\cdot(-2)=0,$ οπότε θέτουμε

$$x-2y=z$$

και έχουμε $dx-2dy=dz \ \Rightarrow \ \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{dz}{dx}+\dfrac{1}{2}.$

Αντικαθιστώντας στη δ.ε. παίρνουμε

$$-\frac{1}{2}\frac{dz}{dx}+\frac{1}{2}+\frac{z+9}{3z+19}=0 \ \Rightarrow \ (3z+19)dz-(z+1)dx=0 \ \Rightarrow \ dx=\frac{3z+19}{z+1}\,dz.$$

Με ολοκλήρωση βρίσκουμε

$$x=\int\frac{3z+19}{z+1}\,dz+c=\int\left(3+\frac{16}{z+1}\right)dz+c$$

$$\Rightarrow \ x=3z+16ln\,|z+1|+c \ \Rightarrow \ x=3(x-2y)+16ln\,|x-2y+1|+c$$

$$\Rightarrow \ x-3y+8ln\,|x-2y+1|=-c,$$

όπου c αυθαίρετη σταθερή, το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε.

3. *Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Διαφορικές εξισώσεις του Bernoulli και του Riccati*

Οι γραμμικές δ.ε. πρώτης τάξης είναι της μορφής

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y = Q(x) \tag{1}$$

και η γενική λύση τους δίνεται από τον τύπο

$$y(x) = e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx+c\right],$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή.

Η λύση της δ.ε. (1) που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη

$$y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

δίνεται από τον τύπο

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} P(s)\,ds}\left[\int_{x_0}^{x} Q(s)\,e^{\int_{x_0}^{s} P(t)\,dt}\,ds+y_0\right].$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: *Αν οι συναρτήσεις $P(x)$, $Q(x)$ είναι συνεχείς στο ανοιχτό διάστημα (α, β), τότε, για $x_0\in(\alpha, \beta)$ και $y_0\in\mathbb{R}$, υπάρχει μοναδική λύση της δ.ε. (1) που επαληθεύει την αρχική συνθήκη $y(x_0)=y_0$ και ορίζεται σ' ολόκληρο το διάστημα (α, β).*

Οι δ.ε. του *Bernoulli* είναι της μορφής

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y = Q(x)y^n, \quad n\neq 0, 1$$

και με την αντικατάσταση $\upsilon(x) = y^{-n+1}(x)$, οπότε

$$\frac{1}{-n+1}\frac{d\upsilon}{dx} = y^{-n}\frac{dy}{dx},$$

ανάγονται στη γραμμική δ.ε.

$$\frac{d\upsilon}{dx}+(-n+1)\,P(x)\upsilon = (-n+1)\,Q(x).$$

Οι δ.ε. του *Riccati* είναι της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2+Q(x)y+R(x)$$

και με την αντικατάσταση

$$y(x) = u(x) + \frac{1}{z(x)},$$

όπου $u(x)$ είναι *γνωστή λύση της δ.ε.*, ανάγονται στη γραμμική δ.ε.

$$\frac{dz}{dx} + (2P(x)\,u(x) + Q(x))\,z = -P(x).$$

♦ ***1.*** Να λυθεί η δ.ε. $y' + x^2 y = x^2$.

Η δ.ε. είναι γραμμική με $P(x) = x^2$, $Q(x) = x^2$, οπότε η γενική λύση της δίνεται από τον τύπο

$$y = e^{-\int x^2 dx}\left[\int x^2 e^{\int x^2 dx}\, dx + c\right],$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή.

Υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα

$$e^{-\int x^2 dx} = e^{-\frac{x^3}{3}}$$

$$\int x^2 e^{\int x^2 dx}\, dx = \int x^2\, \mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}}\, dx = \int e^{\frac{x^3}{3}}\, d\left(\frac{x^3}{3}\right) = e^{\frac{x^3}{3}}$$

και αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στον τύπο της γενικής λύσης παίρνουμε

$$y = e^{-\frac{x^3}{3}}\left(e^{\frac{x^3}{3}} + c\right) = 1 + ce^{-\frac{x^3}{3}},$$

όπου c αυθαίρετη σταθερή.

♦ ***2.*** Να λυθεί η δ.ε. $\dfrac{dy}{dx} = y\,\varepsilon\varphi x + \sigma\upsilon\nu x,\quad x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Η δ.ε. γράφεται $\dfrac{dy}{dx} - \varepsilon\varphi x \cdot y = \sigma\upsilon\nu x$ και είναι γραμμική με $P(x) = -\varepsilon\varphi x$, $Q(x) = \sigma\upsilon\nu x$.

Από τον τύπο της γενικής λύσης έχουμε

$$y = e^{\int \varepsilon\varphi x\, dx}\left[\int \sigma\upsilon\nu x\, e^{-\int \varepsilon\varphi x\, dx}\, dx + c\right], \qquad c \text{ αυθαίρετη σταθερή.}$$

Υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα

$$e^{\int \varepsilon\varphi x\, dx} = e^{\int \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} dx} = e^{-\int \frac{d\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x}} = e^{-\ln \sigma\upsilon\nu x} = \sigma\upsilon\nu^{-1} x,$$

$$\int \sigma\upsilon\nu x\, e^{-\int \varepsilon\varphi x\, dx} dx = \int \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu x\, dx = \int \sigma\upsilon\nu^2 x\, dx = \left[\frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu x}{2} + \frac{1}{2} x \right]$$

και από τον τύπο της γενικής λύσης παίρνουμε

$$y = \sigma\upsilon\nu^{-1} x \left[\frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu x}{2} + \frac{1}{2} x + c \right]$$

ή ακόμη

$$2y = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu^{-1} x\, (x + c_1), \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2}\ ,\ +\frac{\pi}{2} \right)$$

όπου $c_1 = 2c$ αυθαίρετη σταθερή.

♦ ***3.*** Να βρεθεί η λύση της δ.ε. $dy = 3ydx + xe^{3x}\, dx$ που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(0) = 1$.

Η δ.ε. γράφεται $\dfrac{dy}{dx} - 3y = xe^{3x}$ και είναι γραμμική δ.ε. με $P(x) = -3$, $Q(x) = xe^{3x}$.

Από τον τύπο της γενικής λύσης έχουμε

$$y = e^{\int 3dx} \left[\int xe^{3x}\, e^{-\int 3dx} dx + c \right] =$$

$$= e^{3x} \left[\int xe^{3x}\, e^{-3x}\, dx + c \right] = e^{3x} \left[\int x dx + c \right] = e^{3x} \left(\frac{x^2}{2} + c \right),$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή.

Από την αρχική συνθήκη $y(0) = 1$ προκύπτει

$$1 = e^{3 \cdot 0} \left(\frac{0^2}{2} + c \right) \;\Rightarrow\; c = 1$$

οπότε η ζητούμενη λύση είναι

$$y = e^{3x} \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right).$$

♦ ***4.*** Να λυθεί η δ.ε. $2xyy' + x^2 - y^2 = -1 \quad (1)$.

Η δ.ε. γράφεται $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{2x} y = -\dfrac{x^2+1}{2x} y^{-1}$ και είναι δ.ε. του *Bernoulli* με $n = -1$.

Θέτουμε $\upsilon = y^{-1(-1)+1} = y^2$, οπότε $\dfrac{1}{2} \dfrac{d\upsilon}{dx} = y \dfrac{dy}{dx}$, και η δ.ε. γίνεται η γραμμική δ.ε.

$$\frac{1}{2}\frac{dv}{dx}-\frac{1}{2x}v=-\frac{x^2+1}{2x} \;\Rightarrow\; \frac{dv}{dx}-\frac{1}{x}v=-\frac{x^2+1}{x}\,. \qquad (2)$$

Η δ.ε. (2) είναι γραμμική με $P(x)=-\frac{1}{x},\; Q(x)=-\frac{x^2+1}{x}$.

Από τον τύπο της γενικής λύσης έχουμε (για $x>0$)

$$v = e^{\int\frac{dx}{x}}\left[-\int\frac{x^2+1}{x}e^{-\int\frac{dx}{x}}dx+c\right]=e^{lnx}\left[-\int\frac{x^2+1}{x}e^{-lnx}dx+c\right]=$$

$$=x\left[-\int\frac{x^2+1}{x}\cdot\frac{1}{x}dx+c\right]=x\left[-\int\frac{x^2+1}{x^2}dx+c\right]=$$

$$=x\left[-\int\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx+c\right]=x\left[-\int dx-\int\frac{dx}{x^2}+c\right]=$$

$$=x\left(-x+\frac{1}{x}+c\right)=-x^2+1+cx\,,$$

όπου c αυθαίρετη σταθερή.

Επομένως, επειδή $v=y^2$, η γενική λύση της δ.ε. (1) είναι

$$y^2=-x^2+1+cx\,, \qquad c \text{ αυθαίρετη σταθερή.}$$

♦ **5.** Να λυθεί η δ.ε. $y^3y'=y^4\varepsilon\varphi x+\eta\mu 2x,\quad x\in\left(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right)$.

Η δ.ε. είναι του *Bernoulli* με $n=-3$.
Θέτουμε $v=y^{-(-3)+1}=y^4$, οπότε

$$4y^3\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx} \;\Rightarrow\; \frac{1}{4}\frac{dv}{dx}=y^3\frac{dy}{dx},$$

και η δ.ε. γίνεται η γραμμική δ.ε.

$$\frac{1}{4}\frac{dv}{dx}-\varepsilon\varphi x\cdot v=\eta\mu 2x \;\Rightarrow\; \frac{dv}{dx}-4\varepsilon\varphi x\cdot v=4\eta\mu 2x\,,$$

με $P(x)=-4\varepsilon\varphi x,\quad Q(x)=4\eta\mu 2x.$

Από τον τύπο της γενικής λύσης έχουμε

$$v=e^{\int 4\varepsilon\varphi x\,dx}\left[\int 4\eta\mu 2x\,e^{-\int 4\varepsilon\varphi x\,dx}dx+c\right], \qquad c \text{ αυθαίρετη σταθερή.}$$

Υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα

$$e^{\int 4\varepsilon\varphi x\, dx} = e^{4\int \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} dx} = e^{-4\int \frac{d\,\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x}} = e^{-4\ln\sigma\upsilon\nu x} = \sigma\upsilon\nu^{-4}x\,,$$

$$\int 4\eta\mu 2x\, e^{-\int 4\varepsilon\varphi x\, dx} dx = 4\int \eta\mu 2x\ \sigma\upsilon\nu^4 x\, dx = 4\int 2\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu^4 x\, dx =$$

$$= 8\int \sigma\upsilon\nu^5 x\cdot\eta\mu x\, dx = -8\int \sigma\upsilon\nu^5 x\, d\,\sigma\upsilon\nu x = -8\,\frac{\sigma\upsilon\nu^6 x}{6} =$$

$$= -\frac{4}{3}\,\sigma\upsilon\nu^6 x\ ,$$

και αντικαθιστώντας στον τύπο της γενικής λύσης βρίσκουμε

$$v = -\frac{4}{3}\,\sigma\upsilon\nu^2 x + c\,\sigma\upsilon\nu^{-4}x\,, \qquad x\in\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$$

και η γενική λύση της δοσμένης δ.ε. είναι

$$y^4 = -\frac{4}{3}\,\sigma\upsilon\nu^2 x + c\,\sigma\upsilon\nu^{-4}x, \qquad x\in\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή.

♦ ***6.*** Να λυθεί η δ.ε. $y' + y^2\eta\mu x = 2\,\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, $x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, k ακέραιος. (1)

Η δ.ε. (1) είναι του *Riccati* και για να τη λύσουμε χρειάζεται μια λύση της. Παρατηρούμε εμπειρικά (ή μας δίνεται) ότι η συνάρτηση $u(x) = \sigma\upsilon\nu^{-1}x$ είναι λύση της.

Με την αντικατάσταση $y(x) = u(x) + \dfrac{1}{z(x)}$ αναγόμαστε στην γραμμική δ.ε. πρώτης τάξης

$$\frac{dz}{dx} - 2\,\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\,z = \eta\mu x$$

της οποίας, όπως στα προηγούμενα προβλήματα, βρίσκουμε τη γενική λύση

$$z(x) = \frac{3c - \sigma\upsilon\nu^3 x}{3\sigma\upsilon\nu^2 x}, \qquad c \text{ αυθαίρετη σταθερή.}$$

Επομένως, η γενική λύση της δοσμένης δ.ε. είναι

$$y = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} + \frac{3\sigma\upsilon\nu^2 x}{3c - \sigma\upsilon\nu^3 x}.$$

Σημείωση: Για $c = \infty$ προκύπτει η λύση $u(x) = \sigma\upsilon\nu^{-1}x$.

♦ ***7.*** Να λυθεί η δ.ε. $\frac{dy}{dx} - (x-1)y^2+(2x-1)y = x$, αν γνωρίζουμε ότι μία λύση της είναι η $u(x) = 1$.

Με την αντικατάσταση $y = 1 + \frac{1}{z}$, οπότε $y' = -\frac{z'}{z^2}$, η δ.ε. γίνεται η γραμμική δ.ε.

$$\frac{dz}{dx} - z = 1-x\,.$$

Η γενική λύση αυτής της γραμμικής δ.ε. είναι

$$z = \mathrm{e}^{\int dx}\left[\int (1-x)e^{-\int dx}\,dx+c\right] = e^x\left[\int (1-x)e^{-x}\,dx+c\right] =$$

$$= e^x\left[\int e^{-x}\,dx - \int xe^{-x}\,dx+c\right] = e^x\left[-e^{-x}+\int xde^{-x}+c\right] =$$

$$= e^x\left[-e^{-x}+xe^{-x}-\int \mathrm{e}^{-x}\,dx+c\right] = e^x\,[-e^{-x}+xe^{-x}+e^{-x}+c] =$$

$$= e^x\,[xe^{-x}+c] = x+ce^x\,, \quad c \text{ αυθαίρετη σταθερή.}$$

Επομένως, η γενική λύση της δοσμένης δ.ε. είναι

$$y = 1+\frac{1}{z} = 1+\frac{1}{x+ce^x}\,, \quad c \text{ αυθαίρετη σταθερή.}$$

Σημείωση: Για $c = \infty$ προκύπτει η λύση $u(x) = 1$.

♦ ***8.*** Να βρεθούν οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $y(x)$ που επαληθεύουν την εξίσωση

$$\int_\alpha^x t\,y(t)\,dt = x^2+y(x)\,, \quad \alpha \text{ σταθερή .} \tag{1}$$

Παραγωγίζουμε την (1) ως προς x και έχουμε

$$xy(x) = 2x+y'(x)\,. \tag{2}$$

Η (2) γράφεται $y'-xy = -2x$ (3) και είναι γραμμική δ.ε.
Η γενική λύση της (3) είναι

$$y(x) = e^{\int xdx}\left[-\int 2xe^{-\int xdx}\,dx+c\right] = e^{\frac{x^2}{2}}\left[-\int 2xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx+c\right] =$$

$$= e^{\frac{x^2}{2}}\left[2\int de^{-\frac{x^2}{2}}+c\right] = e^{\frac{x^2}{2}}\,[2e^{-\frac{x^2}{2}}+c] = 2+ce^{\frac{x^2}{2}}\,, \quad c \text{ αυθ. σταθερή.}$$

Από την εξίσωση (1) έχουμε

$$\int_{\alpha}^{x} t\,(2+ce^{\frac{t^2}{2}})\,dt = x^2+ce^{\frac{x^2}{2}}+2\ ,$$

απ' όπου προκύπτει $c = -(\alpha^2+2)\,e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$.

Οι ζητούμενες λοιπόν συναρτήσεις είναι

$$y(x) = -(\alpha^2+2)\,e^{\frac{x^2-\alpha^2}{2}}+2.$$

♦ ***9.*** Να λυθεί η δ.ε. $(y+e^y-e^{-x})\,dx+(1+e^y)\,dy = 0$ (1), με την βοήθεια της αντικατάστασης $y+e^y = \omega$ (2).

Η δ.ε. (1) γράφεται $y+e^y-e^{-x}+(1+e^y)\,y' = 0$.

Από την (2), με παραγώγιση ως προς x, παίρνουμε

$$y'+y'e^y = \omega' \ \Rightarrow\ y' = \frac{\omega'}{1+e^y}\ . \tag{3}$$

Η (1), λόγω των (2) και (3), γράφεται

$$\omega-e^{-x}+\omega' = 0 \ \Rightarrow\ \frac{d\omega}{dx}+\omega = e^{-x} \tag{4}$$

και είναι γραμμική δ.ε. πρώτης τάξης.

Η γενική λύση της δ.ε. (4) είναι $\omega = ce^{-x}+xe^{-x}$, c αυθαίρετη σταθερή, οπότε οι λύσεις της δ.ε. (1) είναι

$$y+e^y = (c+x)e^{-x}.$$

4. Πλήρεις διαφορικές εξισώσεις – Ολοκληρωτικοί παράγοντες

Μια δ.ε. $P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy = 0$ (1) λέμε πως είναι *πλήρης δ.ε.*, αν υπάρχει συνάρτηση $u(x, y)$ τέτοια ώστε

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) \tag{2}$$

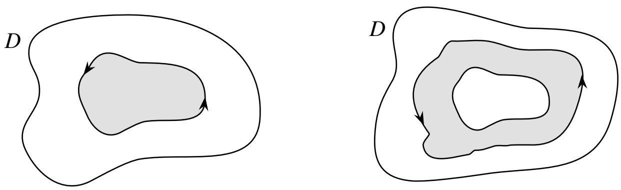
οπότε έχουμε

$$du = P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy.$$

Σ' αυτήν την περίπτωση το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε. (1) είναι

$$u(x, y) = c,\quad c \text{ αυθαίρετη σταθερή.}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Απλώς συναφής *τόπος* $D \subset \mathbb{R}^2$ *είναι εκείνος για τον οποίο κάθε κλειστή καμπύλη του* D *περικλείει μόνον σημεία του* D.



απλώς συναφής τόπος   μη απλώς συναφής τόπος

Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις P, Q είναι κλάσης C^1 (δηλαδή συνεχείς, με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης ως προς x και y) σ' έναν απλώς συναφή τόπο $D \subset \mathbb{R}^2$.

ΘΕΩΡΗΜΑ: *Η δ.ε. (1) είναι πλήρης αν και μόνον αν ισχύει*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \ . \tag{3}$$

Το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε. (1) είναι τότε

$$\int_{\alpha}^{x} P(t, y)\, dt + \int Q(\alpha, y)\, dy = c\,, \quad c \text{ αυθαίρετη σταθερή,}$$

όπου α *είναι κατάλληλη σταθερή.*

Το σημείο α εκλέγεται έτσι ώστε ο "ασαφής" δρόμος

$$(\alpha, \cdot) \to (\alpha, y) \to (x, y)$$

(με παραλλήλους προς τους άξονες Oy και Ox) να περιέχεται στον απλώς συναφή τόπο D, όπου οι συναρτήσεις P, Q είναι κλάσης C^1.

Χρήση επικαμπυλίου ολοκληρώματος

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε επικαμπύλιο ολοκλήρωμα για την επίλυση πλήρους δ.ε.

Είναι γνωστό, από τον ολοκληρωτικό λογισμό, πως το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I = \int_{s} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy\,,$$

όπου s είναι μία καμπύλη που ενώνει τα σημεία (x_0, y_0) και (x, y), είναι ανεξάρτητο του δρόμου s, αν και μόνο αν ισχύει η σχέση (3).

Τότε, το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε. (1) είναι

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y)\, dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, t)\, dt = c\,, \quad c \text{ αυθαίρετη σταθερή,}$$

με την προϋπόθεση πως οι συναρτήσεις P, Q είναι κλάσης C^1 στον απλώς συναφή τόπο $D \subset \mathbb{R}^2$ και η περίμετρος του τετραγώνου με κορυφές τα σημεία $(x_0, y_0)–(x, y_0)–(x, y)–(x_0, y)$ ανήκει στο D.

♦ ***1.*** Να λυθεί η δ.ε. $(2x–y+1)\, dx+(2y–x–1)\, dy = 0$.

Εδώ είναι $P(x, y) = 2x–y+1$, $Q(x, y) = 2y–x–1$ και είναι κλάσης C^1 στον τόπο $D = \mathbb{R}^2$.

Έχουμε

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 = \frac{\partial Q}{\partial x}\,,$$

οπότε η δ.ε. είναι πλήρης.

Σύμφωνα με το θεώρημα το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε. είναι

$$\int_0^x (2t–y+1)\, dt + \int (2y–1)\, dy = c$$

$$\Rightarrow\ x^2–yx+x+y^2–y = c, \quad c \text{ αυθαίρετη σταθερή.}$$

♦ ***2.*** Να λυθεί η δ.ε. $3x(xy–2)dx+(x^3+2y)dy = 0$. (1)

Έχουμε $P = 3x(xy–2)$, $Q = x^3+2y$, που είναι κλάσης C^1 στον τόπο $D = \mathbb{R}^2$, και

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 = \frac{\partial Q}{\partial x}\ . \qquad (3)$$

Άρα, η δ.ε. (1) είναι πλήρης.

Το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε. (1) θα είναι της μορφής

$$u(x, y) = c \quad c \text{ αυθαίρετη σταθερή,}$$

όπου
$$\frac{\partial u}{\partial x} = P = 3x^2y–6x\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q = x^3+2y\,. \qquad (2)$$

Ολοκληρώνοντας τη δεύτερη εξίσωση των (2), ως προς y, παίρνουμε

$$u(x, y) = \int_0^y (x^3+2t)\, dt+g(x) \ \Rightarrow\ u(x, y) = x^3y+y^2+g(x)\,,$$

όπου $g(x)$ προσδιοριστέα συνάρτηση του x.

Παραγωγίζουμε αυτήν τη σχέση ως προς x και λόγω της πρώτης εξίσωσης των (2) έχουμε

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y+g'(x) = 3x^2y-6x \;\;\Rightarrow\;\; g'(x) = -6x \;\;\Rightarrow\;\; g(x) = -3x^2 \,,$$

(τη σταθερή της ολοκλήρωση την θέτουμε μηδέν).

Το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε. είναι λοιπόν

$$x^3y+y^2-3x^2 = c \,,$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή.

<u>*Β′ τρόπος*</u>

Αποδείχνεται όπως προηγουμένως πως η δ.ε. (1) είναι πλήρης στον τόπο $D=\mathbb{R}^2$. Μπορούμε λοιπόν να εκλέξουμε $\alpha=0$, οπότε το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε. (1) είναι

$$\int_0^y (3t^2y-6t)\,dt+\int 2y\,dy = c \,, \quad c \text{ αυθαίρετη σταθερή,}$$

στον "ασαφή" δρόμο $(0, \cdot) \to (0, y) \to (x, y)$.

Βρίσκουμε το γενικό ολοκλήρωμα $x^3y-3x^2+y^2 = c$.

<u>*Γ′ τρόπος*</u>

Αποδείχνεται όπως στον πρώτο τρόπο πως η δ.ε. (1) είναι πλήρης στον τόπο $D=\mathbb{R}^2$. Εκλέγουμε λοιπόν το σημείο $(0, 0)\in D=\mathbb{R}^2$ και παίρνουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στο δρόμο

$$s : (0, 0) \;\to\; (0, y) \;\to\; (x, y)$$

(παράλληλα προς τους άξονες Oy και Ox), που δίνει το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε. (1)

$$\int_0^x (3t^2y-6t)\,dt+\int_0^y 2t\,dt = c \,, \quad c \text{ αυθαίρετη σταθερή,}$$

$$\Rightarrow\; x^3y-3x^2+y^2 = c.$$

♦ ***3.*** Να λυθεί η δ.ε. $\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)\frac{dy}{dx} = 0 \,.$ (1)

Η δ.ε. (1) γράφεται $\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy = 0$ και εδώ είναι $P = 1+e^{\frac{x}{y}}$,

$Q = e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)$, που είναι κλάσης C^1 στον τόπο $D = \{(x, y) : y>0\} \subset \mathbb{R}^2$.

Έχουμε

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}\, e^{\frac{x}{y}} = \frac{\partial Q}{\partial x}\ ,$$

οπότε η δ.ε. (1) είναι πλήρης.

Σύμφωνα με το θεώρημα το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε. (1) είναι (παίρνουμε $\alpha=0$).

$$\int_0^x \left(1+e^{\frac{t}{y}}\right)dt + \int 1dy = c$$

$$\Rightarrow \int_0^x dt + \int_0^x e^{\frac{t}{y}}\, dt + \int dy = c$$

$$\Rightarrow x + \int_0^x y d e^{\frac{t}{y}} + y = c \ \Rightarrow\ x + ye^{\frac{x}{y}} - y + y = c$$

$$\Rightarrow x + ye^{\frac{x}{y}} = c\ ,\quad c \text{ αυθαίρετη σταθερή.}$$

Ολοκληρωτικοί παράγοντες

Θεωρούμε τη δ.ε.

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0 \tag{1}$$

και υποθέτουμε ότι ισχύει

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}\ .$$

Το ερώτημα που μπαίνει είναι: υπάρχει συνάρτηση $\mu(x, y)$ τέτοια ώστε η δ.ε.

$$\mu(x, y)\ P(x, y)\, dx + \mu(x, y)\, Q(x, y)\, dy = 0 \tag{2}$$

να είναι πλήρης δ.ε.;

Αν υπάρχει τέτοια συνάρτηση $\mu = \mu(x, y)$ λέγεται *ολοκληρωτικός παράγοντας* της δ.ε. (1).

Γνωρίζουμε ότι για να είναι η δ.ε (2) πλήρης πρέπει να ικανοποιείται η σχέση

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \quad P\frac{\partial\mu}{\partial y} - Q\frac{\partial\mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Υποθέτουμε ότι είναι $\mu = \mu(z)$, όπου $z = z(x, y)$ *γνωστή συνάρτηση των* x, y, οπότε έχουμε

$$P\frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} - Q\frac{d\mu}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\mu}{\mu} = \left[\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{P\dfrac{\partial z}{\partial y} - Q\dfrac{\partial z}{\partial x}}\right] dz.$$

Επομένως, αν είναι

$$\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{P\dfrac{\partial z}{\partial y} - Q\dfrac{\partial z}{\partial x}} = f(z)\,, \tag{3}$$

τότε έχουμε

$$\mu = \mu(z) = e^{\int f(z)\, dz}$$

(θέσαμε $c=1$ την σταθερή της ολοκλήρωσης).

♦ ***1.*** Με τη βοήθεια ολοκληρωτικού παράγοντα της μορφής $\mu = \mu(y)$ να λυθεί η δ.ε. $xy^3 dx+(x^2y^2-1)\, dy = 0$.

Εδώ είναι $P(x, y) = xy^3$, $Q(x, y) = x^2y^2-1$ και έχουμε

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3xy^2 \neq 2xy^2 = \frac{\partial Q}{\partial x}\ ,$$

οπότε η δ.ε. δεν είναι πλήρης.

Δίνεται ότι $z=y$, οπότε παίρνουμε

$$f(y) = \frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{P\dfrac{\partial z}{\partial y} - Q\dfrac{\partial z}{\partial x}} = \frac{2xy^2-3xy^2}{xy^3\cdot 1-(x^2y^2-1)\cdot 0} = \frac{-xy^2}{xy^3} = -\frac{1}{y}$$

και ο ολοκληρωτικός παράγοντας της δ.ε. είναι

$$\mu = e^{\int f(y)\,dy} = e^{-\int \frac{dy}{y}} = e^{-ln|y|} = |y|^{-1}.$$

Πολλαπλασιάζουμε τη δ.ε. με $\mu = \pm y^{-1}$ και αυτή γίνεται

$$\pm\left[\, xy^2dx+\left(x^2y-\frac{1}{y}\right)dy\right] = 0\,, \qquad y\neq 0$$

που είναι πλήρης δ.ε. στον απλώς συναφή τόπο

$$D = \{(x, y) : y > 0\} \quad \text{ή} \quad D = \{(x, y) : y < 0\}.$$

Εκλέγουμε $\alpha=0$ και το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε. είναι

$$\int_0^x ty^2dt+\int\left(-\frac{1}{y}\right)dy = ln\,|c_0|$$

$$\Rightarrow\ \frac{x^2y^2}{2} - ln\,|y| = ln\,|c_0| \quad \Rightarrow \quad c = y^{-2}\,e^{x^2y^2}\,,$$

όπου $c=\pm c_0$ είναι αυθαίρετη σταθερή.

♦ **2.** Να λυθεί η δ.ε. $(y^3+xy^2+y)\,dx+(x^3+x^2y+x)\,dy = 0,$ με τη βοήθεια ολοκληρωτικού παράγοντα της μορφής $\mu = \mu(xy)$.

Εδώ είναι $P(x, y) = y^3+xy^2+y,\ Q(x, y) = x^3+x^2y+x$ και έχουμε

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2+2xy+1 \neq 3x^2+2xy+1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

οπότε η δ.ε. δεν είναι πλήρης.

Δίνεται ότι $z = xy,$ οπότε παίρνουμε

$$f(xy) \;= \frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}}{P\dfrac{\partial z}{\partial y}-Q\dfrac{\partial z}{\partial x}} = \frac{(3x^2+2xy+1)-(3y^2+2xy+1)}{(y^3+xy^2+y)\cdot x-(x^3+x^2y+x)\cdot y} =$$

$$= \frac{3x^2-3y^2}{y^3x-x^3y} = -3\,\frac{y^2-x^2}{xy(y^2-x^2)} = -\frac{3}{xy}\,, \qquad xy\neq 0$$

και ο ολοκληρωτικός παράγοντας της δ.ε. είναι

$$\mu = e^{\int f(xy)\,d(xy)} = e^{-3\int \frac{d(xy)}{xy}} = e^{ln\,|xy|^{-3}} = |xy|^{-3}.$$

Πολλαπλασιάζουμε τη δ.ε. με $\mu = \pm\,(xy)^{-3}$ και αυτή γίνεται

$$\pm\left[\frac{y^3+xy^2+y}{x^3y^3}\,dx+\frac{x^3+x^2y+x}{x^3y^3}\,dy\right]=0\,,\qquad xy\neq 0$$

που είναι πλήρης δ.ε. στον απλώς συναφή τόπο

$$D_1=\{(x,y): x>0,\ y>0\}\,,\qquad D_3=\{(x,y): x<0,\ y<0\}\,,$$

$$D_2=\{(x,y): x>0,\ y<0\}\,,\qquad D_4=\{(x,y): x<0,\ y>0\}\,.$$

Εκλέγουμε $\alpha=1$ για τους τόπους D_1, D_2 (ή $\alpha=-1$ για τους τόπους D_3, D_4) και το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε. είναι

$$\int_1^x \frac{y^3+ty^2+y}{t^3y^3}\,dt+\int\frac{2+y}{y^3}\,dy=c_0$$

$$\Rightarrow\ \int_1^x \frac{d(t^{-2})}{-2}+\frac{1}{y}\int_1^x d\left(-\frac{1}{t}\right)+\frac{1}{y^2}\int_1^x\frac{d(t^{-2})}{-2}+2\int\frac{d(y^{-2})}{-2}+\int d\left(-\frac{1}{y}\right)=c_0$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{x^2}+\frac{2}{xy}+\frac{1}{x^2y^2}+\frac{1}{y^2}=c\,,$$

όπου $c=-2c_0+1$ είναι αυθαίρετη σταθερή.

♦ ***3.*** Να βρεθούν οι συναρτήσεις $f(x)$ για τις οποίες η δ.ε.

$$y^2\,\eta\mu x\,dx+y\,f(x)\,dy=0$$

είναι πλήρης. Να λυθεί η δ.ε. για μία απ' αυτές τις $f(x)$.

Εδώ έχουμε $P(x,y)=y^2\eta\mu x,\ \ Q(x,y)=yf(x)$ και για να είναι πλήρης η δ.ε. πρέπει να ισχύει

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

δηλαδή $\ 2y\,\eta\mu x=yf'(x)$.

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει

$$f'(x)=2\eta\mu x\,,$$

οπότε $\qquad f(x)=\int 2\eta\mu x\,dx+c_1=2\int d(-\sigma\upsilon\nu x)+c_1=-2\sigma\upsilon\nu x+c_1,$

όπου c_1 αυθαίρετη σταθερή.

Για $c_1=0$ παίρνουμε τη συνάρτηση $f(x)=-2\sigma\upsilon\nu x$.

Αντικαθιστούμε τη συνάρτηση αυτή στη δ.ε. και παίρνουμε την πλήρη δ.ε.

$$y^2\,\eta\mu x\,dx-2y\,\sigma\upsilon\nu x\,dy=0$$

στον απλώς συναφή τόπο $D=\mathbb{R}^2$.

Εκλέγουμε $\alpha=0$ και το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε. είναι

$$\int_0^x y^2\, \eta\mu t\, dt - \int 2y\, dy = -c\,,$$

$$\Rightarrow\ -y^2\,\sigma\upsilon\nu x + y^2 - y^2 = -c \ \Rightarrow\ y^2\,\sigma\upsilon\nu x = c,$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή.

♦ ***4.*** Να δειχθεί ότι η δ.ε. $y(2x^2y^3+3)\,dx + x(x^2y^3-1)\,dy = 0$ (1) δεν είναι πλήρης και δέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu = x^{\alpha}y^{\beta}$, όπου α, β κατάλληλοι πραγματικοί αριθμοί.

Εδώ είναι $P = y(2x^2y^3+3)$, $Q = x(x^2y^3-1)$ και έχουμε

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 8x^2y^3+3 \neq 3x^2y^3-1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

άρα, η δ.ε. (1) δεν είναι πλήρης.

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της δ.ε. (1) με $\mu = x^{\alpha}y^{\beta}$ και έχουμε

$$\mu P = 2x^{\alpha+2}\,y^{\beta+4} + 3x^{\alpha}\,y^{\beta+1}\ ,\quad \mu Q = x^{\alpha+3}\,y^{\beta+3} - x^{\alpha+1}\,y^{\beta}\ .$$

Για να είναι η δ.ε. $\mu P dx + \mu Q dy = 0$ πλήρης δ.ε. πρέπει και αρκεί

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$

$$\Rightarrow\ 2(\beta+4)\,x^{\alpha+2}\,y^{\beta+3} + 3(\beta+1)\,x^{\alpha}x^{\beta} \equiv (\alpha+3)\,x^{\alpha+2}\,y^{\beta+3} - (\alpha+1)\,x^{\alpha}y^{\beta}$$

$$\Rightarrow\ x^{\alpha}x^{\beta} \equiv [2(\beta+4)\,x^2y^3 + 3(\beta+1)] \equiv x^{\alpha}x^{\beta}\,[(\alpha+3)\,x^2y^3 - (\alpha+1)]$$

$$\Rightarrow\ 2(\beta+4)\,x^2y^3 + 3(\beta+1) \equiv (\alpha+3)\,x^2y^3 - (\alpha+1)\,. \qquad (2)$$

Από την ταυτότητα (2) παίρνουμε

$$\begin{array}{l} 2(\beta+4) = \alpha+3 \\ 3(\beta+1) = -(\alpha+1) \end{array} \ \Rightarrow\ \begin{array}{l} \alpha = \dfrac{7}{3} \\ \beta = -\dfrac{9}{5} \end{array}$$

οπότε η δ.ε. (1) έχει τον ολοκληρωτικό παράγοντα

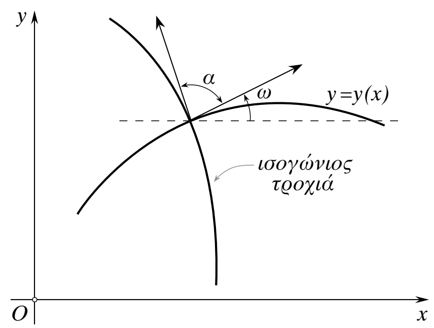
$$\mu = \mu(x,\,y) = x^{\frac{7}{3}}\,y^{-\frac{9}{5}}\,.$$

5. Ισογώνιες τροχιές

Α. Ισογώνιες τροχιές σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Έστω $F(x, y, c) = 0$ (1), c παράμετρος, μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων. Μία καμπύλη που τέμνει τις καμπύλες (1) με σταθερή γωνία $\alpha \neq 90°$ λέγεται *ισογώνιος τροχιά* της (1).

Αν είναι $\alpha = 90°$ λέγεται *ορθογώνιος τροχιά* της (1).



Αν $y' = f(x, y)$ (2) είναι η δ.ε. της δοσμένης οικογένειας τότε η $f(x, y)$ είναι η κλίση της λύσης της $y = y(x)$ δηλαδή

$$\varepsilon\varphi\omega = f(x, y)\,.$$

Επομένως, η κλίση της ισογώνιας τροχιάς είναι

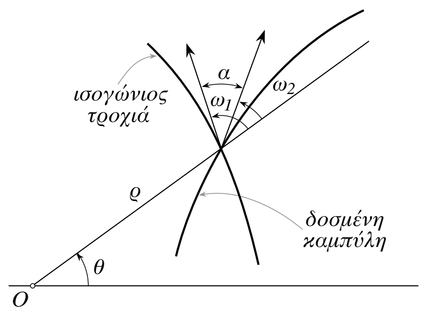
$$\varepsilon\varphi(\omega+\alpha) = \frac{f(x, y)+\varepsilon\varphi\alpha}{1-f(x, y)\,\varepsilon\varphi\alpha}\,,$$

και η δ.ε. της οικογένειας των ισογώνιων τροχιών είναι $y' = \varepsilon\varphi(\omega+\alpha)$.

Για $\alpha = 90°$ η δ.ε. των ορθογώνιων τροχιών είναι $y' = \left(-f(x, y)\right)^{-1}$.

Β. Ισογώνιες τροχιές σε πολικές συντεταγμένες

Αν $G(\varrho, \theta, c) = 0$ (1) c παράμετρος, είναι μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων, μία καμπύλη τέμνει ισογώνια τις καμπύλες αυτής της οικογένειας όταν σε κάθε σημείο (ϱ, θ) έχουμε $\omega_1 - \omega_2 = \alpha$, όπου ω_2 είναι η γωνία της καμπύλης της (1), ω_1 είναι η γωνία της καμπύλης των ισογώνιων τροχιών και α είναι η σταθερή γωνία που σχηματίζεται μεταξύ τους.



Ισχύει $\varepsilon\varphi\omega = \varrho\,\dfrac{d\theta}{d\varrho}$.

Έχουμε $\omega_1 = \omega_2 + \alpha$, οπότε

$$\varepsilon\varphi\omega_1 = \frac{\varepsilon\varphi\omega_2+\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi\omega_2\,\varepsilon\varphi\alpha}$$

και αν η δ.ε. της δοσμένης οικογένειας είναι

$$\varrho\,\frac{d\theta}{d\varrho} = f(\varrho, \theta) = \varepsilon\varphi\omega_2\,,$$

τότε η δ.ε. των ισογώνιων τροχιών είναι

$$\varrho\,\frac{d\theta}{d\varrho}=\frac{f(\varrho,\theta)+\varepsilon\varphi\alpha}{1-f(\varrho,\theta)\,\varepsilon\varphi\alpha}\,.$$

Για $\alpha=90°$ η δ.ε. των ορθογώνιων τροχιών είναι $-\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\theta}=f(\varrho,\theta)$.

Η διαδικασία επίλυσης αυτών των προβλημάτων φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

ΠΙΝΑΚΑΣ Α. *Καρτεσιανές συντεταγμένες*

$F(x, y, c) = 0$

Δοσμένη μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων.

$\Downarrow$ Απαλοιφή της c μεταξύ των εξισώσεων:

$F(x, y, c) = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y)$$

Δ.ε. της δοσμένης οικογένειας καμπύλων.

$\Rightarrow$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x, y)+\varepsilon\varphi\alpha}{1-f(x, y)\varepsilon\varphi\alpha}\quad\left(\begin{array}{c}\alpha=90°\\ \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{f(x, y)}\end{array}\right)$$

Δ.ε. της ζητούμενης οικογένειας των ισογώνιων τροχιών.

$\Uparrow$ Γενικό ολοκλήρωμα

$F_0(x, y, c_1) = 0$

Ζητούμενη μονοπαραμετρική οικογένεια των ισογώνιων τροχιών.

ΠΙΝΑΚΑΣ Β. *Πολικές συντεταγμένες*

$G(\varrho, \theta, c) = 0$

Δοσμένη μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων.

$\Downarrow$ Απαλοιφή της c μεταξύ των εξισώσεων:

$G(\varrho, \theta, c) = 0$

$$\frac{\partial G}{\partial \varrho}+\frac{\partial G}{\partial \theta}\frac{d\theta}{d\varrho}=0$$

$$\varrho\,\frac{d\theta}{d\varrho}=f(\varrho,\theta)$$

Δ.ε. της δοσμένης οικογένειας καμπύλων.

$\Rightarrow$

$$\varrho\,\frac{d\theta}{d\varrho}=\frac{f(\varrho,\theta)+\varepsilon\varphi\alpha}{1-f(\varrho,\theta)\,\varepsilon\varphi\alpha}\quad\left(\begin{array}{c}\alpha=90°\\ \varrho\,\dfrac{d\theta}{d\varrho}=-\dfrac{1}{f(\varrho,\theta)}\end{array}\right)$$

Δ.ε. της ζητούμενης οικογένειας των ισογώνιων τροχιών.

$\Uparrow$ Γενικό ολοκλήρωμα

$G_0(\varrho, \theta, c_1) = 0$

Ζητούμενη μονοπαραμετρική οικογένεια των ισογώνιων τροχιών.

♦ ***1.*** Να βρεθούν οι ορθογώνιες τροχιές των υπερβολών

$$xy = c^2\,, \qquad c \text{ παράμετρος .} \tag{1}$$

Βρίσκουμε πρώτα τη δ.ε. της μονοπαραμετρικής οικογένειας των υπερβολών (1). Παραγωγίζουμε την (1) ως προς x

$$y+xy' = 0 \;\Rightarrow\; y' = -\frac{y}{x}\,, \qquad x\neq 0 \tag{2}$$

(αν στην (2) έμενε η παράμετρος c θα την αντικαταστούσαμε από την (1)). Η (2) είναι η δ.ε. των υπερβολών (1).

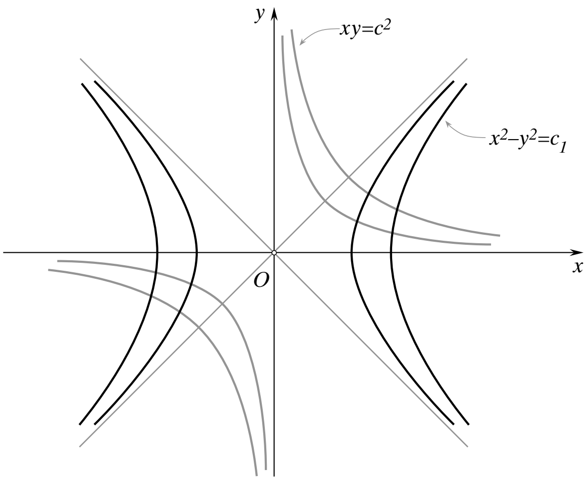
Επομένως, η δ.ε. της ζητούμενης οικογένεια των ορθογώνιων τροχιών είναι

$$y' = \frac{x}{y}\,, \qquad y\neq 0 \,. \tag{3}$$

Οι λύσεις της δ.ε. (3) είναι

$$x^2-y^2 = c_1\,, \qquad c_1 \text{ αυθαίρετη σταθερή} \tag{4}$$

και οι ορθογώνιες τροχιές (4) αποτελούν επίσης μία οικογένεια υπερβολών.



♦ ***2.*** Να βρεθούν οι ισογώνιες τροχιές, γωνίας $\alpha=45°$, των παραβολών

$$y = x+cx^2\,, \qquad c \text{ παράμετρος .} \tag{1}$$

Παραγωγίζουμε την (1) ως προς x

$$y' = 1+2cx\,,$$

και μεταξύ αυτής και της (1) απαλείφουμε την παράμετρο c, και βρίσκουμε τη δ.ε. της δοσμένης οικογένειας των παραβολών.

Από την (1) έχουμε $c = \frac{y-x}{x^2}$, $x \neq 0$, οπότε προκύπτει η δ.ε.

$$y' = 1+2\left(\frac{y-x}{x^2}\right)x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{2y-x}{x}\,, \quad x \neq 0.$$

Επειδή $\alpha=45°$ η δ.ε. της ζητούμενης οικογένειας των ισογώνιων τροχιών είναι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{2y-x}{x} + \varepsilon\varphi 45°}{1-\left(\frac{2y-x}{x}\right)\varepsilon\varphi 45°} = \frac{\frac{2y-x}{x}+1}{1-\frac{2y-x}{x}} = \frac{\frac{2y}{x}}{\frac{2x-2y}{x}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{2x-2y} = \frac{y}{x-y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = -1$$

γραμμική δ.ε. πρώτη τάξης, αλλά με ανεξάρτητη μεταβλητή την y.

Η γενική λύση αυτής της γραμμικής δ.ε. είναι

$$x = e^{\int \frac{dy}{y}}\left[\int -e^{-\int \frac{dy}{y}}\,dy + ln\,|c_0|\right] = e^{ln\,|y|}\left[\int -e^{-ln\,|y|}\,dy + ln\,|c_0|\right] =$$

$$= |y|\,\left[-\int |y|^{-1}\,dy + ln\,|c_0|\right] = |y|\,[-ln\,|y| + ln\,|c_0|]$$

$$\Rightarrow \quad x = |y|\,ln\left|\frac{c_0}{y}\right| \Rightarrow \left|\frac{c_0}{y}\right| = e^{\frac{x}{|y|}} \quad \Rightarrow \quad |y|\,e^{\frac{x}{|y|}} = c_1,$$

όπου $c_1 = |c_0|$ αυθαίρετη σταθερή.

Άρα, οι ζητούμενες ισογώνιες τροχιές, γωνίας $\alpha=45°$, είναι οι καμπύλες $ye^{\frac{x}{y}} = c_1,\ y>0\ \ \kappa\alpha\iota\ \ ye^{-\frac{x}{y}} = -c_1,\ y<0.$

♦ ***3.*** Να βρεθούν οι ορθογώνιες τροχιές των καμπύλων

$$\varrho^2 = c(1+\sigma\upsilon\nu^2\theta)\,, \quad c \text{ παράμετρος}\,. \tag{1}$$

Παραγωγίζουμε τη δ.ε. (1) ως προς ϱ και έχουμε

$$2\varrho = -2c\,\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta\,\frac{d\theta}{d\varrho} \quad \Rightarrow \quad \varrho\frac{d\theta}{d\varrho} = \frac{\varrho^2}{-c\,\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta}\,. \tag{2}$$

Μεταξύ των (1) και (2) απαλείφουμε την παράμετρο c και παίρνουμε

$$\varrho \frac{d\theta}{d\varrho} = -\frac{1+\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta} ,$$

που είναι η δ.ε. της δοσμένης οικογένειας καμπύλων (1).

Επομένως, η δ.ε. των ζητούμενων ορθογώνιων τροχιών είναι

$$-\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\theta} = -\frac{1+\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\theta} = \frac{1+\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta} \quad \Rightarrow \frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{1+\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta}\,d\theta.$$

Με ολοκλήρωση παίρνουμε

$$\int \frac{d\varrho}{\varrho} = \int \frac{1+\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta}\,d\theta + ln\,|c_0| = \int \frac{d\theta}{\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta} + \int \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}\,d\theta + ln\,|c_0| ,$$

όπου $$\int \frac{d\theta}{\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta} = \int \frac{\frac{d\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}}{\eta\mu\theta} = \int \frac{\frac{d\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}}{\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}} = \int \frac{d\varepsilon\varphi\theta}{\varepsilon\varphi\theta} = ln\,|\varepsilon\varphi\theta| ,$$

$$\int \frac{\sigma\upsilon\nu\theta\,d\theta}{\eta\mu\theta} = \int \frac{d\eta\mu\theta}{\eta\mu\theta} = ln\,|\eta\mu\theta| ,$$

οπότε οι ορθογώνιες τροχιές της (1) είναι

$$ln\,\varrho = ln\,|\varepsilon\varphi\theta| + ln\,|\eta\mu\theta| + ln\,|c_0|$$

$$\Rightarrow \varrho = c_1\,\varepsilon\varphi\theta\,\eta\mu\theta ,$$ όπου $c_1 = \pm c_0$ παράμετρος.

♦ ***4.*** Να βρεθούν οι ισογώνιες τροχιές, γωνίας α, των καμπύλων

$$\varrho = c\,\eta\mu\theta \ , \qquad c \text{ παράμετρος} . \tag{1}$$

Παραγωγίζουμε την (1) ως προς ϱ και έχουμε

$$1 = c\,\sigma\upsilon\nu\theta\frac{d\theta}{d\varrho} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\theta}{d\varrho} = \frac{1}{c\,\sigma\upsilon\nu\theta} . \tag{2}$$

Μεταξύ των (1) και (2) απαλείφουμε την παράμετρο c.

Από την (1) έχουμε

$$c = \frac{\varrho}{\eta\mu\theta}$$

και θέτοντας την τιμή αυτή στην (2) παίρνουμε τη δ.ε. της δοσμένης οικογένειας καμπύλων (1)

$$\varrho\,\frac{d\theta}{d\varrho}=\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}=\varepsilon\varphi\theta.$$

Επομένως, η δ.ε. των ισογώνιων τροχιών, γωνίας α, είναι

$$\varrho\,\frac{d\theta}{d\varrho}=\frac{\varepsilon\varphi\theta+\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi\theta\,\varepsilon\varphi\alpha}=\varepsilon\varphi(\theta+\alpha)\ .$$

Έχουμε
$$\frac{d\theta}{\varepsilon\varphi(\theta+\alpha)}=\frac{d\varrho}{\varrho}\quad\Rightarrow\quad\frac{\sigma\upsilon\nu(\theta+\alpha)\,d\theta}{\eta\mu(\theta+\alpha)}=\frac{d\varrho}{\varrho}$$

και με ολοκλήρωση παίρνουμε

$$ln\,|c_0|+\int\frac{\sigma\upsilon\nu(\theta+\alpha)\,d\theta}{\eta\mu(\theta+\alpha)}=\int\frac{d\varrho}{\varrho}\quad\Rightarrow\quad ln\,|c_0|+\int\frac{d\eta\mu(\theta+\alpha)}{\eta\mu(\theta+\alpha)}=ln\,\varrho$$

$$\Rightarrow\quad ln\,|c_0|+ln\,|\eta\mu(\theta+\alpha)|=ln\,\varrho\quad\Rightarrow\quad\varrho=c_1\,\eta\mu(\theta+\alpha)\ ,$$

όπου $c_1=\pm c_0$ παράμετρος, που είναι οι ζητούμενες ισογώνιες τροχιές των καμπύλων (1).

6. *Διαφορικές εξισώσεις του Clairaut και του Lagrange*

Οι δ.ε. του *Clairaut* είναι οι δ.ε. της μορφής

$$y=xy'+f(y')\ . \tag{1}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: *Αν* y *είναι λύση της δ.ε. (1) τότε η* y *είναι ίση με μία από τις ευθείες* $y=xc+f(c)$, c *αυθαίρετη σταθερή, ή με την περιβάλλουσα αυτών των ευθειών.*

Η εξίσωση της *περιβάλλουσας* των καμπύλων $g(x,y,c)=0$, c παράμετρος, βρίσκεται με απαλοιφή της παραμέτρου c μεταξύ των εξισώσεων:

$$g(x,y,c)=0\ ,\quad\frac{\partial g}{\partial c}(x,y,c)=0\ ,$$

αν ικανοποιούνται οι σχέσεις

$$\frac{\partial^2 g}{\partial c^2}\neq 0\ ,\quad\begin{vmatrix}\dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial c} & \dfrac{\partial^2 g}{\partial y\partial c}\end{vmatrix}\neq 0\ .$$

Οι δ.ε. του *Lagrange* έχουν τη μορφή

$$y = x\varphi(y')+f(y'). \tag{2}$$

Θέτουμε $p=y'$ και υποθέτουμε ότι $\varphi(p)\neq p$.

Παραγωγίζουμε την (2) ως προς x

$$p = \varphi(p)+x\varphi'(p)\,\frac{dp}{dx}+f'(p)\,\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow\ \frac{dx}{dp}+x\,\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}=\frac{f'(p)}{p-\varphi(p)}\ . \tag{3}$$

Αν $x = \lambda(p, c)$, c αυθαίρετη σταθερή, είναι η γενική λύση της γραμμικής δ.ε. (3), τότε το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε. (2) δίνεται με μονοπαραμετρική μορφή από τις σχέσεις

$$x = \lambda(p, c)\ , \qquad y = \lambda(p, c)\varphi(p)+f(p)\ , \qquad p \ \text{παράμετρος.}$$

Αν μπορεί να γίνει η απαλοιφή της παραμέτρου p στις παραπάνω εξισώσεις παίρνουμε το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε. (2) με τη μορφή

$$G(x, y, c) = 0\ , \qquad c \ \text{αυθαίρετη σταθερή.}$$

Σημείωση. Αν είναι $\varphi(p_0) = p_0$, τότε η ευθεία γραμμή $y = xp_0+f(p_0)$, όταν δεν προκύπτει από το γενικό ολοκλήρωμα, είναι ιδιάζουσα λύση της δ.ε. (2).

♦ ***1.*** Να λυθεί η δ.ε. $y = xy'-e^{y'}$. (1)

Θέτουμε $p=y'$ και παραγωγίζουμε την δ.ε,. (1) ως προς x

$$p = p+x\,\frac{dp}{dx}-e^{p}\,\frac{dp}{dx} \quad\Rightarrow\quad \frac{dp}{dx}\,[x-e^{p}] = 0\ ,$$

οπότε έχουμε $\dfrac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p=c$ αυθαίρετη σταθερή ή $x-e^{p} = 0.$

Επομένως, το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε. (1) είναι

$$y = cx-e^{c}$$

και η ιδιάζουσα λύση της, με παραμετρική μορφή, είναι

$$x= e^{p}\ , \quad y = e^{p}p-e^{p}\ , \qquad p \ \text{παράμετρος}\ .$$

Με απαλοιφή της παραμέτρου p βρίσκουμε $(x>0)$

$$p = \ln x \quad \text{και} \quad y = x\ln x-x = x\,(\ln x-1)$$