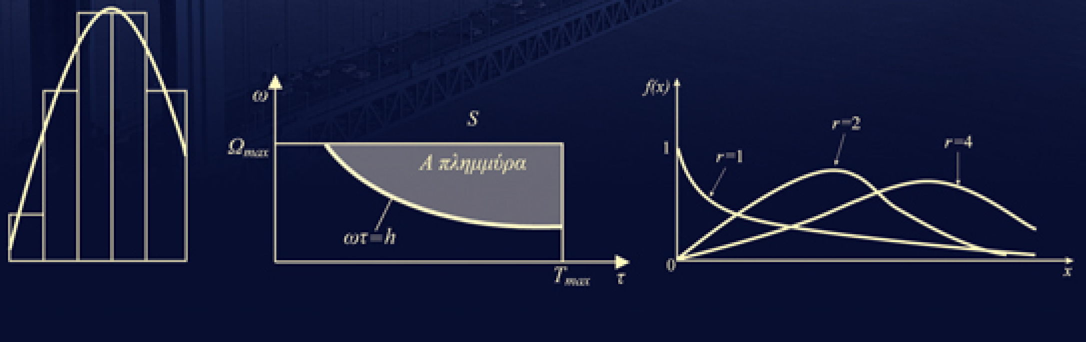
Γιώργος Χ. Ζιούτας

Πιθανότητες και Στοιχεία Στατιστικής για Μηχανικούς



2η Έκδοση

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Οι απαντήσεις των προβλημάτων για λύση βρίσκονται στην ηλεκτρονική διεύθυνση:
www.ziti.gr/docs/pdf/1530_lyseis.pdf

ISBN 978-960-456-377-7

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση
Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
$18^{ο}$ χλμ Θεσσαλονίκης - Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ:
Αρμενοπούλου 27 - 546 35 Θεσσαλονίκη • Τηλ.: 2310-203.720 • Fax 2310-211.305
e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΕΝΩΣΗ ΕΚΔΟΤΩΝ ΒΙΒΛΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ:
Στοά του Βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5) - 105 64 ΑΘΗΝΑ • Τηλ.-Fax: 210-3211.097

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ - ΑΠΟΘΗΚΗ ΑΘΗΝΩΝ:
Χαριλάου Τρικούπη 22 - Τ.Κ. 106 79, Αθήνα • Τηλ.-Fax: 210-3816.650
e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

Πρόλογος

Ο μηχανικός πρέπει να συνεχίσει να βελτιώνει την ποιότητα της δουλειάς του εάν επιθυμεί να είναι ανταγωνιστικός στην αγορά της χώρας του και γενικότερα της Ευρώπης. Μία σημαντική αναλογία σε αυτήν την ποιοτική βελτίωση διαμορφώνεται από τους μηχανικούς, επειδή αυτοί είναι οι ειδικοί που σχεδιάζουν και αναπτύσσουν νέα κατασκευαστικά συστήματα και διαδικασίες που βελτιώνουν τα υπάρχοντα συστήματα. Οι πιθανότητες και η στατιστική είναι σπουδαία εργαλεία σε αυτές τις δραστηριότητες, επειδή προμηθεύουν τον μηχανικό και με τα δύο αναλυτικές και περιγραφικές μεθόδους, οι οποίες διαπραγματεύονται με την αβεβαιότητα των παρατηρούμενων δεδομένων.

Οι απρόβλεπτες εξελίξεις σε διάφορα φαινόμενα και γενικότερα οι αβεβαιότητες στον σχεδιασμό τεχνικών συστημάτων και άλλων κατασκευαστικών έργων είναι αναπόφευκτες. Είναι αναγνωρισμένο ότι οι έννοιες και μέθοδοι των πιθανοτήτων και στατιστικής συντελούν στην αξιολόγηση των επιπτώσεων των στοχαστικών φαινομένων και του κλίματος της αβεβαιότητας στην συμπεριφορά των τεχνικών συστημάτων. Η πιθανοθεωρία προσφέρει την μεθοδολογία για ανάπτυξη μοντέλων που μετρούν την αβεβαιότητα και αξιολογούν τις επιπτώσεις της στον σχεδιασμό έργων και τεχνικών συστημάτων. Η στατιστική ανάλυση παίζει σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη μοντέλων τεχνικών συστημάτων και την αξιολόγηση της συμπεριφοράς των σε περιβάλλων αβεβαιότητας, καθώς και στην εξισορρόπηση ρίσκου και ωφελειών που σχετίζονται με την λήψη αποφάσεων κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας.

Πιθανότητες και Στατιστική είναι *μαθήματα* που περιλαμβάνουν έννοιες και μεθόδους όχι αρκετά εύκολες για τους φοιτητές της πολυτεχνικής σχολής. Για να αντεπεξέλθουμε αυτή την δυσκολία, μεγάλη έμφαση αποδίδεται στον τρόπο διδασκαλίας και εμπέδωσης αυτών των εννοιών. Στόχος αυτού του βιβλίου είναι να κάνει ευκολότερο για τους μηχανικούς φοιτητές την κατανόηση και αφομοίωση των πιθανοτήτων και στατιστικής. Αυτό το βιβλίο θα τους βοηθήσει να ανακαλύψουν πως αυτά τα θέματα σχετίζονται με τα ενδιαφέροντά τους

και τους είναι άμεσα χρειαζούμενα επειδή αυτό γράφθηκε ειδικότερα για τα προβλήματα του μηχανικού.

Θα μπορούσε κανείς να θέσει το ερώτημα γιατί γράφθηκε ένα νέο βιβλίο ειδικά για μηχανικούς. Πρώτον, υπάρχει ειδικότερη σπουδαιότητα των μεθόδων πιθανοτήτων και στατιστικής στις εφαρμογές του μηχανικού, όπως κατασκευές, εδαφομηχανική, υδρολογικές μελέτες, συγκοινωνιακή τεχνική, μόλυνση περιβάλλοντος. Για παράδειγμα, μοντέλα αξιοπιστίας συστημάτων, κατανομές πιθανοτήτων, διαφορετικές συνθήκες δεδομένων και άλλα απαιτούν διαφορετικές προσεγγίσεις. Δεύτερον, παλαιότερα βιβλία παραλείπουν ειδικά σπουδαία και μοντέρνα προβλήματα μηχανικού και αντί αυτού επικεντρώνονται πολλές φορές σε άλλα θέματα τα οποία μπορεί να μην έχουν άμεση σχέση με τον σύγχρονο μηχανικό. Για παράδειγμα, σήμερα έμφαση δίνεται όχι μόνο στην αξιοπιστία μιας κατασκευής αλλά και στην προφύλαξη του περιβάλλοντος.

Αυτό το βιβλίο είναι μία εισαγωγή για το μάθημα της πιθανοθεωρίας και στατιστικής στους φοιτητές πολυτεχνείου ή και άλλων επιστημών, Ενώ οι περισσότερες από τις μεθόδους που παρουσιάζουμε είναι βασικές και ουσιώδεις για πιθανοκρατική και στατιστική ανάλυση και σε άλλες κατευθύνσεις, όπως οικονομολόγους , φυσικούς, κοινωνιολόγους κ.τ.λ., επιλέξαμε την επικέντρωση περισσότερο σε μηχανικά προσανατολισμένα ενδιαφέροντα. Πιστεύουμε ότι αυτή η προσέγγιση θα εξυπηρετήσει καλύτερα τους μηχανικούς φοιτητές και θα τους συναρπάσει σε πολλές εφαρμογές των πιθανοτήτων και στατιστικής στην περιοχή τους. Έχει γίνει μεγάλη προσπάθεια τα περισσότερα από τα παραδείγματα, ασκήσεις και προβλήματα να είναι μηχανικού περιεχομένου από τον πραγματικό κόσμο, τα οποία πάρθηκαν από μία μοντέρνα βιβλιογραφία εφαρμογών πιθανοτήτων και στατιστικής για μηχανικούς ή και από την δική μου εμπειρία εφαρμογής μεθόδων πιθανοτήτων και στατιστικής σε προβλήματα μηχανικού.

Πιστεύω ότι οι μηχανικοί όλων των κατευθύνσεων θα έπρεπε να πάρουν τουλάχιστον ένα μάθημα στις πιθανότητες και στατιστική. Ατυχώς, λόγω και άλλων υποχρεώσεών τους οι περισσότεροι μηχανικοί παίρνουν μόνο το βασικό μάθημα πιθανοτήτων και στατιστικής. Η ύλη αυτού του βιβλίου επικεντρώνεται περισσότερο στην μεθοδολογία των πιθανοτήτων και δεν καλύπτει όλη την ύλη του μαθήματος. Ένα δεύτερο βιβλίο που αναπτύσσει αναλυτικότερα την περιγραφική στατιστική καθώς και συμπερασματική στατιστική κρίνεται απαραίτητο για την κάλυψη του μαθήματος αυτού.

Έχει διατηρηθεί ένα σχετικά μικρό μαθηματικό υπόβαθρο κυρίως στην ανάπτυξη της μεθοδολογίας των πιθανοτήτων. Φοιτητές οι οποίοι έχουν συμπλη-

ρώσει το πρώτο μέρος σε ολοκληρωτικό λογισμό δεν έχουν καμία δυσκολία στην κατανόηση όλων των κεφαλαίων αυτού του βιβλίου. Βασικά, η πρόθεσή μου είναι να δώσω στον αναγνώστη την μάθηση και κατανόηση της μεθοδολογίας και πώς να την εφαρμόσει στα προβλήματα του μηχανικού. Οι αναγκαίες μαθηματικές βάσεις της θεωρίας των πιθανοτήτων αναπτύσσονται μόνο στα ουσιώδη αξιώματα, θεωρήματα και βασικούς κανόνες. Οι απαραίτητες μαθηματικές αποδείξεις περιορίζονται στο ελάχιστο. Όμως, θα συμβούλευα τον αναγνώστη να ακολουθήσει τις όποιες αποδείξεις συναντά για πληρέστερη κατανόηση των εννοιών και μεθόδων των πιθανοτήτων και στατιστικής.

Η επεξήγηση της μεθοδολογίας συνοδεύεται και από τις υποθέσεις που γίνονται. Τονίζονται ιδιαίτερα οι ορισμοί, και σε πολλές περιπτώσεις σημειώνονται οι περιορισμοί και γίνονται παρατηρήσεις για να αποφευχθούν τυχών παγίδες ή άλλες παρερμηνείες στις έννοιες των πιθανοτήτων. Ακόμη, σε πολλούς κανόνες ή αποτελέσματα δίνεται η πρακτική τους ερμηνεία προκειμένου να τα κατανοήσει και χρησιμοποιήσει ο μηχανικός στις δικές του εφαρμογές.

Ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό αυτού του βιβλίου είναι η πολύ καλή επιλογή παραδειγμάτων , ασκήσεων και προβλημάτων μηχανικού. Στα τρία πρώτα κεφάλαια δίνονται και οι λύσεις με λεπτομερή επεξήγηση σε αρκετές ασκήσεις και προβλήματα. Έτσι, οι φοιτητές αποκτούν γνώση και ικανότητα πριν ασχοληθούν περαιτέρω με άλυτες ασκήσεις ή προβλήματα μηχανικού.

Το βασικότερο μέρος του παρόντος βιβλίου αναφέρεται στα κεφάλαια 2, 3, 4, 5, 6, 7, και 8. Στο κεφάλαιο 2 και 3 αναπτύσσεται το υπόβαθρο της πιθανοθεωρίας που μπορεί να χρησιμοποιήσει ο μηχανικός για την εκτίμηση πιθανότητας πραγματοποίησης στοχαστικών γεγονότων. Χρησιμοποιώντας τα βασικά αξιώματα, θεωρήματα και κανόνες καταλήγουμε στην ολική πιθανότητα και θεώρημα του Bayes. Ο αναγνώστης είναι απαραίτητο να κατανοήσει πλήρως το δεύτερο και τρίτο κεφάλαιο τόσο γιατί αναφέρεται σε βασικές έννοιες των πιθανοτήτων, όσο γιατί αποτελεί και τον πυρήνα στις μεθόδους πιθανοτήτων και στατιστικής που θα ακολουθήσουν.

Ακολουθούν τα κεφάλαια 4, 5, 6 και 7 που διευρύνουν το υπόβαθρο των πιθανοτήτων, πολύ βασικό για την κατανόηση της ανάπτυξης της στατιστικής μεθοδολογίας. Τα κεφάλαια αυτά, καλύπτουν τις βασικές έννοιες για τις τυχαίες μεταβλητές και τις απαραίτητες προυποθέσεις που πρέπει να πληρούν για να ακολουθούν τις χρήσιμες κατανομές πιθανοτήτων. Ορίζονται οι σπουδαιότερες κατανομές πιθανοτήτων και αναφέρονται οι ιδιότητές των που σχετίζονται με τις διάφορες εφαρμογές του μηχανικού.

Το κεφάλαιο 1 είναι εισαγωγικό στην περιληπτική παρουσίαση των στατιστικών δεδομένων με πίνακες συχνοτήτων ή ιστογράμματα, και την χρησιμότητα των πιθανοτήτων και στατιστικής στις εφαρμογές του μηχανικού. Το κεφάλαιο 8 είναι επίσης εισαγωγικό στην συμπερασματική στατιστική. Σχετίζεται με την γενίκευση των δειγματικών συμπερασμάτων στον πληθυσμό και αναφέρεται κυρίως στην κατανόηση των διαφόρων εκτιμητριών καθώς και την ερμηνεία των βασικότερων ιδιοτήτων τους.

Στη συνέχεια, το κεφάλαιο 9 αναφέρεται στον έλεγχο υποθέσεων, ο οποίος είναι πολύ χρήσιμος στην λήψη αποφάσεων σε προβλήματα όπου η αξιοπιστία των τιμών των παραμέτρων και η συγκρισή τους μεταξύ διαφορετικών πληθυσμών παίζει σημαντικό ρόλο. Τέλος, στο κεφάλαιο 10 περιγράφεται η ανάλυση παλινδρόμησης. Τα περισσότερα προβλήματα μηχανικού ή άλλων επιστημόνων σχετίζονται άμεσα ή έμμεσα με κάποιο μοντέλο παλινδρόμησης. Με την ανάλυση παλινδρόμησης διερευνάται κατά πόσο είναι δυνατόν να αναπτυχθούν αξιόπιστα μοντέλα πρόβλεψης με βάση την συσχέτιση μεταξύ δύο ή και περισσοτέρων μεταβλητών

Θεσσαλονίκη, Απρίλιος 2013, *Ο συγγραφέας*

Περιεχόμενα

1 Περιβάλλον Αβεβαιότητας και ο Ρόλος των Πιθανοτήτων και Στατιστικής στις Εφαρμογές Μηχανικού

Περιγραφή Κεφαλαίου

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Γενικά η **στατιστική** σχετίζεται με διάφορες μεθόδους για την διεξαγωγή πληροφοριών από δεδομένα τα οποία εμπεριέχουν στοιχεία τύχης. Σε όλες τις δραστηριότητες, οι μηχανικοί έχουν να αντιμετωπίσουν αβεβαιότητες. Αντοχή πίεσης τσιμέντου, ισχύς ατσαλιού, πυκνότητα κυκλοφορίας, βροχόπτωση, ροή ποταμού, πίεση λαδιού, τάση ρεύματος, καθίζηση εδάφους, και πολλά άλλα μεταβάλλονται από περίπτωση σε περίπτωση για άγνωστους λόγους ή προέρχονται από παράγοντες που δεν μπορούν να προσδιορισθούν με ακρίβεια. Παρόλα αυτά, τα σχέδια και οι κατασκευές πρέπει να ολοκληρωθούν λαμβάνοντας υπόψη την **τυχαιότητα** της φύσης.

Οι καταλληλότερες μέθοδοι για να αντιμετωπίσουμε την αβεβαιότητα ποικίλουν με την περίπτωση. Εξαρτάται κυρίως από την διασπορά των διαθέσιμων δεδομένων. Μερικά φαινόμενα μπορεί να έχουν αμελητέα ή χαμηλή μεταβλητότητα. Στην περίπτωση αυτή, η μέση τιμή από τις παρατηρήσεις του παρελθόντος μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν ένας κανόνας, για παράδειγμα, η ελαστικότητα σιδηροδοκών. Όμως, συχνά, η μεταβλητότητα στις παρατηρήσεις είναι πολύ ουσιώδης. Μερικές φορές, ο μηχανικός για λόγους ασφαλείας στα σχέδιά του χρησιμοποιεί τις ακραίες τιμές για ασφάλεια, την μέγιστη απορροή σε μία καταιγίδα, την συμπιεστική αντοχή του τσιμέντου, την μέγιστη καθίζηση σε ένα τόπο. Με άλλα λόγια, στην πράξη εκφράζει την ικανότητα του κάθε εξαρτήματος στο σύστημα κατασκευής έτσι ώστε το σύστημα να αντέχει σε ένα προκαθορισμένο βάρος που είναι γνωστό σαν **συντελεστής ασφάλειας** (factor of safety), και τον καλύπτει σε όλες τις πιθανές περιπτώσεις. Παρόλα αυτά, η **καθοριστική** (deterministic) αντιμετώπιση μπορεί να οδηγήσει σε απρόβλεπτες και δυσάρεστες καταστάσεις, διότι υπάρχουν αμφιβολίες ως προς την μέγιστη απορροή της καταιγίδας, την μέγιστη καθίζηση, την ελάχιστη αντοχή του τσιμέντου, κ.τ.λ., ανάλογα με την περίπτωση. Αυτά δεν μπορούμε εύκολα να τα παρακάμψουμε όταν υπάρχει μεταβλητότητα που θα μπορούσε να αποβεί καταστροφική. Επί πλέον, μια καθοριστική αντιμετώπιση, λαμβάνοντας υπόψη τους συντελεστές ασφάλειας, δεν είναι οικονομικά αποδεκτή. Γι' αυτό είναι φανερό ότι, ο μηχανικός όταν παίρνει αποφάσεις κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας πρέπει να ζυγοσταθμίσει το ρίσκο με το οικονομικό όφελος που μπορεί να προκύψει. Προφανώς, το μέγεθος του **ρίσκου** και το **ισοζύγισμα** με το οικονομικό όφελος σε τέτοιες περιπτώσεις εκτιμάται με την μεθοδολογία των πιθανοτήτων και στατιστικής.

Εκτός από την μεταβλητότητα των χαρακτηριστικών των υλικών, του εδάφους, και έντασης καιρικών φαινομένων, υπάρχουν και πολλά στοχαστικά φαινόμενα ή γεγονότα, των οποίων η εξέλιξη είναι απρόβλεπτη και ενδεχομένως να επιδράσει καταστροφικά σε ένα σύστημα υπό κατασκευή. Όπως, σεισμός, τυφώνας, ελαττωματικά υλικά απεργία εργαζομένων, και άλλα. Η **ποσιτοκοποίηση** της αβεβαιότητας και η εκτίμηση των επιδράσεων της στις μελέτες και σχέδια του μηχανικού πρέπει να περιλαμβάνει έννοιες και μεθόδους των πιθανοτήτων. Επί πλέον λήψη αποφάσεων κάτω από κίνδυνο περιλαμβάνουν την χρήση εφαρμοσμένης πιθανότητας.

Ειδικά για τους μηχανικούς η μοντέρνα στατιστική έχει μία ειδική σημασία. Ο όρος στατιστική σχετίζεται με την διεξαγωγή αριθμητικής μαρτυρίας που βοηθά στην λήψη απόφασης σε συνθήκες αβεβαιότητας. Έτσι, η στατιστική για τους μηχανικούς ακολουθεί εκείνες τις μεθόδους και διαδικασίες οι οποίες επιτρέπουν την ερμηνεία αριθμητικών δεδομένων σε δράση. Ένας ορισμός του όρου στατιστική, στον μηχανικό χώρο, είναι η ανάλυσης αριθμητικών δεδομένων με σκοπό την **λήψη απόφασης** ή διεξαγωγή πληροφορίας κάτω από **συνθήκες αβεβαιότητας**.

Ένας τομέας της στατιστικής είναι η περιγραφική στατιστική. Η **περιγραφική στατιστική** σχετίζεται με την συλλογή αριθμητικών δεδομένων και διεξαγωγή πληροφοριών με την περιληπτική παρουσίασή τους, με γραφικές παραστάσεις ή εκτίμηση σημαντικών παραμέτρων κεντρικής τάσης και διασποράς. Αλλά κύριος σκοπός της στατιστικής εδώ είναι η **γενίκευση** των συμπερασμάτων του **δείγματος** στον **πληθυσμό**, και ο τομέας αυτός είναι γνωστός σαν **συμπερασματική στατιστική**.

Λογικά, οι δειγματικές εκτιμήσεις ή πληροφορίες από την περιγραφική στατιστική διαφέρουν από αυτές του πληθυσμού. Η συμπερασματική στατιστική επικεντρώνεται στην ποιότητα της γενίκευσης των συμπερασμάτων για τον πληθυσμό χρησιμοποιώντας δειγματικά δεδομένα. Καμία δειγματική εκτίμηση ή πληροφορία δεν ταυτίζεται με τις αντίστοιχες του πληθυσμού, αλλά η τεχνική της στατιστικής συγκεντρώνεται να διατηρήσει το **δειγματικό σφάλμα** σε ανεκτά όρια. Οι μέθοδοι της στατιστικής που συντελούν στην τυχαιότητα του δείγματος και την ποσοτικοποίηση του δειγματικού σφάλματος στηρίζονται στις έννοιες της πιθανοθεωρίας. Γι' αυτόν τον λόγο, αυτό το βιβλίο επικεντρώνεται κυρίως στην πιθανοθεωρία και τις εφαρμογές της. Τονίζεται ιδιαίτερα ότι, όλα τα στατιστικά συμπεράσματα από το δείγμα στον πληθυσμό και ο κίνδυνος και η αξιοπιστία της λήψης απόφασης κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας αξιολογούνται ή εκτιμούνται δια μέσου της εφαρμοσμένης πιθανότητας.

1.2 ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Μία φυσική διαδικασία, καθώς και πειραματικές διαδικασίες ενδέχεται να περιέχουν μεταβλητότητα. Για παράδειγμα στις πειραματικές παρατηρήσεις τα αποτελέσματα διαφέρουν από παρατήρηση σε παρατήρηση παρόλα που το πείραμα επαναλαμβάνεται πάντα κάτω από τις ίδιες συνθήκες. Υπάρχει διακύμανση στις παρατηρούμενες τιμές, ενώ μερικές μπορεί να εμφανίζονται συχνότερα, άλλες σπανιότερα κ.τ.λ.. Οι πολιτικοί μηχανικοί για παράδειγμα γνωρίζουν ότι οι τιμές των **χαρακτηριστικών** όπως η καθίζηση του εδάφους, η αντοχή θραύσης του τσιμέντου, η αντοχή των συγκολλήσεων, η ροή αυτοκινήτων σένα δρόμο, το μέγεθος της πλημμύρας και πολλά άλλα έχουν μία πλατιά διακύμανση. Αυτό μπορεί να οφείλεται σε μία φυσική αλλαγή των ιδιοτήτων, διαφορές στην αλληλοεπίδραση των συστατικών ενός υλικού, περιβαλλοντικούς παράγοντες, ή άλλες αιτίες.

Για να αντιμετωπίσει την αβεβαιότητα ο μηχανικός πρέπει πρώτα να πάρει για το **χαρακτηριστικό** που τον ενδιαφέρει ένα τυχαίο **δείγμα** τιμών. Με βάση το δείγμα και την εφαρμογή των πιθανοτήτων και στατιστικής σε περιγραφικό στάδιο, παρέχονται χρήσιμες πληροφορίες. Όμως, για την λήψη απόφασης απαιτούνται συμπεράσματα ή πληροφορίες σχετικά με τον **πληθυσμό,** δηλαδή το ευρύτερο σύνολο απ’ όπου πάρθηκε το δείγμα. Για παράδειγμα, όταν παίρνετε ένα *δείγμα* σιδηροδοκών και δοκιμάζετε την αντοχή τους, σας ενδιαφέρει κυρίως η διεξαγωγή συμπερασμάτων για την αντοχή του μεγαλύτερου συνόλου (*πληθυσμού*) σιδηροδοκών που θα χρησιμοποιήσετε σε ένα κατασκευαστικό έργο.

Ένα δείγμα τιμών ή ***σύνολο δεδομένων*** αποτελείται από ένα σύνολο **παρατηρήσεων** ή μετρήσεων του **χαρακτηριστικού** που διερευνούμε. Οι ποσότητες που μετράμε καλούνται **μεταβλητές**, επειδή η τιμή του χαρακτηριστικού μεταβάλλεται από στοιχείο σε στοιχείο του πληθυσμού. Ακόμη, επειδή αυτή η μεταβλητότητα είναι τυχαία οι μεταβλητές αναφέρονται ως **τυχαίες μεταβλητές**. Για παράδειγμα, η κάθε σιδηροδοκός είναι ένα **στοιχείο** (μονάδα) του πληθυσμού, η **αντοχή** της είναι ένα από τα χαρακτηριστικά της που ενδιαφέρει τον μηχανικό και επειδή η τιμή της αντοχής δεν είναι σταθερή από δοκό σε δοκό αναφέρεται σαν **τυχαία μεταβλητή**. Η μορφή της μεταβλητότητας καλείται **κατανομή**.

Έχοντας ένα δείγμα τιμών για κάποιο χαρακτηριστικό, ο μηχανικός δεν μπορεί να βγάλει άμεσα συμπέρασμα για την κατανομή των τιμών. Για παράδειγμα, από ένα δείγμα 100 τιμών για την αντοχή ενός τύπου δοκών, χωρίς άλλη επεξεργασία του δείγματος δεν είναι εύκολη η διεξαγωγή πληροφοριών για την

μέση αντοχή των δοκών, την ομοιογένεια των δοκών, την μεταβλητότητα και άλλα. Για να διεξάγει κανείς χρήσιμες πληροφορίες ή άλλα χαρακτηριστικά για την αντοχή των δοκών πρέπει να τα οργανώσει σε μία περιληπτική αλλά πληροφοριακά περιεκτική φόρμα.

1.3 ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Οι γραφικές τεχνικές παρέχουν μία πολύ καλή μέθοδο για να αντιληφθούμε την μεταβλητότητα και τις ιδιότητες ενός συνόλου δεδομένων. Η διαδικασία ακολουθεί τα εξής βήματα:

- προσδιορισμός του **πεδίου τιμών** και **εύρους** αυτού, [ελάχιστη τιμή, μέγιστη τιμή],
- διαμέριση του εύρους αυτού σ' ένα σχετικά μικρό αριθμό **κλάσεων** (ομάδων),
- και τέλος στον προσδιορισμό των **συχνοτήτων** των αντίστοιχων κλάσεων, δηλαδή το πλήθος των δεδομένων που ανήκουν σε κάθε κλάση.

Υπάρχουν διάφοροι τύποι γραφικών παραστάσεων, **διαγράμματα** γραμμών, **ιστογράμματα** και **πολυγωνικές γραμμές**, η πιο αντιπροσωπευτική είναι το ιστόγραμμα των συχνοτήτων. Σε αυτό ο οριζόντιος άξονας παριστάνει το πεδίο τιμών της μεταβλητής που διερευνά ο μηχανικός, το οποίο χωρίζεται σε τμήματα αντίστοιχα των κλάσεων. Ορθογώνια τμήματα σχεδιάζονται έχοντας σαν βάσεις τις αντίστοιχες κλάσεις και ύψος τις αντίστοιχες συχνότητες. Το πιο ψηλό τμήμα δείχνει σε ποια περιοχή συναντούμε τις περισσότερες τιμές (μεγαλύτερη συχνότητα) της μεταβλητής. Ακόμη, από τα ύψη των άλλων ορθογωνίων τμημάτων διαφαίνεται αν οι τιμές του δείγματος σκορπίζονται συμμετρικά στο πεδίο τιμών της μεταβλητής, καθώς και άλλα χαρακτηριστικά αυτής.

Παράδειγμα 1.1

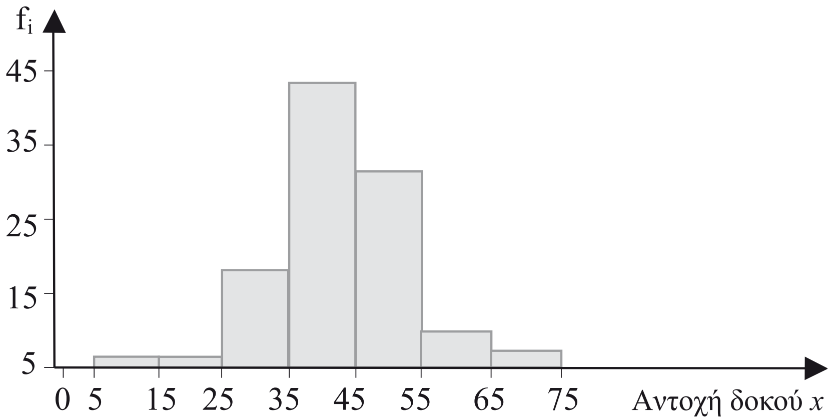
Για να διερευνήσουμε την αντοχή των σιδηροδοκών που πρόκειται να χρησιμοποιηθούν σε ένα κατασκευαστικό έργο δοκιμάστηκε η αντοχή 100 δοκών. Τα δεδομένα των αντοχών αυτών τοποθετήθηκαν σε μία αύξουσα σειρά, και στην συνέχεια προσδιορίσαμε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων, Πίνακα 1.1

Στη συνέχεια σχεδιάζουμε το ιστόγραμμα, όπου ο οριζόντιος άξονας παριστάνει την αντοχή δοκών, χωρίζεται σε 7 ίσα τμήματα, όσες και οι κλάσεις του πίνακα κατανομής συχνοτήτων. Τα ύψη των εφτά ορθογωνίων τμημάτων είναι ανάλογα με τις συχνότητες του Πίνακα 1.1.

Πίνακας 1.1

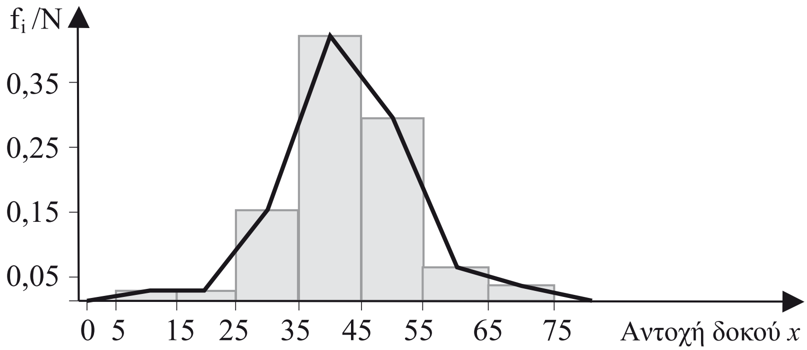
Κλάσεις Αντοχή δοκού (N/mm^2)	*Κέντρο κλάσης X (N/mm^2)*	*Συχνότητα f_i*	*Σχετική συχνότητα $f_i/100$*
5-15	10	1	0,1
15-25	20	1	0,1
25-35	30	15	0,15
35-45	40	43	0,43
45-55	50	30	0,30
55-65	60	8	0,08
65-75	70	2	0,02

Το ιστόγραμμα στο Σχήμα 1.1 είναι σχεδόν συμμετρικό με την μεγαλύτερη συχνότητα στην κλάση κάτω από 43 N/mm^2 και κάπως σταθερή ελάττωση προς τα δύο άκρα. Περισσότερη όμως διερεύνηση χρειάζεται για να καταλάβουμε περισσότερα χαρακτηριστικά του πληθυσμού.



Σχήμα 1.1 *Ιστόγραμμα για τα δεδομένα αντοχής δοκού με πλάτος κλάσης 10 N/mm^2*

Ένα άλλο χρήσιμο εργαλείο για να προσδιορίσουμε την κατανομή συχνότητας στην μεταβλητή είναι η πολυγωνική γραμμή. Μπορεί να σχεδιασθεί με την ένωση των ενδιάμεσων σημείων των επάνω πλευρών των ορθογωνίων τμημάτων του ιστογράμματος. Εάν η συχνότητα της κάθε κλάσης διαιρεθεί με τον αριθμό των δεδομένων τότε έχουμε την σχετική συχνότητα, και η πολυγωνική γραμμή εκφράζει την πιθανότητα η αντοχή της δοκού να βρεθεί στην αντίστοιχη κλάση. Το προκύπτον διάγραμμα λέγεται σχετική πολυγωνική γραμμή.



Σχήμα 1.2 *Πολυγωνική γραμμή σχετικής συχνότητας για τα δεδομένα αντοχής δοκού με πλάτος κλάσης 10 N/mm²*

Αν ο αριθμός παρατηρήσεων μεγαλώσει, και αυξηθεί ο αριθμός κλάσεων, και το πλάτος ελαττωθεί αρκετά, η πολυγωνική γραμμή σχετικής συχνότητας γίνεται μία καμπύλη συχνότητας. Αυτή είναι και στην πράξη η καμπύλη πιθανότητας, η οποία παριστάνει την μαθηματική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του πληθυσμού, δηλαδή για όλες τις δοκούς που πρόκειται να χρησιμοποιηθούν στο έργο.

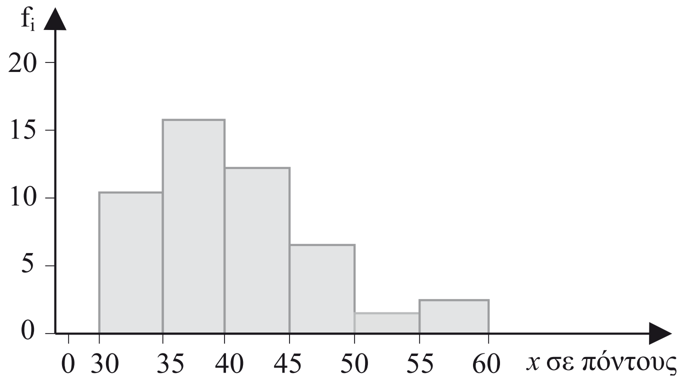
Παράδειγμα 1.2

Για να σχεδιάσει ένα αντιπλημμυρικό έργο ο μηχανικός πρέπει να διερευνήσει την ετήσια μέγιστη ένταση της βροχής. Για τον σκοπό αυτό έχει δεδομένα με την ετήσια μέγιστη ένταση από το 1953 έως το 2002. Ακολουθώντας την τυπική διαδικασία, τα δεδομένα μπαίνουν σε μία αύξουσα σειρά, και ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων για την μεταβλητή ετήσια μέγιστη ένταση βροχής είναι ο Πίνακας 1.2

Πίνακας 1.2

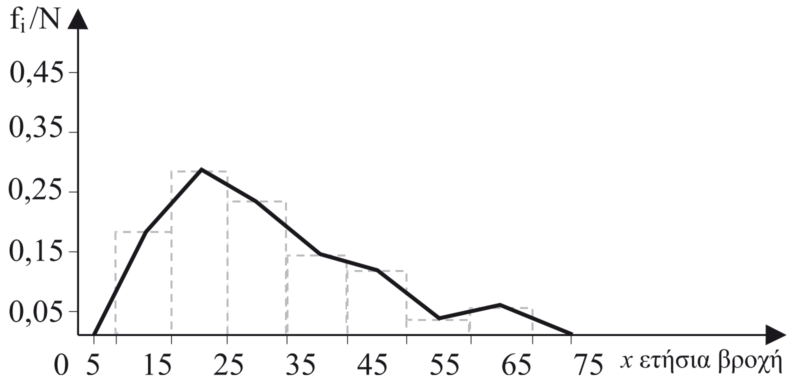
Κλάσεις ετήσιας μέγιστης βροχόπτωσης	*Κέντρο κλάσης X(cm)*	*Συχνότητα f_i*	*Σχετική συχνότητα $f_i/100$*
30-35	32,5	5	0,1
35-40	37,5	13	0,1
40-45	42,5	11	0,15
35-45	47,5	8	0,43
45-50	52,5	7	0,30
50-55	57,5	2	0,08
55-60	62,5	3	0,02

Το ιστόγραμμα στο Σχήμα 1.3 δείχνει οπτικά την κατανομή των συχνοτήτων για την ετήσια μέγιστη βροχόπτωση σε ένα τόπο.



Σχήμα 1.3 *Ιστόγραμμα για τα δεδομένα ετήσιας μέγιστης βροχόπτωσης σ'ένα τόπο*

Μετά το ιστόγραμμα, στο Σχήμα 1.4 η πολυγωνική γραμμή δείχνει ότι η κατανομή των συχνοτήτων της ετήσιας μέγιστης βροχόπτωσης δεν είναι συμμετρική. Μεγαλύτερη συχνότητα παρατηρείται στην μέγιστη βροχόπτωση από 15 μέχρι 25 πόντους, υπάρχουν όμως και πολλές άλλες περιπτώσεις όπου η ετήσια μέγιστη βροχόπτωση ξεπερνά τους 35 και 45 πόντους.



Σχήμα 1.4 *Πολυγωνική γραμμή σχετικής συχνότητας για τα δεδομένα ετήσιας μέγιστης βροχόπτωσης σε πόντους*

1.4 ΠΕΡΙΛΗΠΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Η γραφική διαδικασία στην παρουσίαση των δεδομένων είναι πολύ χρήσιμη στην διεξαγωγή γνώσης για την μεταβλητότητα και άλλων ιδιοτήτων. Ακόμη, υπάρχει και μία συμπληρωματική μέθοδος δια μέσου της οποίας μπορεί να αντληθεί περισσότερη πληροφορία που εμπεριέχεται στα δεδομένα. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί ένα σύνολο από χαρακτηριστικούς αριθμούς για να παρουσιάσει περιληπτικά τα δεδομένα, τονίζοντας τα κυριότερα χαρακτηριστικά. Αυτή η περιληπτική αριθμητική παρουσίαση παριστάνει μερικές ιδιότητες του ιστογράμματος και της πολυγωνικής γραμμής. Βασικά, η περιληπτική αριθμητική περιγραφή του δείγματος διακρίνεται σε τρεις τύπους: μέτρηση της **κεντρικής τάσης**, της **μεταβλητότητας** και της **ασυμμετρίας** των τιμών.

1.4.1 Μετρήσεις κεντρικής τάσης

Μία συνοπτική έκφραση των μετρήσεων ενός δείγματος είναι οι μετρήσεις κεντρικής τάσης οι οποίες είναι αντιπροσωπευτικές του δείγματος. Αυτές είναι γνωστές και σαν κεντρικές τιμές επειδή οι διάφορες τιμές που παίρνει η μεταβλητή διασκορπίζονται γύρω από αυτές τις τιμές. Αυτές είναι τρεις, η **μέση τιμή,** η **διάμεσος** και η **επικρατέστερη τιμή.**

Η **δειγματική μέση τιμή** υπολογίζεται από τα δεδομένα του δείγματος $x_1, x_2, \ldots, x_n,$ όπως

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Εάν κάποιος ήθελε να χρησιμοποιήσει μόνο τιμή για τα δεδομένα, η μέση τιμή θα ήταν ιδανική για αυτόν τον σκοπό. Για θεωρητικούς σκοπούς η μέση τιμή εκφράζει την τοποθεσία πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών όπου η μεταβλητή παίρνει διάφορες τιμές. όπως αναφέραμε και παραπάνω, καθώς αυξάνει ο αριθμός παρατηρήσεων του δείγματος η πολυγωνική γραμμή των συχνοτήτων της μεταβλητής προσεγγίζει μία καμπύλη γραμμή. Η μέση τιμή μπορεί να χαρακτηρισθεί σαν το κέντρο βάρος της επιφάνειας κάτω από την καμπύλη και πάνω από τον οριζόντιο άξονα, ή το κέντρο ισορροπίας από την καμπύλη συχνότητας.

Η μέση τιμή του πληθυσμού συμβολίζεται ως γνωστόν με το γράμμα **μ**. Η μέση τιμή έχει ένα βασικό μειονέκτημα επειδή μερικές φορές επιρεάζεται υπερβολικά από τυχόν ακραίες τιμές (**outliers**) που υπάρχουν στο δείγμα παρατηρήσεων. Τέτοιες τιμές δεν φαίνεται να συμφωνούν με την κατανομή της πληθώρας των δεδομένων. Υπάρχουν διάφορες αιτίες στις οποίες οφείλεται η εμφάνιση των outliers, όπως διαφορετικές συνθήκες παρατήρησης απ' ότι υποθέσαμε, λάθος μέτρησης, πειραματικής παρατήρησης, κ.τ.λ.. Υπάρχουν διαθέσιμοι αλγόριθμοι ή προγράμματα στον υπολογιστή όπου τέτοιες παρακλήσεις στα δεδομένα ανιχνεύονται, και ο μηχανικός μπορεί να διερευνήσει τα αίτια ή και απορρίψει την παρατήρηση αυτή. Συνήθως, σε πολλά στατιστικά προγράμματα υπολογίζεται η μέση τιμή του δείγματος με βάρη, όπου σε μερικές παρατηρήσεις που δεν συμφωνούν με την πληθώρα των δεδομένων δίνεται λιγότερο βάρος (down-weighted).

Η **διάμεσος** είναι η κεντρική τιμή καθώς τα δεδομένα του δείγματος έχουν τοποθετηθεί σε μία αύξουσα σειρά. Η διάμεσος έχει ένα βασικό πλεονέκτημα έναντι της μέσης τιμής. Συνήθως, η διάμεσος δεν επηρεάζεται από τις τυχόν ακραίες τιμές (outliers) του δείγματος.

Μαζί με την διάμεσο μπορούμε να αναφέρουμε δύο άλλες παραμέτρους με χρήσιμη πληροφορία για την τυχαία μεταβλητή, όπως το **πρώτο τεταρτημόριο** και το **τρίτο τεταρτημόριο,** τα οποία είναι οι διάμεσοι του πρώτου ήμισυ και του δευτέρου ήμισυ των παρατηρήσεων, αντίστοιχα.

Η **επικρατέστερη τιμή** είναι η πιο συχνότερη τιμή του δείγματος. Μερικές φορές δύο ή και περισσότερες τιμές μπορεί να της συναντούμε το ίδιο συχνά μέσα στο δείγμα. Δηλαδή, η επικρατέστερη τιμή είναι περισσότερο από μία. Γι' αυτό συνήθως την επικρατέστερη τιμή την διακρίνουμε από το ιστόγραμμα της μεταβλητής ή την πολυγωνική της γραμμή.

Παράδειγμα 1.3

Στην διερεύνηση της αντοχής δοκού η δειγματική μέση τιμή είναι 45 Nn/mm^2, η διάμεσος μπορεί να εκτιμηθεί και από τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων είναι 43 Nn/mm^2. Η επικρατέστερη τιμή της αντοχής δοκού βρίσκεται, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 1.1, στην κλάση με την μεγαλύτερη συχνότητα, και εκτιμάται ότι είναι 38 Nn/mm^2. Δηλαδή, δοκός με αντοχή γύρω από την τιμή 38 Nn/mm^2 είναι η πιο συνηθισμένη δοκός. Με άλλα λόγια η επικρατέστερη τιμή είναι η πιο αντιπροσωπευτική του δείγματος.

1.4.2 Μετρήσεις διασποράς και ασυμμετρίας

Ενώ μία μέτρηση κεντρικής τάσης επιτυγχάνεται προσδιορίζοντας μία κεντρική αντιπροσωπευτική τιμή, μία μέτρηση της διασποράς παριστάνει τον βαθμό διασκόρπισης των τιμών της μεταβλητής. Η διασπορά ακόμη δείχνει την ακρίβεια των δεδομένων. Ένας τρόπος ποσοτικοποίησης της διασποράς είναι το ***εύρος***, δηλαδή, η απόσταση μεταξύ της παρατηρούμενης ελαχίστης και μεγίστης τιμής του δείγματος. Το εύρος όμως είναι μία όχι φθίνουσα συνάρτηση του μεγέθους του δείγματος, γι’ αυτό δεν είναι από τις πιο χαρακτηριστικές του πληθυσμού. Επιπλέον το εύρος εξαρτάται πολύ μόνο από μερικές τιμές του δείγματος, στην περίπτωση που υπάρχουν μόνο μερικές πολύ μεγάλες ή πολύ μικρές ενώ η πληθώρα είναι συγκεντρωμένη γύρω από μία κεντρική τιμή. Γι’ αυτό η απόσταση μεταξύ του πρώτου και τρίτου τέταρτο-μορίου θα ήταν ιδανικότερη από το εύρος, σαν μέτρηση της διασποράς των τιμών της μεταβλητής. Ένας κλασσικότερος τρόπος εκτίμησης της διασποράς είναι η ***μέση απόλυτη απόκλιση D***, όπου προσδιορίζεται η μέση απόλυτη απόκλιση της κάθε τιμής x_i του δείγματος από την κεντρική τιμή μ. Αυτή η μέτρηση διασποράς είναι εύκολα κατανοητή και χρήσιμη. Παρόλα αυτά παραμένει χρήσιμη μόνο αν οι μεγάλες και οι μικρές αποκλίσεις είναι τόσο σημαντικές όσο και οι μέσες αποκλίσεις. Έτσι υπάρχουν θεωρητικές αιτίες για να εκτιμήσουμε την δειγματική διασπορά των δεδομένων με την ***τυπική απόκλιση s,*** η οποία είναι η τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης (μέσο άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων),

$$s = \sqrt{\frac{1}{n}(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}.$$

Σε αντίθεση με την μέση απόλυτη απόκλιση $\boldsymbol{D}$, η τυπική απόκλιση $\boldsymbol{s}$ επηρεάζεται πολύ από τις ακραίες τιμές της μεταβλητής, μεγάλες ή μικρές. Η τυπική απόκλιση του πληθυσμού δηλώνεται ως γνωστόν με το γράμμα $\boldsymbol{\sigma}$.

Τέλος, μία άλλη ενδιαφέρουσα ιδιότητα του ιστογράμματος ή της πολυγωνικής γραμμής των συχνοτήτων είναι κατά πόσο τα σχήματα αυτά είναι συμμετρικά. Ο **δειγματικός συντελεστής κυρτότητας** μετρά την ασυμμετρία από ένα σύνολο δεδομένων γύρω από την μέση τιμή του, όπως

$$g = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3}{ns^3}.$$

Ένα ιστόγραμμα λέγεται ότι έχει **θετική** κυρτότητα εάν έχει μακρύτερη ουρά προς τα δεξιά. Στην περίπτωση αυτή, τα δεδομένα του δείγματος που έχουν τιμές μικρότερες της μέσης τιμής είναι περισσότερα εκείνων που έχουν τιμές μεγαλύτερης της μέσης τιμής. Για ένα θετικά κυρτό ιστόγραμμα ισχύει

Επικρατέστερη Τιμή < Διάμεσος < Μέση Τιμή .

Η ανισότητα αυτή είναι αντίστροφη όταν η κυρτότητα είναι αρνητική. Προφανώς, για ένα συμμετρικό ιστόγραμμα ο συντελεστής κυρτότητας είναι μηδέν.

Παράδειγμα 1.4

Εάν η ετήσια βροχόπτωση σε μία πόλη για μία περίοδο έξι ετών ήταν 50, 50, 56, 42, 53, και 49 πόντοι, η δειγματική **μέση τιμή** είναι

$$\bar{x} = \frac{50+50+56+42+53+49}{6} = 50 \text{ πόντοι},$$

Η διάμεσος, ***M=50,*** η **επικρατέστερη τιμή,** ***T=50,*** η **τυπική απόκλιση**

$$s = \sqrt{\frac{1}{6}(50-50)^2 + (50-50)^2 + (56-50)^2 \ldots + (49-50)^2} = 4{,}69 \text{ πόντοι}.$$

1.5 ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΠΑΡΑΤΗΡΟΥΜΕΝΑ ΚΑΤΑ ΖΕΥΓΗ

Μέχρι τώρα, διερευνήσαμε την συμπεριφορά μιας μεταβλητής. Μπορούμε όμως να επεκτείνουμε την διερεύνηση και στην συσχέτιση δύο μεταβλητών, παίρνοντας παρατηρήσεις κατά ζεύγη. Στην πράξη, ξεκινάμε με γραφικές παραστάσεις και στην συνέχεια αριθμητικές εκτιμήσεις περιγράφουν περιληπτικά την συσχέτιση των δύο μεταβλητών. Για παράδειγμα, εάν έχουμε ένα σύνολο από n ζευγάρια παρατηρήσεων (x_1, y_1), (x_2, y_2) (x_3, y_3), …, (x_n, y_n), των δύο

μεταβλητών X και Y, μια αρχική ένδειξη της συσχέτισης επιτυγχάνεται δια μέσου του διαγράμματος σκεδασμού (scatter diagram). Εδώ οι άξονες του διαγράμματος παριστάνουν τα παρατηρούμενα ζεύγη τιμών.

Παράδειγμα 1.5

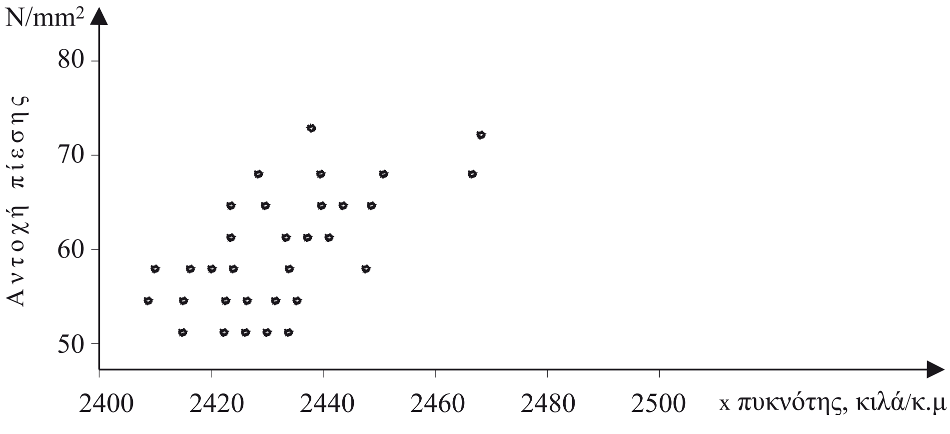
Το διάγραμμα διασποράς του Σχήματος 1.5 παριστάνει τα δεδομένα τσιμέντου, με την πυκνότητα x_i και την αντοχή πίεσης y_i, για 28 μέρες, πάνω στον οριζόντιο και κατακόρυφο άξονα, αντίστοιχα. Με την πρώτη ματιά, δεν είναι απόλυτα ξεκάθαρο ότι η πυκνότητα του τσιμέντου συσχετίζεται με την αντοχή πίεσης αυτού. Αν και κάποιος θα περίμενε μία πυκνότητα υψηλότερη ή χαμηλότερη από την μέση τιμή να συσχετίζεται με την αντοχή πίεσης του τσιμέντου, η οποία είναι αντίστοιχα υψηλότερη ή χαμηλότερη από την μέση της τιμή.

Η δειγματική συνδιακύμανση, $s_{X,Y}$, δίνει μία αριθμητική περίληψη του γραμμικού συσχετισμού μεταξύ των δύο ποσοτικών μεταβλητών. Αυτή είναι η μέση τιμή του γινομένου των αποκλίσεών τους από τις μέσες τιμές τους. Εάν η δειγματική συνδιακύμανση διαιρεθεί με τις δειγματικές τυπικές αποκλίσεις των δύο μεταβλητών, s_X και s_Y, επιτυγχάνουμε την άνευ διαστάσεων μέτρηση της γραμμικής σχέσης η οποία καλείται δειγματικός συντελεστής συσχέτισης

$$r_{X,Y} = \frac{1}{n s_X s_Y} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Ο συντελεστής συσχέτισης περιορίζεται από τις τιμές -1 και 1,

$$-1 \le r_{X,Y} \le 1.$$



Σχήμα 1.5 *Διάγραμμα σκεδασμού από δεδομένα τσιμέντου.*

Εάν ο συντελεστής συσχέτισης πλησιάζει το μηδέν δεν υπάρχει σχέση ανάμεσα στις δύο μεταβλητές. Ενώ, μία τιμή του συντελεστή πλησιέστερα προς το 1 ή -1 δείχνει ότι η αύξηση της μιας μεταβλητής θα προξενούσε κατά μέσο όρο αύξηση ή ελάττωση της άλλης, αντίστοιχα.

Οι δύο παραπάνω οριακές τιμές της ανισότητας είναι θεωρητικού ενδιαφέροντος και είναι εφαρμόσιμες όταν τα σημεία ενός διαγράμματος σκεδασμού βρίσκονται πάνω σε μία γραμμή τύπου

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i\,,$$

όπου β_0 και β_1 είναι σταθερές. Η σταθερά β_1 θα είναι θετική για όλες τις δυνατές συσχετίσεις συμπεριλαμβάνοντας την μέγιστη τιμή $r_{X,Y} = +1$. Στην αντίθετη περίπτωση, $r_{X,Y}$=-1, το β_1 θα είναι αρνητικό, δείχνοντας αρνητική συσχέτιση, δηλαδή, υψηλή τιμή της μεταβλητής X τείνει να σχετισθεί με χαμηλή τιμή της μεταβλητής Y.

Σε μερικές περιπτώσεις το διάγραμμα σκεδασμού μπορεί να δείχνει ότι υπάρχει εκθετικού ή άλλου τύπου μη γραμμική σχέση μεταξύ των δύο μεταβλητών. Σε αυτές τις περιπτώσεις, ακολουθούμε ειδικές διαδικασίες. Για παράδειγμα, μπορούμε να εφαρμόσουμε λογαριθμικούς, τετραγωνικούς ή άλλους μετασχηματισμούς στην μία ή και δύο μεταβλητές πριν την ανάλυση.

Παράδειγμα 1.6

Στον έλεγχο αντοχής τσιμέντου σε σχέση με την πυκνότητα του, Σχήμα 1.5 δεν φαίνεται δυνατή συσχέτιση μεταξύ των δύο μεταβλητών. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνεται αν υπολογίσουμε τον δειγματικό συντελεστή συσχέτισης έχουμε $r_{X,Y}$= +0,44. Όμως, η εισαγωγή στο γραμμικό μοντέλο και μιας άλλης μεταβλητής, όπως η επίδραση θερμοκρασίας ή υγρασίας στη περίοδο του ελέγχου, θα οδηγούσαν σε καλύτερη συσχέτιση για σκοπούς πρόβλεψης αντοχής τσιμέντου σε ένα πολύ-μεταβλητό μοντέλο παλινδρόμησης.

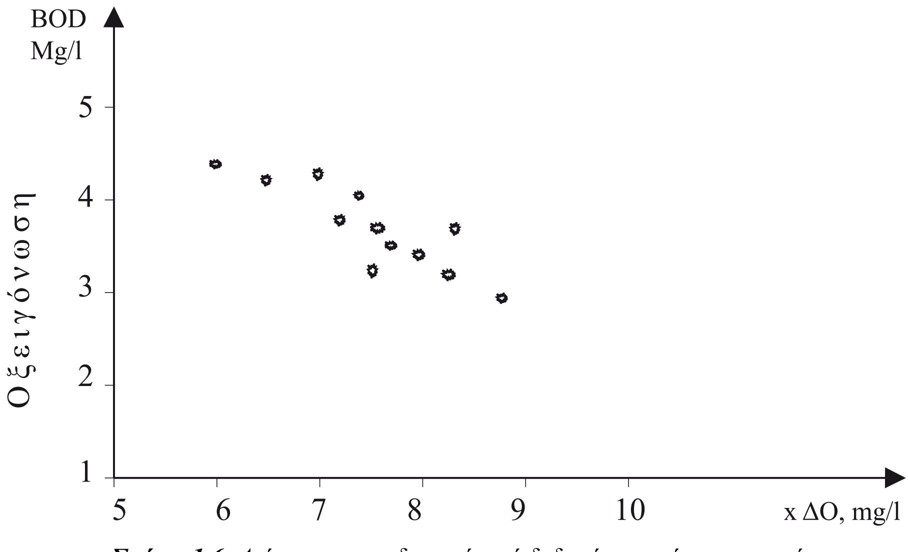
Εξισώσεις παλινδρόμησης όπως παραπάνω χρησιμοποιούνται συχνά για την πρόβλεψη της Y για μία γνωστή ή δεδομένη τιμή της X χωρίς να επικαλούμαστε την αιτία που προκαλεί την συσχέτιση.

Παράδειγμα 1.7

Ένα άλλο παράδειγμα με θετική ή αρνητική συσχέτιση είναι η σχέση μεταξύ των μεταβλητών που μετρούν την ποιότητα του νερού. Για την διερεύνηση της μόλυνσης του νερού ενός ποταμού, οι μεταβλητές που θα μπορούσαμε να μετρήσουμε μεταξύ άλλων είναι το **διαλυμένο οξυγόνο, DO**, και το **απαιτούμενο βιοχημικό οξυγόνο**, **BOD**, για την επιβίωση των ψαριών και άλλων οργανι-

σμών στο νερό του ποταμού. Έτσι υψηλή τιμή σε BOD δείχνει υψηλό επίπεδο μόλυνσης του νερού.

Το διάγραμμα σκεδασμού των δύο δεικτών της ποιότητας νερού, με βάση ένα δείγμα 30 παρατηρήσεων, φαίνεται στο Σχήμα 1.6. Όπως αναμενότανε, φαίνεται μία δυνατή αρνητική συσχέτιση, με υψηλές τιμές της DO να σχετίζονται με χαμηλές τιμές της BOD και αντιστρόφως. Ο συντελεστής συσχέτισης υπολογίζεται με βάση το δείγμα και είναι –0,90, και επιβεβαιώνει ότι η τιμή του BOD μπορεί να εκτιμηθεί από μετρήσεις του DO. Ο σκεδασμός στο διάγραμμα οφείλεται μερικώς στην ανεπάρκεια του ελέγχου BOD, και μερικώς σε άλλους παράγοντες όπως θερμοκρασία και το μέγεθος της ροής, η οποία επιδρά στο DO.



Σχήμα 1.6 *Διάγραμμα σκεδασμού από δεδομένα ποιότητας νερού*

1.6 ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΛΗΨΗ ΑΠΟΦΑΣΗΣ ΚΑΤΩ ΑΠΟ ΣΥΝΘΗΚΗ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑΣ

Η αβεβαιότητα στην μελέτη ενός έργου δεν οφείλεται μόνο στην μεταβλητότητα κάποιων παραμέτρων ή στην άγνωστη εξέλιξη κάποιων στοχαστικών γεγονότων, που μπορεί να μην έχουν καλές επιπτώσεις στο έργο. Αβεβαιότητα προέρχεται και από τον αριθμό παρατηρήσεων και τα μαθηματικά πρότυπα που επιλέγει ο μηχανικός για εκτιμήσεις ή προβλέψεις. Σε μία μελέτη ο μηχανικός πρέπει να κάνει την ανάλογη επιλογή τόσο των μηχανικών μοντέλων όσο και

των στατιστικών για προβλέψεις ή εκτιμήσεις των διάφορων μεγεθών. Όμως, μία αποτελεσματική επιλογή των στοχαστικών μοντέλων στηρίζεται σε συνθήκες, οι οποίες μερικές φορές είναι άγνωστες στον μηχανικό. Ως εκ τούτου τα στατιστικά μοντέλα δεν είναι τα ιδανικότερα στην κάθε μελέτη και γι' αυτό θα υπάρξουν μικρές αποκλίσεις στις εκτιμήσεις των παραμέτρων ή προβλέψεις άλλων ενδεχομένων. Τέτοιες αβεβαιότητες που προκαλούνται από την επιλογή και εφαρμογή των μοντέλων ίσως είναι σοβαρότερες και από την μεταβλητότητα κάποιων παραμέτρων.

Όλες οι αβεβαιότητες άσχετα με τα αίτια που τις προκαλούν μπορεί να εκτιμηθούν με τις έννοιες και μεθοδολογία των πιθανοτήτων, οι δε επιπτώσεις τους στα τεχνικά έργα μπορεί να αξιολογηθούν με τις στατιστικές μεθόδους.

Αν λοιπόν, οι διάφοροι παράμετροι στην μελέτη του μηχανικού είναι τυχαίες μεταβλητές, όπου είναι αβέβαιες οι τιμές τους, και αν τα διάφορα στατιστικά μοντέλα που επιλέγονται με βάση τα δείγματα και τις συνθήκες που επικρατούν δεν είναι τα ιδανικότερα, με ποιο τρόπο οι μέθοδοι πιθανοτήτων και στατιστικής βοηθούν ή συντελούν στην διαδικασία λήψης απόφασης;

Κάτω από το παραπάνω κλίμα αβεβαιότητας, θα μπορούσε ο μηχανικός να λαμβάνει υπόψη του τις χειρότερες τιμές των μεταβλητών, όπως την μέγιστη δυνατή βροχόπτωση, την ελάχιστη αντοχή του τσιμέντου, το μέγιστο δυνατό φορτίο, την μέγιστη δυνατή ένταση ενός πιθανού σεισμού, και να σχεδιάζει ανάλογα την ποσότητα των υλικών και την αντοχή των διαφόρων συστημάτων του έργου. Έτσι θα υπάρξει πολύ καλή αξιοπιστία στην κατασκευή αλλά το κόστος πολύ ασύμφορο.

Είναι απαραίτητο να επιτευχθεί κάποιο ζύγισμα ανάμεσα στην μείωση του κόστους κατασκευής και την ενδεχόμενη αύξηση των κινδύνων που διεγείρονται. Οι μέθοδοι των πιθανοτήτων και στατιστικής προσφέρουν πρότυπα στα οποία εμπλέκονται όλοι οι παράγοντες κόστους, αντοχής, ποιότητας, ασφάλεια, κ.τ.λ.. Βέλτιστη επιλογή θα είναι αυτή που επιτυγχάνει την καλύτερη επιθυμητή ισορροπία στους παράγοντες αυτούς. Η λήψη απόφασης διευκολύνεται και από το γεγονός ότι, οι μέθοδοι των πιθανοτήτων αντιστοιχούν στην κάθε επιλογή του μηχανικού μία πιθανότητα επιτυχίας του κατασκευαστικού έργου, ή την αξιοπιστία του όπως αλλιώς λέγεται.

1.6.1 Εφαρμογές των Πιθανοτήτων και Στατιστικής στα Τεχνικά Έργα

Στην συνέχεια αναφέρουμε περιληπτικά και παραδειγματικά μερικές εφαρμογές

των πιθανοτήτων και στατιστικής στα τεχνικά έργα ή άλλες μελέτες του μηχανικού, όπου παίρνει αποφάσεις κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας.

- **Υδρολογικά συστήματα**. Για την προστασία μιας πόλης από μία πλημμύρα λόγω καταιγίδας, πρέπει να κατασκευαστεί αντιπλημμυρικό έργο. Ο μηχανικός πρέπει να αποφασίσει για το μέγεθος του οχετού. Αυτό βέβαια εξαρτάται κυρίως από δύο **στοχαστικά μεγέθη**, την ένταση της βροχόπτωσης και την ποσότητα απορροής προς τον οχετό. Με την μεθοδολογία των πιθανοτήτων θα μπορούσε να προσδιορίσει την **κατανομή συχνότητας** ή πιθανότητας των **τυχαίων μεταβλητών**, που αφορούν τις μεταβλητές μέγιστη ένταση βροχόπτωσης και μέγιστη απορροή προς τον οχετό. Στη συνέχεια στατιστικά μοντέλα μπορούν να προσδιορίσουν με κάποια εμπιστοσύνη ένα **διάστημα** εντός του οποίου βρίσκεται η μέγιστη βροχόπτωση ή η μέγιστη απορροή, με βάση των οποίων αποφασίζεται το μέγεθος του οχετού, έτσι ώστε να επιτευχθεί αξιόλογη αποστράγγιση με το μικρότερο δυνατόν κόστος.

- **Κατασκευή οδοστρώματος.** Συχνά από την αντοχή ενός οδοστρώματος εξαρτάται η ασφάλεια των αυτοκινήτων, ή των αεροπλάνων αν πρόκειται για διάδρομο προσγείωσης και πολλά άλλα. Η διάρκεια ζωής ενός οδοστρώματος είναι τυχαία μεταβλητή και εξαρτάται κυρίως από τέσσερις παράγοντες, όπως **βροχόπτωση**, **υπέδαφος**, τυχαία ακραία γεγονότα (**σεισμός**, **παγετός**), και **πάχος** οδοστρώματος, εκ των οποίων οι τρεις πρώτοι είναι τυχαίες μεταβλητές. Σε μία μελέτη ο μηχανικός πρέπει να συγκεντρώσει στατιστικά δεδομένα για κάθε μία από τις τρεις μεταβλητές, ποσότητα βροχόπτωσης, πυκνότητα των εδαφικών υλικών του υποστρώματος, συχνότητα εμφάνισης παγετών ή σεισμών. Με την τεχνική της περιγραφικής στατιστικής έχει άμεσα πληροφορίες σχετικά με την μεταβλητότητα των τιμών των στοχαστικών παραγόντων, και με τις μεθόδους των πιθανοτήτων και στατιστικής μπορεί να γενικεύσει τα δειγματικά του συμπεράσματα με αρκετά υψηλή εμπιστοσύνη. Ακόμη, με βάση την πιθανοθεωρία εκτιμά την **πιθανότητα εμφάνισης ακραίων γεγονότων** στα επόμενα χρόνια. Η χρήση μοντέλων παλινδρόμησης, όπου στόχος είναι η **πρόβλεψη διάρκειας αντοχής** του οδοστρώματος, και η εκτίμηση των άλλων παραγόντων συντελούν στην καλή επιλογή του πάχους του οδοστρώματος, έτσι ώστε να επιτευχθεί αξιόλογη αξιοπιστία με το μικρότερο δυνατό κόστος.

- **Στατικά συστήματα.** Σε μία κατασκευή, ο μηχανικός μεταξύ των στοχαστικών παραγόντων πρέπει να λάβει υπόψη του και τις τυχαίες μεταβλητές όπως **φορτίο** πάνω στην κατασκευή, φορτίο από δυνατό άνεμο, φορτίο από

τυφώνα, δυνατός σεισμός και άλλα. Σύγχρονες μέθοδοι πιθανοτήτων και στατιστικής, με βάση τα στατιστικά δεδομένα, μπορούν να εκτιμήσουν τα διαστήματα μέσα στα οποία κινούνται αυτά τα στοχαστικά μεγέθη κατά την διάρκεια ζωής της κατασκευής, καθώς και την πιθανότητα να συμβούν διάφορα **καταστροφικά γεγονότα**. Έχοντας υπ' όψη αυτές τις εκτιμήσεις, ο μηχανικός διευκολύνεται στην επιλογή για την αντοχή και **ποιότητα των υλικών** που θα χρησιμοποιηθούν στην κατασκευή. Αλλά και η αντοχή των υλικών είναι επίσης μία τυχαία μεταβλητή. Σε μία τέτοια μελέτη με βάση την επιθυμητή διάρκεια ζωής του κτιρίου ο μηχανικός πρέπει να εξισορροπήσει το κόστος κατασκευής και το επίπεδο ασφάλειας.

- **Εδαφομηχανικά συστήματα.** Στη μελέτη των θεμελίων ενός μεγάλου κτιριακού συγκροτήματος πρέπει να υπολογιστεί η αντοχή του υπεδάφους. Όμως, η εκτίμηση της αντοχής του υπεδάφους είναι τυχαία μεταβλητή, διότι στο υπέδαφος υπάρχουν **ακανόνιστα στρώματα** διαφόρων υλικών με ανομοιογένεια στην πυκνότητα, υγρασία, και αρκετά άλλα. Τα δε δείγματα που βασίζονται οι εκτιμήσεις αυτών ενδέχεται να μην είναι επαρκή ή αντιπροσωπευτικά. Ακόμη, η επιλογή των μηχανικών πρότυπων για την εκτίμηση της αντοχής μπορεί να μην είναι η ιδανική για τις συνθήκες του συγκεκριμένου εδάφους. Συνεπώς, ο προσδιορισμός της αντοχής του υπεδάφους πρέπει να βασίζεται και σε πιθανοκρατικά πρότυπα. Διαφορετικά, υπερεκτίμηση της αντοχής του υπεδάφους εμπεριέχει κινδύνους, ενώ υποεκτίμηση της αντοχής συνεπάγεται μεγάλο κόστος κατασκευής.

- **Προγραμματισμός δραστηριοτήτων.** Η προσφορά που κάνει ο μηχανικός σε μια δημοπρασία προυποθέτει εκτίμηση της μέσης διάρκειας του έργου καθώς και του ανθρώπινου, μηχανικού και χρηματικού **δυναμικού**. Σε ένα μεγάλο έργο υπάρχουν πολλοί αστάθμητοι παράγοντες. Ο αριθμός εργαζομένων, ο αριθμός μηχανημάτων, οι καιρικές συνθήκες, απεργίες εργαζομένων και άλλα. Συνεπώς, η διάρκεια της κάθε δραστηριότητας στο έργο είναι τυχαία μεταβλητή. Ο μηχανικός πρέπει να σχεδιάσει κατά τέτοιο τρόπο τις δραστηριότητες έτσι ώστε να ολοκληρωθεί το έργο στο συντομότερο δυνατό διάστημα με το ελάχιστο ανθρώπινο ή μηχανικό δυναμικό. Ο σχεδιασμός αυτός δεν είναι εύκολος αφού οι δραστηριότητες πρέπει να ακολουθούν μία σειρά, άλλες προηγούνται και άλλες εκτελούνται ταυτόχρονα, και ακόμη οι διάρκειες αυτών είναι στοχαστικά μεγέθη. Η τεχνική των **γραφημάτων (network)** διευκολύνει των προγραμματισμό των δραστηριοτήτων, οπωσδήποτε όμως με συνδυασμό και πιθανοκρατικών πρότυπων. Γενικά ο προγραμματισμός δραστηριοτήτων εντάσσεται στα **Βιομηχανικά Συστή-**

ματα που αποτελούν μία μοντέρνα ειδικότητα του μηχανικού. Ο ρόλος των πιθανοτήτων και στατιστικής στην ειδικότητα αυτή είναι κάτι παραπάνω από βασικός.

- **Σφάλματα μετρήσεων**. Όλες οι μετρήσεις του μηχανικού εμπεριέχουν δύο ειδών σφάλματα, όπως τα **συστηματικά** και **στοχαστικά**. Τα συστηματικά μπορούν να διερευνηθούν τα αίτια που τις προκαλούν και να βελτιωθούν. Στα τυχαία όμως σφάλματα δεν γνωρίζουμε τα αίτια που τα προκαλούν, με την θεωρία πιθανοτήτων μπορούμε όμως να εκτιμήσουμε το μέγεθος και την διάδοσή τους.

- **Συγκοινωνιακή τεχνική**. Στη μελέτη κατασκευής ενός δρόμου ένας βασικός αστάθμητος παράγοντας είναι ο όγκος κυκλοφορίας αυτοκινήτων σε ώρα αιχμής. Μια πιθανοκρατική προσέγγιση του προβλήματος θα είχε ευεργετικά αποτελέσματα στον σχεδιασμό της χωρητικότητας του δρόμου έτσι ώστε με σχετικά χαμηλό κόστος να περιορίσουμε την συχνότητα συνωστισμού αυτοκινήτων ή **μποτιλιαρισμάτων** όπως λέγεται. Η διερεύνηση των ατυχημάτων στους δρόμους σχετίζεται με πολλούς παράγοντες όπως ταχύτητα αυτοκινήτων, συμπεριφορά οδηγών, ποιότητα οδοστρώματος, σήμανση και άλλα. Οι περισσότεροι από αυτούς τους παράγοντες είναι τυχαίες μεταβλητές και η διερεύνησή τους στηρίζεται στις έννοιες ειδικών κατανομών πιθανοτήτων όπως π.χ. **Poisson** κατανομή. Η επιτυχία σε ένα **σχεδιασμό αναχωρήσεων** λεωφορείων, τραίνων, αεροπλάνων, πλοίων, ή και άλλων μεταφορικών μέσων στηρίζεται στον προσδιορισμό της συχνότητας άφιξης ταξιδιωτών και κατανομή πιθανότητας άλλων τυχαίων γεγονότων που θα καθυστερούσαν την συγκοινωνία. Γενικά, το πρόβλημα της συγκοινωνίας είναι σύνθετο με πολλούς αστάθμητους παράγοντες. Η βελτίωση της συγκοινωνίας στηρίζεται στα στατιστικά δείγματα πληροφοριών και προυποθέτει γνώση των εννοιών πιθανότητας και πολλών άλλων στατιστικών μοντέλων.

- **Σημεία εξυπηρέτησης**. Σε πολλές μελέτες του ο μηχανικός προβληματίζεται με την επιλογή πλήθους σημείων εξυπηρέτησης. Ο **χρόνος εξυπηρέτησης** της κάθε περίπτωσης είναι τυχαία μεταβλητή, όπως και ο **αριθμός άφιξης** αυτών που επιθυμούν να εξυπηρετηθούν είναι στοχαστικό μέγεθος. Πολλά σημεία εξυπηρέτησης συνεπάγεται μεγάλο κόστος, ενώ λίγα σημεία εξυπηρέτησης θα προκαλούσε **μεγάλες ουρές** και πολύ **χρόνο αναμονής**. Αυτό το πρόβλημα συναντάται στην μελέτη κατασκευής αεροδρομίων, σταθμών, λιμανιών με γερανούς φόρτωσης-εκφόρτωσης, μεγάλων καταστημάτων και αλλού. Σε μία αποτελεσματική απόφαση σημείων εξυπηρέ-

τησης απαιτείται ο προσδιορισμός κατανομής πιθανότητας των αφίξεων και του χρόνου εξυπηρέτησης, καθώς και άλλων τεχνικών όπως προσομοίωση **Monte Carlo**, τεχνική η οποία ανήκει στην **εφαρμοσμένη πιθανότητα**. Με την τεχνική αυτή εκτιμάται ο ελάχιστος αριθμός σημείων εξυπηρέτησης για να διατηρηθούν το μήκος της ουράς και ο χρόνος αναμονής σε επιθυμητά επίπεδα. Έλλειψη γνώσης αυτών των τεχνικών ενδεχομένως να οδηγήσουν τον μηχανικό στην μέθοδο δοκιμής και λάθους που δεν είναι καθόλου ανταγωνιστική.

1.7 ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Σε αυτό το κεφάλαιο αναφέρθηκαν διάφορες γραφικές παραστάσεις για την παρουσίαση των δεδομένων, όπως διαγράμματα, ιστογράμματα, πολυγωνικές γραμμές, διαγράμματα σκεδασμού. Οι περισσότερες από τις αριθμητικές περιληπτικές περιγραφές των δεδομένων στους μηχανικούς είναι ουσιώδεις για την εφαρμογή των στατιστικών μεθόδων και πιθανοτήτων. Μεταξύ των πιο σπουδαίων είναι η μέση τιμή, η τυπική απόκλιση, και ο συντελεστής συσχέτισης. Οι μηχανικοί διερευνούν συχνά μεταβλητές, οι οποίες εμπεριέχονται στα κατασκευαστικά τους μοντέλα ως διάφορα μεγέθη. Παίρνοντας δείγματα τιμών αυτών των μεταβλητών, απαιτείται η διερμήνευση αυτών και η διεξαγωγή επουσιωδών συμπερασμάτων. Οι γραφικές και αριθμητικές μέθοδοι εδώ αποτελούν το πρώτο βήμα για την λήψη απόφασης κάτω από αβεβαιότητες, πριν προχωρήσουμε στην εφαρμογή των πιθανοτήτων και των άλλων μεθόδων της στατιστικής.

Ακόμη, στο κεφάλαιο αυτό τονίζεται ο ρόλος και η σημασία των πιθανοτήτων και στατιστικής στην λήψη απόφασης του μηχανικού κάτω από αβεβαιότητες. Αναφέρθηκαν αρκετές εφαρμογές και υποδείχθηκε περιγραφικά ο τρόπος αντιμετώπισης των στοχαστικών παραμέτρων και γεγονότων που σχετίζονται με ένα έργο έτσι ώστε οι επιδράσεις αυτών να είναι μετρήσιμες σε πιθανοκρατική βάση. Αυτό διευκολύνει τον μηχανικό στο σωστό σχεδιασμό και ανάλογο επιλογή υλικών.

Πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι οι μέθοδοι πιθανοτήτων και στατιστικής σε καμία περίπτωση δεν αντικαθιστούν την φυσική γνώση και εμπειρία του μηχανικού, ούτε μπορούν να απομακρύνουν την αβεβαιότητα. Διευκολύνουν όμως τον μηχανικό στις αποφάσεις του, αφού του παρέχουν την δυνατότητα εκτίμησης του κινδύνου και της αξιοπιστίας των έργων του για τις αντίστοιχες επιλογές του.

Ο μηχανικός ξεκινά την διερεύνηση της συμπεριφοράς μιας τυχαίας μεταβλητής, η οποία εμπλέκεται στην μελέτη του, με την περιγραφική στατιστική όπως περιληπτικά αναπτύχθηκε σε αυτό το κεφάλαιο. Βεβαίως, ο μηχανικός πρέπει να επεκτείνει τα δειγματικά του συμπεράσματα στον ευρύτερο πληθυσμό που σχετίζεται με το έργο του. Με αυτό ασχολείται το δεύτερο μέρος της στατιστικής, η **συμπερασματική στατιστική**, όπου τα συμπεράσματα συνοδεύονται και από μία πιθανότητα επιτυχίας. Αυτός είναι ένας ακόμη λόγος που ο μηχανικός πρέπει να καταλάβει πρώτα τις έννοιες των πιθανοτήτων και την μεθοδολογία τους πριν προχωρήσει στην συμπερασματική στατιστική. Στα επόμενα κεφάλαια αναπτύσσονται οι **έννοιες πιθανοτήτων** και τα βασικά εργαλεία της στατιστικής.

9 Έλεγχος Στατιστικών Υποθέσεων

Περιγραφή Κεφαλαίου

9.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

9.1.1 Υποθέσεις

Στο προηγούμενο κεφάλαιο ασχοληθήκαμε με τη εκτίμηση μιας παραμέτρου θ του πληθυσμού με βάση τις παρατηρήσεις ενός δείγματος. Προσπαθήσαμε να προσεγγίσουμε την αληθινή τιμή της θ όσο το δυνατόν καλύτερα. Αντίθετα στον έλεγχο στατιστικών υποθέσεων για την θ, υπάρχει εκ των προτέρων μία τιμή για την θ, και θέλουμε να επιβεβαιώσουμε αν αυτό είναι αληθές ή όχι, με βάση την εκτίμηση του δείγματος. Αυτό συνεπάγει ότι υπάρχουν δύο υποθέσεις που σχετίζονται σ' αυτό το είδος της στατιστικής μελέτης: την αρχική υπόθεση H_0, ότι η παράμετρος θ ισούται με την τιμή θ_0, και την εναλλακτική υπόθεση H_1, η οποία είναι η απόρριψη της H_0,

μηδενική υπόθεση	$H_0 : \theta = \theta_0$	ή	$H_0 : \theta \le \theta_0$	ή	$H_0 : \theta \ge \theta_0$
εναλλακτική	$H_1 : \theta \ne \theta_0$		$H_1 : \theta > \theta_0$		$H_1 : \theta < \theta_0$

Ο σκοπός της στατιστικής ανάλυσης είναι να αποφασίσουμε εάν ισχύει η μηδενική υπόθεση H_0, ή να την απορρίψουμε και κατά συνέπεια θα αποδεχτούμε την εναλλακτική H_1. Οι τρεις οδηγίες που ακολουθούν μας βοηθούν να αποφασίσουμε πώς να διατυπώσουμε τις υποθέσεις H_0 και H_1 στα διάφορα προβλήματά μας:

1. Όταν ελέγχουμε την υπόθεση σχετικά με την τιμή κάποιας παραμέτρου θ, η διατύπωση της ισότητας πάντοτε θα συμπεριλαμβάνεται μέσα στην H_0. Με αυτόν τον τρόπο η H_0 υποδεικνύει μια ειδική αριθμητική τιμή που θα μπορούσε να είναι η αληθινή τιμή της θ. Η τιμή αυτή καλείται «μηδενική τιμή» και δηλώνεται με θ_0.
2. Οτιδήποτε είναι να ερευνηθεί ή υποστηριχθεί είναι η εναλλακτική υπόθεση H_1.
3. Εφόσον η προς διερεύνηση υπόθεση είναι η H_1, αναζητούμε ένδειξη για να απορρίψουμε την H_0 και ως εκ τούτου να αποδεχθούμε την H_1.

Ένα παράδειγμα θα μας βοηθήσει για να καταλάβουμε αυτές τις ιδέες.

Παράδειγμα 9.1

Οι μηχανικοί μιας μάρκας αυτοκινήτου σκοπεύουν να χρησιμοποιήσουν περισσότερο αλουμίνιο στην κατασκευή του αυτοκινήτου πιστεύοντας ότι περιορί-

ζουν τα καύσιμα. Οι μηχανικοί ελπίζουν ότι το νέο αυτοκίνητο θα μπορεί να διανύσει κατά μέσο όρο περισσότερο από 16 χιλιόμετρα με ένα λίτρο βενζίνης. Για να υποστηριχθεί και στατιστικά το επίτευγμα αυτό θεωρούμε ως εναλλακτική υπόθεση H_1 την δήλωση $\mu > 16$, όπου μ είναι η μέση απόσταση σε χιλιόμετρα με κατανάλωση ενός λίτρου βενζίνης. Η μηδενική υπόθεση H_0 είναι αυτόματα το αντίθετο της H_1, $\mu \leq 16$. Έτσι οι δύο υποθέσεις είναι

$$H_0 : \mu \leq 16$$
$$H_1 : \mu > 16$$

Παρατηρούμε ότι η δήλωση της ισότητας εμφανίζεται στην μηδενική υπόθεση. Αυτό επισημαίνει την τιμή 16 σαν πιθανή τιμή για το μ ή με άλλα λόγια η αρχική τιμή «μηδενική τιμή» για το μ είναι $\mu_0 = 16$. Παρατηρούμε επίσης ότι εάν η H_0 απορριφθεί, τότε η υποστήριξη των μηχανικών, H_1, θα γίνει αποδεχτή και η κατασκευή του νέου αυτοκινήτου θα προχωρήσει.

9.1.2 Στατιστικό Ελέγχου και Σφάλματα Απόφασης

Με βάση τα στατιστικά δεδομένα του δείγματος, πρέπει να παρθεί μία απόφαση. Η απόφαση θα είναι είτε να απορριφθεί η H_0 ή να παραμείνει. Η απόφαση παίρνεται παρατηρώντας την τιμή κάποιου στατιστικού του δείγματος, του οποίου η κατανομή πιθανότητας *είναι γνωστή κάτω από την υπόθεση ότι η «μηδενική» τιμή θ_0 είναι αληθής τιμή της θ*. Το στατιστικό αυτό ονομάζεται *στατιστικό ελέγχου*. Εάν η τιμή του στατιστικού ελέγχου είναι κάπως απίθανη όταν $\theta = \theta_0$ τότε απορρίπτουμε την H_0 και προτιμούμε την H_1. Εάν η δειγματική τιμή του στατιστικού είναι αρκετά πιθανή με την υπόθεση ότι $\theta = \theta_0$, τότε δεν απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση H_0. Αυτό σημαίνει ότι στο τέλος της διαδικασίας του ελέγχου θα βρεθούμε σε μία από τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. Απορρίπτεται η H_0 ενώ είναι αληθής και αυτό είναι γνωστό ως *σφάλμα τύπου Ι*.
2. Απορρίπτεται η H_0 όταν είναι αληθής η H_1.
3. Δεν απορρίπτεται η H_0 ενώ είναι αληθής η H_1. Στην περίπτωση αυτή έχουμε ως γνωστόν το *σφάλμα τύπου ΙΙ*.
4. Δεν απορρίπτεται η H_0 όταν η H_0 είναι αληθής.

Παράδειγμα 9.2

Στο παράδειγμα 9.1 ελέγχουμε

$$H_0: \mu \leq 16$$
$$H_1: \mu > 16$$

το σφάλμα τύπου I συμβαίνει όταν απορρίπτουμε την H_0 ενώ είναι αληθής. Πρακτικά, συμπεραίνουμε ότι η μέση απόσταση που διανύουν τα αυτοκίνητα νέου τύπου με ένα λίτρο βενζίνη είναι $\mu > 16$ ενώ στην πραγματικότητα αυτό δεν αληθεύει. Το σφάλμα αυτό οδηγεί στην απαραίτητη χρήση του αλουμινίου. Ένα σφάλμα Τύπου II συμβαίνει εάν δεν απορρίπτεται η H_0 όταν η H_1 είναι αληθής. Σε αυτή την περίπτωση δεν χρησιμοποιείται αλουμίνιο στην κατασκευή των αυτοκινήτων παρόλα που αυτό βελτιώνει την ποσότητα καυσίμων.

▲

9.1.3 Επίπεδο Σημαντικότητας και Περιοχή Απόρριψης

Παρατηρούμε ότι ανεξάρτητα από το τι συμβαίνει, το λάθος είναι πιθανό. Κάθε φορά που η H_0 απορρίπτεται, ένα σφάλμα Τύπου I μπορεί να συμβεί, και κάθε φορά που η H_0 δεν απορρίπτεται ένα σφάλμα Τύπου II μπορεί να συμβεί. Στον στατιστικό έλεγχο δεν υπάρχει τρόπος να αποφύγουμε αυτό το πρόβλημα. Η δουλεία του στατιστικολόγου είναι να σχεδιάσει την όλη διαδικασία του ελέγχου έτσι ώστε η πιθανότητα του I ή II σφάλματος να είναι όσο το δυνατόν μικρή.

Η διαδικασία του στατιστικού ελέγχου περιλαμβάνει εκ των προτέρων εκείνες των τιμών του στατιστικού του ελέγχου οι οποίες θα οδηγήσουν στην απόρριψη της H_0. Αυτές οι τιμές αποτελούν αυτό που λέγεται **κρίσιμη περιοχή** ή **περιοχή απόρριψης** του ελέγχου. Η πιθανότητα ότι το στατιστικό του ελέγχου θα πέσει μέσα σε αυτή την περιοχή παρόλα που $\theta = \theta_0$ συμβολίζεται με $\boldsymbol{\alpha}$ και ονομάζεται **επίπεδο σημαντικότητας**. Δηλαδή σε ένα στατιστικό έλεγχο, α είναι η πιθανότητα να συμβεί το σφάλμα του Τύπου I. Το επόμενο παράδειγμα εξηγεί περισσότερα για την παραπάνω διαδικασία.

Παράδειγμα 9.3

Για να ελέγξουμε την υπόθεση στο προηγούμενο παράδειγμα 9.2

$$H_0: \mu \leq 16$$
$$H_1: \mu > 16$$

Ένα τυχαίο δείγμα από 36 αυτοκίνητα νέου τύπου επιλέγονται και δοκιμάζεται η διανυόμενη απόσταση σε χιλιόμετρα ανά λίτρο βενζίνης:

23,8	14,3	8,8	13,7	15,3	19,61
14,9	21,5	24,4	18,0	10,5	26,7
20,3	23,5	17,4	17,6	12,5	20,7
18,6	17,1	18,8	6,5	22,7	15,2
23,1	27,5	15,1	24,5	19,5	16,8
20,0	18,4	15,6	9,8	18,9	17,7

Σχεδιάζουμε τον έλεγχο έτσι ώστε το α, η πιθανότητα απόρριψης της H_0 ενώ είναι αληθής (μ =16) να είναι μικρή, π.χ. α = 0,05. Το στατιστικό ελέγχου, λογικά, θα μπορούσε να είναι η δειγματική μέση τιμή $\overline{X}$. Υπολογίζοντας την δειγματική μέση τιμή από αυτά τα δεδομένα έχουμε $\overline{x}=18{,}04$ χιλιόμετρα/λίτρο. Εάν μ ισούται με την «μηδενική» τιμή μ_0, $\mu=16$, τότε από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα η μεταβολή $\overline{X}$ ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 16 και τυπική απόκλιση ας θεωρήσουμε $\sigma_{\overline{x}}=5/\sqrt{n}=5/6$, $\overline{X}\sim N(16,\,(5/6)^2)$. Με βάση αυτά τα δεδομένα μπορούμε να ισχυρισθούμε ότι δειγματική τιμή $\overline{x}=18{,}04$ είναι αρκετά μεγάλη ώστε να απορρίψουμε την H_0; Λογικά θα απορρίψουμε την H_0 αν το $\overline{x}$ βρίσκεται μέσα στην κρίσιμη περιοχή ή περιοχή απόρριψης του ελέγχου η οποία είναι μεγαλύτερη από την *κρίσιμη τιμή* $\overline{x}_c$,

$$\overline{x}_c=\mu_0+z_{1-a}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=16+z_{0,95}\frac{5}{6}=17{,}375,$$

διότι

$$P(\overline{X}>\mu_0+z_{1-\alpha}\sigma/\sqrt{n}\,|\,\mu=\mu_0)=\alpha \tag{9.1}$$

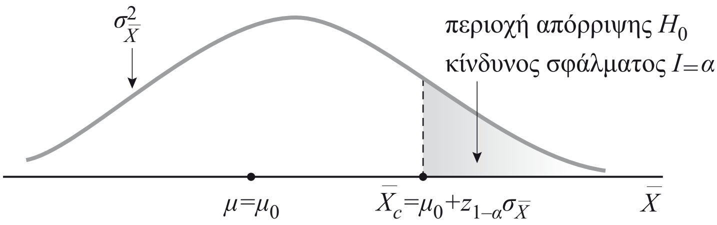
ή

$$P(\overline{X}>17{,}375\,|\,\mu=16)=0{,}05$$

Δηλαδή, απορρίπτουμε την H_0 αφού η τιμή $\overline{x}=18{,}05$ βρίσκεται μέσα στην περιοχή απόρριψης ή πιο απλά ξεπερνά το κρίσιμο σημείο $\overline{x}_c=17{,}375$, $\overline{x}>c$, και παραδεχόμαστε την $H_1:\mu>16$.

Παρατηρούμε τελικά ότι το πεδίο τιμών της μεταβλητής $\overline{X}$ χωρίζεται σε δύο περιοχές $(-\infty,17{,}375)$ και $(17{,}375,\,+\infty)$. Εάν η δειγματική τιμή $\overline{x}$ βρίσκεται μέσα στην *περιοχή απόρριψης* $(17{,}375,\,+\infty)$, απορρίπτουμε την H_0 και συμπεραίνουμε ότι η μέση διανυόμενη απόσταση ανά λίτρο βενζίνης είναι μεγαλύτερη από 16, $\mu>16$. Επιλέξαμε τέτοιο *κρίσιμο σημείο*

$$x_c=\mu_0+z_{1-\alpha}\sigma_{\overline{x}}=17{,}375$$



Σχήμα 9.1. *Περιοχή απόρριψης της H_0 για το παράδειγμα 9.3.*

έτσι ώστε η πιθανότητα το στατιστικό ελέγχου $\overline{X}$ να βρεθεί στην περιοχή απόρριψης, ενώ στην πραγματικότητα ισχύει $\mu=16$, να είναι $\alpha=0,05$. Δηλαδή σχεδιάζουμε έτσι τον έλεγχο ώστε η πιθανότητα να συμβεί το σφάλμα τύπου I να είναι 0,05. Παρόλα που η δειγματική μέση τιμή $\overline{x}=18,05$ ξεπερνά το κρίσιμο σημείο $c=17,375$ και απορρίπτουμε την H_0 και παραδεχόμαστε την H_1, υπάρχει μια μικρή πιθανότητα το $a=0,05$, τα δεδομένα του δείγματος να προέρχονται από μια κανονική κατανομή της οποίας η μέση τιμή είναι $\mu=16$ και όχι $\mu>16$. ▲

Στο προηγούμενο παράδειγμα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι χρησιμοποιήθηκε η «μηδενική» τιμή $\mu_0=16$ για να προσδιορίσουμε το κρίσιμο σημείο ή περιοχή για τον έλεγχο, ενώ η μηδενική υπόθεση επιτρέπει τιμές για το μ μικρότερες του 16. Αυτό δεν είναι λάθος, αφού οι πολύ μεγάλες τιμές της $\overline{X}$ είναι κάπως απίθανο να συμβούν όταν $\mu=16$, είναι επίσης κάπως απίθανο να συμβούν όταν $\mu<16$. Δηλαδή, κάθε τιμή του στατιστικού $\overline{X}$, η οποία οδηγεί στην απόρριψη του 16 σαν μία εύλογη τιμή για το μ, επίσης μας οδηγεί στην απόρριψη κάθε τιμής μικρότερης του 16.

9.1.4 Σχέσεις Σφαλμάτων I και II

Το στατιστικό ελέγχου είναι δυνατόν να μην βρεθεί στην περιοχή απόρριψης ακόμη και αν η H_0 δεν είναι αληθής και θα έπρεπε να απορριφθεί. Εάν συμβαίνει αυτό, έχουμε σφάλμα τύπου II του οποίου η πιθανότητα συμβολίζεται με β. Αλλά, η πιθανότητα β είναι πιο δύσκολο να υπολογισθεί από ότι η πιθανότητα α. Για κάθε έλεγχο, το β εξαρτάται από την εναλλακτική τιμή στην υπόθεση H_1 η οποία δεν ορίζεται συγκεκριμένα. Έτσι, το β μπορεί να ευρεθεί μόνο αν δώσουμε συγκεκριμένη τιμή για το θ στην εναλλακτική υπόθεση H_1, όπως στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 9.4

Η κρίσιμη περιοχή για το παράδειγμα 9.3 είναι $(17{,}375,\ +\infty)$. Αν υποθέσουμε ότι η αληθινή μέση διανυόμενη απόσταση ανά λίτρο βενζίνης είναι 19, ποια είναι η πιθανότητα ότι το στατιστικό $\overline{X}$ θα βρεθεί έξω από την κρίσιμη περιοχή, $\overline{X} < 17{,}375$, οπότε δεν θα απορριφθεί η H_0; Θα υπολογίσουμε, δηλαδή, την πιθανότητα σφάλματος τύπου ΙΙ, β.

$$\begin{aligned}\beta &= P\ (\text{σφάλματος τύπου ΙΙ})\\ &= P\ (\text{δεν απορρίπτεται η } H_0 \,|\, \mu = 19)\\ &= P(\overline{X} \text{ δεν είναι στην κρίσιμη περιοχή} \,|\, \mu = 19)\\ &= P(\overline{X} < 17{,}375 \,|\, \mu = 19)\\ &= \Phi\left(\frac{17{,}375 - 19}{5/6}\right) = \Phi(-1{,}45) = 0{,}026\end{aligned}$$

Έτσι, η πιθανότητα σφάλματος τύπου ΙΙ, αν η πραγματική μέση τιμή είναι $\mu = 19$, είναι $\beta = 0{,}026$. Η πιθανότητα β μπορεί να ελαττωθεί αν ελαττωθεί το κρίσιμο σημείο το οποίο είναι 17,375. Αυτό όμως συνεπάγει την αύξηση της πιθανότητας σφάλματος τύπου Ι. Δηλαδή, σε ένα στατιστικό έλεγχο αν αυξήσουμε την τιμή α, ελαττώνεται η τιμή β. Στην πράξη ο στατιστικολόγος ενδιαφέρεται περισσότερο για μικρό κίνδυνο σφάλματος τύπου Ι γι' αυτό επιλέγει μικρό α π.χ. μία τιμή από το διάστημα (0,01, 0,05). ▲

Σε ένα στατιστικό έλεγχο οι κίνδυνοι σφαλμάτων περιγράφονται περιληπτικά στον Πίνακα 9.1

Πίνακας 9.1. *Περιληπτική περιγραφή αποφάσεων και κίνδυνοι σφαλμάτων σε ένα στατιστικό έλεγχο.*

Απόφαση	***Πραγματική Κατάσταση***	
	Αληθής H_0	*Αληθής* H_1
Απόρριψη H_0	Τύπος σφάλματος Ι (πιθανότητα α)	σωστή απόφαση
όχι απόρριψη H_0	σωστή απόφαση	Τύπος σφάλματος ΙΙ (Πιθανότητα β)

9.1.5 Διαδικασία Στατιστικού Ελέγχου

Κατά την διαδικασία του στατιστικού ελέγχου επιλέγεται το τυχαίο δείγμα των παρατηρήσεων και στη συνέχεια προσδιορίζουμε το επίπεδο σημαντικότητας α για το οποίο θέλουμε να διεξαχθεί ο έλεγχος. Ακολουθεί η εκτίμηση του στατιστικού του ελέγχου και στη συνέχεια αυτό συγκρίνεται με το κρίσιμο σημείο όπως περιγράφεται στα βήματα που ακολουθούν:

Βήμα 1. Διατυπώνουμε τις υποθέσεις H_0 και H_1.

Βήμα 2. Επιλέγουμε το επίπεδο σημαντικότητας α.

Βήμα 3. Επιλέγουμε το κατάλληλο στατιστικό ελέγχου για την παράγραφο θ.

Βήμα 4. Υπολογίζουμε τις τιμές του στατιστικού ελέγχου με βάση το δείγμα.

Βήμα 5. Ορίζουμε τα κρίσιμα σημεία με βάση το επίπεδο σημαντικότητας α.

Βήμα 6. Αποφασίζουμε αν θα απορρίψουμε την H_0 συγκρίνοντας τις τιμές του στατιστικού ελέγχου και κρίσιμων σημείων.

9.2 ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ

Ένα από τα πιο συνηθισμένα προβλήματα είναι ο έλεγχος στατιστικών υποθέσεων σχετικά με την μέση τιμή. Παραδειγματικά αναφέραμε προηγουμένως πως αυτό μπορεί να γίνει αν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί κανονική κατανομή και η διακύμανση σ_X^2 είναι γνωστή. Ενδέχεται όμως η διακύμανση να είναι άγνωστη και πρέπει να εκτιμηθεί από το δείγμα των παρατηρήσεων. Στην περίπτωση αυτή το στατιστικό ελέγχου δεν ακολουθεί κανονική αλλά t-student κατανομή. Αν η τυχαία μεταβλητή X δεν ακολουθεί κανονική κατανομή τότε το στατιστικό ελέγχου μπορεί να προσεγγίσει την κανονική κατανομή για μεγάλο δείγμα παρατηρήσεων, π.χ. $n > 30$. Διαφορετικά το στατιστικό είναι αγνώστου κατανομής και ο έλεγχος μπορεί να διεξαχθεί μόνο με μη παραμετρικές μεθόδους. Στις παραγράφους που ακολουθούν θεωρούμε ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί κανονική κατανομή

$$X \sim N(\mu, \sigma_X^2)$$

με άγνωστη την μέση τιμή μ, και γνωστή ή άγνωστη την διακύμανση σ_X^2 όπως ακολουθεί στις παραγράφους 9.2.1 και 9.2.2 αντίστοιχα.

9.2.1 Γνωστή η Διακύμανση σ_X^2

Βήμα 1: Στατιστικές υποθέσεις

Οι υποθέσεις για την μέση τιμή μ μπορούν να έχουν μία από τις ακόλουθες τρεις μορφές. Με μ_0 δηλώνουμε την «μηδενική» τιμή της μέσης τιμής, αυτές είναι:

I	II	III
$H_0: \mu \leq \mu_0$	$H_0: \mu \geq \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$
$H_1: \mu > \mu_0$	$H_1: \mu < \mu_0$	$H_1: \mu \neq \mu_0$
δεξιός μονόπλευρος έλεγχος	αριστερός μονόπλευρος έλεγχος	δίπλευρος έλεγχος

Η μορφή I καλείται δεξιός μονόπλευρος έλεγχος διότι η κρίσιμη περιοχή βρίσκεται στην δεξιά πλευρά της κατανομής του στατιστικού του ελέγχου, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 9.2. Η μορφή I επιλέγεται όπως αναφέρθηκε και στην παράγραφο 9.1 όταν υποστηρίζεται ότι η μέση τιμή μ του πληθυσμού της X ξεπερνά την «μηδενική» τιμή μ_0. Απόρριψη της H_0 σημαίνει ότι η μέση τιμή μ ξεπερνά την αρχική τιμή μ_0. Παρόμοια έχουμε και για την δεύτερη μορφή ελέγχου II όπου υποστηρίζεται ότι η μέση τιμή της X είναι μικρότερη από την τιμή μ_0. Η κρίσιμη περιοχή βρίσκεται στην αριστερή πλευρά της κατανομή, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 9.2. Τέλος, στην τρίτη μορφή III έχουμε τον δίπλευρο έλεγχο όπου υποστηρίζεται ότι η μέση τιμή της X δεν είναι κοντά στην τιμή μ. Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 9.2 ο έλεγχος αυτός έχει δύο κρίσιμες περιοχές εκατέρωθεν της κατανομής του στατιστικού. Απόρριψη της H_0 σημαίνει ότι η μέση τιμή μ διαφέρει αρκετά από την μ_0.

Οι παραπάνω τρεις μορφές υποθέσεων για την μέση τιμή μπορούν να διατυπωθούν ισοδύναμα ελέγχοντας $H_0: \mu = \mu_0$ ενάντια σε μία από τις εναλλακτικές $\mu > \mu_0$, $\mu < \mu_0$ ή $\mu \neq \mu_0$. Πιο συγκεκριμένα, τιμές του στατιστικού ελέγχου οι οποίες οδηγούν στην απόρριψη της μ_0 και συνεπάγουν ότι $\mu > \mu_0$ οδηγούν επίσης στην απόρριψη κάθε τιμής της μ μικρότερες από μ_0. Επίσης, τιμές του στατιστικού ελέγχου οι οποίες μας οδηγούν στην απόρριψη της μ_0 και συνεπάγουν ότι $\mu < \mu_0$ επίσης μας οδηγούν να απορρίψουμε κάθε τιμή της μ μικρότερη από μ_0. Γι' αυτό τον λόγο πολύ στατιστικολόγοι προτιμούν να εκφράσουν τις υποθέσεις ως

I	II	III
$H_0: \mu = \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$
$H_1: \mu > \mu_0$	$H_1: \mu < \mu_0$	$H_1: \mu \neq \mu_0$

Η διατύπωση αυτή τονίζει περισσότερο το γεγονός ότι όταν διεξάγουμε έλεγχο στατιστικών υποθέσεων η πιθανότητα α, η κατανομή του στατιστικού

ελέγχου και οι κρίσιμες περιοχές προσδιορίζονται με την υπόθεση ότι $\mu = \mu_0$, όπως περιγράφεται αναλυτικότερα στα παρακάτω βήματα.

Βήμα 2: Επιλογή Επιπέδου Σημαντικότητας α

Ένα επίπεδο σημαντικότητας α (κίνδυνος σφάλματος τύπου I), $\alpha = 0{,}05$, 0,012, 0,01,…, επιλέγεται για τον στατιστικό έλεγχο. Στην πράξη το επίπεδο σημαντικότητας ποικίλει με το πρόβλημα που μελετάται και τις επιπτώσεις από μία εσφαλμένη απόφαση.

Βήμα 3: Επιλογή Μοντέλου του Στατιστικού Ελέγχου

Αφού $\bar{X} = \sum_{ip=1}^{n} X_i / n$ είναι ένας εκτιμητής της μ, είναι λογικό να μην απορρίψουμε την H_0 εάν η $\bar{X}$ δεν απέχει πολύ από την μ_0. Για ένα δείγμα μεγέθους n, η δειγματική μέση τιμή $\bar{X}$ είναι τυχαία μεταβλητή κανονικής κατανομής με διακύμανση σ_X^2 / n, και αν υποθέσουμε ότι ισχύει $\mu = \mu_0$ έχουμε

$$\bar{X} \sim N(\mu_0, \sigma_X^2 / n) .$$

Συμπερασματικά, για να ελέγξουμε εάν ή όχι η τιμή μ_0 αιτιολογείται με βάση το δείγμα, το στατιστικό του ελέγχου είναι η δειγματική μέση τιμή $\bar{X}$ ή, ακόμη πιο κατάλληλο, η τυποποιημένη $\bar{X}$, η οποία χρησιμοποιείται στην πράξη ως στατιστικό ελέγχου,

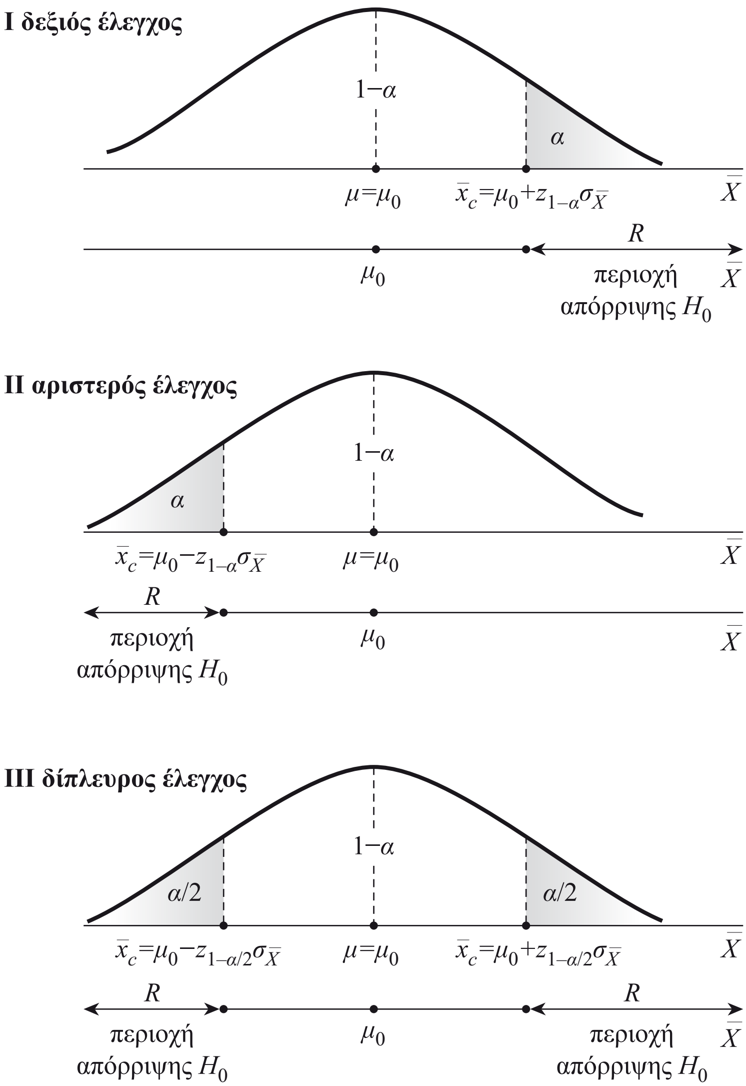
$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_X / \sqrt{n}} \tag{9.2}$$

όπου Z ακολουθεί τυπική κατανομή, $Z \sim N(0, 1)$.

Βήμα 4: Προσδιορισμός Περιοχής Απόρριψης – Κρίσιμα Σημεία

Η κρίσιμη περιοχή ή περιοχή απόρριψης R (rejection area) περιέχει όλες εκείνες τις τιμές της $\bar{X}$ οι οποίες απέχουν πολύ από την μ_0. Παραδειγματικά αναφέραμε προηγουμένως ότι στον **δεξιό μονόπλευρο έλεγχο** για επίπεδο σημαντικότητας α, η περιοχή απόρριψης R είναι $(\mu_0 + Z_{1-\alpha}\sigma_{\bar{X}}, \infty)$ και το κρίσιμο σημείο $\bar{x}_c = \mu_0 + z_{1-\alpha}\sigma_{\bar{X}}$, βλέπε Σχήμα 9.1. Για τον αριστερό μονόπλευρο έλεγχο, παρόμοια με την εξίσωση (9.1) έχουμε

$$P(\bar{X} < \mu_0 - z_{1-\alpha}\sigma_{\bar{X}} \mid \mu = \mu_0) = \alpha \tag{9.3}$$



Σχήμα 9.2. *Κρίσιμα σημεία και περιοχές απόρριψης* H_0, *για το στατιστικό* $\overline{X}$.

και ως εκ τούτου το κρίσιμο σημείο είναι $\bar{x}_c = \mu_0 - z_{1-a}\sigma_{\overline{X}}$ η δε περιοχή απόρριψης $R = (-\infty,\ \mu_0 - z_{1-a}\sigma_{\overline{X}})$.

Στην περίπτωση του **δίπλευρου ελέγχου** η H_0 απορρίπτεται όταν η τιμή του στατιστικού $\overline{X}$ είναι είτε πολύ μεγάλη ή πολύ μικρή. Γι' αυτό, για επίπεδο σημαντικότητας α έχουμε παρόμοια με την εξίσωση (9.3),

$$P(\overline{X} \le \mu_0 - z_{1-a/2}\sigma_{\overline{X}} \quad \text{ή} \quad \overline{X} \ge \mu_0 + z_{1-a/2}\sigma_{\overline{X}} \mid \mu = \mu_0) = \alpha \qquad (9.4)$$

και ως εκ τούτου έχουμε δύο κρίσιμα σημεία το αριστερό $\overline{x}_c = \mu_0 - z_{1-\alpha/2}\sigma_{\overline{X}}$ και το δεξιό $\overline{x}_c = \mu_0 + z_{1-a/2}\sigma_{\overline{X}}$ και επίσης δύο περιοχές απόρριψης $R = (-\infty,\ \mu_0 - z_{1-\alpha/2}\sigma_{\overline{X}})$ ή $R = (\mu_0 + z_{1-\alpha/2}\sigma_{\overline{X}},\ \infty)$.

Στο Σχήμα 9.2 επιδεικνύονται οι περιοχές απόρριψης της H_0 για τα τρία είδη στατιστικού ελέγχου.

Παρατήρηση

- Υπάρχει μία γενική δήλωση την οποία πρέπει να έχουμε υπόψη μας όταν διεξάγουμε ένα στατιστικό έλεγχο για κάθε παράμετρο:
  «Για να ελέγξουμε μια υπόθεση για μία παράμετρο π.χ. μ, πρέπει να γνωρίζουμε την κατανομή του στατιστικού π.χ. $\overline{X}$, έστω και κατά προσέγγιση, κάτω από την υπόθεση ότι $\mu = \mu_0$».

Συνήθως, στην πράξη χρησιμοποιείται, για λόγους ευκολίας, το τυποποιημένο στατιστικό Z, εξίσωση 9.2

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_{\overline{X}}}$$

το οποίο ακολουθεί τυπική κανονική κατανομή, $Z \sim N(0,\,1)$. Εάν επιθυμούμε ο έλεγχος να έχει επίπεδο σημαντικότητας α, τότε πρέπει να επιλέξουμε τέτοια κρίσιμα σημεία z_c έτσι ώστε να πληρούνται οι ακόλουθες εξισώσεις:

Για τον δεξιό έλεγχο,

$$P(Z > z_c) = \alpha \qquad (9.4)$$

δηλαδή, $z_c = z_{1-\alpha}$, βλέπε Σχήμα 9.3

Για τον αριστερό έλεγχο

$$P(Z < z_c) = \alpha \qquad (9.5)$$

δηλαδή, $z_c = -z_{1-\alpha}$, βλέπε Σχήμα 9.3

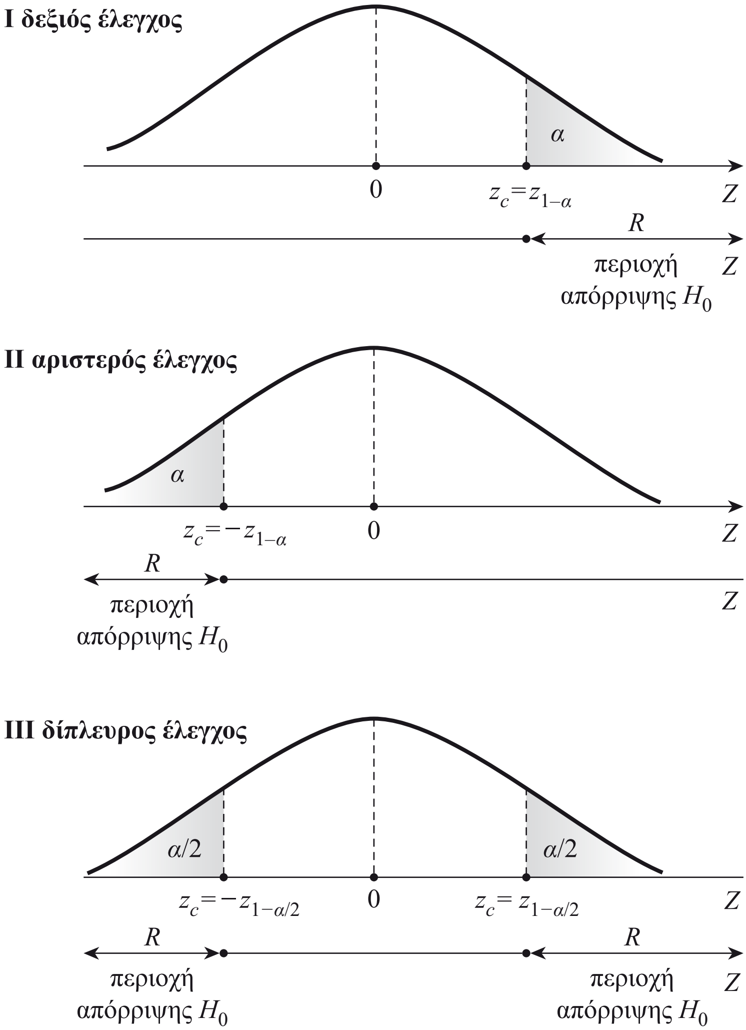
Τέλος, για τον δίπλευρο έλεγχο,

$$P(|Z| > z_c) = \alpha \qquad (9.6)$$

ή

$$P(Z < -z_c \quad \text{ή} \quad Z > z_c) = \alpha$$

δηλαδή, $z_c = z_{1-\alpha/2}$, βλέπε Σχήμα 9.3.



Σχήμα 9.3. *Κρίσιμα σημεία και περιοχές απόρριψης H_0, για το τυποποιημένο στατιστικό Z.*

Βήμα 5: Υπολογισμός Εκτίμησης Στατιστικού

Από το δείγμα μεγέθους n, υπολογίζεται η δειγματική μέση τιμή

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

και στη συνέχεια η τιμή του τυποποιημένου στατιστικού είναι,

$$z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma_{\overline{X}}} \tag{9.7}$$

Βήμα 6: Επιλογή Απόφασης

Εάν η τιμή του στατιστικού Z βρίσκεται μέσα στην περιοχή απόρριψης απορρίπτουμε την H_0 και κατά συνέπεια αποδεχόμαστε την H_1. Πιο συγκεκριμένα,

1. για τον δεξιό έλεγχο, εάν $z > z_c = z_{1-\alpha}$ απορρίπτουμε την H_0.
2. για τον αριστερό έλεγχο, εάν $z < z_c = -z_{1-\alpha}$ απορρίπτουμε την H_0.
3. για τον δίπλευρο έλεγχο, εάν $z < -z_{1-\alpha/2}$ ή $z > z_{1-\alpha/2}$
   ή ισοδύναμα $|z| > z_{1-\alpha/2}$ απορρίπτουμε την H_0.

Παράδειγμα 9.5

Το μέγιστο επιτρεπτό επίπεδο έκθεσης μικροκυμάτων ραδιενέργειας είναι κατά μέσο όρο 10 microwatts/τετραγωνικό πόντο. Υπάρχει ενδοιασμός ότι μία μεγάλη κεραία (μεταδότης) τηλεόρασης μολύνει την ατμόσφαιρα προκαλώντας το επίπεδο των μικροκυμάτων ραδιενέργειας πάνω από το ασφαλές επίπεδο. Για να μελετήσουμε αυτό το πρόβλημα αρχίζουμε με το πρώτο βήμα, διατυπώνουμε τις υποθέσεις

1. $H_0 : \mu \leq 10$
   $H_1 : \mu > 10$

Ένα δείγμα από 25 μετρήσεις παίρνονται τυχαία από την ατμόσφαιρα κοντά στον μεταδότη της τηλεόρασης και υπολογίσθηκε ότι η δειγματική μέση τιμή έκθεσης μικροκυμάτων ραδιενέργειας είναι $\overline{x} = 10{,}3$.

Αν είναι γνωστό ότι η έκθεση ραδιενέργειας X ακολουθεί κανονική κατανομή $X \sim N(\mu,\ \sigma_x^2 = 2)$ όπου είναι γνωστή η διακύμανσή της σ_x^2, τότε ακολουθούμε τα γνωστά βήματα:

2. Επιλέγουμε ως επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0{,}05$.
3. Το στατιστικό του ελέγχου, δεδομένου ότι $\mu_0 = 10$ και $\sigma_{\overline{X}} = 2/\sqrt{25}$, είναι

$$Z = \frac{\overline{X} - 10}{2/\sqrt{25}}$$

4. Το κρίσιμο σημείο στον δεξιό μονόπλευρο έλεγχο για $\alpha = 0{,}05$ είναι
   $z_c = z_{1-\alpha} = z_{0{,}95} = 1{,}65$

5. Αντικαθιστούμε στο στατιστικό την δειγματική μέση τιμή $\overline{x}=10$ και έτσι έχουμε την δειγματική τιμή του στατιστικού,

$$z=\frac{10,3-10}{2/5}=0,75$$

6. Η τιμή του στατιστικού, z , δεν ξεπερνά το κρίσιμο σημείο z_c ,

$$z=0,75<z_c=1,65$$

γι' αυτό η μηδενική υπόθεση H_0 δεν απορρίπτεται.

Παρ' όλα που η δειγματική μέση τιμή μόλυνσης είναι $\overline{x}=10,3$ μεγαλύτερη από το επιτρεπτό όριο 10, δεν είναι αρκετά μεγάλη για να απορρίψουμε την υπόθεση $H_0 : \mu=10$. Τα δεδομένα αυτά δεν είναι ικανά να υποστηρίξουν ότι η μόλυνση ξεπερνά το επιτρεπτό ασφαλές όριο. Αν επιχειρήσουμε να αυξήσουμε το επίπεδο σημαντικότητας (κίνδυνος σφάλματος Ι) α, π.χ. α =0,25 τότε το κρίσιμο σημείο είναι $z_c=z_{0,75}\simeq 0,7$ και ως εκ τούτου απορρίπτουμε την H_0 διότι $z>z_c$. Τέτοια απόφαση όμως αυξάνει τον κίνδυνο σφάλματος Ι από $a=0,05$, σε $a=0,25$ το οποίο δεν είναι λογικό. ▲

Παράδειγμα 9.6

Είναι γνωστό ότι κατά μέσο όρο η νικοτίνη που περιέχεται σε κάθε είναι τουλάχιστον 1,6 mg/τσιγάρο. Μία βιομηχανία ισχυρίζεται ότι ανακάλυψε νέα επεξεργασία του καπνού η οποία ρίχνει τον μέσο όρο νικοτίνης. Για να ελέγξουμε αυτόν τον ισχυρισμό αναλύθηκε ένα δείγμα από 20 τσιγάρα αυτής της βιομηχανίας το οποίο έδωσε μέσο όρο 1,48 mg/τσιγάρο. Εάν είναι γνωστό ότι η ποσότητα νικοτίνης / τσιγάρο είναι τυχαία μεταβλητή κανονικής κατανομής με διακύμανση $\sigma^2=0,2^2$, τι συμπέρασμα εξάγεται σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha=0,05$.

Ακολουθούμε τα γνωστά βήματα:

1. Μέχρι τώρα είναι γνωστό ότι η μέση νικοτίνη είναι τουλάχιστον 1,6 mg / τσιγάρο, $\mu\geq 1,6$. Υποστηρίζεται ότι με την νέα επεξεργασία η μέση νικοτίνη μειώνεται γι' αυτό η εναλλακτική υπόθεση H_1 θα είναι $\mu<1,6$. Έτσι μπορούμε να διατυπώσουμε τις υποθέσεις,

$$H_0 : \mu\geq 1,6$$
$$H_1 : \mu<1,6$$

2. Επιλέγουμε ως επίπεδο σημαντικότητας $\alpha=0,05$.

3. Το στατιστικό του ελέγχου ως γνωστόν είναι

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_{\overline{x}}} = \frac{\overline{X} - 1{,}6}{0{,}2 / \sqrt{20}}$$

4. Αφού πρόκειται για αριστερό μονόπλευρο έλεγχο το κρίσιμο σημείο z_c θα είναι

$$z_c = -z_{1-\alpha} = -1{,}6$$

5. Ακολουθεί ο υπολογισμός του στατιστικού, δεδομένου ότι $\overline{x} = 1{,}48$, έχουμε

$$z = \frac{1{,}48 - 1{,}6}{0{,}2 / \sqrt{20}} \simeq 2{,}68$$

6. Η επιλογή της απόφασης είναι προφανής. Αφού η τιμή του στατιστικού είναι μικρότερη του κρίσιμου σημείου,

$$z \simeq -2{,}68 < z_c = -1{,}6$$

απορρίπτουμε την H_0.

Η δειγματική μέση τιμή $\overline{x} = 1{,}48$ είναι αρκετά μικρότερη της μηδενικής υπόθεσης $\mu = 1{,}6$ και βρίσκεται μέσα στην περιοχή απόρριψης της H_0. Το δείγμα είναι αρκετό για να απορρίψουμε την $H_0 : \mu \geq 1{,}6$ σε επίπεδο $\alpha = 0{,}05$. Παραδεχόμαστε ότι η μέση νικοτίνη μειώθηκε.

Παρατηρούμε, επίσης, ότι και για επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0{,}01$ το κρίσιμο σημείο είναι $z_c = -z_{0,99} = -2{,}33$, το οποίο οδηγεί πάλι στην απόρριψη της H_0 διότι $z = -2{,}68 < z_c = -2{,}33$. ▲

Παράδειγμα 9.7

Ένα σήμα με τιμή μ στέλνεται από την τοποθεσία A, στη συνέχεια η τιμή του σήματος που λαμβάνεται σε μια άλλη τοποθεσία B είναι τυχαία μεταβλητή, X, με τυπική απόκλιση 2 και μέση τιμή μ. Δηλαδή, στο σήμα προστίθεται ένας τυχαίος θόρυβος κανονικής κατανομής $N(0, 4)$. Θεωρείται ότι το σήμα που εκπέμπεται από το A έχει τιμή $\mu = 8$. Για να βεβαιωθεί αυτό, ένα δείγμα από 5 σήματα λαμβάνεται στην τοποθεσία B και έδωσε δειγματική μέση τιμή $\overline{x} = 9{,}5$. Να ελεγχθεί η υπόθεση ότι η τιμή του σήματος που εκπέμπεται από την A περιοχή δεν διαφέρει από την τιμή 8.

1. Βασικά, εδώ μπορούμε να ελέγξουμε ότι ο τιμές των σημάτων που λαμβάνει η B, X, προέρχονται από μία μέση τιμή $\mu = 8$, συν ένα τυχαίο θόρυβο κανονικής κατανομής $N(0, 4)$. Προφανώς η ισότητα ανήκει πάντα στην μηδε-

νική υπόθεση $H_0 : \mu = 8$. Ως εναλλακτική η πιο κατάλληλη είναι $H_1 : \mu \neq 8$. Η εναλλακτική υπόθεση $H_1 : \mu > 8$ δεν συνίσταται διότι πρωτίστως μας ενδιαφέρει να ελέγξουμε αν τα σήματα από την περιοχή A έχουν μέση τιμή 8 ή όχι. Έτσι, οι πιο κατάλληλες υποθέσεις είναι

$$H_0 : \mu = 8$$
$$H_1 : \mu \neq 8$$

2. Επιλέγουμε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0{,}05$.

3. Το σήμα που λαμβάνεται στην B είναι τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί κανονική κατανομή, $X \sim N(\mu_x = 8,\ \sigma_x^2 = 4)$, με την υπόθεση ότι η μηδενική είναι αληθής. Άρα η δειγματική μέση τιμή $\bar{X}$, του σήματος στην B, ακολουθεί κανονική κατανομή, $\bar{X} \sim N(8,\ \sigma_X^2 / 5)$. Έτσι, έχουμε το ακόλουθο στατιστικό

$$Z = \frac{\bar{X} - 8}{2/\sqrt{5}},$$

το οποίο είναι τυπικής κανονικής κατανομής.

4. Τα κρίσιμα σημεία για ένα δίπλευρο έλεγχο επιπέδου σημαντικότητας $\alpha = 0{,}05$ είναι

$$z_c = z_{1-\alpha/2} = z_{0{,}975} = 1{,}96 \quad \text{ή} \quad z_c = -1{,}96$$

5. Έχοντας την δειγματική μέση τιμή των σημάτων στην περιοχή B, $\bar{x} = 9{,}5$ υπολογίζουμε την τιμή του στατιστικού Z,

$$z = \frac{9{,}5 - 8}{2/\sqrt{5}} = 1{,}65$$

6. Παρατηρούμε ότι η απόλυτος τιμή του στατιστικού, $|z| = 1{,}65$, δεν ξεπερνά την κρίσιμη τιμή $z_{1-\alpha/2} = 1{,}66$

$$|z| = 1{,}65 < z_{1-\alpha/2} = 1{,}66,$$

γι' αυτό δεν απορρίπτουμε την υπόθεση H_0.

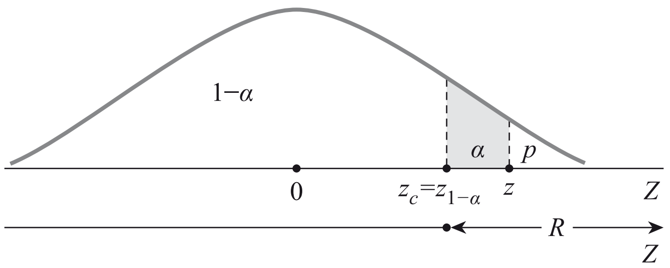
Η δειγματική μέση τιμή των σημάτων στην B δεν είναι αρκετά μεγάλη για να απορρίψουμε την υπόθεση ότι τα σήματα που εκπέμπονται από την A έχουν μέση τιμή $\mu = 8$. Το γεγονός ότι στην B έχουμε μέση τιμή των σημάτων $\bar{x} = 9{,}5$ πιθανολογικά οφείλεται στον θόρυβο που εμπεριέχουν. ▲

9.2.2 Έλεγχος σημαντικότητας, p-τιμή

Μέχρι τώρα ο έλεγχος των στατιστικών υποθέσεων διεξάχθηκε με βάση το επίπεδο σημαντικότητας α, το οποίο δίνεται εκ των προτέρων, και από το οποίο προσδιορίζονται τα αντίστοιχα κρίσιμα σημεία του στατιστικού όπως $z_{1-\alpha}$ ή $z_{1-\alpha/2}$ κ.τ.λ. Τονίζουμε ότι για κάθε δειγματική τιμή του στατιστικού Z, ο έλεγχος προχωρά σε απόρριψη της H_0 εάν η τιμή z βρίσκεται μέσα στην περιοχή απόρριψης. Τότε η πιθανότητα σφάλματος τύπου I έχει ως μέγιστη το α. Εναλλακτικά, όμως, μπορούμε να διατυπώσουμε ότι η μηδενική H_0 απορρίπτεται, όταν η πιθανότητα ότι το στατιστικό Z ξεπερνά την δειγματική τιμή z, δεδομένου ότι $\mu = \mu_0$, είναι μικρότερη του α,

$$P(Z > z \mid \mu = \mu_0) = p \leq \alpha \tag{9.8}$$

Προφανώς η 9.8 ισχύει για την απόρριψη της H_0 στον δεξιό μονόπλευρο έλεγχο, όπως εξηγείται και στο Σχήμα 9.4.



Σχήμα 9.4. *Όταν το z βρίσκεται μέσα στην περιοχή απόρριψης τότε το p είναι μικρότερο του επιπέδου σημαντικότητας α, $p \leq \alpha$.*

Αντίστοιχα για τον αριστερό μονόπλευρο και δίπλευρο έλεγχο, έχουμε απόρριψη της H_0 όταν ισχύει

$$P(Z < z \mid \mu = \mu_0) = p \leq \alpha$$

και $P(|Z| > |z| \mid \mu = \mu_0) = p \leq \alpha$.

Έτσι, καταλήγουμε ότι μπορούμε να αποφασίσουμε απόρριψη για την H_0, υπολογίζοντας πρώτα, την τιμή του στατιστικού και δεύτερον την πιθανότητα p, ότι η Z θα ξεπεράσει την τιμή z. Αυτή η πιθανότητα ονομάζεται **p-τιμή** του ελέγχου και δίνει το κρίσιμο επίπεδο σημαντικότητας, με την έννοια ότι, αν η μηδενική H_0 απορριφθεί ο κίνδυνος σφάλματος τύπου I είναι p.

Προβλήματα για λύση

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ

1) Σε μία χημική διαδικασία είναι πολύ σημαντικό ότι το ειδικό διάλυμα που προκύπτει να έχει ακριβώς 8,20 pH. Μία μέθοδος που προσδιορίζει το pH των διαλυμάτων αυτού του τύπου είναι γνωστό ότι δίνει μετρήσεις οι οποίες κατανέμονται κανονικά με μέση τιμή την πραγματική τιμή του pH και με μία τυπική απόκλιση 0,02. Αν από 10 ανεξάρτητες μετρήσεις προέκυψαν οι ακόλουθες τιμές pH

8,18 8,16 8,17 8,22 8,19 8,17 8,15 8,21 8,16 8,18

ποιο συμπέρασμα σε επίπεδο σημαντικότητος $\alpha = 0{,}10$ ή $\alpha = 0{,}05$;

2) Η μέση δύναμη θραύσης ενός τύπου σαμπρέλας που απαιτείται είναι 300 psi. Από εμπειρία του παρελθόντος είναι γνωστό ότι η τυπική απόκλιση της δύναμης θραύσης είναι 10 psi. Εάν ένα δείγμα από 10 σαμπρέλες παρουσίασε θραύση στις ακόλουθες πιέσεις

310 295 298 299 298 302 296 290 220 290

θα μπορούσατε να συμπεράνετε, σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0{,}05$, ότι ο τύπος της σαμπρέλας είναι αποδεκτός;

3) Μία εταιρεία προσδιορίζει ότι η μέση διάρκεια ζωής ενός τύπου μπαταρίας είναι τουλάχιστον 340 ώρες. Ένα δείγμα από 18 τέτοιες μπαταρίες παρουσίασε τα ακόλουθα δεδομένα.

337	342	332
342	348	330
344	343	354
362	334	320
325	336	332
318	328	340

Με την υπόθεση ότι η διάρκεια της μπαταρίας ακολουθεί κανονική κα-

τανομή, μπορούμε με βάση το δείγμα να υποδείξουμε ότι οι προδιαγραφές δεν πληρούνται;

4) Μία εταιρεία προμηθεύει πλαστικά φύλλα για βιομηχανική χρήση. Ένας νέος τύπος πλαστικού έχει παραχθεί και η εταιρεία υποστηρίζει ότι η μέση αντοχή, κάμψης του νέου προϊόντος ξεπερνά τα 30 psi. Το ακόλουθο δείγμα πάρθηκε από την παραγωγή;

30,2	31,7	22,5	27,5
27,6	29,8	28,7	31,3
31,2	25,3	26,6	22,9
30,1	33,4	32,5	21,7

Με βάση αυτό το δείγμα, ποιο συμπέρασμα θα μπορούσατε να εξάγετε; (Υποθέστε κανονικότητα).

5) Μια μάρκα αυτοκινήτου διαφημίζεται ότι καταναλώνει ανά γαλόνι βενζίνη ανά 40 χιλιόμετρα οδήγησης στον εθνικό δρόμο. Εάν από 10 τυχαίες μετρήσεις προέκυψαν τα ακόλουθα χιλιόμετρα ανά γαλόνι βενζίνης

36 30 34 37 35 35 38 40 46 43

θα πιστεύατε σε αυτήν την διαφήμιση; Ποιες υποθέσεις πρέπει να κάνετε;

6) Ένας κατασκευαστής μπαταριών τηλεχειριστηρίου υποστηρίζει ότι η μέση διάρκεια ζωής των μπαταριών που ξεπερνά τις 30 ώρες. Μία εταιρεία σκοπεύει να αγοράσει μία μεγάλη παρτίδα των μπαταριών αυτών εφόσον πράγματι πληρούνται αυτές οι προδιαγραφές. Ένα δείγμα από 36 μπαταρίας ελέγχεται και έδωσε μέση διάρκεια 34 ώρες. Εάν είναι γνωστό ότι η τυπική απόκλιση της διάρκειας των μπαταριών της παραγωγής αυτής είναι 5 ώρες, για ποιο επίπεδο σημαντικότητας α θα αγορασθούν οι μπαταρίες;

7) Ας υποθέσουμε ότι στο πρόβλημα 1 επιθυμούμε να σχεδιάσουμε έτσι τον έλεγχο ώστε εάν το pH είναι πράγματι 8,20 θα καταλήγαμε σε αυτήν την επιλογή με πιθανότητα 0,95. Από την άλλη πλευρά, εάν το pH είναι 8,23 η πιθανότητα να απορρίψουμε την μηδενική, $H_0 : \mu = 8,20$, είναι τουλάχιστον 0,95.

(α) Σχεδιάστε τον στατιστικό έλεγχο σ' αυτήν την περίπτωση

(β) Ποιο είναι το απαιτούμενο μέγεθος δείγματος;