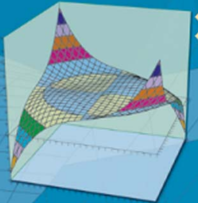
Νικόλαος Δ. Καρανικόλας

Εισαγωγή στο Διαφορικό Λογισμό Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών



- 200 λυμένες
- 350 άλυτες ασκήσεις

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα

ISBN 960-431-873-X

Εκτύπωση **Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ**
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 23920 72.222 (5 γραμ.) - Fax: 23920 72.229
e-mail: info@ziti.gr

Βιβλιοπωλείο **ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ**
Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ. 2310 203.720, Fax 2310 211.305
e-mail: sales@ziti.gr

www.ziti.gr

Πρόλογος

Το σύγγραμμα αυτό αποτελεί μια εισαγωγή στο «Διαφορικό Λογισμό Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών». Στην ουσία περιέχει την ύλη του μαθήματος ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ, το οποίο διδάσκεται στους φοιτητές του δευτέρου εξαμήνου του Τμήματος Φυσικής του Α.Π.Θ. Το παρόν πόνημα αποτελεί προϊόν της εμπειρίας του συγγραφέα, όπως αυτή διαμορφώθηκε στα είκοσι περίπου έτη που έχει την ευθύνη της διδασκαλίας του μαθήματος. Στην απόκτηση της εμπειρίας αυτής σημαντική ήταν η συνεισφορά των φοιτητών οι οποίοι με το ενδιαφέρον, τις παρατηρήσεις και τα σχόλιά τους συνετέλεσαν στο να απόκτήσει και να διατηρεί το μάθημα μια διαρκή ανοδική πορεία στο μακρό αυτό χρονικό διάστημα. Τα ευεργετικά αποτελέσματα της αναβάθμισης αυτής είναι ορατά τα τελευταία χρόνια και πιστεύεται ότι θα συνεχιστούν με πιο έντονους ρυθμούς, με τη συνεισφορά του παρόντος συγγράμματος.

Το σύγγραμμα αποτελείται από οκτώ κεφάλαια. Το πρώτο κεφάλαιο περιέχει ορισμένες βασικές τοπολογικές έννοιες και τα βασικά συστήματα συντεταγμένων. Το δεύτερο κεφάλαιο περιλαμβάνει τη γεωμετρική παράσταση των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών και τις επιφάνειες δευτέρου βαθμού. Το τρίτο κεφάλαιο πραγματεύεται τα όρια και τη συνέχεια συναρτήσεων πολλών μεταβλητών, ενώ το τέταρτο κεφάλαιο αναφέρεται στις μερικές παραγώγους. Οι σύνθετες και πλεγμένες συναρτήσεις εξετάζονται στο πέμπτο κεφάλαιο. Στο ίδιο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στις Ιακωβιανές ορίζουσες και τη συναρτησιακή εξάρτηση. Στο έκτο κεφάλαιο δίνονται ορισμένα βασικά στοιχεία διανυσματικής ανάλυσης. Τα δύο τελευταία κεφάλαια αναφέρονται στις εφαρμογές των μερικών παραγώγων. Πιο συγκεκριμένα το έβδομο κεφάλαιο περιέχει τις γεωμετρικές εφαρμογές των μερικών

παραγώγων, ενώ το όγδοο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στις άκρες τιμές των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών.

Η παρουσίαση της ύλης στο σύγγραμμα είναι τέτοια ώστε κάθε παράγραφος να αποτελεί μια ξεχωριστή οντότητα. Οι ορισμοί και τα θεωρήματα κάθε παραγράφου, εφόσον υπάρχουν, έχουν τη δική τους αρίθμηση και ακολουθούνται από παραδείγματα τα οποία επίσης αριθμούνται. Με τον τρόπο αυτό γίνεται πιο εύκολη η εμπέδωση της θεωρίας και διευκολύνεται η κατανόησή της. Οι αποδείξεις ορισμένων θεωρημάτων που είναι μακροσκελείς έχουν παραληφθεί. Έτσι ενθαρρύνεται η ενασχόληση των φοιτητών με τη θεωρία, η κατανόηση της οποίας αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο για την καλύτερη εμπέδωση και αφομοίωση της ύλης του μαθήματος.

Κάθε κεφάλαιο περιέχει έναν αριθμό λυμένων ασκήσεων οι οποίες αναφέρονται σε όλα τα θέματα του κεφαλαίου. Διαβάζοντας και κατανοώντας τις ασκήσεις αυτές ο φοιτητής αποκτά εμπειρία στη λύση ασκήσεων, συγρόνως όμως κάνει και μια επανάληψη των βασικών εννοιών του κάθε κεφαλαίου. Στο τέλος κάθε κεφαλαίου υπάρχει ένας ικανός αριθμός ασκήσεων προς λύση. Συνιστάται στους φοιτητές να μελετούν τη θεωρία και τις λυμένες ασκήσεις πριν την ενασχόλησή τους με τις ασκήσεις αυτές.

Επειδή το μάθημα και, κατά συνέπεια, το σύγγραμμα απευθύνεται στους φοιτητές του Τμήματος Φυσικής, καταβλήθηκε προσπάθεια να τονίζονται οι φυσικές εφαρμογές της θεωρίας που περιέχει. Ακόμα συμπεριελήφθηκαν στο βιβλίο ένας μεγάλος αριθμός παραδειγμάτων και ασκήσεων από τις φυσικές επιστήμες. Με τον τρόπο αυτό όχι μόνο τονίζονται τα φυσικά δεδομένα του μαθήματος αλλά συγχρόνως δείχνεται στο φοιτητή του Τμήματος Φυσικής, ότι τα μαθηματικά γι' αυτόν δεν αποτελούν αυτοσκοπό αλλά ένα απαραίτητο εργαλείο για τη θεραπεία της επιστήμης του.

Το σύγγραμμα κυκλοφόρησε για δύο ακαδημαϊκά έτη με τη μορφή σημειώσεων. Τώρα κυκλοφορεί ως βιβλίο, αφού προστέθηκαν επιπλέον λυμένες ασκήσεις, καθώς και ασκήσεις προς λύση. Ευχαριστώ τον τελειόφοιτο φοιτητή κ. Β. Πασχαλίδη για την ανάγνωση των σημειώσεων και την επισήμανση ορισμένων αβλεψιών. Στο σημείο αυτό θα ήθελα να τονίσω ότι κάθε υπόδειξη σχετική με παραλείψεις, με

διαφορετική αντιμετώπιση θεμάτων αλλά και με αβλεψίες, με ευχαρίστηση, θα γινόταν δεκτή.

Επιθυμώ να ευχαριστήσω όλους τους συναδέλφους μου στο Εργαστήριο Αστρονομίας του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, για την άμεση ή έμμεση βοήθειά τους στη συγγραφή του βιβλίου. Ευχαριστώ επίσης τους φοιτητές για την ενθαρρυντική παρουσία και την ενεργό συμμετοχή τους στο μάθημα.

Ευχαριστώ θερμά τον συνάδελφο αναπληρωτή καθηγητή κ. Δ. Κυριάκο, για τις χρήσιμες συζητήσεις που είχα μαζί του σε θέματα Φυσικής και για την πολύτιμη βοήθειά του στη σχεδίαση και επεξεργασία των σχημάτων του συγγράμματος.

Τελειώνοντας, θα ήθελα να απευθύνω τις ιδιαίτερες και θερμές μου ευχαριστίες στον καθηγητή του Εργαστηρίου Αστρονομίας κ. Ν. Σπύρου, για την κριτική ανάγνωση του δακτυλογραφημένου κειμένου και τις εποικοδομητικές παρατηρήσεις και υποδείξεις του.

Θεσσαλονίκη, Ιανουάριος 2004 *Νικόλαος Δ. Καρανικόλας*

Περιεχόμενα

4^{o} Κεφάλαιο

ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

5^{o} Κεφάλαιο

ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΚΑΙ ΠΛΕΓΜΕΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

6^{o} Κεφάλαιο

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

7° Κεφάλαιο

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΜΕΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

8° Κεφάλαιο

ΑΚΡΕΣ ΤΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

1ο Κεφάλαιο

Η ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ R^n

1.1. Ο Ευκλείδειος μετρικός χώρος

Στο σύγγραμμα αυτό θα ασχοληθούμε με το διαφορικό λογισμό πραγματικών συναρτήσεων περισσοτέρων της μιας πραγματικών μεταβλητών. Τις συναρτήσεις αυτές θα ονομάζουμε εις το εξής συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

Η μελέτη των διαφόρων φυσικών φαινομένων ή φυσικών μεγεθών οδηγεί στη χρησιμοποίηση των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών. Αν x,y,z είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες και t ο χρόνος, τότε ως τέτοιες συναρτήσεις, θα μπορούσε να αναφέρει κανείς τη θερμοκρασία στην ατμόσφαιρα της Γης $T = T(x,y,z,t)$, την πυκνότητα στο εσωτερικό ενός πλανήτη $\rho = \rho(x,y,z)$ ή το δυναμικό βαρύτητας $V = V(x,y,z)$ που περιγράφει την κίνηση ενός αστέρα σε ένα ελλειψοειδή γαλαξία.

Για να γίνει κατανοητή η έννοια της συνάρτησης πολλών μεταβλητών θα πρέπει να αρχίσουμε από την έννοια της συνάρτησης μιας μεταβλητής. Για τον ορισμό της συνάρτησης μιας μεταβλητής $f : A \to B$ απαιτούνται δύο σύνολα $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ και ένας νόμος f με τον οποίο σε κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχεί ένα μόνο στοιχείο $y \in B$. Γράφουμε λοιπόν

$$y = f(x), \tag{1.1}$$

όπου με το σύμβολο $f(x)$ παριστάνουμε την εικόνα του $x \in A$ στο σύνολο B. Το σύνολο A είναι το πεδίο ορισμού ενώ το σύνολο $f(A) \subseteq B$ είναι το πεδίο τιμών της συνάρτησης f. Το τυχόν σημείο του A

ονομάζεται ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ η εικόνα αυτού στο B ονομάζεται τιμή της συνάρτησης ή εξαρτημένη μεταβλητή. Στη συνάρτηση (1.1) τόσο το σύνολο A όσο και το σύνολο B είναι υποσύνολα του συνόλου R των πραγματικών αριθμών.

Στη συνάρτηση πολλών μεταβλητών το πεδίο τιμών εξακολουθεί να είναι υποσύνολο του συνόλου R των πραγματικών αριθμών. Όμως το πεδίο ορισμού είναι ένα υποσύνολο του συνόλου R^n ($n \geq 2$). Το σύνολο R^n ($n \geq 2$) το θεωρούμε ως ένα χώρο n-διαστάσεων. Γράφουμε λοιπόν

$$R^2 = \{(x,y)|\ x,y \in R\}$$

$$R^3 = \{(x,y,z)|\ x,y,z \in R\}$$

$$R^n = \{(x_1, x_2,..., x_n)|\ x_1, x_2,\ldots, x_n \in R\}.$$

Αυτό σημαίνει ότι τα στοιχεία του χώρου R^2 είναι διατεταγμένα ζεύγη, τα στοιχεία του χώρου R^3 είναι διατεταγμένες τριάδες, ενώ τα στοιχεία του χώρου R^n είναι διατεταγμένες n-άδες αριθμών. Τα στοιχεία του χώρου R^n θα ονομάζουμε εις το εξής σημεία, επεκτείνοντας την έννοια του σημείου από το χώρο μέχρι και τριών διαστάσεων στο χώρο των n-διαστάσεων.

Έστω ότι $P_1(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ και $P_2(y_1, y_2,\ldots, y_n)$ είναι δύο σημεία του χώρου R^n και λ ένας πραγματικός αριθμός. Ορίζουμε τις πράξεις της πρόσθεσης μεταξύ των σημείων του χώρου R^n και του πολλαπλασιασμού στοιχείου του R^n επί τον πραγματικό αριθμό λ με τον ακόλουθο τρόπο

(i) $(x_1, x_2,\ldots, x_n) + (y_1, y_2,\ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2,\ldots, x_n + y_n)$,

(ii) $\lambda(x_1, x_2,\ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2,\ldots, \lambda x_n)$.

Ο χώρος R^n εφοδιασμένος με τις ανωτέρω πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού είναι ένας διανυσματικός χώρος. Στο διανυσματικό αυτό χώρο ορίζουμε την απόσταση μεταξύ δύο σημείων $P_1(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ και $P_2(y_1, y_2,\ldots, y_n)$ με τη σχέση

$$|P_1P_2| = \{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 +\cdots+ (x_n - y_n)^2\}^{1/2}. \qquad (1.2)$$

Κάθε διανυσματικός χώρος R^n στον οποίο η απόσταση μεταξύ δύο σημείων του P_1, P_2 δίνεται από τη σχέση (1.2) λέγεται **Ευκλείδειος**. Με τη σχέση (1.2) σε κάθε ζεύγος σημείων του R^n αντιστοιχούμε μονότιμα έναν πραγματικό αριθμό, την απόστασή τους $|P_1P_2|$. Με τον

τρόπο αυτό στο καρτεσιανό γινόμενο $R^n \times R^n$ ορίζεται μια πραγματική συνάρτηση $\Phi(P_1,P_2) = |P_1P_2|$ που ονομάζεται **μετρική** και ο Ευκλείδειος χώρος ονομάζεται **Ευκλείδειος μετρικός χώρος**. Σε ό,τι ακολουθεί, όταν αναφερόμαστε στον χώρο R^n, θα εννοούμε τον Ευκλείδειο μετρικό χώρο.

1.2. Βασικές τοπολογικές έννοιες

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε ορισμένες βασικές τοπολογικές έννοιες που χρειάζονται για την κατανόηση των ιδιοτήτων των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών. Μία από τις βασικότερες έννοιες είναι η έννοια της **περιοχής** ενός σημείου στον χώρο R^n. Αν θεωρήσουμε το σύνολο R των πραγματικών αριθμών, τότε η δ-περιοχή ενός σημείου $P_0(x_0)$ είναι το σύνολο

$$\pi(P_0,\delta) = \{x|\ x \in R,\ |x - x_0| < \delta\}\ .$$

Η έννοια της περιοχής επεκτείνεται και στον χώρο R^n, $n \geq 2$ ως εξής:

Ορισμός. Αν $P_0(x_1^0, x_2^0,\ldots, x_n^0)$ είναι ένα σημείο του χώρου R^n, ορίζουμε ως «κυβική» δ-περιοχή του P_0 το σύνολο

$$\pi(P_0,\delta) = \{P(x_1, x_2,\ldots, x_n)|\ P \in R^n,$$
$$|x_1 - x_1^0| < \delta, |x_2 - x_2^0| < \delta,\ldots, |x_n - x_n^0| < \delta\}. \quad (1.3)$$

Ορισμένες φορές χρησιμοποιείται η περιορισμένη «κυβική» δ-περιοχή του σημείου P_0 που είναι το σύνολο

$$\pi^*(P_0,\delta) = \pi(P_0,\delta) - \{P_0\}.$$

Μπορούμε αντί της «κυβικής» δ-περιοχής να ορίσουμε τη «σφαιρική» δ-περιοχή του σημείου P_0 στο χώρο R^n που είναι το σύνολο

$$\pi(P_0,\delta) = \{\ P(x_1, x_2,\ldots, x_n)|\ P \in R^n,\ \ |PP_0| < \delta\}. \quad (1.4)$$

Με τον τρόπο που έχουν ορισθεί οι περιοχές (1.3) και (1.4) τα σημεία των περιμέτρων τους δεν ανήκουν σ' αυτές. Οι περιοχές αυτές ονομάζονται **ανοικτές**. Αν όμως μια περιοχή περιλαμβάνει και τα σημεία της περιμέτρου της, τότε ονομάζεται **κλειστή**. Για παράδειγμα, η «σφαιρική» περιοχή

$$\pi(P_0,\delta) = \{\ P(x_1, x_2,\ldots, x_n)|\ P \in R^n,\ \ |PP_0| \leq \delta\} \quad (1.5)$$

είναι μια κλειστή περιοχή του χώρου R^n. Σε μια «σφαιρική» περιοχή μπορούμε να εγγράψουμε ή να περιγράψουμε μια «κυβική» περιοχή. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να χρησιμοποιούμε ισοδύναμα το είδος της περιοχής που θέλουμε για τη λύση ενός προβλήματος.

Ας θεωρήσουμε ένα σύνολο $S \subset R^n$. Ένα σημείο $A \in S$ ονομάζεται **εσωτερικό σημείο** του S εάν υπάρχει μία τουλάχιστον περιοχή $\pi(A,\delta)$ του σημείου A, τέτοια ώστε

$$\pi(A,\delta) \subset S\,.$$

Το σύνολο των εσωτερικών σημείων ενός συνόλου S ονομάζεται **εσωτερικό σύνολο** του S και συμβολίζεται με $\underline{S}$.

Ένα σημείο B, το οποίο μπορεί να ανήκει ή να μην ανήκει στο σύνολο S, ονομάζεται **οριακό σημείο** ή **σημείο συσσώρευσης** του S, αν για κάθε περιορισμένη περιοχή του $\pi^*(B,\delta)$ ισχύει

$$\pi^*(B,\delta) \cap S \neq \varnothing\,,$$

δηλαδή, αν κάθε περιορισμένη περιοχή του περιέχει ένα τουλάχιστον σημείο του S. Το σύνολο των οριακών σημείων του S ονομάζεται **παράγωγο σύνολο** του S και συμβολίζεται με S'.

Ένα σημείο Γ, το οποίο μπορεί να ανήκει ή να μην ανήκει στο σύνολο S, ονομάζεται **συνοριακό σημείο** του S, αν κάθε περιορισμένη περιοχή του $\pi_0(\Gamma,\delta)$ περιέχει σημεία του συνόλου S και σημεία που ανήκουν στο $CS = R^n - S$, που λέγεται συμπλήρωμα του S, δηλαδή

$$\pi^*(\Gamma,\delta) \cap S \neq \varnothing, \qquad \pi^*(\Gamma,\delta) \cap CS \neq \varnothing.$$

Είναι προφανές πως κάθε συνοριακό σημείο είναι συγχρόνως και οριακό χωρίς να ισχύει γενικά το αντίστροφο. Το σύνολο των συνοριακών σημείων του S ονομάζεται **σύνορο** του S και συμβολίζεται με ∂S.

Ένα σημείο Δ που ανήκει στο σύνολο S ονομάζεται **μεμονωμένο σημείο** του S, εάν δεν είναι οριακό του σημείο, δηλαδή

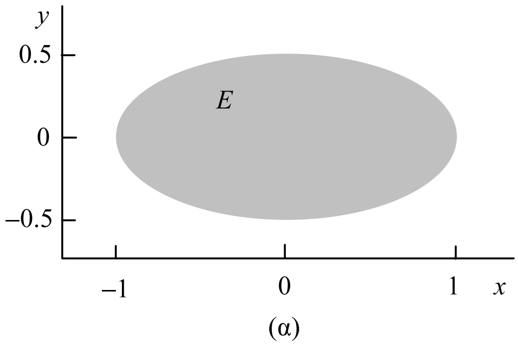
$$\pi^*(\Delta,\delta) \cap S = \varnothing.$$

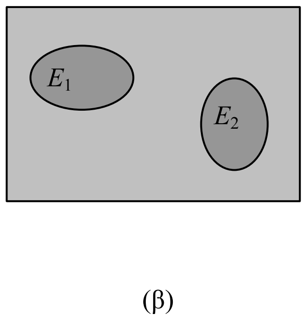
Ένα σύνολο ονομάζεται **ανοικτό** όταν όλα τα σημεία του είναι εσωτερικά. **Κλειστό** ονομάζεται το σύνολο, του οποίου το συμπλήρωμα είναι ανοικτό σύνολο. Ένα κλειστό σύνολο περιλαμβάνει όλα τα οριακά σημεία του.

Συναφές ή **συνεκτικό** ονομάζεται κάθε σύνολο του οποίου δύο οποιαδήποτε σημεία μπορεί να ενωθούν με πολυγωνική γραμμή, της

οποίας όλα τα σημεία ανήκουν στο σύνολο. Ένα συναφές σύνολο λέγεται **κυρτό**, αν το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν δύο οποιαδήποτε σημεία του ανήκει στο σύνολο.

Ονομάζουμε **τόπο** ένα ανοικτό συναφές σύνολο. Αν θεωρήσουμε το σύνολο $E = \{(x,y) | \, x^2 + 4y^2 < 1\}$, που φαίνεται στο σχήμα 1.1α, αυτό είναι τόπος του R^2. Αντιθέτως το σύνολο $S_1 = E_1 \cup E_2$, που φαίνεται στο σχήμα 1.1β, δεν είναι τόπος του R^2, διότι δεν είναι συναφές. Οι τόποι αποτελούν πεδία ορισμού των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών και, κατά συνέπεια, η έννοια του τόπου είναι βασική για τη μελέτη των συναρτήσεων αυτών.





Σχήμα 1.1. **(α)** Το σύνολο E είναι τόπος, ενώ **(β)** το σύνολο $S_1 = E_1 \cup E_2$ δεν είναι συναφές.

Ένα σύνολο ονομάζεται **φραγμένο**, αν η απόσταση μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σημείων του είναι πεπερασμένος αριθμός. **Συμπαγές** ονομάζεται ένα σύνολο το οποίο είναι κλειστό και φραγμένο.

Παράδειγμα 1. Θεωρούμε το σύνολο

$$\Sigma = \{(x,y) | \, x^2 + y^2 \leq \alpha^2\} \subset R^2.$$

Ζητείται να σχεδιαστεί το σύνολο και να χαρακτηριστούν τα σημεία του.

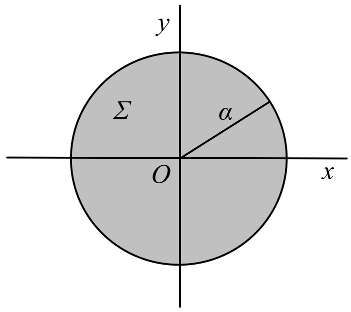
ΛΥΣΗ. Το σύνολο Σ αποτελείται από τα σημεία που βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου ακτίνας α και από τα σημεία της περιφέρειας (Σχ. 1.2). Κάθε σημείο του συνόλου Σ είναι οριακό του σημείο. Επομένως $\Sigma' = \Sigma$. Τα συνοριακά σημεία του Σ είναι τα σημεία της περιφέρειας, επομένως

$$\partial\Sigma = \{(x,y) | \, x^2 + y^2 = \alpha^2\} \subset \Sigma$$

Το εσωτερικό του Σ είναι το σύνολο

$$\underline{\Sigma} = \{(x,y)|\ x^2 + y^2 < \alpha^2\} \subset \Sigma$$

Το σύνολο Σ είναι κλειστό και φραγμένο επομένως είναι ένα συμπαγές σύνολο. Το $\underline{\Sigma}$ είναι τόπος του R^2, ενώ το Σ δεν είναι τόπος, διότι δεν είναι ανοικτό σύνολο.



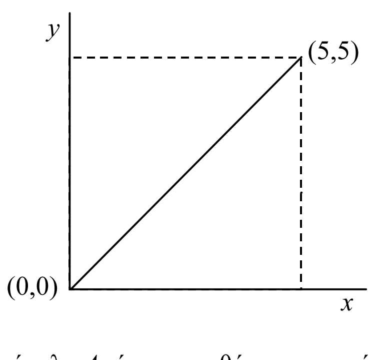
Σχήμα 1.2. Το συμπαγές σύνολο Σ.

Παράδειγμα 2. Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{(x,y)\ |\ y = x,\ 0 \leq x \leq 5\} \subset R^2.$$

Ζητείται να σχεδιαστεί το σύνολο και να χαρακτηριστούν τα σημεία του.

*ΛΥΣΗ***.** Το σύνολο A αποτελείται από τα σημεία της ευθείας $y = x$ μεταξύ των σημείων (0,0) και (5,5) (Σχήμα1.3). Το σύνολο A δεν έχει εσωτερικά σημεία επομένως $\underline{A} = \varnothing$. Το σύνολο A είναι περατωμένο και συναφές, όμως δεν είναι τοπος του R^2. Κάθε σημείο του είναι οριακό και συνοριακό.



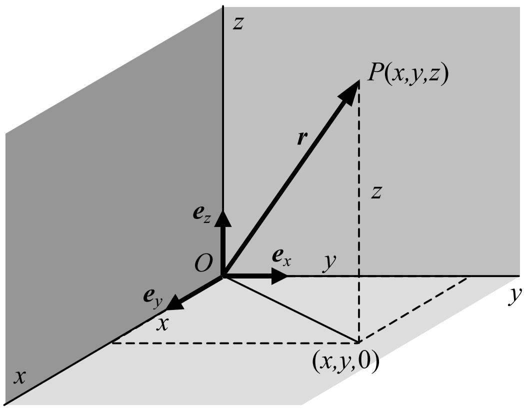
Σχήμα 1.3. Το σύνολο A είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζει η αρχή των αξόνων (0,0) και το σημείο (5,5).

Συνεπώς έχουμε

$$A' = \partial A = A.$$

1.3. Συστήματα συντεταγμένων στο χώρο R^3

Σε πολλά προβλήματα Φυσικής είναι απαραίτητη η χρήση ενός συστήματος συντεταγμένων. Το απλούστερο σύστημα συντεταγμένων είναι το **καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων** που φαίνεται στο σχήμα 1.4. Αποτελείται από τρεις άξονες Ox, Oy, Oz, ανά δύο κάθετους μεταξύ τους, με κοινή αρχή το σημείο O. Έστω P ένα σημείο του χώρου R^3 και $\boldsymbol{r}$ το διάνυσμα θέσης του σημείου P. Τότε γράφουμε $P = P(x,y,z)$, όπου x, y, z οι αλγεβρικές τιμές των προβολών του διανύσματος $\boldsymbol{r}$ ως προς τους τρεις άξονες Ox, Oy και Oz, αντίστοιχα, που ονομάζονται συντεταγμένες του P αλλά και του διανύσματος $\boldsymbol{r}$. Το διάνυσμα $\boldsymbol{r}$ γράφεται $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$, όπου $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ είναι οι διανυσματικές μονάδες κατά μήκος των αξόνων Ox, Oy και Oz αντίστοιχα. Τα διανύσματα $x\boldsymbol{e}_x$, $y\boldsymbol{e}_y$ και $z\boldsymbol{e}_z$ αποτελούν τις τρεις **συνιστώσες** του $\boldsymbol{r}$.

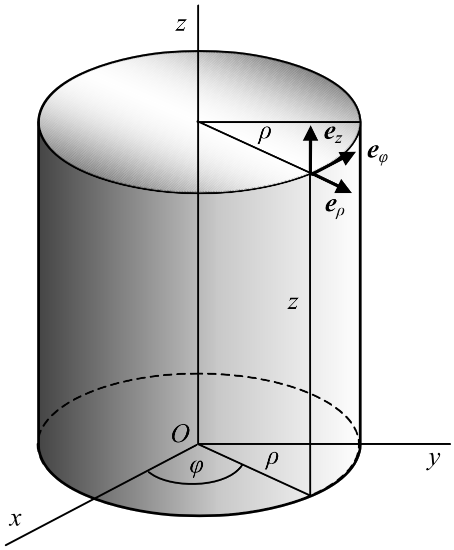


Σχήμα 1.4. Το δεξιόστροφο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

Τα τρία επίπεδα συντεταγμένων $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ διαιρούν το χώρο R^3 σε οκτώ τμήματα τα οποία λέγονται ογδοημόρια. Το σύστημα λέγεται δεξιόστροφο, επειδή ένας δεξιόστροφος κοχλίας θα προχωρήσει κατά τη θετική φορά του άξονα z, όταν ο άξονας Ox περιστρέφεται κατά γωνία 90° για να συμπέσει με τον άξονα Oy.

Η μελέτη συστημάτων που παρουσιάζουν άξονα συμμετρίας γίνεται ευκολότερη με τη χρησιμοποίηση των κυλινδρικών συντεταγμέ-

νων (ρ,φ,z) που φαίνονται στο σχήμα 1.5. Η συντεταγμένη $\rho > 0$ είναι η απόσταση του θεωρούμενου σημείου P από τον άξονα Oz, η γωνία φ μετρείται δεξιόστροφα από 0 έως 2π με αρχή τον άξονα Ox, ενώ η τρίτη συντεταγμένη είναι η απόσταση του σημείου από το επίπεδο (x,y). Οι εξισώσεις που συνδέουν τις καρτεσιανές με τις κυλινδρικές συντεταγμένες είναι



Σχήμα 1.5. Κυλινδρικές συντεταγμένες.

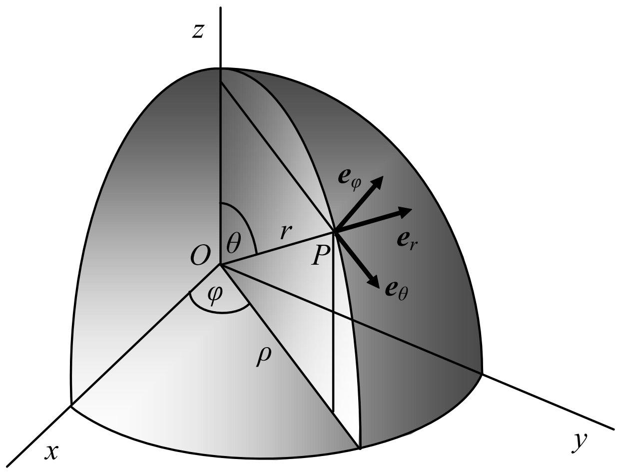
$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta, \quad z = z\,,$$
$$x^2 + y^2 = \rho^2, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}\,. \tag{1.6}$$

Οι διανυσματικές μονάδες $\boldsymbol{e}_\rho$, $\boldsymbol{e}_\varphi$, $\boldsymbol{e}_z$ στο σύστημα των κυλινδρικών συντεταγμένων, αποτελούν και αυτές με τη σειρά τους ένα δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων. Οι εξισώσεις που τις συνδέουν με τις αντίστοιχες καρτεσιανές είναι

$$\boldsymbol{e}_\rho = \cos\varphi\boldsymbol{e}_x + \sin\varphi\boldsymbol{e}_y\,, \quad \boldsymbol{e}_\varphi = -\sin\varphi\boldsymbol{e}_x + \cos\varphi\boldsymbol{e}_y\,, \quad \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_z\,. \tag{1.7}$$

Είναι φανερό ότι στο χώρο R^2, όπου $z = 0$, οι κυλινδρικές συντεταγμένες ανάγονται στις γνωστές πολικές συντεταγμένες.

Τέλος, η μελέτη φυσικών συστημάτων που παρουσιάζουν σφαιρική συμμετρία απλουστεύεται με τη χρήση των σφαιρικών συντεταγμένων (r,φ,θ) που φαίνονται στο σχήμα 1.6. Εδώ για τον προσδιορισμό



Σχήμα 1.6. Σφαιρικές συντεταγμένες.

της θέσης ενός σημείου του χώρου R^3 χρησιμοποιούμε την απόσταση $|OP| = r$, τη γωνία φ όπως και στην περίπτωση των κυλινδρικών συντεταγμένων και τη γωνία θ που μετρείται από το θετικό άξονα Oz και μεταβάλλεται από 0 έως π. Οι εξισώσεις που συνδέουν τις καρτεσιανές με τις και σφαιρικές συντεταγμένες είναι

$$x = r\cos\varphi\sin\theta, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = r\cos\theta$$
$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \quad \tan\varphi = \frac{y}{x}, \quad \sin\theta = \frac{\left(x^2 + y^2\right)^{1/2}}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}}. \tag{1.8}$$

Οι διανυσματικές μονάδες $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\varphi$, $\boldsymbol{e}_\theta$ στο σύστημα των σφαιρικών συντεταγμένων, αποτελούν και αυτές ένα ορθογώνιο δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων. Οι εξισώσεις που τις συνδέουν με τις καρτεσιανές διανυσματικές μονάδες είναι

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_r &= \sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_y + \cos\theta\boldsymbol{e}_z, \\ \boldsymbol{e}_\varphi &= -\sin\varphi\boldsymbol{e}_x + \cos\varphi\boldsymbol{e}_y, \\ \boldsymbol{e}_\theta &= \cos\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_y - \sin\theta\boldsymbol{e}_z. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Παράδειγμα 1.

Η συνάρτηση που δίνει το δυναμικό βαρύτητας ενός δισκοειδούς γαλαξία, σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, με

αρχή το κέντρο του και το επίπεδο (x,y) να συμπίπτει με το επίπεδο του δίσκου, είναι

$$V(x,y,z) = -\frac{GM}{\left\{x^2 + y^2 + \left[\alpha + \left(z^2 + h^2\right)^{1/2}\right]^2\right\}^{1/2}}, \qquad (1.10)$$

όπου M είναι η μάζα του γαλαξία, G η παγκόσμια σταθερή της βαρύτητας, ενώ h, α ($h << \alpha$) είναι παράμετροι. Χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες η σχέση (1.10) γράφεται

$$V(\rho,z) = -\frac{GM}{\left\{\rho^2 + \left[\alpha + \left(z^2 + h^2\right)^{1/2}\right]^2\right\}^{1/2}}, \qquad (1.11)$$

Παρατηρούμε ότι η συμμετρία του δυναμικού ως προς τον άξονα z ελάττωσε κατά μία τις μεταβλητές της συνάρτησης (1.10) στην έκφραση (1.11).

Παράδειγμα 2. Το μέτρο της βαρυτικής δύναμης, με την οποία σφαιρικός πλανήτης έλκει ένα δορυφόρο του, σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με αρχή το κέντρο του πλανήτη είναι

$$F(x,y,z) = -\frac{GmM}{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad (1.12)$$

όπου M και m είναι η μάζα του πλανήτη και του δορυφόρου αντίστοιχα. Σε σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων η έκφραση (1.12) απλουστεύεται και γράφεται

$$F(r) = -\frac{GmM}{r^2}. \qquad (1.13)$$

Βλέπουμε ότι η σφαιρική συμμετρία απλοποίησε σημαντικά την έκφραση (1.12) και τη μετέτρεψε σε συνάρτηση μίας μεταβλητής.

Παρατηρούμε ότι η αλλαγή συστήματος συντεταγμένων διευκολύνει τη μαθηματική αντιμετώπιση του προβλήματος, ενώ ο φυσικός νόμος παραμένει αναλλοίωτος.

1.4. Λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 1.1. Δίνεται το σύνολο $T = \{(x,y) | \ y > 0\} \subset R^2$. Να σχεδιαστεί το σύνολο και να χαρακτηριστούν τα σημεία του.

*ΛΥΣΗ***.** Το σύνολο T, το οποίο φαίνεται στο σχήμα 1.7, αποτελείται από τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται επάνω από τον άξονα x. Το σύνορό του είναι το σύνολο

$$\partial T = \{(x,y) | \ y = 0\} \subset R^2,$$

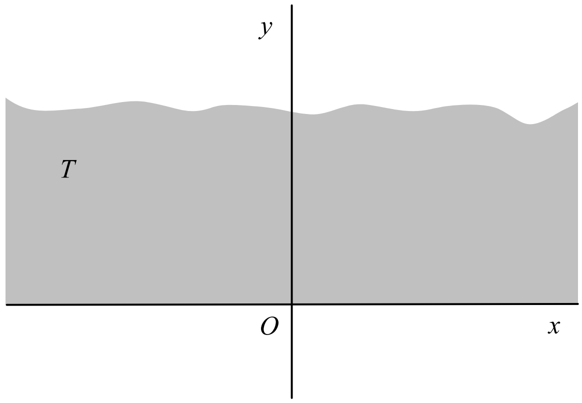
δηλαδή όλα τα σημεία που ανήκουν στον άξονα x. Το παράγωγο σύνολό του T' είναι το σύνολο

$$T' = \{(x,y) | \ y \geq 0\} \subset R^2 .$$

Κάθε σημείο του συνόλου T είναι εσωτερικό του σημείο, επομένως $\underline{T} = T$. Το σύνολο T είναι ένα άπειρο ανοικτό σύνολο είναι δηλαδή ένας **άπειρος τόπος** του R^2. Το συμπλήρωμά του είναι το σύνολο

$$CT = \{(x,y) | \ y \leq 0\} \subset R^2,$$

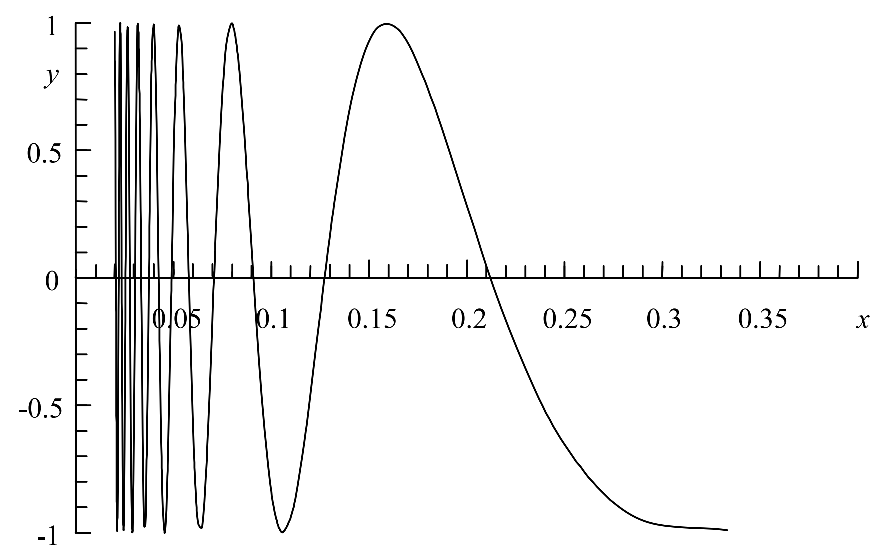
το οποίο είναι ένα κλειστό άπειρο σύνολο.



Σχήμα 1.7. Το σύνολο T είναι ένας άπειρος τόπος του R^2.

Άσκηση 1.2. Δίνεται το σύνολο $\Lambda = \{(x,y) | \ y = \cos(1/x), \ x > 0\} \subset R^2$. Να σχεδιαστεί το σύνολο και να χαρακτηριστούν τα σημεία του.

*ΛΥΣΗ***.** Το σύνολο Λ αποτελείται από τα σημεία της καμπύλης που φαίνεται στο σχήμα 1.8. Το σύνολο αυτό δεν έχει εσωτερικά σημεία, επομένως



Σχήμα 1.8. Το σύνολο *Λ*.

$$\underline{\Lambda} = \varnothing .$$

Πρόκειται για ένα σύνολο που δεν είναι συναφές ούτε φραγμένο. Όλα τα σημεία του είναι συνοριακά σημεία. Εκτός από τα σημεία του, συνοριακά σημεία του είναι και τα σημεία του συνόλου $\{(0, y)| -1 \leq y \leq 1\}$. Αυτό συμβαίνει, διότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \cos(1/x)$ μπορεί να φθάσει οσονδήποτε κοντά στον άξονα *y*. Συνεπώς έχουμε

$$\partial\Lambda = \Lambda' = \Lambda \cup \{(0,y)| -1 \leq y \leq 1\} \subset R^2$$

Άσκηση 1.3. Σχεδιάστε το σύνολο

$$B = \{(x,y)|\ 1 \leq x \leq 5,\ 1 \leq y \leq 3\} \subset R^2$$

και χαρακτηρίστε τα σημεία του.

ΛΥΣΗ. Το σύνολο *B* αποτελείται από τα σημεία του παραλληλογράμμου που φαίνεται στο σχήμα 1.9. Όλα τα σημεία του συνόλου *B* είναι οριακά σημεία του. Επομένως $B' = B$. Το εσωτερικό του συνόλου *B* είναι το σύνολο

$$\underline{B} = \{(x,y)|\ 1 < x < 5,\ 1 < y < 3\} \subset B.$$

Τα συνοριακά σημεία του *B* είναι τα σημεία της περιμέτρου του παραλληλογράμμου. Το σύνολο *B* είναι συναφές σύνολο. Επίσης είναι κλειστό και φραγμένο. Επομένως είναι ένα συμπαγές σύνολο.

Άσκηση 1.4. Θεωρούμε το σύνολο

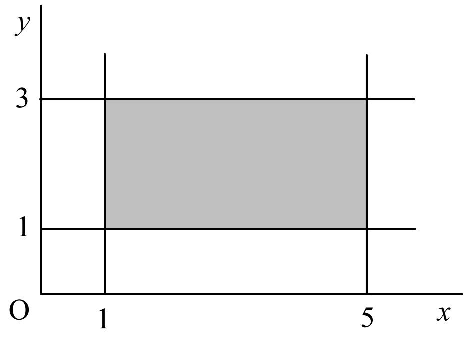
$$\Gamma = \{(x,y) \mid \ x, y \ \text{ρητοί}, \ 1 < x < 5, \ 1 < y < 3\} \subset R.$$

Ζητείται να χαρακτηριστούν τα σημεία του.

ΛΥΣΗ. Το σύνολο Γ αποτελείται από τα σημεία που βρίσκονται μέσα στο παραλληλόγραμμο του σχήματος 1.9 και οι συντεταγμένες τους είναι ρητοί αριθμοί. Είναι φανερό ότι το σύνολο Γ δεν έχει εσωτερικά σημεία διότι στην περιοχή ενός ρητού αριθμού, οσονδήποτε μικρή και αν είναι αυτή, υπάρχουν σημεία με συντεταγμένες άρρητους αριθμούς και επομένως

$$\underline{\Gamma} = \varnothing \, .$$

Το σύνολο Γ δεν είναι συναφές, διότι δεν είναι δυνατόν να βρεθεί ευθύγραμμο τμήμα που να αποτελείται μόνο από ρητούς αριθμούς. Κάθε σημείο του Γ είναι συγχρόνως οριακό και συνοριακό του σημείο. Συνοριακά σημεία του συνόλου Γ είναι και όλα τα σημεία της περιμέτρου του παραλληλογράμμου. Οριακά σημεία του Γ είναι και όλα τα σημεία του εσωτερικού του παραλληλογράμμου, των οποίων η μία τουλάχιστον συντεταγμένη είναι άρρητος αριθμός.



Σχήμα 1.9. Το σύνολο Γ.

Επομένως έχουμε

$$\Gamma' = \{(x,y) \mid \ 1 \le \ x \le 5, \ 1 \le \ y \le \ 3\} \subset R^{2} \, .$$

Το σύνολο Γ είναι φραγμένο, δεν είναι όμως κλειστό, διότι δεν περιέχει όλα τα οριακά του σημεία. Συνεπώς δεν είναι συμπαγές.

Άσκηση 1.5. Θεωρούμε το σύνολο $K = K_1 - K_2$, όπου

$K_1 = \{(x,y) \mid (x^2 + y^2)^{1/2} < 2\} \subset R^2$ και $K_2 = \{(x,y) \mid (x^2 + y^2)^{1/2} < 1\} \subset R^2$.

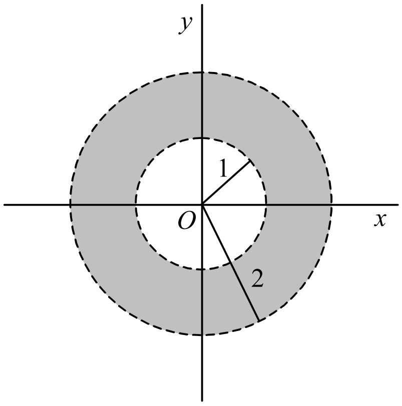
Να σχεδιαστεί το σύνολο K και να χαρακτηριστούν τα σημεία του.

*ΛΥΣΗ***.** Το σύνολο K αποτελείται από τα σημεία που βρίσκονται μέσα στο δακτύλιο που φαίνεται στο σχήμα 1.10. Όλα τα σημεία του συνόλου είναι εσωτερικά του σημεία, επομένως

$$\underline{K} = K,$$

δηλαδή το K είναι ανοικτό σύνολο. Τα συνοριακά σημεία του συνόλου K είναι τα σημεία των δύο περιφερειών είναι δηλαδή

$$\partial K = \{(x,y)|\ (x^2 + y^2)^{1/2} = 2\} \cup \{(x,y)|\ (x^2 + y^2)^{1/2} = 1\} \subset R^2.$$



Σχήμα 1.10. Το σύνολο K.

Κάθε σημείο του είναι και οριακό του σημείο. Συνεπώς

$$K' = K \cup \partial K .$$

Το σύνολο K είναι συναφές και ανοικτό σύνολο, άρα είναι τόπος του R^2. Παρατηρούμε ότι το σύνολο K είναι περατωμένο δεν είναι όμως κυρτό σύνολο.

1.5. Ασκήσεις προς λύση

1.1. Δίνεται το σύνολο $A = \{(x,y)|\ x^2 + 4y^2 \leq 1\} \subset R^2$. Να σχεδιαστεί το σύνολο και να χαρακτηριστούν τα σημεία του.

1.2. Δίνεται το σύνολο $\Lambda = \{(x,y)|\ xy \geq 0\} \subset R^2$. Να σχεδιαστεί το σύνολο και να χαρακτηριστούν τα σημεία του.

1.3. Δίνεται το σύνολο $B = \{(x,y) | \; y = x^2 \geq 0\} \subset R^2$. Να σχεδιαστεί το σύνολο και να χαρακτηριστούν τα σημεία του.

1.4. Δίνεται το σύνολο $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, όπου

$\Sigma_1 = \{(x,y) | \; (x^2 + y^2)^{1/2} \geq 3\} \subset R^2$ και $\Sigma_2 = \{(0,0), (1,1), (2,2)\} \subset R^2$.

Να σχεδιαστεί το σύνολο και να χαρακτηριστούν τα σημεία του.

1.5. Δίνεται το σύνολο $A = A_1 \cap A_2$ όπου

$A_1 = \{(x,y) | \; x^2 + 4y^2 \leq 1\} \subset R^2$ και $A_2 = \{(x,y) | \; x^2 + 9y^2 \leq 1\} \subset R^2$.

Να σχεδιαστεί το σύνολο A και να χαρακτηριστούν τα σημεία του.

1.6. Δίνεται το σύνολο $\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_2$ όπου

$\Gamma_1 = \{(x,y) | \; x^2 + 4y^2 \leq 1\} \subset R^2$ και $\Gamma_2 = \{(x,y) | \; 4x^2 + 16y^2 \leq 1\} \subset R^2$.

Να σχεδιαστεί το σύνολο Γ και να χαρακτηριστούν τα σημεία του.

1.7. Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα σημεία του συνόλου: Ακέραιοι αριθμοί του συνόλου Γ της άσκησης 1.6.

1.8. Περιγράψτε τις επιφάνειες ρ = σταθερό, φ = σταθερό και z = σταθερό σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

1.9. Περιγράψτε τις επιφάνειες r = σταθερό, φ = σταθερό και θ = σταθερό σε σφαιρικές συντεταγμένες.

1.10. Εκφράστε την εξίσωση του επιπέδου $z = y$ σε σφαιρικές συντεταγμένες.

1.11. Να γραφεί η εξίσωση $\rho^2 = \alpha^2\cos 2\varphi$ σε καρτεσιανές συντεταγμένες και να σχεδιαστεί η αντίστοιχη καμπύλη.

1.12. Να σχεδιαστεί η καμπύλη της οποίας η εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες είναι η $\rho = \alpha(1 + \cos\varphi)$.

1.13. Να γραφεί η εξίσωση $x^3 + y^3 = 3xy$ σε πολικές συντεταγμένες και να σχεδιαστεί η αντίστοιχη καμπύλη.

1.14. Να γραφεί η εξίσωση $y^2 = x^3 / (2\alpha - x)$ σε πολικές συντεταγμένες και να σχεδιαστεί η αντίστοιχη καμπύλη.

1.15. Να βρεθούν τα σημεία συσσώρευσης του συνόλου

$$S = \left(\frac{1}{2n^2}, 1 + \frac{1}{n} \right) \subset R^2,$$

όπου $n = 1,2,\ldots$

1.16. Να βρεθούν τα σημεία συσσώρευσης του συνόλου

$$K = \left(\frac{(-1)^n}{2}, 2 + \frac{(-1)^n}{n} \right) \subset R^2,$$

όπου $n = 1,2,\ldots$

1.17. Να χαρακτηριστούν τα σημεία των συνόλων S και K των ασκήσεων 1.15 και 1.16.

1.18. Δίνεται το σύνολο A των ακεραίων σημείων του R^3 δηλαδή το σύνολο των σημείων με ακέραιες συντεταγμένες. Να χαρακτηριστούν τα σημεία του συνόλου.

1.19. Δίνεται το σύνολο

$$B = \{(x,y) |\, x^2 + 4y^2 \le 4,\ y \ge 0,\ x^2 - y^2 > 0\} \subset R^2.$$

Να σχεδιαστεί το σύνολο και να χαρακτηριστούν τα σημεία του.

1.20. Δίνεται το σύνολο

$$G = \{(x,y) |\, x^2 + 9y^2 \le 25,\ y \ge 0,\ x^2 - y > 0\} \subset R^2.$$

Να σχεδιαστεί το σύνολο και να χαρακτηριστούν τα σημεία του.

1.21. Περιγράψτε το σύνολο

$$A = \{P \in R^2 |\, |PP_1| + |PP_2| < 1\} \subset R^2,$$

όπου P_1 και P_2 είναι σταθερά σημεία.

1.22. Δίνεται το σύνολο $\Gamma = A - B$, όπου

$$A = \{(x,y) |\, 4x^2 + y^2 \le 1,\ y > 0\} \subset R^2$$

και

$$B = \{(x,y) |\, 0 < y < 2,\ x = 1/2n > 0,\ n = 1,2,\ldots\} \subset R^2.$$

Να περιγραφεί το σύνολο και να χαρακτηριστούν τα σημεία του.

2ο Κεφάλαιο

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

2.1. Ισοσταθμικές καμπύλες και επιφάνειες

Ορισμός. Πραγματική συνάρτηση $f : D \to E$, n πραγματικών μεταβλητών είναι μια μονότιμη απεικόνιση f ενός συνόλου $D \subseteq R^n$ σε ένα σύνολο πραγματικών αριθμών $E \subseteq R$.

Το σύνολο D ονομάζεται **πεδίο ορισμού**, ενώ το σύνολο E ονομάζεται **πεδίο τιμών** της συνάρτησης f. Αν με P σημειώσουμε το τυχόν σημείο του συνόλου D και με z την εικόνα του, δια μέσου της f στο σύνολο E, τότε γράφουμε

$$z = f(P). \tag{2.1}$$

Επειδή, όμως, το σημείο $P = P(x_1, x_2,\dots, x_n)$ είναι ένα σημείο του χώρου των n-διαστάσεων, η συνάρτηση (2.1) παίρνει τη μορφή

$$z = f(x_1, x_2,\dots, x_n). \tag{2.2}$$

Στην περίπτωση που $n = 2$ έχουμε τη συνάρτηση δύο μεταβλητών

$$z = f(x,y). \tag{2.3}$$

Η συνάρτηση (2.3), εφόσον είναι συνεχής στον τόπο ορισμού της, παριστάνει μια επιφάνεια δύο διαστάσεων που βρίσκεται στο χώρο R^3. Με την ίδια λογική η συνάρτηση

$$z = f(x,y,t), \tag{2.4}$$

παριστάνει μια υπερεπιφάνεια τριών διαστάσεων στο χώρο R^4. Είναι προφανές, ότι στις περιπτώσεις που $n > 2$ δεν είναι δυνατό να έχουμε γεωμετρική εποπτεία της συνάρτησης.

Αν θεωρήσουμε την τομή της επιφάνειας που παριστάνει η συνάρτηση (2.3) με ένα σταθερό επίπεδο $z = c$, τότε θα πάρουμε μία καμπύλη της οποίας η εξίσωση είναι η

$$f(x,y) = c.$$

Δίνοντας διάφορες τιμές στην παράμετρο $c = c_k$ $(k = 1,2,3,\ldots)$, παίρνουμε μια οικογένεια καμπυλών

$$f(x,y) = c_k, \qquad k = 1,2,3,\ldots \tag{2.5}$$

Οι καμπύλες αυτές ονομάζονται **ισοσταθμικές** καμπύλες της επιφάνειας (2.3). Είναι φανερό ότι εάν έχουμε μια συνάρτηση τριών ανεξάρτητων μεταβλητών, όπως η (2.4), τότε οι αντίστοιχες τομές με τα σταθερά επίπεδα $z = c_k$ $(k = 1,2,3,\ldots)$ θα είναι οι ισοσταθμικές επιφάνειες

$$f(x,y,t) = c_k, \qquad k = 1,2,3,\ldots \tag{2.6}$$

Οι ισοσταθμικές καμπύλες και επιφάνειες αποτελούν ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για τις φυσικές επιστήμες. Στη Μετεωρολογία οι ισοβαρείς και ισόθερμες επιφάνειες είναι ισοσταθμικές επιφάνειες στην ατμόσφαιρα της Γης, όπου η πίεση ή η θερμοκρασία έχει σταθερή τιμή. Στη Φυσική, όταν μελετούμε την επίπεδη κίνηση ενός σώματος, οι ισοδυναμικές καμπύλες είναι γραμμές, όπου το δυναμικό που περιγράφει την κίνηση του σώματος, σε όλα τα σημεία κάθε γραμμής, έχει σταθερή τιμή. Επίσης χρήσιμες είναι οι ισοσταθμικές καμπύλες και επιφάνειες στη μελέτη του χώρου των φάσεων, δηλαδή του χώρου των συντεταγμένων και ταχυτήτων, κατά την κίνηση ενός σώματος.

Παράδειγμα 1. Το δυναμικό που περιγράφει επίπεδη κίνηση ενός αστέρα με μάζα $m = 1$ στην περιοχή του κέντρου ενός ελλειπτικού γαλαξία μπορεί να δίνεται από τη συνάρτηση

$$V = \frac{1}{2}\left(x^2 + by^2\right) - \left[\alpha_1 x^4 + 2\alpha_2 x^2 y^2 + \alpha_3 y^4\right], \tag{2.7}$$

όπου b, α_1, α_2, α_3 είναι παράμετροι. Να βρεθούν και να σχεδιαστούν οι ισοδυναμικές καμπύλες, όταν $b = 1.2$, $\alpha_1 = 0.1$,

$\alpha_2 = 0.25$ και $\alpha_3 = 0.15$. Πώς προσεγγίζονται οι ισοδυναμικές καμπύλες κοντά στο κέντρο του γαλαξία;

ΛΥΣΗ. Οι ισοδυναμικές καμπύλες δίνονται από τη σχέση

$$\frac{1}{2}\left(x^2 + by^2\right) - \left[\alpha_1 x^4 + 2\alpha_2 x^2 y^2 + \alpha_3 y^4\right] = c, \qquad (2.8)$$

όπου $c \in R$. Στην περιοχή του κέντρου του γαλαξία οι όροι τέταρτης τάξης θεωρούνται πολύ μικρότεροι από τους όρους δεύτερης τάξης. Συνεπώς, μπορούμε να τους αγνοήσουμε, οπότε η εξίσωση (2.8) παίρνει τη μορφή

$$x^2 + by^2 = 2c \qquad (2.9)$$

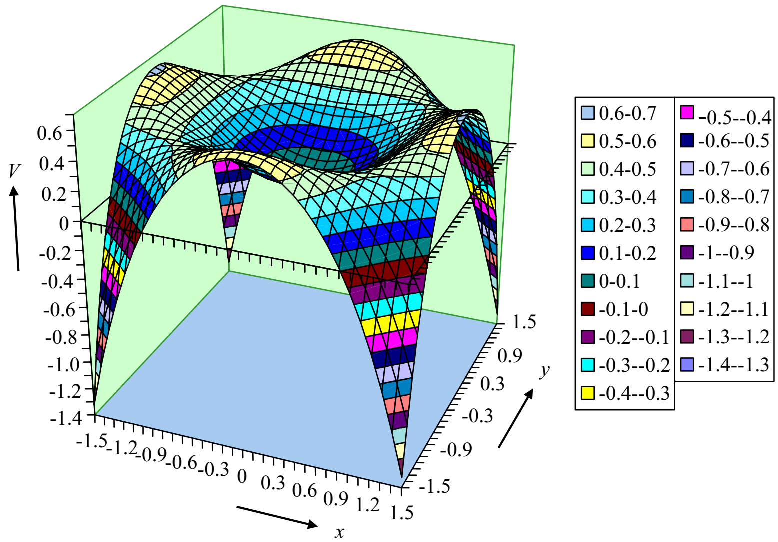
και παριστάνει μια έλλειψη με κέντρο την αρχή των συντεταγμένων. Επομένως οι ισοδυναμικές καμπύλες, στην περιοχή του κέντρου του γαλαξία είναι κατά προσέγγιση ελλείψεις. Η μορφή της επιφάνειας (2.7) φαίνεται στο σχήμα 2.1α, ενώ οι ισοδυναμικές καμπύλες (2.8) φαίνονται στο σχήμα 2.1β. Παρατηρούμε ότι μακριά από το κέντρο του γαλαξία οι ισοδυναμικές καμπύλες αλλάζουν μορφή. Η φυσική σημασία του γεγονότος αυτού είναι ότι, σε μακρινές αποστάσεις από το κέντρο δεν έχουμε περατωμένη κίνηση. Αυτό οφείλεται στη συνεισφορά των όρων τέταρτης τάξης, η οποία σε μεγάλες αποστάσεις ξεπερνά αυτή των όρων δεύτερης τάξης, με αποτέλεσμα η συνάρτηση V να παίρνει αρνητικές τιμές.

Παράδειγμα 2. Το δυναμικό

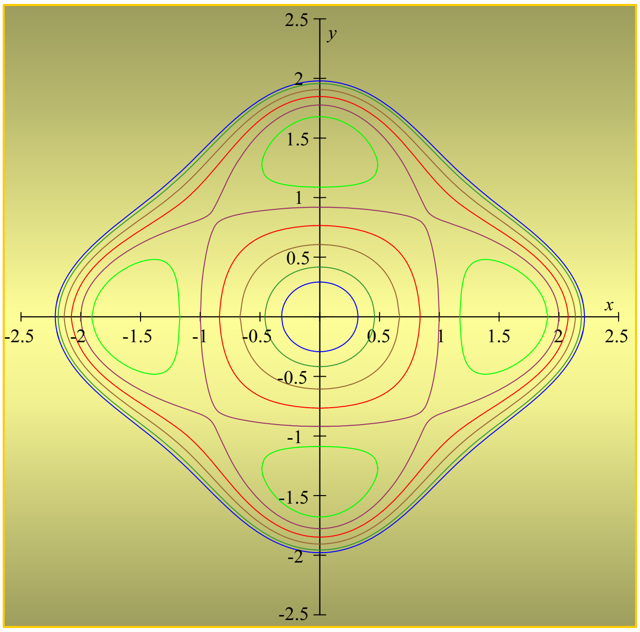
$$V = \frac{1}{2}\rho^2 - \varepsilon\rho^4 \qquad (2.10)$$

περιγράφει την επίπεδη κίνηση ενός σωματιδίου με μάζα $m=1$. Να βρεθούν και να σχεδιαστούν οι ισοσταθμικές καμπύλες στο επίπεδο των φάσεων (ρ, υ_ρ), όπου ρ, φ είναι οι πολικές συντεταγμένες με $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$, υ_ρ η ακτινική ταχύτητα και $\varepsilon \ll 1$.

ΛΥΣΗ. Η συνολική ενέργεια E του σωματιδίου δίνεται από τη σχέση



(α)



(β)

Σχήμα 2.1. **(α)** Η επιφάνεια της συνάρτησης (2.7) και **(β)** οι ισοδυναμικές καμπύλες (2.8).

$$E = \frac{1}{2}\left(\upsilon_\rho^2 + \upsilon_\varphi^2\right) + V = \frac{1}{2}\left(\upsilon_\rho^2 + \upsilon_\varphi^2\right) + \frac{1}{2}\rho^2 - \varepsilon\rho^4\,, \qquad (2.11)$$

όπου $\upsilon_\varphi = \rho\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ είναι η εγκάρσια ταχύτητα του σωματιδίου. Τότε η στροφορμή L του σωματιδίου δίνεται από τη σχέση

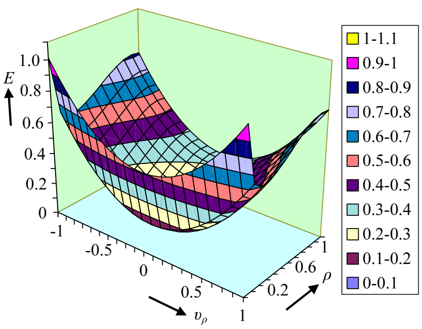
$$L = \rho\upsilon_\varphi\,. \qquad (2.12)$$

Είναι φανερό, ότι το σωματίδιο, κατά την κίνησή του στο χώρο των φάσεων, είναι αναγκασμένο να βρίσκεται συγχρόνως στην επιφάνεια (2.11) και στην επιφάνεια (2.12). Κατά συνέπεια θα πρέπει να βρίσκεται στην τομή των δύο αυτών επιφανειών. Η τομή των δύο επιφανειών βρίσκεται, αν αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (2.11) την τιμή της υ_φ από τη σχέση (2.12), οπότε

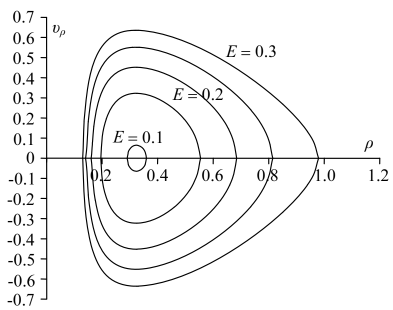
$$E = \frac{1}{2}\left(\upsilon_\rho^2 + \frac{L^2}{\rho^2}\right) + \frac{1}{2}\rho^2 - \varepsilon\rho^4\,. \qquad (2.13)$$

Από τη μορφή της εξίσωσης (2.10) που δίνει το δυναμικό, προκύπτει, ότι η δύναμη είναι κεντρική και επομένως η στροφορμή L του σωματιδίου παραμένει σταθερή. Αν θέσουμε τώρα, στη σχέση (2.13) $L = c$, βρίσκουμε

$$E = \frac{1}{2}\left(\upsilon_\rho^2 + \frac{c^2}{\rho^2}\right) + \frac{1}{2}\rho^2 - \varepsilon\rho^4\,. \qquad (2.14)$$



(α)



(β)

Σχήμα 2.2. **(α)** Η επιφάνεια (2.14) και
(β) οι ισοσταθμικές καμπύλες στο επίπεδο των φάσεων (ρ,υ_ρ).

Οι ισοσταθμικές καμπύλες στο επίπεδο (ρ, υ_ρ) βρίσκονται, αν στη σχέση (2.14) θέσουμε $E = c_1$. Βλέπουμε πως έχουμε μια διπαραμετρική οικογένεια καμπυλών. Για τροχιές του σωματιδίου με ορισμένη τιμή της στροφορμής, έχουμε τις καμπύλες στο επίπεδο των φάσεων (ρ, υ_ρ) για διάφορες τιμές της ενέργειας c_1. Στο σχήμα 2.2α φαίνεται η επιφάνεια (2.14), ενώ στο σχήμα 2.2β φαίνονται οι ισοσταθμικές καμπύλες στο επίπεδο των φάσεων (ρ, υ_ρ). Οι τιμές των παραμέτρων είναι $c = 0.1$ και $\varepsilon = 0.2$.

Παράδειγμα 3. Να βρεθούν και να σχεδιαστούν οι ισοσταθμικές καμπύλες της συνάρτησης

$$z = \frac{2x}{x^2 + y^2} \tag{2.15}$$

στο επίπεδο (x,y).

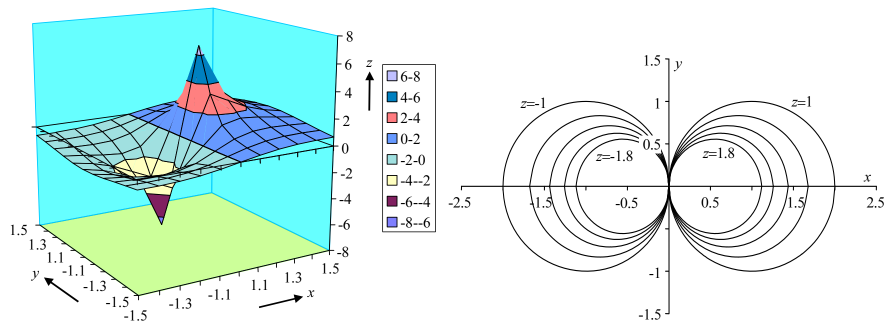
ΛΥΣΗ. Είναι φανερό ότι η συνάρτηση (2.15) ορίζεται σε όλο το R^2 εκτός από την αρχή των αξόνων. Οι ισοσταθμικές καμπύλες της συνάρτησης (2.15) στο επίπεδο (x,y) βρίσκονται, αν θέσουμε στη σχέση (2.15) $z = c$. Έχουμε λοιπόν

$$\frac{2x}{x^2 + y^2} = c$$

ή

$$x^2 + y^2 = \frac{2x}{c},$$

η οποία γράφεται



(α) (β)

Σχήμα 2.3. **(α)** Η επιφάνεια της συνάρτησης (2.15) και **(β)** οι ισοσταθμικές καμπύλες (2.16).

$$\left(x-\frac{1}{c}\right)^2+y^2=\frac{1}{c^2}. \qquad (2.16)$$

Η εξίσωση (2.16) παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο P $(1/c,0)$ και ακτίνα $1/c$. Στο σχήμα 2.3α φαίνεται η επιφάνεια (2.15), ενώ στο σχήμα 2.3β φαίνονται οι ισοσταθμικές καμπύλες (2.16), για διάφορες τιμές της παραμέτρου c. Αξίζει να παρατηρήσουμε τις ανωμαλίες της επιφάνειας κοντά στην αρχή των συντεταγμένων.

2.2. Επιφάνειες δευτέρου βαθμού

Ονομάζουμε επιφάνεια δευτέρου βαθμού στο χώρο R^3, κάθε επιφάνεια που ορίζεται από μια εξίσωση δευτέρου βαθμού. Η γενική μορφή της εξίσωσης μιας επιφάνειας δευτέρου βαθμού είναι

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= A_1x^2+A_2y^2+A_3z^2+B_1xy+B_2yz+B_3xz+ \\ &+C_1x+C_2y+C_3z+D_1=0, \qquad (2.17) \end{aligned}$$

όπου $A_1, A_2, \ldots, D_1 \in R$. Εφαρμόζοντας την θεωρία των τετραγωνικών μορφών (βλ. Κεφ. 8), αποδεικνύεται ότι, η εξίσωση (2.17) μπορεί να αναχθεί στις ακόλουθες δύο πιο απλές εξισώσεις

$$Ax^2+By^2+Cz^2+I=0, \qquad (2.18\alpha)$$

$$Ax^2+By^2+Jz=0. \qquad (2.18\beta)$$

Σε ό,τι ακολουθεί θα περιγράψουμε τις κυριότερες από τις επιφάνειες δευτέρου βαθμού.

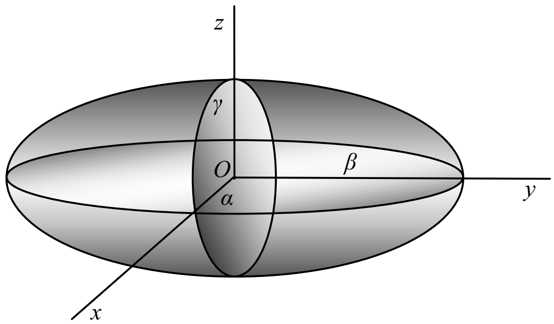
Η απλούστερη επιφάνεια δευτέρου βαθμού είναι η επιφάνεια της **σφαίρας**, της οποίας η εξίσωση είναι

$$x^2+y^2+z^2=\alpha^2. \qquad (2.19)$$

Η εξίσωση (2.19) είναι της μορφής (2.18α) και ορίζει μια σφαίρα με κέντρο την αρχή των συντεταγμένων και ακτίνα α.

Μια άλλη κλειστή επιφάνεια είναι το **ελλειψοειδές** (Σχ. 2.4) που ορίζεται από την εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1. \qquad (2.20)$$



Σχήμα 2.4. Το ελλειψοειδές.

Είναι προφανές, ότι η επιφάνεια (2.20) έχει τα συντεταγμένα επίπεδα ως επίπεδα συμμετρίας, τους άξονες συντεταγμένων ως άξονες συμμετρίας και την αρχή των συντεταγμένων ως κέντρο συμμετρίας. Οι τομές με το επίπεδο $z = p$, όπου $p \in R$, είναι οι ελλείψεις

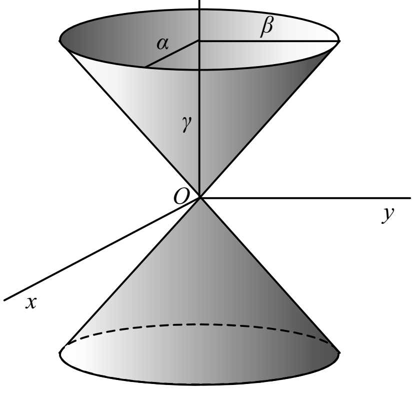
$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 - \frac{p^2}{\gamma^2} , \tag{2.21}$$

όπως ελλείψεις είναι και οι τομές με τα επίπεδα $x = p$ ή $y = p$.

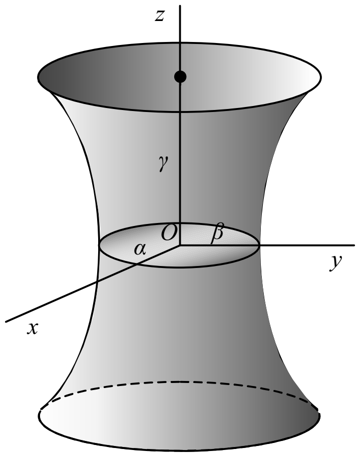
Η επιφάνεια που ορίζεται από την εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0 \tag{2.22}$$

ονομάζεται **ελλειπτικός κώνος**. Είναι γνωστό ότι οι επίπεδες τομές του ελλειπτικού κώνου (Σχ. 2.5) είναι ελλείψεις, παραβολές ή υπερβολές.



Σχήμα 2.5. Ο ελλειπτικός κώνος.



Σχήμα 2.6. Το υπερβολοειδές ενός φύλλου.

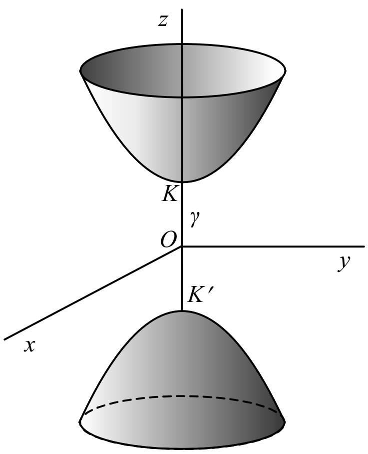
Το **υπερβολοειδές ενός φύλλου** ορίζεται από την εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1\,. \tag{2.23}$$

Οι επίπεδες τομές της επιφάνειας αυτής (Σχ. 2.6) είναι ελλείψεις ή υπερβολές.

Η επιφάνεια που ορίζεται από την εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}+1=0\,, \tag{2.24}$$



Σχήμα 2.7. Το υπερβολοειδές δύο φύλλων

ονομάζεται **υπερβολοειδές δύο φύλλων** και φαίνεται στο σχήμα 2.7. Η επιφάνεια αποτελείται από δύο συμμετρικά, ως προς το επίπεδο $z = 0$ τμήματα, τα οποία εκτείνονται απεριόριστα επάνω και κάτω από το επίπεδο αυτό. Οι κορυφές K και K' των δύο φύλλων του υπερβολοειδούς βρίσκονται σε απόσταση $\pm\gamma$ από την αρχή των συντεταγμένων. Η τομή της επιφάνειας με το επίπεδο $z = p$ είναι πραγματική έλλειψη μόνον, εάν $|p| > \gamma$.

Όλες οι παραπάνω επιφάνειες δευτέρου βαθμού έχουν ένα μοναδικό κέντρο συμμετρίας και για το λόγο αυτό ονομάζονται επιφάνειες δευτέρου βαθμού με κέντρο συμμετρίας.

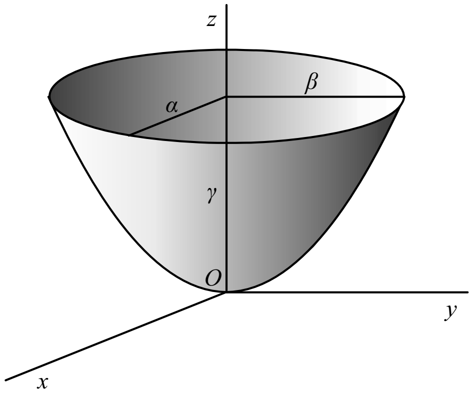
Ας θεωρήσουμε τώρα την επιφάνεια που ορίζεται από την εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = \frac{z}{\gamma}. \tag{2.25}$$

Η επιφάνεια (2.25), η οποία φαίνεται στο σχήμα 2.8, ονομάζεται **ελλειπτικό παραβολοειδές**. Έχει δύο επίπεδα συμμετρίας xOz και yOz, έναν άξονα συμμετρίας, τον άξονα z, ενώ στερείται κέντρου συμμετρίας. Παρατηρούμε, ότι δεν υπάρχουν πραγματικά σημεία κάτω από το επίπεδο xOy. Οι τομές της επιφάνειας με τα επίπεδα xOz και yOz είναι παραβολές, ενώ οι τομές με το επίπεδο $z = p$ είναι ελλείψεις.

Μία ακόμη επιφάνεια δευτέρου βαθμού, χωρίς κέντρο συμμετρίας, είναι το **υπερβολικό παραβολοειδές** που ορίζεται από την εξίσωση

$$\frac{y^2}{\beta^2} - \frac{x^2}{\alpha^2} = \frac{z}{\gamma}. \tag{2.26}$$

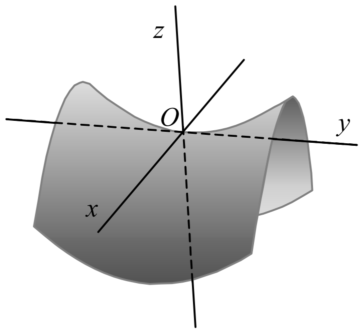


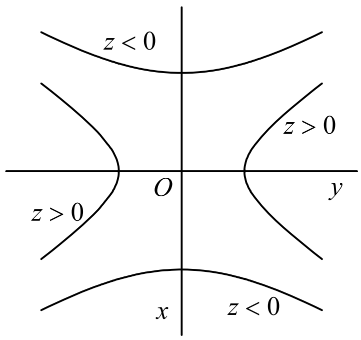
Σχήμα 2.8. Το ελλειπτικό παραβολοειδές.

Είναι φανερό, ότι τα στοιχεία συμμετρίας είναι τα ίδια με αυτά της επιφάνειας (2.25). Οι τομές με τα επίπεδα xOz και yOz είναι παραβολές, ενώ οι τομές με το επίπεδο $z = p$ είναι υπερβολές με ασύμπτωτες τις ευθείες

$$\frac{y^2}{\beta^2} - \frac{x^2}{\alpha^2} = 0 \,. \tag{2.27}$$

Η επιφάνεια (2.26) φαίνεται στο σχήμα 2.9. Αξίζει να παρατηρήσουμε, ότι η αρχή των συντεταγμένων αποτελεί την κορυφή της επιφάνειας, η οποία έχει τη μορφή σάγματος και το αντίστοιχο σημείο λέγεται σαγματικό. Τα σαγματικά σημεία παίζουν βασικό ρόλο στη μελέτη των άκρων τιμών μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών και θα μελετηθούν στο κεφάλαιο 8 του βιβλίου αυτού.





Σχήμα 2.9. **(α)** Το υπερβολικό παραβολοειδές.
(β) Οι τομές της επιφάνειας με επίπεδα σταθερής τιμής z.

Θα πρέπει να αναφερθεί, ότι εάν μία από τις μεταβλητές x,y,z δεν εμφανίζεται στις εξισώσεις (2.18), τότε η επιφάνεια είναι, γενικά, κυλινδρική. Αν, για παράδειγμα, λείπει η μεταβλητή z, τότε έχουμε ένα κύλινδρο με γενέτειρες παράλληλες προς τον άξονα Oz. Ανάλογα με την περίπτωση, μπορεί να έχουμε τον **ελλειπτικό**, τον **παραβολικό** ή τον **υπερβολικό κύλινδρο**. Σε ορισμένες περιπτώσεις είναι δυνατόν να έχουμε ένα σύστημα δύο επιπέδων που είτε τέμνονται, είτε είναι παράλληλα και διακεκριμένα, είτε συμπίπτουν.

Ορισμένες από τις επιφάνειες δευτέρου βαθμού μπορούν να χαρακτηριστούν, κάτω από ορισμένες συνθήκες, ως επιφάνειες εκ περι-

στροφής. Έτσι, στην περίπτωση που $\alpha = \beta$, το ελλειψοειδές (2.20) μπορεί να παραχθεί από την περιστροφή μιας έλλειψης γύρω από τον άξονα Oz. Το υπερβολοειδές ενός φύλλου (2.23) είναι επιφάνεια εκ περιστροφής μόνον αν $\alpha = \beta$. Παράγεται από την περιστροφή μιας υπερβολής γύρω από τον άξονα Oz, ο οποίος δεν είναι εστιακός άξονας.

Το υπερβολοειδές δύο φύλλων (2.24) είναι επιφάνεια εκ περιστροφής μόνο αν $\alpha = \beta$. Παράγεται από την περιστροφή μιας υπερβολής γύρω από τον άξονα Oz, ο οποίος είναι εστιακός άξονας. Επιφάνεια εκ περιστροφής είναι και το ελλειπτικό παραβολοειδές (2.25), όταν $\alpha = \beta$. Παράγεται από την περιστροφή μιας παραβολής γύρω από τον άξονα Oz.

Παράδειγμα 4. Να αναγνωριστούν οι επιφάνειες δευτέρου βαθμού που περιγράφονται από τις συναρτήσεις

$$\begin{aligned} &\text{(i)}\quad 4x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 8x - 18y + 12 = 0\,, \\ &\text{(ii)}\quad z - 2x^2 + 4x - 8y^2 = 2\,. \end{aligned} \tag{2.28}$$

ΛΥΣΗ. (i) Η πρώτη από τις εξισώσεις (2.28) γράφεται

$$\frac{(x-1)^2}{(1/2)^2} + \frac{(y-1)^2}{(1/3)^2} + \frac{z^2}{(1/4)^2} = 1\,. \tag{2.29}$$

Η εξίσωση (2.29) παριστάνει ελλειψοειδές με ημιάξονες $\alpha = 1/2$, $\beta = 1/3$, $\gamma = 1/4$ και κέντρο το σημείο $M(1,1,0)$.

(ii) Η δεύτερη από τις εξισώσεις (2.28) γράφεται

$$\frac{(x-1)^2}{(1/2)^2} + \frac{z^2}{(1/4)^2} = \frac{z}{1/2}\,. \tag{2.30}$$

Η εξίσωση (2.30) παριστάνει ελλειπτικό παραβολοειδές με ημιάξονες $\alpha = 1/2$, $\beta = 1/4$, ύψος $\gamma = 1/2$ και κέντρο το σημείο $M(1,0,0)$.