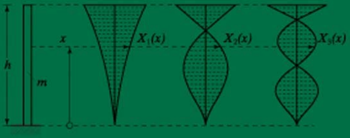
ΚΥΡΙΑΚΟΥ Κ. ΑΝΑΣΤΑΣΙΑΔΗ

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ



ΤΟΜΟΣ Ι. ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ἡ συμπεριφορά τῶν δομικῶν κατασκευῶν κατά τούς σεισμούς, πιστεύουμε, ὅτι ἀποτελεῖ τόν σπουδαιότερο λόγο τῆς εἰσαγωγῆς καί συστηματικῆς διδασκαλίας τῆς Δυναμικῆς τῶν Κατασκευῶν στά Ἑλληνικά Πανεπιστήμια. Ἡ σπουδαιότητα, ἄλλωστε, τοῦ λόγου αὐτοῦ εἶναι προφανής, ἄν σκεφθοῦμε ὅτι ἡ Χώρα μας βρίσκεται σέ μία ἀπό τίς τεκτονικά ἐνεργότερες σεισμικές ζῶνες τῆς Γῆς. Ἡ σεισμική αὐτή συμπεριφορά ἐξαρτᾶται πρωταρχικά ἀπό τό αἴτιο, δηλ. τό σεισμό, ἀλλά καί ἀπό ἄλλους παράγοντες, πού ἀποτελοῦν τό ἀντικείμενο διαφόρων κλάδων τῆς Ἐπιστήμης· ἐξαρτᾶται ὅμως καί ἀπό τή γεωμετρία καί μηχανική δομή τῆς ἴδιας τῆς κατασκευῆς, πού ἀποτελοῦν ἀντικείμενο τῆς Δυναμικῆς τῶν Κατασκευῶν.

Μέ γνώμονα τίς παραπάνω σκέψεις τό περιεχόμενο τοῦ βιβλίου αὐτοῦ συγκροτήθηκε ἀπό δύο κύρια μέρη: τό πρῶτο περιλαμβάνει τίς ταλαντώσεις τῶν δομικῶν κατασκευῶν σέ δύο τόμους καί τό δεύτερο τίς ἀντισεισμικές κατασκευές σέ ἕνα τόμο.

Ἡ ἀνάπτυξη τῆς θεωρίας τῶν ταλαντώσεων ἔγινε ἐπαγωγικά ἀπό τά ἁπλούστερα πρός τά συνθετότερα συστήματα, μέ τήν καθιερωμένη σειρά: μονοβάθμια - πολυβάθμια - ἀπειροβάθμια συστήματα.

Ὁ πρῶτος τόμος περιέχει τά διακριτά συστήματα (μονοβάθμια, πολυβάθμια) καί ὁ δεύτερος τά συνεχή (ἀπειροβάθμια). Ἐπίσης, ἀποβλέποντας σέ μία κατά τό δυνατόν αὐτοτελή καί καλά θεμελιωμένη παρουσίαση τοῦ ἀντικειμένου, στή μέν ἀρχή τοῦ πρώτου τόμου ἔχουμε ἕνα κεφάλαιο μέ στοιχεῖα Ἀναλυτικῆς Μηχανικῆς, στό δέ τέλος τοῦ δευτέρου τόμου δύο παραρτήματα μαθηματικοῦ περιεχομένου· ἡ ὕλη αὐτή δέν ἀνήκει προφανῶς στό περιεχόμενο τῆς Δυναμικῆς τῶν Κατασκευῶν, ἀλλά πιστεύουμε ὅτι θά διευκολύνει τόν ἀναγνώστη.

Τά ἀριθμητικά παραδείγματα πού ὑπάρχουν ἔπειτα ἀπό κάθε ὑποκεφάλαιο συνδέονται μέ τή θεωρία μέ πλῆθος παραπομπῶν καί ἀποβλέπουν στήν ἐμπέδωσή της· γιά τό λόγο αὐτό σέ πολλές περιπτώσεις τό ἴδιο πρόβλημα λύνεται μέ πολλές μεθόδους. Αὐτό βέβαια εἶχε σάν συνέπεια τή διόγκωση τῆς ὕλης καί ἀκόμη τήν παράλειψη ὁρισμένων θεμάτων, ὅπως π.χ. οἱ τυχαῖες ταλαντώσεις καί ἡ δυναμική εὐστάθεια· νομίζουμε ὅμως ὅτι τά εἰδικά αὐτά θέματα μποροῦν νά καλυφθοῦν στή συνέχεια μέ σχετική εὐκολία.

Γενικά στούς δύο πρώτους τόμους μελετᾶται τό γενικό πρόβλημα διεγέρσεως - ἀποκρίσεως γιά ὁποιαδήποτε διέγερση καί ὄχι ἀναγκαστικά σεισμική. Τό σπουδαιότερο κέρδος ἀπό τή μελέτη αὐτή δέν εἶναι τόσο ὁ ὑπολογισμός τῆς ὅλης «ἱστορίας» τῆς ἀποκρίσεως, ὅσο ὁ ὑπολογισμός τῶν δυναμικῶν χαρακτηριστικῶν τῶν κατασκευῶν. Δηλαδή τῶν ἰδιοπεριόδων καί ἰδιομορφῶν ταλαντώσεως, μέ τή βοήθεια τῶν ὁποίων ὑπολογίζεται ὀρθολογιστικά ἡ διανομή τῶν σεισμικῶν δυνάμεων στίς κατασκευές.

Μέ τά προηγούμενα ἐφόδια τῶν δύο πρώτων τόμων, στόν τρίτο τόμο γίνεται ἡ μελέτη τῶν ἀντισεισμικῶν κατασκευῶν. Στήν ἀρχή ἐξετάζεται ὁ σεισμός σάν γεωλογικό φαινόμενο καί τά διάφορα χαρακτηριστικά του γνωρίσματα· ἀπό αὐτά, γιά τίς ἀνάγκες τοῦ Πολιτικοῦ Μηχανικοῦ, ἐνδιαφέρουν κυρίως τά ἐπιταχυνσιογραφήματα ἰσχυρῶν σεισμικῶν δονήσεων καί τά φάσματα ἀποκρίσεως. Μέ τά πρῶτα γίνεται ὁ ἀκριβής δυναμικός ὑπολογισμός ἐνῶ μέ τά δεύτερα ὁ προσεγγιστικός, πού καλύπτει τήν πλειονότητα τῶν δομικῶν κατασκευῶν· γιά τό λόγο αὐτό ἐξετάζεται λεπτομερειακά καί ἡ στατική ἀνάλυση τῶν ἀντισεισμικῶν δομικῶν στοιχείων πολυόροφων συστημάτων.

Τελειώνοντας, ἐπιθυμῶ νά ἐκφράσω τίς εὐχαριστίες μου στίς κυρίες Ἀργυρώ Κορτέση-Οἰκονόμου, Βασιλική Μπινίκου-Σιφουνάκη καί Ὡραιοζήλη Μωϋσίδου-Βοΐκογλου γιά τή δακτυλογράφηση τοῦ κειμένου καί τή σχεδίαση τῶν σχημάτων. Ἐπίσης, εὐχαριστῶ θερμά τό τυπογραφεῖο Π. Ζήτη γιά τήν ἐπιμελημένη στοιχειοθέτηση καί ἐκτύπωση τοῦ βιβλίου.

Θεσσαλονίκη, Ἰανουάριος 1983

ΚΥΡΙΑΚΟΣ ΑΝΑΣΤΑΣΙΑΔΗΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΤΟΜΟΥ

ΠΡΩΤΟ ΜΕΡΟΣ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΒΑΣΕΙΣ

ΠΡΩΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

σελ.

ΔΕΥΤΕΡΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

Α. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Β. ΕΡΓΟ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Γ. ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΕΣ ΑΡΧΕΣ Ἤ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΕΡΟΣ

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΤΡΙΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΜΟΝΟΒΑΘΜΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Α. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

σελ.

Β. ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΙΝΗΣΕΩΣ

Γ. ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

Δ. ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

ΤΕΤΑΡΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΠΟΛΥΒΑΘΜΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Α. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

σελ.

Β. ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΙΝΗΣΕΩΣ

Γ. ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

Δ. ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

Ε. ΜΕΘΟΔΟΙ ΛΥΣΕΩΣ ΤΟΥ ΙΔΙΟΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

ΠΡΩΤΟ ΜΕΡΟΣ
ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΒΑΣΕΙΣ

ΠΡΩΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ
ΕΙΣΑΓΩΓΗ

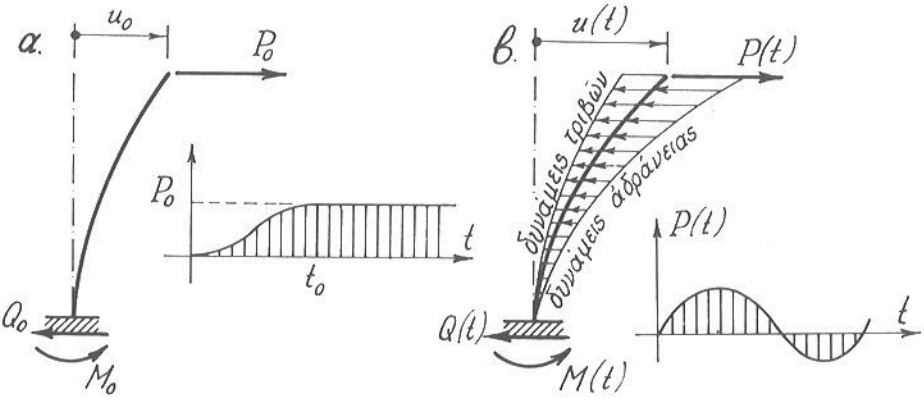
1.1. Τό δυναμικό πρόβλημα τῶν κατασκευῶν

Εἶναι γνωστό, ὅτι ἡ *Στατική τῶν Κατασκευῶν* βασίζεται στήν ὑπόθεση τῆς ἀργῆς καί προοδευτικῆς ἐφαρμογῆς τῶν ἐξωτερικῶν φορτίων πάνω στίς κατασκευές. Αὐτός ὁ τρόπος ἐφαρμογῆς τῶν φορτίων συνεπάγεται τήν ἀνάπτυξη πολύ μικρῶν *ταχυτήτων* καί *ἐπιταχύνσεων*, πού μποροῦμε πρακτικά νά τίς θεωρήσουμε μηδενικές· ἔτσι ἡ κίνηση τῶν ὑλικῶν σημείων τῶν κατασκευῶν γίνεται χωρίς τήν ἀνάπτυξη ἀξιόλογων *δυνάμεων ἀδράνειας* (μικρές ἐπιταχύνσεις) καί χωρίς ἐσωτερικές καί ἐξωτερικές *ἀντιστάσεις - τριβές* (μικρές ταχύτητες). Μέ τίς ὑποθέσεις αὐτές τό πρόβλημα ἁπλοποιεῖται σέ μεγάλο βαθμό, γιατί πετυχαίνουμε τήν ἀπαλοιφή τοῦ παράγοντα *χρόνος* ἀπό αὐτό· τά διάφορα μεγέθη ἐντάσεως καί παραμορφώσεως μπαίνουν στούς ὑπολογισμούς μέ τίς *τελικές τιμές* τους, πού θεωροῦνται σταθερές καί ὄχι συναρτήσεις τοῦ χρόνου.

Ὑπάρχουν ὅμως καί πολλές περιπτώσεις προβλημάτων, στά ὁποῖα ἡ ἔνταση καί ἡ διεύθυνση τῶν ἐξωτερικῶν φορτίων μεταβάλλονται πολύ γρήγορα ἤ καί ἀπότομα, ὁπότε ἡ ὑπόθεση μηδενικῶν ταχυτήτων καί ἐπιταχύνσεων θά ὁδηγοῦσε σέ μεγάλη ἀνακρίβεια τῶν ἀποτελεσμάτων (π.χ. φορτία ἀπό λειτουργία μηχανῶν, ἀπό σεισμό κ.λπ.). Στίς περιπτώ-

σεις αὐτές ἐπιβάλλεται ἡ γνώση τῆς *χρονικῆς μεταβολῆς* τόσο τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, ὅσο καί τῶν δυνάμεων ἀδράνειας καί ἀντιστάσεως· ἔτσι ὁ παράγοντας τοῦ χρόνου μπαίνει σέ ὅλα τά μεγέθη τοῦ προβλήματος.

Ἀντικείμενο τῆς *Δυναμικῆς τῶν Κατασκευῶν* εἶναι ὁ ὑπολογισμός τῆς κινήσεως, τῆς παραμορφώσεως καί τῆς ἐντάσεως τῶν φορέων σέ κάθε χρονική στιγμή, γιά γνωστή χρονική μεταβολή τῶν ἐξωτερικῶν φορτίων. Ἡ διαφορά τοῦ δυναμικοῦ προβλήματος ἀπό τό ἀντίστοιχο στατικό φαίνεται παραστατικά στό παρακάτω σχ. 1 τοῦ φορτιζόμενου μέ μιά δύναμη προβόλου: γιά *στατική φόρτιση* ἡ ἐξωτερική δύναμη, αὐξάνοντας προοδευτικά ἀπό τό μηδέν, παίρνει στό χρόνο t_0 τήν τελική της τιμή P_0 καί ἔπειτα παραμένει σταθερή· τό ἴδιο ἰσχύει καί γιά τά ὑπολογιζόμενα φορτία διατομῆς Q_0, M_0 καί τή μετακίνηση τῆς κεφα-



Σχ. 1. Πρόβολος μέ α) στατική καί β) δυναμική φόρτιση.

λῆς u_0. Ἀντίθετα, γιά *δυναμική φόρτιση*, ὅλα τά προηγούμενα μεγέθη εἶναι συναρτήσεις τοῦ χρόνου καί ἐπί πλέον ὁ πρόβολος φορτίζεται σέ ὅλο τό ὕψος του καί μέ πρόσθετες δυνάμεις ἀδράνειας καί ἀντιστάσεως· αὐτές ἀκριβῶς οἱ δυνάμεις, ὅταν εἶναι σημαντικές, ἀλλοιώνουν τήν ἔνταση καί τήν παραμόρφωση τοῦ προβόλου καί δίνουν *δυναμικό χαρακτήρα* στό πρόβλημα. Ὅλες οἱ ἰδιομορφίες καί δυσκολίες τοῦ δυναμικοῦ προβλήματος ὀφείλονται στό γεγονός, ὅτι οἱ δυνάμεις αὐτές εἶναι ἄγνωστες στήν ἀρχή καί ἐξαρτῶνται ἄμεσα ἀπό τήν κίνηση (ταχύτητα, ἐπιτάχυνση), πού εἶναι ἐπίσης ἄγνωστη στήν ἀρχή.

1.2. Διέγερση καί ἀπόκριση

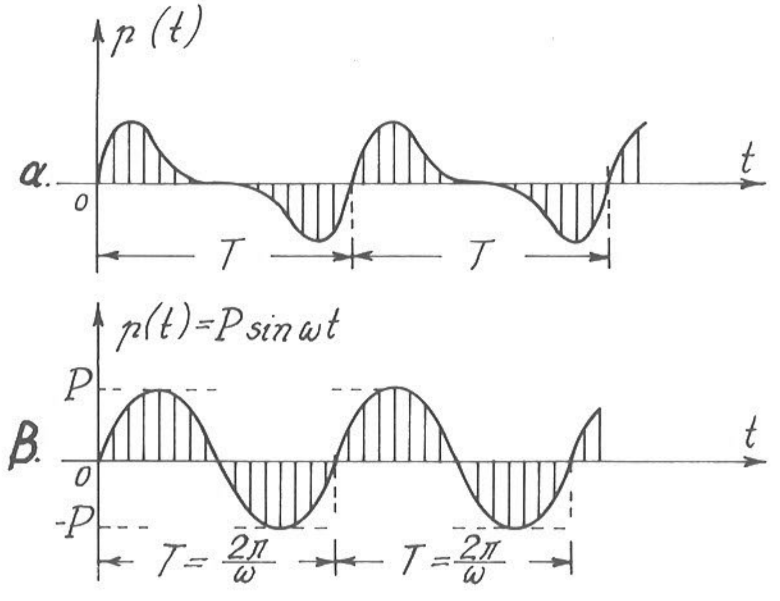
Μέ τό γενικό ὅρο *διέγερση (excitation)*, πού ἔχει καθιερωθεῖ στή δυναμική τῶν κατασκευῶν, ἐννοοῦμε τά κάθε εἴδους γνωστά ἐξωτερικά φορτία ἤ καταναγκασμούς, στά ὁποῖα ὑποβάλλεται ἕνας φορέας. Ἐκφράζεται ἀπό μιά χρονική συνάρτηση $p(t)$, ἀνάλογα μέ τήν ὁποία διακρίνεται σέ *περιοδική* καί μή *περιοδική*. Σέ μιά περιοδική διέγερση ἔχουμε (σχ. 2α)

$$p(t) = p(t+T),$$

ὅπου T ἡ *περίοδός* της. Ἡ ἁπλούστερη ἀπό τίς περιοδικές διεγέρσεις εἶναι ἡ *ἁπλή ἁρμονική* (σχ. 2β)

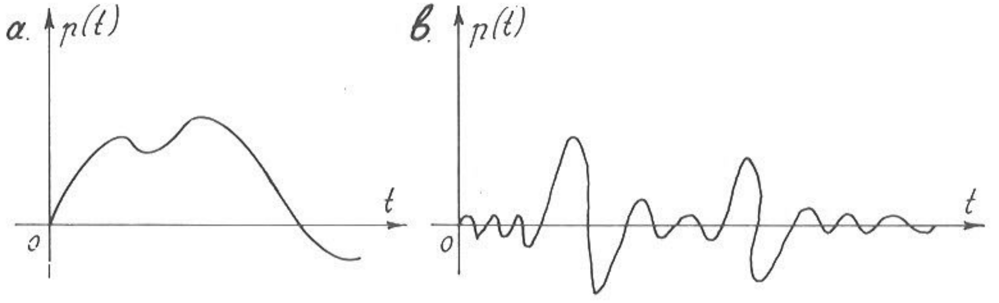
$$p(t) = P \sin \frac{2\pi}{T} t = P \sin \omega t\ ,$$

ὅπου P τό *πλάτος* τῆς διεγέρσεως, T ἡ *περίοδος* καί $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ ἡ *κυκλική συχνότητα*. Ἀλλά καί ὁποιαδήποτε περιοδική διέγερση μπορεῖ νά ἀναλυθεῖ σέ ἄθροισμα ἁπλῶν ἁρμονικῶν διεγέρσεων μέ τούς γνωστούς τύπους τοῦ FOURIER (βλ. ἐξ. *B*.27 καί *B*.28).



Σχ. 2. α) Περιοδική διέγερση. β) Ἁπλή ἁρμονική διέγερση.

Οἱ μή περιοδικές διεγέρσεις διακρίνονται σέ μικρῆς διάρκειας (π.χ. ἀπό ἀνεμοπίεση), ὁπότε λέγονται εἰδικότερα *ὠστικές* καί σέ μεγάλης διάρκειας (ὅπως π.χ. ἀπό σεισμό). Οἱ διεγέρσεις αὐτές, ἐπειδή ἐμφανίζονται σέ ὁρισμένο χρονικό διάστημα καί ἔπειτα ἐξαφανίζονται, λέγονται *μεταβατικές (transient)* (βλ. σχ. 3).



Σχ. 3. Μεταβατικές διεγέρσεις α) μικρῆς καί β) μεγάλης διάρκειας.

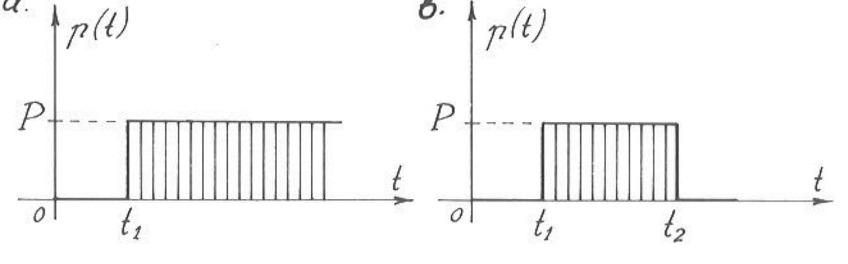
Ἡ ἁπλούστερη ἀπό τίς ὠστικές διεγέρσεις εἶναι αὐτή πού ἐκδηλώνεται *ἀκαριαία* κάποια χρονική στιγμή $t = t_1$ μέ τήν τιμή (σχ. 4α)

$$p\,(t) = P$$

καί στή συνέχεια παραμένει σταθερή· ἡ διέγερση αὐτή ἐκφράζεται μαθηματικά μέ τή σχέση

$$p\,(t) = P\,H(t-t_1), \tag{1α}$$

ὅπου $H\,(t-t_1)$ ἡ «συνάρτηση» τοῦ *HEAVISIDE* (βλ. Β.3). Ἐάν ἡ σταθερή



Σχ. 4. Ἁπλές ὠστικές διεγέρσεις στά διαστήματα α) $t_1 < t < \infty$ καί β) $t_1 < t < t_2$.

δύναμη P ἐμφανίζεται μόνο μέσα στό χρονικό διάστημα $t_1 < t < t_2$, τότε ἡ διέγερση γράφεται (σχ. 4β)

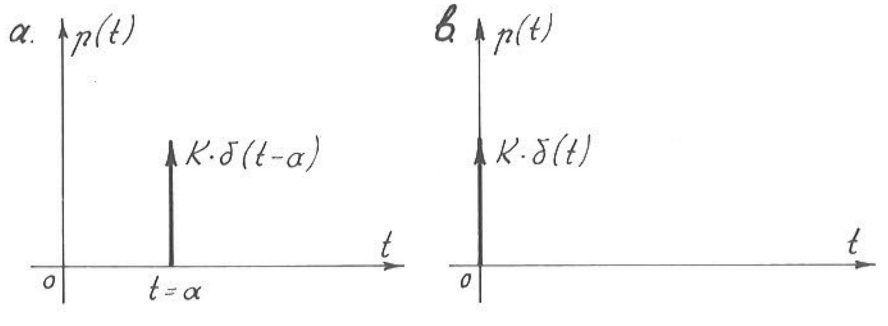
$$p(t) = P\,[H(t-t_1) - H(t-t_2)]. \tag{1β}$$

Ἡ ἔννοια τῆς *κρουστικῆς* διεγέρσεως προκύπτει ἀπό τήν προηγούμενη, ὅταν τό χρονικό διάστημα $t_2 - t_1 = \Delta t$ εἶναι πολύ μικρό· τότε μποροῦμε νά ἀντικαταστήσουμε τή δύναμη P μέ τή *συνολική της κρούση* στό ἀπειροστό χρονικό διάστημα Δt

$$K = P \cdot \Delta t$$

καί νά ἐκφράσουμε μαθηματικά τήν κρουστική αὐτή διέγερση μέ τή σχέση (σχ. 5α)

$$p(t) = K \cdot \delta(t-a), \qquad a = t_1 + \frac{\Delta t}{2}, \tag{2α}$$



Σχ. 5. Ἁπλές κρουστικές διεγέρσεις γιά α) $t = a$ καί β) $t = 0$.

ὅπου $\delta(t-a)$ ἡ «συνάρτηση» τοῦ DIRAC στό σημεῖο $t = a$ (βλ. Β.3). Ἡ ἴδια κρουστική διέγερση στήν ἀρχή τῶν χρόνων ($t = 0$) γράφεται

$$p(t) = K \cdot \delta(t), \tag{2β}$$

ὅπου $\delta(t)$ ἡ συνάρτηση τοῦ DIRAC στό σημεῖο $t = 0$ (σχ. 5β).

Μέ τό γενικό ὅρο *ἀπόκριση (response)* ἑνός φορέα χαρακτηρίζουμε τόσο τήν κίνηση , ὅσο καί τήν ἔνταση καί τήν παραμόρφωσή του. Ἡ ὑπόψη κίνηση, ὑπό ὁρισμένες προϋποθέσεις (συντηρητικό σύστημα), εἶναι παλμική «γύρω» ἀπό τήν ἀρχική θέση ἠρεμίας καί ὀνομάζεται *ταλάντωση (vibration)*. Ἀνάλογα τώρα μέ τό εἶδος τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως πού περιγράφει τήν κίνηση, ἡ ταλάντωση λέγεται *γραμμική*, ἐάν ἡ

ἐξίσωση εἶναι γραμμική μέ σταθερούς συντελεστές, ἤ *μή γραμμική* στήν ἀντίθετη περίπτωση.

Ἡ ταλάντωση λέγεται *ἐξαναγκασμένη (forced vibration)* κατά τό χρονικό διάστημα τῆς συνυπάρξεως καί τῆς ἐξωτερικῆς διεγέρσεως, ἐνῶ μετά τήν ἐξαφάνιση τῆς τελευταίας λέγεται *ἐλεύθερη (free vibration)*. Ἡ ἐξαναγκασμένη ταλάντωση ἀποτελεῖται ἀπό δύο μέρη: τή *μεταβατική ταλάντωση (tansient vibration)*, πού δέν ἐξαρτᾶται ἄμεσα ἀπό τή διέγερση καί μηδενίζεται σύντομα ἐξ αἰτίας τῶν τριβῶν, καί τή *μόνιμη ταλάντωση (steady-state vibration)*, πού ἐξαρτᾶται ἄμεσα ἀπό τή διέγερση καί συνεχίζεται ὅσο αὐτή ὑπάρχει. Τέτοια εἶναι π.χ. ἡ *μόνιμη ἁρμονική* ταλάντωση, πού παράγεται ἀπό ἁρμονική διέγερση.

Οἱ μέθοδοι, τέλος, ὑπολογισμοῦ τῶν ταλαντώσεων διακρίνονται σέ *ντετερμινιστικές*, ὅταν ἡ διέγερση εἶναι μαθηματικά καθορισμένη καί σέ *στοχαστικές*, ὅταν αὐτή ἐξαρτᾶται ἀπό τυχαίους παράγοντες, πού μόνο πιθανολογικά εἶναι γνωστοί· στήν περίπτωση αὐτή καί ἡ ἀπόκριση ἐκτιμᾶται ἐπίσης πιθανολογικά.

1.3. Διακριτοποίηση

Ἡ κίνηση τῶν (ἐλαστικῶν) φορέων ἐξαρτᾶται ἄμεσα ἀπό τίς δυό φυσικές ἰδιότητες τοῦ ὑλικοῦ τους: τήν *ἀδράνεια* καί τήν *ἐλαστικότητα*, πού ποσοτικά ἐκφράζονται μέ τή *μάζα* καί τίς *ἐλαστικές σταθερές* ἀντίστοιχα. Οἱ ἰδιότητες αὐτές συνυπάρχουν καί ἔχουν κοινό «φορέα» τό ὑλικό, πού γενικά εἶναι *συνεχῶς* κατανεμημένο. Ἔτσι π.χ. στούς γραμμικούς φορεῖς ἡ μάζα $\bar{m}$ ἀνά μονάδα μήκους καί ἡ ἀκαμψία EJ (ἀνάλογα ἡ ἀτένεια EA καί ἡ ἀστρεψία GJ_d) συνυπάρχουν καί κατανέμονται συνεχῶς κατά μῆκος τοῦ ἄξονα· ἐπίσης τήν ἴδια εἰκόνα «σύζευξης» παρουσιάζουν κατά τήν κίνηση καί οἱ ἀντίστοιχες ἀδρανειακές καί ἐλαστικές δυνάμεις πού ἀναπτύσσονται.

Ἐξ αἰτίας ὅμως αὐτῆς τῆς φυσικῆς πραγματικότητας ἡ μαθηματική ἔκφραση τῆς κινήσεως γίνεται μέ *διαφορικές ἐξισώσεις μέ μερικές παραγώγους*, ὡς πρός τίς μεταβλητές χώρου καί χρόνου· ἡ λύση τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν εἶναι κατά κανόνα δύσκολη καί τίς πιό πολλές φορές ἀδύνατη, ὅταν μάλιστα πρόκειται γιά σύστημα πολλῶν τέτοιων ἐξισώσεων.

Γιά τούς λόγους αὐτούς καταφεύγουμε στή λεγόμενη *διακριτοποίηση (discretisation)* τοῦ προβλήματος, ἔπειτα ἀπό τήν ὁποία ἡ κίνηση περιγράφεται μέ *συνήθεις διαφορικές ἐξισώσεις*. Μέ τόν ὅρο αὐτό ἐννοοῦμε

στή δυναμική τῶν κατασκευῶν τήν *τεχνητή ἀποσύζευξη* τῶν ἰδιοτήτων ἀδράνεια καί ἐλαστικότητα, πού μπορεῖ νά γίνει μέ δυό γενικές μεθόδους: τήν *ἐσωτερική διακριτοποίηση*, πού συνίσταται σέ ἀριθμητική ὁλοκλήρωση τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων μέ μερικές παραγώγους (π.χ. μέ τή μέθοδο τῶν πεπερασμένων διαφορῶν) καί τήν *ἐξωτερική διακριτοποίηση*, πού μπορεῖ νά εἶναι ἀδρανειακή ἤ ἐλαστική.

. Ἡ *ἀδρανειακή διακριτοποίηση* γίνεται μέ τήν αὐθαίρετη «συγκέντρωση» τῶν μαζῶν σέ ὁρισμένα σημεῖα τοῦ φορέα, τούς κόμβους, ἐνῶ ὁ ὑπόλοιπος, μέ μηδενική μάζα, ἀπογυμνώνεται ἀπό τήν ἰδιότητα τῆς ἀδράνειας. Ἀντίθετα, ἡ *ἐλαστική διακριτοποίηση* γίνεται μέ τήν αὐθαίρετη «συγκέντρωση» τῆς ἐλαστικότητας σέ ὁρισμένα σημεῖα τοῦ φορέα , τούς ἐλαστικούς κόμβους, ἐνῶ ὁ ὑπόλοιπος θεωρεῖται *ἀπαραμόρφωτος* δηλ. ἀπογυμνώνεται ἀπό τήν ἰδιότητα τῆς ἐλαστικότητας.

Ἡ ἐλαστική ὅμως διακριτοποίηση μπορεῖ νά γίνει καί μέ ἄλλο τρόπο ὀλιγότερο αὐθαίρετο καί περισσότερο ἀκριβή, μέ τίς μεθόδους *RAYLEIGH - RITZ, GALERKIN* κ.λπ. Σύμφωνα μέ αὐτές ἡ ἄγνωστη μετακίνηση *προσεγγίζεται* μέ μιά ἀκολουθία *γνωστῶν* συναρτήσεων, τῶν συναρτήσεων *μορφῆς ἤ παρεμβολῆς*, κι ἔτσι ἐκτός ἀπό τή μάζα, καί ἡ ἐλαστικότητα παραμένει κατανεμημένη στήν ἔκταση τοῦ φορέα. Ἀλλά ἡ πιό τελειοποιημένη μέθοδος ἐλαστικῆς διακριτοποιήσεως εἶναι ἡ νέα *Μέθοδος τοῦ Πεπερασμένου Στοιχείου (Finite Element Method)*, πού βασίσθηκε στίς προηγούμενες καί ἀναπτύχθηκε πολύ γρήγορα, χάρη στή χρήση τοῦ ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστῆ.

Συνοψίζοντας τά παραπάνω παρατηροῦμε, ὅτι ὁ πρακτικός ὑπολογισμός τῶν ταλαντώσεων τῶν κατασκευῶν ἀνάγεται τελικά στή μελέτη συστήματος «διακριτῶν μαζῶν» πραγματικῶν ἤ ἰδεατῶν, χάρη στίς μεθόδους διακριτοποιήσεως· ἡ μελέτη αὐτή βασίζεται στίς ἀρχές τῆς *Ἀναλυτικῆς Μηχανικῆς*, τίς ὁποῖες θά ἀναπτύξουμε περιληπτικά στό ἑπόμενο κεφάλαιο.

ΔΕΥΤΕΡΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

Α. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

2.1. Γενικά

Εἶναι γνωστό ἀπό πολύ παλιά, ὅτι γιά νά περιγράψουμε μαθηματικά μιά δύναμη, χρησιμοποιοῦμε ἕνα *διάνυσμα*, μαθηματική ὀντότητα, πού χαρακτηρίζεται ἀπό ἕνα σημεῖο ἐφαρμογῆς μιά φορά καί τό μέτρο του. Στούς νόμους τοῦ *ΝΕΥΤΩΝΑ* πάνω στούς ὁποίους στηρίζεται ἡ κλασική Μηχανική, χρησιμοποιεῖται ἡ προηγούμενη μαθηματική παράσταση τῆς δυνάμεως καί γι' αὐτό τό λόγο ἡ Μηχανική αὐτή λέγεται καί *Διανυσματική*. Ἡ παράσταση αὐτή βρίσκεται σέ ἁρμονία καί μέ τήν ἐποπτική γνώση πού ἔχουμε γιά τή δύναμη, σάν μυϊκή πίεση ἤ σάν βάρος.

Ὑπάρχει ὅμως, τουλάχιστον ἀπό τήν ἐποχή τοῦ *D' ALEMBERT* , καί ἕνας δεύτερος τρόπος μαθηματικῆς περιγραφῆς τῆς δυνάμεως μέ τή βοήθεια τῆς *Ἀρχῆς τῶν Δυνατῶν Ἔργων*. Ὁ τρόπος αὐτός, ἀντίθετα ἀπό αὐτό πού ἴσως νομίζουμε, βρίσκεται ἐπίσης σέ ἁρμονία μέ τήν καθημερινή μας πείρα· π.χ. γιά νά δοῦμε πόσο βαρύ εἶναι ἕνα ἀντικείμενο δοκιμάζουμε νά τό σηκώσουμε, δηλ. «μετρᾶμε» τό δυνατό ἔργο τοῦ βάρους του.

Γενικότερα, γιά τό τυχόν μηχανικό σύστημα, θεωροῦμε ἕνα σύνολο *δυνατῶν μετακινήσεων* καί κατόπιν ὑπολογίζουμε τό ἀντίστοιχο *δυνατό ἔργο* τῶν δυνάμεων τοῦ συστήματος· ἡ γνώση τῆς *ἀριθμητικῆς τιμῆς* τοῦ ἔργου αὐτοῦ συνεπάγεται καί τή γνώση τῶν δυνάμεων τοῦ συστήματος. Ὁ δεύτερος τρόπος μελέτης ἀποτελεῖ τό περιεχόμενο τῆς *Ἀναλυτικῆς Μηχανικῆς*[1], ἡ ὁποία στηρίζεται ἀποκλειστικά στήν Ἀρχή τῶν δυνατῶν ἔργων, ὅπως ἡ διανυσματική Μηχανική στηρίζεται στούς νόμους τοῦ *ΝΕΥΤΩΝΑ*.

Μέ τήν ἔννοια τοῦ δυνατοῦ ἔργου θεσπίζεται *δυική ἀντιστοιχία* ἀνά-

---

1. Ἡ ὀνομασία ὀφείλεται στήν ἀποκλειστική χρήση μεθόδων τῆς Μαθηματικῆς Ἀναλύσεως καί δέν ἔχει τήν ἔννοια τοῦ «ἀναλύω σέ ἁπλούστερα μέρη».