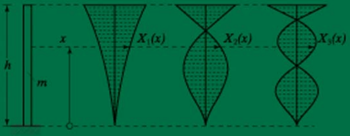
ΚΥΡΙΑΚΟΥ Κ. ΑΝΑΣΤΑΣΙΑΔΗ

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ



ΤΟΜΟΣ II. ΣΥΝΕΧΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΤΟΜΟΥ

ΤΡΙΤΟ ΜΕΡΟΣ

ΣΥΝΕΧΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΠΕΜΠΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Η ΑΠΛΗ ΔΟΚΟΣ

ΕΚΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΟΚΩΝ

Γ. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

Δ. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΛΟΓΙΣΜΟ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ LAPLACE ΚΑΙ FOURIER

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΟΥ LAPLACE

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΟΥ FOURIER

ΣΗΜΕΙΩΣΗ ΓΙΑ ΤΙΣ ΠΑΡΑΠΟΜΠΕΣ

Ὁ δεύτερος τόμος ἀποτελεῖται ἀπό τά κεφάλαια 5, 6 καί ἀπό τά παραρτήματα Α καί Β. Κάθε κεφάλαιο ὑποδιαιρεῖται στά ὑποκεφάλαια Α, Β, Γ,... Ἡ ἀρίθμηση τῶν παραγράφων, τῶν ἐξισώσεων καί τῶν σχημάτων κάθε κεφαλαίου εἶναι αὐτοτελής· τό ἴδιο ἰσχύει καί γιά τά παραδείγματα σέ κάθε ὑποκεφάλαιο. Ἡ παραπομπή σέ μιά ἐξίσωση ἤ σέ ἕνα σχῆμα αὐτοῦ τοῦ τόμου (ἤ καί τοῦ πρώτου τόμου) γίνεται μέ τήν ἀναφορά τοῦ ἀριθμοῦ τους, π.χ. ἐξ. (82) ἤ σχ. 18, ἐκτός ἄν ἀνήκουν σέ ἄλλο κεφάλαιο, ὁπότε προτάσσεται ὁ ἀριθμός τοῦ κεφαλαίου, π.χ. ἐξ. (5.82) ἤ σχ. 5.18. Εἰδικά γιά τά παραδείγματα, μετά τόν ἀριθμό τους, ἀκολουθεῖ μέσα σέ παρένθεση ὁ ἀριθμός τοῦ κεφαλαίου καί τό γράμμα τοῦ ὑποκεφαλαίου στά ὁποῖα ἀνήκουν, π.χ. Παράδειγμα 3.(5Γ).

Οἱ παραπομπές στά Παραρτήματα Α καί Β γίνονται μέ πρόταξη τοῦ Α ἤ τοῦ Β, π.χ. ἐξ. (Α.8) ἤ §Α.3 κλπ.

ΤΡΙΤΟ ΜΕΡΟΣ
ΣΥΝΕΧΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΠΕΜΠΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ
Η ΑΠΛΗ ΔΟΚΟΣ

Α. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

5.1 Γενικά

Στά δύο προηγούμενα κεφάλαια ἡ μελέτη τῆς ταλαντώσεως τῶν διαφόρων συστημάτων ἔγινε *προσεγγιστικά*, μέ κατάλληλη ἀναγωγή τους ἀπό ἀπειροβάθμια σέ πολυβάθμια ἤ καί μονοβάθμια. Μέ τόν τρόπο αὐτό καταλήξαμε σέ σύστημα *κοινῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων* τῆς κινήσεως, τό ὁποῖο στή συνέχεια λύσαμε μέ τή γενική μέθοδο τῆς ἐπαλληλίας τῶν κύριων τρόπων ταλαντώσεως. Ἄν ἡ γεωμετρία καί ἡ δομή τοῦ συστήματος εἶναι εὐνοϊκή, ἡ λύση αὐτή μπορεῖ νά εἶναι πρακτικά ἱκανοποιητική· διαφορετικά ὅμως, στή γενική περίπτωση τυχόντος συστήματος, μπορεῖ νά εἶναι ἀρκετά ἀνακριβής καί τελικά ἀπαράδεκτη.

Στό κεφάλαιο αὐτό θά ἀναπτυχθεῖ ὁ ἀκριβής ὑπολογισμός τῆς ταλαντώσεως τῆς ἁπλῆς δοκοῦ μέ *συνεχή κατανομή* ἐλαστικῶν καί ἀδρανειακῶν χαρακτηριστικῶν. Στήν περίπτωση αὐτή, ὅπως ἀναφέρθηκε ἤδη στήν παράγρ. 1.3, θά ἔχουμε ἀναγκαστικά φυσική «σύζευξη» τῶν ἰδιοτήτων *ἀδράνεια καί ἐλαστικότητα*· λογιστικό ἐπακόλουθο τῆς φυσικῆς αὐτῆς πραγματικότητας θά εἶναι ἡ μαθηματική ἔκφραση τῶν ἀντίστοιχων μαζικῶν καί ἐλαστικῶν δυνάμεων μέ τήν βοήθεια μερικῶν παραγώγων συναρτήσεων, ὡς πρός τίς μεταβλητές χώρου καί χρόνου. Ἔτσι ἡ κίνηση

θά περιγράφεται τώρα ἀπό *διαφορικές ἐξισώσεις μέ μερικές παραγώγους*, ἀντί τῶν κοινῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων τῶν διακριτῶν συστημάτων.

Ἡ κατάστρωση τῶν ἐξισώσεων κινήσεως τῶν συνεχῶν συστημάτων γίνεται μέ ἀφετηρία τό *ἀπειροστό στοιχεῖο* τους, ὅπως ἀκριβῶς στά διακριτά συστήματα γίνεται μέ ἀφετηρία τίς πεπερασμένες σέ ἀριθμό μοναχικές μάζες τους. Κάθε ἀπειροστό στοιχεῖο μπορεῖ νά ἔχει πολλές, ἀνεξάρτητες, δυνατότητες παραμορφώσεως· ἑπομένως ὁλόκληρο τό σύστημα, μέ τά ἀπειροπληθῆ στοιχεῖα, θά διαθέτει συνολικά *πολλαπλή ἀπειρία* ἐλευθεριῶν κινήσεως. Γιά τό λόγο αὐτό τά ὑπόψη συστήματα λέγονται και *ἀπειροβάθμια*.

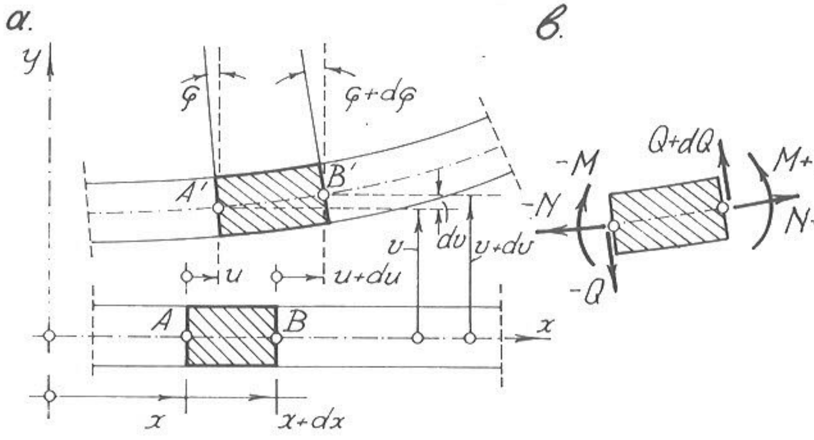
Στό ἑπόμενο κεφάλαιο θά ἀσχοληθοῦμε μέ τούς κλασικούς *γραμμικούς φορεῖς*, γιά τούς ὁποίους ἄλλωστε εἶναι πρακτικά δυνατή ἡ ὁλοκλήρωση τῶν σχετικῶν ἐξισώσεων καί ἡ λήψη ἀριθμητικῶν ἀποτελεσμάτων. Ἡ ὁλοκλήρωση αὐτή γίνεται καί πάλι μέ τή μέθοδο τῆς ἐπαλληλίας τῶν κύριων τρόπων ταλαντώσεως, μέ κατάλληλη γενίκευση τῶν βασικῶν της ἐννοιῶν. Στή γενική ὅμως περίπτωση τυχόντος συστήματος (φορεῖς στό χῶρο, πλάκες, κελύφη) ἡ παραπάνω ὁλοκλήρωση εἶναι πρακτικά ἀδύνατη. Γιά τούς φορεῖς αὐτούς ἐφαρμόζεται κατά κανόνα ἡ *Μέθοδος τοῦ Πεπερασμένου Στοιχείου*, τῆς ὁποίας τά βασικά στοιχεῖα γιά γραμμικά συστήματα θά ἐκθέσουμε στό ἑπόμενο κεφάλαιο.

5.2 Οἱ στοιχειώδεις παραμορφώσεις τῆς δοκοῦ

Γιά τήν παραπέρα ἀνάπτυξη τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ θά εἶναι πολύ χρήσιμη μία σύντομη ὑπενθύμιση τῶν στοιχειωδῶν παραμορφώσεων τῆς *εὐθύγραμμης*[1] πρισματικῆς δοκοῦ. Γιά τή δοκό αὐτή οἱ μετακινήσεις θεωροῦνται *ἀπειροστές, γραμμικά ἐλαστικές* καί ἰσχύει ἡ γνωστή ὑπόθεση τοῦ *BERNOULLI* περί *ἐπιπεδότητας* τῶν διατομῶν κατά τήν κάμψη. Ἡ τελευταία γίνεται μέσα σέ κύριο ἐπίπεδο ἀδράνειας τῆς δοκοῦ καί τά μεγέθη μετακινήσεως (u, v, φ) καί ἐντάσεώς της (M, N, Q) προσημαίνονται κατά τό *ἀπόλυτο* σύστημα· αὐτό ἔχει τούς ἄξονες (x, y) μέσα στό κύριο ἐπίπεδο ἀδράνειας, μέ τόν ἄξονα x νά ταυτίζεται μέ τόν ἄξονα τῆς δοκοῦ, ἐνῶ ὁ τρίτος ἄξονας ἔχει τή διεύθυνση τοῦ ἄλλου κύριου

1) Καί ἡ καμπυλόγραμμη δοκός ἀνάγεται σέ πολυγωνική μέ εὐθύγραμμες πλευρές πολύ μικροῦ μήκους· αὐτό συνεπάγεται διόγκωση τῶν ὑπολογισμῶν, πράγμα ὅμως χωρίς ἰδιαίτερη σημασία γιά τόν αὐτόματο ὑπολογισμό μέ ἠλεκτρονικό ὑπολογιστή.

ἄξονα ἀδράνειας τῆς διατομῆς (σχ. 1). Οἱ ἐπίπεδες διατομές A καί B τοῦ τυχόντος ἀπειροστοῦ στοιχείου τῆς δοκοῦ, μετά τήν παραμόρφωσή της, παίρνουν τίς θέσεις A' καί B' μετακινούμενες σάν στερεά, σύμφωνα μέ τήν βασική ὑπόθεση τοῦ *BERNOULLI*· ἔτσι ἡ διατομή A ἐμφανίζει τήν ὁριζόντια μετάθεση u τήν κατακόρυφη υ καί τήν στροφή φ,



Σχ. 1. Μετακίνηση καί ἔνταση τοῦ ἀπειροστοῦ στοιχείου.

τέτοια μάλιστα ὥστε ἡ διατομή A' νά εἶναι *κάθετη* στόν παραμορφωμένο ἄξονα τῆς δοκοῦ. Στή γειτονική διατομή B τά προηγούμενα μεγέθη μετακινήσεως θά εἶναι αὐξημένα κατά τίς διαφορικές ποσότητες du, $d\upsilon$ καί $d\varphi$· ἀπό αὐτές οἱ du καί $d\upsilon$ εἶναι *ἀνεξάρτητες* μεταξύ τους, ἐνῶ γιά τή γωνία κλίσεως φ ἰσχύει ἡ σχέση

$$\varphi(x) = \upsilon'(x) \tag{1}$$

γιατί εἶναι ἀπειροστή σέ μέγεθος $(tg\varphi \cong \varphi)$ καί ἡ ἐλαστική γραμμή τῆς δοκοῦ ἀποτελεῖ συνεχή καμπύλη.

Ὁ ὑπολογισμός τῶν *ἀνεξάρτητων* μεταξύ τους στοιχειωδῶν παραμορφώσεων du καί $d\varphi$ μπορεῖ νά γίνει ξεχωριστά βάσει τῆς ἀρχῆς τῆς *ἐπαλληλίας* (ἀπειροστές μετακινήσεις). Ἔτσι στό σχ. 2α τό ἀπειροστό στοιχεῖο φορτίζεται μόνο μέ τήν ὀρθή δύναμη N καί σύμφωνα μέ τό νόμο τοῦ *Hooke* θά ἔχει τή μήκυνση

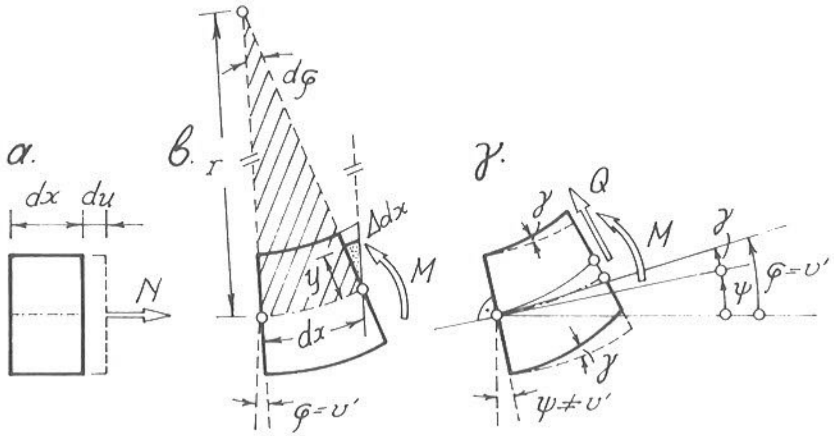
$$du = \frac{N}{EF}\,dx \tag{2α}$$

ἤ
$$\varepsilon = u' = \frac{N}{EF}\,, \tag{2β}$$

ὅπου ε ἡ *ἐπιμήκυνση* στή θεωρούμενη θέση καί EF ἡ *ἀτένεια* τῆς δοκοῦ.

Στό σχ. 2β τό καμπυλωμένο ἀπειροστό στοιχεῖο φορτίζεται μόνο μέ ροπές κάμψεως. Ἡ ἴνα μέ τεταγμένη y καί ἀρχικό μῆκος dx θά ὑποστεῖ τή βράχυνση $\Delta\, dx$ καί τήν *ἐπιβράχυνση*

$$\varepsilon\,(y) = \frac{\Delta\, dx}{dx}\,.$$



Σχ. 2. Παραμορφώσεις τοῦ ἀπειροστοῦ στοιχείου.

Αὐτή ἀπό τήν ὁμοιότητα τῶν γραμμοσκιασμένων τριγώνων παίρνει τήν ἔκφραση

$$\varepsilon\,(y) = \frac{y}{r}\,,$$

ὅπου r ἡ ἀκτίνα καμπυλότητας στή θεωρούμενη θέση. Ἀλλά κατά τό νόμο τοῦ *Hooke*

$$\varepsilon\,(y) = \frac{\sigma\,(y)}{E}$$

καί ἄρα

$$\frac{y}{r} = \frac{1}{E}\,\sigma(y) = \frac{M}{EJ}\,y$$

ἤ

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EJ}\,,$$

γιατί κατά τά γνωστά ἀπό τήν Ἀντοχή τῶν Ὑλικῶν θά ἔχουμε

$$\sigma\,(y) = \frac{M}{J}\,y,$$

ὅπου J ἡ ροπή ἀδράνειας τῆς διατομῆς. Γιά ἀπειροστές ὅμως μετακινήσεις ἡ ἀκτίνα καμπυλότητας γράφεται[1)]

$$\frac{1}{r} = \frac{\pm v''}{\sqrt{(1+v'^2)^3}} \cong \pm\, v''$$

ὁπότε καταλήγουμε εὔκολα στή σχέση

$$v'' = \frac{M}{EJ} \tag{3α}$$

ἤ

$$d\varphi = \frac{M}{EJ}\,dx \tag{3β}$$

ὅπου EJ ἡ *ἀκαμψία* τῆς δοκοῦ.

Ἀπομένει ὁ ὑπολογισμός τῆς παραμορφώσεως ἀπό τό τρίτο φορτίο διατομῆς, τήν τέμνουσα δύναμη Q. Ἡ δύναμη αὐτή προκαλεῖ τή *γωνία ὀλισθήσεως* γ τῆς διατομῆς B ὡς πρός τή διατομή A καί τήν πρόσθετη κατακόρυφη μετάθεση

$$dv_q = \gamma\,dx.$$

Σύμφωνα μέ τό νόμο τοῦ *Hooke* θά ἔχουμε

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{Q}{GF}\,,$$

---

1. Τό πρόσημο (−) ἰσχύει ὅταν ἡ ἐλαστική γραμμή στρέφει τά κοῖλα της πρός τήν πλευρά τοῦ ἄξονα τῶν τετμημένων τῆς δοκοῦ.

ὅπου G τό *μέτρο ὀλισθήσεως* τοῦ ὑλικοῦ $\left(G = \dfrac{E}{2\,(1+\nu)}\right.$, ν=λόγος τοῦ *Poisson*$\left.\right)$ καί $F'=kF$ ἡ *ἐπιφάνεια ὀλισθήσεως* τῆς διατομῆς ($k=5/6$ γιά ὀρθογωνική διατομή, $k=0{,}9$ γιά κυκλική διατομή). Ἑπομένως προκύπτει τελικά

$$dv_q = \frac{Q}{GF'}\,dx \tag{4α}$$

ἤ

$$v_q' = \frac{Q}{GF'}\,. \tag{4β}$$

Ὅπως φαίνεται στό σχ. 2γ, ἡ γωνία ὀλισθήσεως γ δέν ἐπηρεάζει τή γωνία στροφῆς τῶν διατομῶν, αὐξάνει ὅμως τίς βυθίσεις ἀπό τήν τιμή v_m, τήν ὀφειλόμενη μόνο στή ροπή κάμψεως, στήν τιμή

$$v = v_m + v_q \tag{5α}$$

καί τή γωνία κλίσεως τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς στή συνολική τιμή

$$\varphi = v' = \psi + \gamma, \tag{5β}$$

ὅπου μέ τό $\psi=v_m'$ συμβολίζουμε τώρα τή γωνία στροφῆς τῶν διατομῶν λόγω τῆς ροπῆς κάμψεως M· αὐτή ὑπολογίζεται ὅπως προηγουμένως ἀπό τήν ἐξ.(3β), δηλ.

$$d\psi = \frac{M}{EJ}\,dx. \tag{5γ}$$

Συμπερασματικά παρατηροῦμε, ὅτι τό ἀπειροστό στοιχεῖο τῆς δοκοῦ ἐμφανίζει *τρεῖς ἀνεξάρτητες παραμορφώσεις*, τίς du, $d\psi$ καί dv_q, ὀφειλόμενος στά τρία φορτία διατομῆς του N, M καί Q ἀντίστοιχα· ἑπομένως ἡ δοκός θά διαθέτει συνολικά ∞^3 ἐλευθερίες κινήσεως.

Ἐάν ἡ δοκός φορτίζεται καί μέ τή *ροπή στρέψεως* C, τότε οἱ διατομές τοῦ ἀπειροστοῦ στοιχείου θά ἐμφανίζουν καί ἀμοιβαία στροφή $d\theta$ στό ἐπίπεδό τους. Μέ τήν προϋπόθεση στρέψεως μέ *ἐλεύθερη κύρτωση* τῶν διατομῶν (στρέψη *Saint-Vénant*) θά ἔχουμε κατά τά γνωστά ἀπό τήν Ἀντοχή τῶν Ὑλικῶν

$$d\theta = \frac{C}{G\,J_d}\,dx \tag{6α}$$

ἤ

$$\theta' = \frac{C}{G\,J_d}\,, \tag{6β}$$

ὅπου $G\,J_d$ ἡ *ἀστρεψία* τῆς διατομῆς καί J_d γεωμετρικό μέγεθος ἐξαρτώμενο ἀπό τή μορφή της.

5.3 Οἱ στατικές διαφορικές ἐξισώσεις τῆς δοκοῦ

Μέ τή βοήθεια τῶν τύπων ὑπολογισμοῦ τῶν παραμορφώσεων τῆς δοκοῦ μποροῦμε, ἀντίστροφα, νά ἐκφράσουμε καί τά φορτία διατομῆς συναρτήσει τῶν παραμορφώσεων· ἔτσι προκύπτουν οἱ λεγόμενες *ἐλαστικές συνθῆκες*, οἱ ὁποῖες βάσει τῶν ἐξ. (2), (3), (4), (5) καί (6) θά εἶναι

$$N = E\,F\,u', \tag{7α}$$

$$M = EJ\varphi' \text{ ἤ } EJ\,\psi' \tag{7β}$$

$$Q = kGF\gamma = k\,GF\,(\varphi - \psi), \tag{7γ}$$

$$C = G\,J_d\,\theta'. \tag{7δ}$$

Στή δεύτερη ἐξίσωση χρησιμοποιεῖται ἡ γωνία ψ ἤ ἡ φ ἀνάλογα μέ τή θεώρηση ἤ ὄχι καί τῶν παραμορφώσεων τῆς τέμνουσας δυνάμεως Q.

Στό σχ. 3 φαίνονται οἱ λεγόμενες *στατικές συνθῆκες* τοῦ ἀπειροστοῦ στοιχείου· αὐτές ἐκφράζουν τή στατική ἰσορροπία μεταξύ τῶν φορτίων διατομῆς N, Q, M, C καί τῆς *ἐξωτερικῆς φορτίσεως* $\bar{p}(x)$, $p(x)$, $\mu(x)$, ἡ ὁποία κατά μῆκος τοῦ ἀπειροστοῦ στοιχείου ἔχει τή *σταθερή* τιμή τῆς ἀρχῆς του. Ἔτσι ἀπό τή συνθήκη ἰσορροπίας κατά τόν ἄξονα τοῦ ἀπειροστοῦ στοιχείου ἔχουμε (σχ. 3α, γ)

$$N'(x) + \bar{p}\,(x) = 0, \tag{8α}$$

$$C'(x) + \mu\,(x) = 0. \tag{8β}$$

καί ἀπό τή συνθήκη ἰσορροπίας κατά τούς δύο ἄλλους ἄξονες (Σχ. 3β)

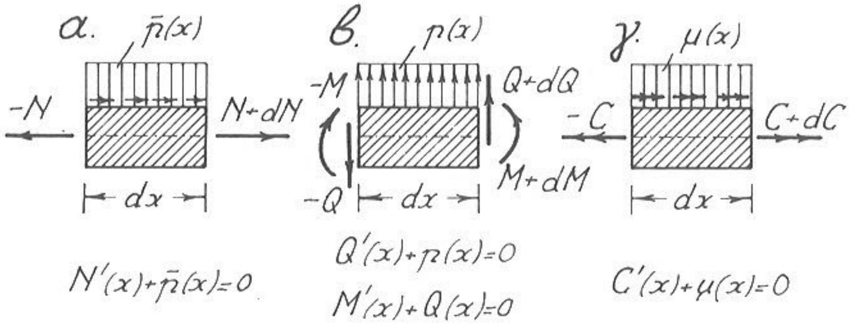
$$Q'(x) + p\,(x) = 0, \tag{9α}$$

$$M'(x) + Q\,(x) = 0. \tag{9β}$$

Οἱ διαφορικές ἐξισώσεις στατικῆς ἰσορροπίας τῆς δοκοῦ προκύπτουν μέ ἀντικατάσταση τῶν ἐλαστικῶν συνθηκῶν στίς στατικές συνθῆκες. Ἔτσι ἀπό τίς ἐξ. (7α), (7δ) καί (8α), (8β) ἔχουμε ἀντίστοιχα

$$EF u''(x) + \bar{p}\,(x) = 0, \tag{10α}$$

$$GJ_d\,\theta''(x) + \mu\,(x) = 0, \tag{10β}$$



Σχ. 3. Οἱ στατικές συνθῆκες τοῦ ἀπειροστοῦ στοιχείου.

θεωρώντας *σταθερά* τά γεωμετρικά μεγέθη τῆς διατομῆς κατά μῆκος τῆς δοκοῦ[1].

Ὁμοίως, στήν περίπτωση ἀγνοήσεως τῶν παραμορφώσεων τῆς Q ἀπό τήν ἐξ.(7β) καί τήν ἐξ.(9β) ἔχουμε

$$EJ\varphi'' + Q = 0$$

ἤ

$$EJ\upsilon''' + Q = 0,$$

γιατί $\varphi' = \upsilon''$. Παραγωγίζοντας τή δεύτερη ἐξίσωση καί λαμβάνοντας ὑπόψη τήν ἐξ.(9α), καταλήγουμε στή διαφορική ἐξίσωση τῆς καμπτόμενης δοκοῦ

1. Ἐάν ἡ δοκός εἶναι μεταβλητῆς διατομῆς οἱ ἐξισώσεις παίρνουν πιό πολύπλοκη μορφή. Ἔτσι π.χ. ἡ ἐξ.(10α) γίνεται

$$\frac{d}{dx}\,[E\,F(x)\,u'(x)] + \bar{p}\,(x) = 0.$$

$$EJv^{IV}(x) = p(x), \tag{11}$$

ὅπου, ὅπως προηγουμένως, ἡ ἀκαμψία EJ θεωρεῖται σταθερή κατά τόν ἄξονά της.

Ἐάν τώρα θέλουμε νά λάβουμε ὑπόψη καί τίς παραμορφώσεις ἀπό τήν τέμνουσα δύναμη, ἀντικαθιστοῦμε πρῶτα τίς ἐλαστικές συνθῆκες τῶν ἐξ.(7β) —μέ τή γωνία ψ— καί (7γ) στίς στατικές συνθῆκες (9), οἱ ὁποῖες γίνονται ἀντίστοιχα

$$kGF\,(v''-\psi')+p = 0 \tag{12α}$$

$$EJ\psi''+kGF\,(v'-\psi) = 0. \tag{12β}$$

Ἐπίσης στή σπάνια περίπτωση πού ἡ δοκός φορτίζεται καί μέ τίς *κατανεμημένες ροπές κάμψεως* $\bar{\mu}(x)$, οἱ στατικές συνθῆκες (9) γίνονται

$$Q'+p = 0, \quad M'+Q+\bar{\mu} = 0$$

καί στή συνέχεια, ὅπως προηγουμένως, προκύπτουν οἱ διαφορικές ἐξισώσεις τῆς δοκοῦ

$$KGF\,(v''-\psi')+p = 0, \tag{12γ}$$

$$EJ\psi''+kFG\,(v'-\psi)+\bar{\mu} = 0. \tag{12δ}$$

Ἀπό τά προηγούμενα συστήματα ἐξισώσεων, μέ ἀπαλοιφή, ἀναγόμαστε σέ μία μόνο διαφορική ἐξίσωση· ἔτσι π.χ. ἀπό τό σύστημα (12α, β) μέ ἀπαλοιφή[1] τῆς ψ προκύπτει ἡ ἐξίσωση

$$EJv^{IV}(x) = p(x) - \frac{EJ}{kGF}\,p''(x) \tag{13α}$$

καί μέ ἀπαλοιφή τῆς v ἡ ἐξίσωση

$$EJ\psi'''(x) = p(x). \tag{13β}$$

Ἐνδιαφέρουσα, τέλος, εἶναι καί ἡ εἰδική περίπτωση τῆς λεγόμενης *δοκοῦ διατμήσεως*, δηλ. μιᾶς δοκοῦ πού ἐμφανίζει μόνο *ἀμοιβαῖες ὀλισθήσεις* τῶν διατομῶν της καί ὄχι στροφές. Ἡ διαφορική ἐξίσωση τῆς δοκοῦ αὐτῆς προκύπτει μέ ἀντικατάσταση τῆς ἐλαστικῆς συνθήκης (4β) στή στατική συνθήκη (9α), ὁπότε βρίσκουμε τελικά

---

1. Γιά τό σκοπό αὐτό ἀπό τήν πρώτη ἐξίσωση ὑπολογίζεται ἡ ψ' καί στή συνέχεια μέ παραγώγιση ἡ ψ'' καί ψ'''. Ἔπειτα παραγωγίζεται ἡ δεύτερη ἐξίσωση μία φορά καί σ' αὐτήν γίνεται ἀντικατάσταση τῶν προηγούμενων ἐκφράσεων τῶν ψ''' καί ψ'.

$$kGFv_q''(x) + p(x) = 0 \,. \tag{14}$$

Ἀπό τήν ἐπίλυση τῶν προηγούμενων διαφορικῶν ἐξισώσεων ὑπολογίζουμε πρῶτα τίς μετακινήσεις u, v, v_q τῆς δοκοῦ καί ἔπειτα, μέ διαδοχικές παραγωγίσεις, τά διάφορα μεγέθη ἐντάσεως ἤ παραμορφώσεως· οἱ ἐμφανιζόμενες κατά τήν ὁλοκλήρωση *σταθερές* ὁλοκληρώσεως ὑπολογίζονται ἀπό τίς *συνοριακές συνθῆκες* τῆς δοκοῦ, κατά τά γνωστά ἀπό τή Στατική.

Εἰδικότερα, κατά τήν ὁλοκλήρωση τῶν ἐξ.(13) ἐμφανίζονται οἱ σταθερές c_1, c_2, c_3, c_4 γιά τήν (13α) καί οἱ c_1', c_2', c_3' γιά τήν (13β). Αὐτές ὅμως λόγω τῶν ἐξ.(12α, β) δέν εἶναι ἀνεξάρτητες μεταξύ τους, ἀλλά ἱκανοποιοῦν τίς σχέσεις

$$c_1 = c_1' \,, \quad c_2 = c_2' \,, \quad c_1' + \frac{GkF}{EJ}(c_3 - c_3') = 0 \tag{15α, β, γ}$$

οἱ ὁποῖες μαζί μέ τίς τέσσερεις συνοριακές συνθῆκες τῶν *ἄκρων* τῆς δοκοῦ ἐπαρκοῦν γιά τόν μονοσήμαντο ὑπολογισμό ὅλων τῶν σταθερῶν.

B. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΣ

5.4. Οἱ ἐξισώσεις ἀξονικῆς καί στρεπτικῆς ταλαντώσεως

Στά ἑπόμενα ἡ μερική παράγωγος ὡς πρός τό x, δηλ. τό $\frac{\partial}{\partial x}$, θά συμβολίζεται μέ ἕναν τόνο (′) καί ἡ μερική παράγωγος ὡς πρός το χρόνο $t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ θά συμβολίζεται μέ μία τελεία (.). Δύο, τρεῖς κ.λπ. τόνοι ἤ τελεῖες θά συμβολίζουν ἀντίστοιχα διπλή κ.λπ. παραγώγιση ὡς πρός τό x ἤ ὡς πρός τό t.

Ἡ κατάστρωση τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως *ἀξονικῆς ταλαντώσεως* τῆς δοκοῦ μπορεῖ νά γίνει ὅπως ἀκριβῶς στό ἀντίστοιχο στατικό πρόβλημα τῆς προηγούμενης παραγράφου. Δηλ. μέ ἀντικατάσταση τῶν ἐλαστικῶν συνθηκῶν στίς συνθῆκες *δυναμικῆς ἰσορροπίας* τοῦ ἀπειροστοῦ