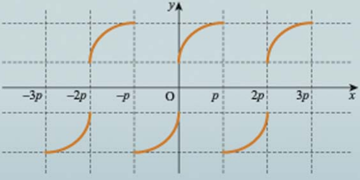
Ανδρέα Γ. Αθανασιάδη

Αριστούχου Μαθηματικού - Δρ Μαθηματικών
Καθηγητή του Α.Τ.Ε.Ι - Θεσσαλονίκης

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

- Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις
- Μετασχηματισμός Laplace
- Σειρές Fourier
- Μετασχηματισμός Fourier
- Μετασχηματισμός Z

$f(x)$



ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

Γράφημα της συνάρτησης

$$F(x)=\begin{cases}-f(-x), & \alpha\nu \quad -p\le x<0\\ f(x)\quad , & \alpha\nu \quad 0\le x\le p\end{cases} \quad \text{και} \quad F(x+2p)=F(x),\ \forall \quad x\in\mathbf{R}$$

(δηλ. της περιττής περιοδικής επέκτασης της $f=f(x)$, $0\le x\le p$ **στο** $\mathbf{R}$**)**

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το Βιβλίο αυτό απευθύνεται στους Φοιτητές των Σχολών Εφαρμοσμένων Επιστημών των Α.Ε.Ι. και Α.Τ.Ε.Ι. της Χώρας και σχεδιάστηκε έτσι ώστε να συνδυάζει τη συντομία και την απλότητα με τη σαφήνεια, τη μεθοδικότητα και τη διδακτικότητα.

Περιέχει σύντομη αλλά σαφή Θεωρία, πολλά διευκρινιστικά Παραδείγματα (120), πάρα πολλές Λυμένες Ασκήσεις (280) και ικανό αριθμό Τεχνολογικών Εφαρμογών στον Ηλεκτρισμό. Επειδή τα Μαθηματικά πρέπει να αποτελούν εργαλείο και όχι αυτοσκοπό στις Εφαρμοσμένες Επιστήμες, παραλείπονται οι αποδείξεις οι οποίες έχουν καθαρά θεωρητικό ενδιαφέρον και δίνονται οι αποδείξεις οι οποίες έχουν και πρακτικό ενδιαφέρον, δηλ. εκείνες των οποίων η τεχνική εφαρμόζεται και στις Ασκήσεις. Ακόμη, καταβλήθηκε προσπάθεια ώστε το κείμενο να γίνει το δυνατόν αυτοδύναμο για να μην υποχρεώνεται ο Φοιτητής να ανατρέχει σε έννοιες και τύπους του Ολοκληρωτικού Λογισμού ή της Στοιχειώδους Τριγωνομετρίας χάνοντας πολύτιμο χρόνο.

Η ύλη του κατανέμεται σε τέσσερα Κεφάλαια. Στο πρώτο Κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή στις Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, στο δεύτερο Κεφάλαιο μελετώνται ο Μετασχηματισμός Laplace, οι εφαρμογές του στην επίλυση των Γραμμικών Διαφορικών και των Ολοκληρωτικο-διαφορικών Εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές και γίνονται Τεχνολογικές Εφαρμογές της Θεωρίας στα Ηλεκτρικά κυκλώματα. Στο τρίτο Κεφάλαιο μελετάται το ανάπτυγμα μιας περιοδικής συνάρτησης σε σειρά Fourier, δηλ. η ανάλυση περιοδικού κύματος σε αρμονικές συνιστώσες και στο τέταρτο Κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή στο μετασχηματισμό Fourier και μελετάται ο μετασχηματισμός Z.

Θεσσαλονίκη, Απρίλιος 2003 *Α. Γ. Αθανασιάδης*

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1ο Κεφάλαιο: *Εισαγωγή στις Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*

1.1. Διαφορική Εξίσωση και λύση αυτής 9
1.2. Λυμένες Ασκήσεις 16
1.3. Γενική, μερική και ιδιάζουσα λύση διαφορικής εξίσωσης – Πρόβλημα αρχικών και πρόβλημα συνοριακών τιμών. – Το αντίστροφο του κυρίου προβλήματος 20
1.4. Λυμένες Ασκήσεις 28
1.5. Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης χωριζομένων μεταβλητών 34
1.6. Λυμένες Ασκήσεις 40
1.7. Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης 47
1.8. Λυμένες Ασκήσεις 51
1.9. Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης – Διαφορική εξίσωση Bernoulli 57
1.10. Λυμένες Ασκήσεις 62

2ο Κεφάλαιο: *Ο Μετασχηματισμός Laplace*

(Οι εφαρμογές του στην επίλυση των γραμμικών διαφορικών και ολοκληρωτικο-διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές)

2.1. Ο μετασχηματισμός Laplace – Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace – Ύπαρξη – Γραμμική ιδιότητα 71
2.2. Λυμένες Ασκήσεις 82
2.3. Μετασχηματισμένη Laplace των παραγώγων και του ολοκληρώματος μιας συνάρτησης 90
2.4. Λυμένες Ασκήσεις 97
2.5. Βηματικές συναρτήσεις – Μετατόπιση του άξονα των s – Μετατόπιση του άξονα των t 111
2.6. Λυμένες Ασκήσεις 116
2.7. Η συνάρτηση δ του Dirac – Βραχείς παλμοί 129
2.8. Λυμένες Ασκήσεις 130
2.9. Παραγώγιση και ολοκλήρωση της μετασχηματισμένης Laplace 137
2.10. Λυμένες Ασκήσεις 142

2.11. Η μέθοδος του Heaviside 148
2.12. Λυμένες Ασκήσεις 151
2.13. Η μέθοδος της συνέλιξης (convolution) 160
2.14. Λυμένες Ασκήσεις 163
2.15. Η μετασχηματισμένη Laplace των περιοδικών συναρτήσεων 173
2.16. Λυμένες Ασκήσεις 173
2.17. Τεχνολογικές Εφαρμογές Δ.Ε. σε Ηλεκτρικά Κυκλώματα 181
Πίνακας Μετασχηματισμένων Laplace 203
2.18. Λυμένες Ασκήσεις εφόλης της ύλης του 2ου Κεφαλαίου 204

3ο Κεφάλαιο: *Ανάπτυγμα περιοδικής συνάρτησης σε σειρά Fourier*

3.1. Σειρά Fourier περιοδικής συνάρτησης 241
3.2. Λυμένες Ασκήσεις 249
3.3. Σύγκλιση και άθροισμα της σειράς Fourier 265
3.4. Λυμένες Ασκήσεις 266
3.5. Σειρές συνημιτόνων και σειρές ημιτόνων 283
3.6. Λυμένες Ασκήσεις 286
3.7. Λυμένες Ασκήσεις εφόλης της ύλης του 3ου Κεφαλαίου 297

4ο Κεφάλαιο: *Οι Μετασχηματισμοί Fourier και Z*

4.1. Ο μετασχηματισμός Fourier – Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier – Ύπαρξη – Ιδιότητες 321
4.2. Λυμένες Ασκήσεις 323
4.3. Ακολουθίες πραγματικών αριθμών 330
4.4. Δυναμοσειρές 336
4.5. Γεωμετρική παράσταση μιγαδικών αριθμών 341
4.6. Ο μετασχηματισμός *Z* 344
4.7. Ιδιότητες του μετασχηματισμού *Z* 359
4.8. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός *Z* 373
4.9. Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier 383

Βιβλιογραφία 391

1° Κεφάλαιο

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1.1. Διαφορική Εξίσωση και λύση αυτής

Σε ότι ακολουθεί με τον όρο "συνάρτηση" θα εννοούμε μια "πραγματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής", ορισμένη σε ένα διάστημα πραγματικών αριθμών.

Σε πολλά προβλήματα των Πειραματικών και Εφαρμοσμένων Επιστημών αλλά και σε προβλήματα καθαρών Μαθηματικών, στα οποία άγνωστη είναι μια συνάρτηση $y = y(x)$, καταλήγουμε από τα δεδομένα σε μια εξίσωση στην οποία εμφανίζονται παράγωγοι της άγνωστης συνάρτησης.

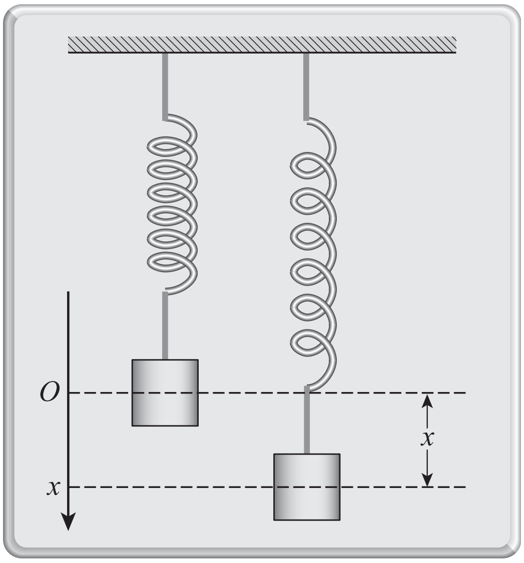
1.1.1. Παράδειγμα. Δοχείο το οποίο περιέχει υγρό θερμοκρασίας $100^0\ C$ τοποθετείται σε δωμάτιο με σταθερή θερμοκρασία $20^0\ C$. Η ταχύτητα ψύξης είναι οποιαδήποτε στιγμή ανάλογη της διαφοράς των θερμοκρασιών υγρού και δωματίου (νόμος του Νεύτωνα). Αν η θερμοκρασία του υγρού μετά από 5 min είναι $60^0\ C$ πόση θα είναι μετά από 10 min;

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό, παρατηρούμε ότι η θερμοκρασία θ του υγρού είναι, μετά την τοποθέτησή του στο δωμάτιο, συνάρτηση $\theta=\theta(t)$ του χρόνου t. Η ταχύτητα μεταβολής της θερμοκρασίας δίνεται από την παράγωγο $\frac{d\theta}{dt}$ και άρα η ταχύτητα ψύξης δίνεται από την ποσότητα $-\frac{d\theta}{dt}$. Επειδή η ταχύτητα ψύξης είναι κάθε χρονική στιγμή ανάλογη της διαφοράς των θερμοκρασιών, έχουμε την εξίσωση

$$-\frac{d\theta}{dt} = a(\theta - 20)\ , \tag{1}$$

όπου $a \in \mathbf{R}$, είναι σταθερή. Από την εξίσωση (1), στην οποία εμφανίζεται η συνάρτηση θ και η παράγωγός της $\frac{d\theta}{dt}$ είμαστε υποχρεωμένοι να βρούμε τη συνάρτηση $\theta=\theta(t)$.

1.1.2. Παράδειγμα. Σώμα με μάζα m gr. είναι συνδεδεμένο με το άκρο ενός κατακορύφου ελατηρίου και το όλο σύστημα περιβάλλεται από μέσο του οποίου η αντίσταση είναι ανάλογη της ταχύτητας του σώματος. Απομακρύνουμε κατακόρυφα το σώμα από τη θέση ισορροπίας του (Σχ. 1) και το αφήνουμε ελεύθερο. Να περιγραφεί η κίνηση του συστήματος.



Σχ. 1.

Από τη στιγμή που το σώμα αφήνεται ελεύθερο, το ελατήριο τείνει να το επαναφέρει στη θέση ισορροπίας και το όλο σύστημα αρχίζει να ταλαντεύεται. Η κίνηση του συστήματος περιγράφεται πλήρως από τη συνάρτηση $x = x(t)$, όπου x είναι η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας και t είναι ο χρόνος. Οι δυνάμεις που καθορίζουν την κίνηση του συστήματος είναι οι παρακάτω δύο (το βάρος του σώματος εξουδετερώνεται από το ελατήριο) :

(i) Η δύναμη του ελατηρίου, η οποία τείνει να επαναφέρει το σώμα στη θέση ισορροπίας. Η δύναμη αυτή έχει αλγεβρική τιμή αντίθετη της απομάκρυνσης x και μέτρο ανάλογο του μέτρου της απομάκρυνσης, δηλ. είναι η δύναμη

$F_1 = -\beta x$, όπου $\beta \in \mathbf{R}$, $\beta > 0$.

(ii) Η δύναμη αντίστασης του μέσου, η οποία έχει αλγεβρική τιμή αντίθετη της ταχύτητας $\dfrac{dx}{dt}$ του σώματος και μέτρο ανάλογο του μέτρου της ταχύτητας, δηλ. είναι η δύναμη

$$F_2 = -a\frac{dx}{dt}\,,\ \text{όπου } \alpha \in \mathbf{R}\,,\ \alpha > 0\,.$$

Η ολική δύναμη $F = F_1 + F_2$ προσδίδει επιτάχυνση $\gamma = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ στο σώμα και ο νόμος του Νεύτωνα $F = m\gamma$, που ισχύει κάθε χρονική στιγμή t, δίνει την εξίσωση

$$-\beta x - a\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}\,,$$

η οποία γράφεται

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} + a\,\frac{dx}{dt} + \beta\,x = 0\,. \tag{2}$$

Από την εξίσωση (2), στην οποία εμφανίζονται η άγνωστη συνάρτηση $x = x(t)$ και οι παράγωγοί της $\dfrac{dx}{dt}$ και $\dfrac{d^2x}{dt^2}$, είμαστε υποχρεωμένοι να βρούμε τη συνάρτηση $x = x(t)$.

1.1.3. Παράδειγμα. Να βρεθεί καμπύλη **κ** του επιπέδου Oxy της οποίας η κλίση της εφαπτομένης στο τυχαίο σημείο της $P(x,y)$ να είναι ίση με το διπλάσιο του γινομένου των συντεταγμένων του P.

Όπως γνωρίζουμε, μια καμπύλη **κ** του επιπέδου Oxy καθορίζεται στην Αναλυτική Γεωμετρία από την εξίσωσή της. Άρα άγνωστη, στο πρόβλημά μας αυτό, είναι η εξίσωση $F(x,y) = 0$ της καμπύλης **κ** ή, ισοδύναμα, η συνάρτηση $y = y(x)$ που ορίζεται από την εξίσωση της **κ**. Επειδή η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης **κ** στο τυχαίο σημείο της $P(x,y)$ δίνεται από την παράγωγο $\dfrac{dy}{dx}$ της συνάρτησης $y = y(x)$, έχουμε την ισότητα

$$\frac{dy}{dx} = 2xy\,. \tag{3}$$

Από την εξίσωση (3), στην οποία εμφανίζονται η ανεξάρτητη μεταβλητή x, η άγνωστη συνάρτηση y και η παράγωγός της $\dfrac{dy}{dx}$, είμαστε υποχρεωμένοι να βρούμε τη συνάρτηση $y = y(x)$.

1.1.4. Ορισμός. Μια εξίσωση στην οποία άγνωστη είναι μια συνάρτηση $y = y(x)$ και στην οποία εμφανίζονται κάποιες παράγωγοι της άγνωστης συνάρτησης (δηλ. μια ή

και περισσότερες από τις συναρτήσεις $y',\ y'',\ \cdots, y^{(\nu)}$) λέγεται ***συνήθης διαφορική εξίσωση*** ή (απλά) ***διαφορική εξίσωση***.

1.1.5. Παρατήρηση. Η γενική μορφή μιας διαφορικής εξίσωσης είναι η

$$F(x,y,y',y'',\ \cdots,\ y^{(\nu)})=0\ , \tag{4}$$

όπου $\nu\in\mathbf{N}^*$.

1.1.6. Παρατήρηση. Σε μια διαφορική εξίσωση εκτός από τις παραγώγους της άγνωστης συνάρτησης $y=y(x)$, οι οποίες είναι βέβαια σε πεπερασμένο πλήθος, είναι δυνατό να εμφανίζεται και η ανεξάρτητη μεταβλητή x ή και η άγνωστη συνάρτηση y ή και οι δύο, αλλά αυτό δεν είναι αναγκαίο.***Το αναγκαίο είναι να εμφανίζεται κάποια παράγωγος της άγνωστης συνάρτησης***.

1.1.7. Παρατήρηση. Δεν θεωρούνται διαφορικές εξισώσεις οι ισότητες οι οποίες είναι ταυτότητες ως προς την άγνωστη συνάρτηση, όπως π.χ. η $(xy)'=y+xy'$.

1.1.8. Παρατήρηση. Επίσης δεν θεωρούνται διαφορικές εξισώσεις οι ισότητες εκείνες στις οποίες η εμφάνιση των παραγώγων είναι εικονική, όπως π.χ. η

$$y^2+y'=2x+y'\ .$$

1.1.9. Παρατήρηση. Σε ότι ακολουθεί, αντί " συνήθης διαφορική εξίσωση" γράφουμε, για συντομία, **"Δ.Ε."**

1.1.10. Παράδειγμα. Οι εξισώσεις (1), (2), (3) των Παραδειγμάτων 1.1.1, 1.1.2 και 1.1.3, όπως και οι εξισώσεις

$$y''+2y'=2e^{-x}\ ,\quad \frac{d^3y}{dx^3}=4\ ,\quad x^3\frac{d^3y}{dx^3}+2x^2\frac{d^2y}{dx^2}+4x\frac{dy}{dx}+7y=0\ ,$$

$$y'y''-4y=x\ ,\quad y^{(5)}-y^{(4)}=\eta\mu x\ ,\quad \frac{dy}{dx}+y^2=\sigma\upsilon\nu(2x)$$

είναι όλες Δ. Ε (διαφορικές εξισώσεις).

1.1.11. Ορισμός. Μια συνάρτηση $y=f(x)$, η οποία είναι ορισμένη και η οποία παραγωγίζεται ν τουλάχιστον φορές σε ένα διάστημα πραγματικών αριθμών I, λέγεται ***λύση*** ή ***ολοκλήρωμα της Δ.Ε.***

$$F(x,y,y',y'',\ \cdots,y^{(\nu)})=0\ , \tag{4}$$

αν μετά την αντικατάσταση των $y,y',y'',\ \cdots,y^{(\nu)}$ με τα

$$f(x),f'(x),f''(x),\ \cdots,f^{(\nu)}(x)$$

στην (4) αυτή γίνεται ταυτότητα ως προς x, δηλ. αν

$$F\left[x, f(x), f'(x), f''(x), \cdots, f^{(\nu)}(x)\right] = 0\,, \quad \forall x \in \mathrm{I}\ .$$

1.1.12. Παράδειγμα. Να εξεταστεί αν η συνάρτηση

$$f(x) = x + 3e^{-x}, \ x \in \mathbf{R}$$

είναι λύση της Δ.Ε.

$$\frac{dy}{dx} + y = x + 1. \tag{5}$$

Λύση

Έχουμε

$$\frac{df}{dx} = (x + 3e^{-x})' = 1 - 3e^{-x}$$

και

$$\frac{df}{dx} + f(x) = 1 - 3e^{-x} + x + 3e^{-x} = x + 1\,, \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

Επομένως η συνάρτηση $y = f(x)$ ***είναι λύση*** της Δ.Ε. (5).

1.1.13. Παράδειγμα. Να εξεταστεί αν η συνάρτηση

$$f(x) = e^x + 2x^2 + 6x + 8\,, \ x \in \mathbf{R}$$

είναι λύση της Δ.Ε.

$$y'' - 3y' + 2y = 4x^2\ . \tag{6}$$

Λύση

Έχουμε

$$f'(x) = (e^x + 2x^2 + 6x + 8)' = e^x + 4x + 6, \ \ f''(x) = e^x + 4$$

και

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = e^x + 4 - 3(e^x + 4x + 6) + 2(e^x + 2x^2 + 6x + 8) =$$

$$= e^x - 3e^x + 2e^x + 4 - 12x - 18 + 4x^2 + 12x + 16 = 4x^2 + 2\,.$$

Επειδή υπάρχει τιμή του $x \in \mathbf{R}$, π.χ. η $x = 0$, τέτοια ώστε να είναι $4x^2 + 2 \neq 4x^2$, η συνάρτηση $y = f(x)$ ***δεν είναι λύση*** της Δ.Ε. (6).

1.1.14. Ορισμός. Η λύση μιας Δ.Ε. είναι σε πολλές περιπτώσεις πλεγμένη συνάρτηση. Η πλεγμένη συνάρτηση $y = y(x)$ που ορίζεται από την ισότητα

$$f(x, y) = 0 \tag{7}$$

λέγεται ***λύση*** ή ***ολοκλήρωμα της Δ.Ε. (4)***, αν παραγωγίζεται ν τουλάχιστον φορές και μετά την έκφραση των $y', y'', \cdots, y^{(\nu)}$ με τα x και y και την αντικατάσταση των εκφράσεων αυτών στην (4) αυτή επαληθεύεται από όλα τα x και y τα οποία ικανοποιούν την (7).

1.1.15. Παράδειγμα. Να εξεταστεί αν η πλεγμένη συνάρτηση $y = y(x)$ η οποία ορίζεται από την ισότητα

$$x + e^x - 2y = 2 + e^y \tag{8}$$

είναι λύση της Δ.Ε.

$$(x + e^x - 2y)\,\frac{dy}{dx} = 1 + e^x . \tag{9}$$

Λύση

Για να βρούμε την παράγωγο της πλεγμένης συνάρτησης $y = y(x)$ που ορίζεται από την ισότητα (8), παραγωγίζουμε τα μέλη της (8) ως προς x και θεωρούμε το y συνάρτηση του x. Έτσι έχουμε

$$1 + e^x - 2\frac{dy}{dx} = e^y\,\frac{dy}{dx} \quad \text{ή} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1+e^x}{2+e^y} .$$

Επομένως

$$(x + e^x - 2y)\frac{dy}{dx} = (x + e^x - 2y)\frac{1+e^x}{2+e^y} \overset{(8)}{=} (2 + e^y)\,\frac{1+e^x}{2+e^y} = 1 + e^x$$

για όλα τα x, y που επαληθεύουν την (8) και κατά συνέπεια η πλεγμένη συνάρτηση $y = y(x)$ που ορίζεται από την (8) ***είναι λύση*** της Δ.Ε. (9).

1.1.16. Παράδειγμα. Να εξεταστεί αν η πλεγμένη συνάρτηση $y = y(x)$ η οποία ορίζεται από την ισότητα

$$5x^2y^2 - 2x^3y^2 = 1 \tag{10}$$

στο διάστημα $\left[0,\ \frac{5}{2}\right]$ είναι λύση της Δ.Ε.

$$xy' + y = x^3y^3 . \tag{11}$$

Λύση

Παραγωγίζουμε τα μέλη της (10) ως προς x και θεωρούμε το y συνάρτηση του x. Έτσι έχουμε

$$10xy^2 + 10x^2yy' - 6x^2y^2 - 4x^3yy' = 0$$

ή

$$y' = \frac{10xy^2 - 6x^2y^2}{4x^3y - 10x^2y} = \frac{5xy^2 - 3x^2y^2}{2x^3y - 5x^2y} .$$

Επομένως

$$xy' + y = \frac{x(5xy^2 - 3x^2y^2)}{2x^3y - 5x^2y} + y = \frac{5x^2y^2 - 3x^3y^2 + 2x^3y^2 - 5x^2y^2}{2x^3y - 5x^2y} =$$

$$= \frac{-x^3y^2}{2x^3y - 5x^2y} = \frac{x^3y^3}{(5x^2y - 2x^3y)y} = \frac{x^3y^3}{5x^2y^2 - 2x^3y^2} \overset{(10)}{=} \frac{x^3y^3}{1} = x^3y^3,$$

για όλα τα x, y που επαληθεύουν τη (10). Κατά συνέπεια η πλεγμένη συνάρτηση $y = y(x)$ που ορίζεται από τη (10) ***είναι λύση*** της Δ.Ε. (11).

1.1.17. Ορισμός. Μια Δ.Ε. λέγεται ***διαφορική εξίσωση ν τάξης*** ($\nu \in \mathbb{N}^*$), αν η μεγαλύτερη τάξη των παραγώγων που εμφανίζονται σ'αυτήν είναι ν, δηλ. αν σ'αυτήν εμφανίζεται η ν-οστή παράγωγος της άγνωστης συνάρτησης και δεν εμφανίζεται παράγωγος μεγαλύτερης τάξης.

1.1.18. Παράδειγμα . Οι Δ.Ε :

(i) $\dfrac{dy}{dx} - 2y = x$

(ii) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 = 0$

(iii) $y^{(5)} + 2y^{(4)} - y^{(3)} + y^{(2)} - 2y' - y = \eta\mu(2x) + 3\sigma\upsilon\nu(2x)$

είναι, αντίστοιχα, $1^{\eta\varsigma}$, $2^{\eta\varsigma}$ και $5^{\eta\varsigma}$ τάξης.

1.1.19. Παρατήρηση. Μια Δ.Ε. πρώτης τάξης

$$F(x, y, y') = 0 \tag{12}$$

επιδέχεται γεωμετρική ερμηνεία ανάλογη με εκείνη του Παραδείγματος 1.1.3. Πιο συγκεκριμένα, στη Δ.Ε. (12) καταλήγουμε όταν ζητούμε την καμπύλη **κ** του επιπέδου Oxy που έχει την ιδιότητα : "Ο συντελεστής διεύθυνσης $\lambda = y'$, της εφαπτομένης της καμπύλης **κ** στο τυχαίο σημείο της $P(x, y)$ συνδέεται με τις συντεταγμένες του P με τη συγκεκριμένη σχέση F".
Οι λύσεις της Δ.Ε. (12) δίνουν όλες τις καμπύλες του επιπέδου που έχουν την παραπάνω ιδιότητα.

1.1.20. Παρατήρηση. Το κύριο πρόβλημα της Θεωρίας των Δ.Ε. είναι η εύρεση όλων των λύσεων μιας δοσμένης Δ.Ε. Το πρόβλημα αυτό δεν λύθηκε μέχρι σήμερα στη γενική του μορφή, αλλά σε ορισμένες μόνο απλές περιπτώσεις με μερικές από τις οποίες θα ασχοληθούμε κι εμείς στα επόμενα.

1.2. Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να εξεταστεί αν κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι λύση της Δ.Ε. που γράφεται απέναντι:

(i) $f(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$ $\vdots$ $y'' - 6y' + 9y = 0$

(ii) $g(x) = \alpha\sigma\upsilon\nu(2x) + \beta\eta\mu(2x)$ $\vdots$ $y'' + 4y = 0$

(iii) $h(x) = e^{-x}(\alpha\sigma\upsilon\nu x + \beta\eta\mu x)$ $\vdots$ $y'' + 2y' + 2y = 0$

όπου c_1, c_2, α , β είναι αυθαίρετες σταθερές.

Λύση

(i) $f'(x) = c_1 e^{3x} \cdot 3 + c_2(1 \cdot e^{3x} + x \cdot e^{3x} \cdot 3) = 3c_1 e^{3x} + c_2 e^{3x} + 3c_2 x e^{3x}$,

$f''(x) = 3c_1 e^{3x} 3 + c_2 e^{3x} 3 + 3c_2(1 \cdot e^{3x} + x e^{3x} \cdot 3) = 9c_1 e^{3x} + 6c_2 e^{3x} + 9c_2 x e^{3x}$

και

$$\begin{aligned} &f''(x) - 6f'(x) + 9f(x) = \\ &= 9c_1 e^{3x} + 6c_2 e^{3x} + 9c_2 x e^{3x} - 6(3c_1 e^{3x} + c_2 e^{3x} + 3c_2 x e^{3x}) + 9(c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}) = \\ &= (9c_1 + 6c_2 - 18c_1 - 6c_2 + 9c_1)e^{3x} + (9c_2 - 18c_2 + 9c_2)x e^{3x} = \\ &= 0 \cdot e^{3x} + 0 \cdot x e^{3x} = 0 , \quad \forall x \in \mathbf{R} . \end{aligned}$$

Επομένως η συνάρτηση $y = f(x)$ ***είναι λύση*** της Δ.Ε. $y'' - 6y' + 9y = 0$.

(ii) $g'(x) = a[-2\eta\mu(2x)] + \beta[2\sigma\upsilon\nu(2x)] = -2a\eta\mu(2x) + 2\beta\sigma\upsilon\nu(2x)$,

$g''(x) = -2a[2\sigma\upsilon\nu(2x)] + 2\beta[-2\eta\mu(2x)] = -4a\sigma\upsilon\nu(2x) - 4\beta\eta\mu(2x)$

και

$$\begin{aligned} g''(x) + 4g(x) &= -4a\sigma\upsilon\nu(2x) - 4\beta\eta\mu(2x) + 4[a\sigma\upsilon\nu(2x) + \beta\eta\mu(2x)] = \\ &= (-4a + 4a)\sigma\upsilon\nu(2x) + (-4\beta + 4\beta)\eta\mu(2x) = \\ &= 0 \cdot \sigma\upsilon\nu(2x) + 0 \cdot \eta\mu(2x) = 0 , \quad \forall x \in \mathbf{R} . \end{aligned}$$

Επομένως η συνάρτηση $g(x)$ ***είναι λύση*** της Δ.Ε. $y'' + 4y = 0$.

(iii) Η ισότητα που δίνεται $h(x) = e^{-x}(\alpha\sigma\upsilon\nu\, x + \beta\eta\mu\, x)$ γράφεται

$$e^x h(x) = a\sigma\upsilon\nu\, x + \beta\eta\mu\, x \quad . \tag{1}$$

Παραγωγίζοντας τα μέλη της (1) παίρνουμε

$$[e^x h(x)]' = (a\sigma\upsilon\nu\, x + \beta\eta\mu\, x)'$$

ή

$$e^x h(x) + e^x h'(x) = -a\eta\mu\, x + \beta\sigma\upsilon\nu\, x \quad . \tag{2}$$

Ακόμη,

$$(2) \Rightarrow [e^x h(x) + e^x h'(x)]' = (-\alpha\eta\mu x + \beta\sigma\upsilon\nu x)' \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^x h(x) + 2e^x h'(x) + e^x h''(x) = -\alpha\sigma\upsilon\nu x - \beta\eta\mu x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^x h(x) + 2e^x h'(x) + e^x h''(x) = -(\alpha\sigma\upsilon\nu\, x + \beta\eta\mu\, x) \overset{(1)}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow e^x [h(x) + 2h'(x) + h''(x)] = -e^x h(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^x [h''(x) + 2h'(x) + 2h(x)] = 0\,,\quad \forall x \in \mathbf{R} \overset{(e^x \neq 0)}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow h''(x) + 2h'(x) + 2h(x) = 0\,,\quad \forall x \in \mathbf{R}\,.$$

Επομένως η συνάρτηση $h(x)$ ***είναι λύση*** της Δ.Ε. $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Άσκηση 2

Να εξεταστεί αν κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι λύση της Δ.Ε. που γράφεται απέναντι:

(i) $f(x) = 2e^{3x} - 5e^{5x}$ $\quad : \quad \dfrac{d^2y}{dx^2} - 7\dfrac{dy}{dx} + 12y = 0$

(ii) $g(x) = (x^3 + a)e^{-3x}$ $\quad : \quad \dfrac{dy}{dx} + 3y = 3x^2 e^{-3x}$

(iii) $h(x) = 2 + ae^{-2x^2}$ $\quad : \quad \dfrac{dy}{dx} + 4xy = 8x$,

όπου a είναι αυθαίρετο στοιχείο του $\mathbf{R}$.

Λύση

(i) $f'(x) = (2e^{3x})' - (5e^{5x})' = 6e^{3x} - 25e^{5x}$, $\quad f''(x) = 18e^{3x} - 125e^{5x}$

και

$$f''(x) - 7f'(x) + 12f(x) = 18e^{3x} - 125e^{5x} - 7(6e^{3x} - 25e^{5x}) + 12(2e^{3x} - 5e^{5x}) =$$
$$= (18 - 42 + 24)e^{3x} + (-125 + 175 - 60)e^{5x} = 0 \cdot e^{3x} - 10 \cdot e^{5x} = -10e^{5x}.$$

Επειδή υπάρχει τιμή του $x \in \mathbf{R}$ (π.χ. η $x = 0$) για την οποία η παράσταση $f''(x) - 7f'(x) + 12f(x)$ είναι διάφορη του μηδενός, δηλ. επειδή

$$[f''(x) - 7f'(x) + 12f(x)]_{x=0} = [-10e^{5x}]_{x=0} = -10 \neq 0\,,$$

η συνάρτηση $f(x)$ ***δεν είναι λύση*** της Δ.Ε. $y'' - 7y' + 12y = 0$.

(ii) $g'(x) = (x^3 + a)'e^{-3x} + (x^3 + a)(e^{-3x})' = 3x^2 e^{-3x} - 3(x^3 + a)e^{-3x}$

και

$g'(x) + 3g(x) = 3x^2 e^{-3x} - 3(x^3 + a)e^{-3x} + 3(x^3 + a)e^{-3x} = 3x^2 e^{-3x}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Επομένως για κάθε $a \in \mathbf{R}$ η συνάρτηση $g(x)$ ***είναι λύση*** της Δ.Ε.

$$y' + 3y = 3x^2 e^{-3x}\,.$$

(iii) $h'(x) = 2' + (ae^{-2x^2})' = 0 + ae^{-2x^2}(-2x^2)' = -4axe^{-2x^2}$

και

$$h'(x) + 4xh(x) = -4axe^{-2x^2} + 4x(2 + ae^{-2x^2}) = -4axe^{-2x^2} + 8x + 4axe^{-2x^2} =$$
$$= 8x\,,\ \forall x \in \mathbf{R}\,.$$

Επομένως για κάθε $a \in \mathbf{R}$ η συνάρτηση $h(x)$ ***είναι λύση*** της Δ.Ε.

$$y' + 4xy = 8x\ .$$

Άσκηση 3

Να εξεταστεί αν κάθε μια από τις πλεγμένες συναρτήσεις $y = y(x)$ που ορίζονται από τις παρακάτω συνθήκες είναι λύση της Δ.Ε. που γράφεται απέναντι :

(i) $x^3 + 3xy^2 = 1,\ 0 < x < 1 \ \vdots\ 2xyy' + x^2 + y^2 = 0$.

(ii) $y^2 = ax - x\ell nx,\ x > 0 \ \vdots\ 2xyy' - y^2 + x = 0$, όπου $a \in \mathbf{R}$.

Λύση

(i) Παραγωγίζουμε τα μέλη της ισότητας $x^3 + 3xy^2 = 1$ ως προς x και θεωρούμε το y συνάρτηση του x. Έτσι έχουμε

$$3x^2 + 3(1 \cdot y^2 + x2yy') = 0 \quad \text{ή} \quad y' = -\frac{3x^2 + 3y^2}{6xy} = -\frac{x^2 + y^2}{2xy}\ .$$

Επομένως

$$2xyy' + x^2 + y^2 = 2xy\left(-\frac{x^2 + y^2}{2xy}\right) + x^2 + y^2 = -(x^2 + y^2) + x^2 + y^2 = 0\,,\ \forall\, x, y$$

και κατά συνέπεια η πλεγμένη συνάρτηση $y = y(x)$ που ορίζεται από την ισότητα $x^3 + 3xy^2 = 1$ στο διάστημα $[0, 1]$ ***είναι λύση*** της Δ.Ε.

$$2xyy' + x^2 + y^2 = 0\,.$$

(ii) Παραγωγίζουμε τα μέλη της ισότητας $y^2 = ax - x\ell nx$ ως προς x και θεωρούμε το y συνάρτηση του x. Έτσι έχουμε

$$2yy' = a - \ell nx - x\frac{1}{x} \quad \text{ή} \quad 2yy' = a - \ell nx - 1 \quad \text{ή} \quad y' = \frac{1}{2y}(a - \ell nx - 1)\,.$$

Επομένως

$$2xyy' - y^2 + x = 2xy\frac{1}{2y}(a - \ell nx - 1) - y^2 + x = xa - x\ell nx - x - y^2 + x =$$
$$= ax - x\ell nx - y^2\,.$$

Για όλα τα x, y που επαληθεύουν την ισότητα $y^2 = ax - x\ell nx$ έχουμε

$$2xyy' - y^2 + x = ax - x\ell nx - (ax - x\ell nx) = 0$$

και κατά συνέπεια η πλεγμένη συνάρτηση $y = y(x)$ που ορίζεται από την ισότητα $y^2 = ax - x\ell nx$ για $x > 0$ ***είναι λύση*** της Δ.Ε. $2xyy' - y^2 + x = 0$.

Άσκηση 4

Να εξεταστεί αν υπάρχει τιμή του $\nu \in \mathbf{N}^*$ τέτοια ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = e^{\nu x}$$

να είναι λύση της Δ.Ε.

$$y''' - 3y'' - 4y' + 12y = 0.$$

Λύση

$$f'(x) = \nu e^{\nu x}\ , \quad f''(x) = \nu^2 e^{\nu x}, \quad f'''(x) = \nu^3 e^{\nu x}$$

και άρα

$$f'''(x) - 3f''(x) - 4f'(x) + 12f(x) = 0,\ \forall x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \nu^3 e^{\nu x} - 3\nu^2 e^{\nu x} - 4\nu e^{\nu x} + 12e^{\nu x} = 0,\ \forall x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\nu^3 - 3\nu^2 - 4\nu + 12)e^{\nu x} = 0,\ \forall x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \nu^3 - 3\nu^2 - 4\nu + 12 = 0.$$

Αλλά,

$$\nu^3 - 3\nu^2 - 4\nu + 12 = \nu^2(\nu - 3) - 4(\nu - 3) = (\nu - 3)(\nu^2 - 4) = (\nu - 2)(\nu + 2)(\nu - 3)$$

και άρα

$$\nu^3 - 3\nu^2 - 4\nu + 12 = 0 \Leftrightarrow (\nu - 2)(\nu + 2)(\nu - 3) = 0 \Leftrightarrow \nu = 2 \ \text{ ή } \ \nu = -2 \ \text{ ή } \ \nu = 3.$$

Από τις τιμές αυτές του ν δεκτές είναι μόνο οι $\nu_1 = 2 \in \mathbf{N}^*$ και $\nu_2 = 3 \in \mathbf{N}^*$. Επομένως υπάρχουν δυο τέτοιες τιμές του ν, *οι* $\nu_1 = 2$ και $\nu_2 = 3$.

Άσκηση 5

Να βρεθεί για ποιές τιμές του $\nu \in \mathbf{N}^*$ η συνάρτηση $y = 2x^\nu$, $x \neq 0$, είναι λύση της Δ.Ε. $2x^2y'' - 3xy' - 3y = 0$.

Λύση

Έχουμε $\quad y' = 2\nu x^{\nu-1}$, $y'' = 2\nu(\nu - 1)x^{\nu-2}$ και

$$2x^2y'' - 3xy' - 3y =$$
$$= 2x^2 2\nu(\nu - 1)x^{\nu-2} - 3x2\nu x^{\nu-1} - 3\cdot 2x^\nu = [4\nu(\nu - 1) - 6\nu - 6]x^\nu =$$
$$= (4\nu^2 - 10\nu - 6)x^\nu = 4\left(\nu^2 - \frac{5}{2}\nu - \frac{3}{2}\right)x^\nu = 4(\nu - 3)\left(\nu + \frac{1}{2}\right)x^\nu.$$

Επομένως

$$2x^2y'' - 3xy' - 3y = 0,\ \forall x \neq 0 \Leftrightarrow 4(\nu - 3)\left(\nu + \frac{1}{2}\right)x^\nu = 0,\ \forall x \neq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4(\nu - 3)\left(\nu + \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \nu = 3 \ \text{ ή } \ \nu = -\frac{1}{2}\ .$$

Από τις τιμές αυτές του ν δεκτή είναι μόνο η $\nu_1 = 3 \in \mathbf{N}^*$, αφού $\nu_2 = -\frac{1}{2} \notin \mathbf{N}^*$.

1.3. Γενική, μερική και ιδιάζουσα λύση Δ.Ε. - Πρόβλημα αρχικών και πρόβλημα συνοριακών τιμών. - Το αντίστροφο του κυρίου προβλήματος

1.3.1. Παρατήρηση. Η πιο απλή μορφή Δ.Ε. είναι η

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x), \tag{1}$$

όπου $\varphi(x)$ είναι γνωστή συνάρτηση. Στη Δ.Ε. (1) δίνεται η παράγωγος της άγνωστης συνάρτησης και ζητείται η συνάρτηση.

1.3.2. Πρόταση. Η λύση της Δ.Ε. (1) δίνεται από τον τύπο

$$y = \int \varphi(x)dx + c, \tag{2}$$

όπου c είναι αυθαίρετο στοιχείο του $\mathbf{R}$.

Απόδειξη

Σύμφωνα με το βασικό Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού, για κάθε συνάρτηση $y = y(x)$ της οποίας η παράγωγος $\frac{dy}{dx}$ είναι συνεχής σε ένα διάστημα πραγματικών αριθμών I έχουμε (στο διάστημα αυτό)

$$y(x) = \int \left(\frac{dy}{dx}\right) dx + c, \tag{3}$$

όπου c είναι η αυθαίρετη σταθερή της ολοκλήρωσης. Ο ζητούμενος τύπος (2) προκύπτει από τον (3), αν θέσουμε σ'αυτόν όπου $\frac{dy}{dx}$ την ίση με αυτήν συνάρτηση $\varphi(x)$.

1.3.3. Παρατήρηση. Η Δ.Ε. (1) δεν έχει μια μόνο λύση αλλά άπειρες, που αντιστοιχούν στις διάφορες τιμές της αυθαίρετης σταθερής c.

1.3.4. Παρατήρηση. Το σύνολο των λύσεων της Δ.Ε. (1) είναι ένα "μονοπαραμετρικό σύνολο συναρτήσεων", αφού τα διάφορα στοιχεία του αντιστοιχούν στις τιμές που παίρνει μια παράμετρος (η $c \in \mathbf{R}$).

1.3.5. Παρατήρηση. Θεωρούμε μια εξίσωση της μορφής

$$f(x, y, a) = 0, \tag{4}$$

όπου $a \in \mathbf{R}$ είναι μεταβλητή παράμετρος. Για μια ορισμένη τιμή του a η εξίσωση (4) ορίζει μια καμπύλη στο επίπεδο Oxy. Το σύνολο όλων των καμπυλών του επι-

πέδου, που ορίζονται από την (4) για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου a, λέγεται στην Αναλυτική Γεωμετρία ***μονοπαραμετρική οικογένεια***[1] ***καμπυλών*** και η εξίσωση (4) λέγεται ***εξίσωση της οικογένειας***.

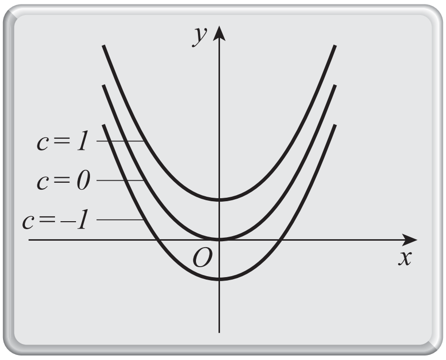
1.3.6. Παρατήρηση. Με την έννοια της Παρατήρησης 1.3.5, ***οι λύσεις της Δ.Ε. (1) αποτελούν μονοπαραμετρική οικογένεια καμπυλών του επιπέδου με εξίσωση τη (2)***.

1.3.7. Παρατήρηση. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.3.2 ***"η λύση της Δ.Ε. (1) βρίσκεται με μια ολοκλήρωση των μελών της και εξαρτάται από μια αυθαίρετη σταθερή"***.

1.3.8. Παράδειγμα. Η Δ.Ε. $\dfrac{dy}{dx} = 4x$ έχει λύση

$$y = \int 4x dx + c = 2x^2 + c.$$

Η εξίσωση $y = 2x^2 + c$ είναι η εξίσωση της οικογένειας των παραβολών του Σχ. 2. Οι διάφορες καμπύλες της οικογένειας αυτής είναι οι διάφορες θέσεις που παίρνει μια από τις παραβολές όταν κινείται παράλληλα προς τον άξονα $y'Oy$ σαν στερεό σύστημα.



Σχ. 2.

1.3.9. Πρόταση. Η λύση της Δ.Ε. ν-τάξης

$$\frac{d^\nu y}{dx^\nu} = \varphi(x), \quad \nu \in \mathbf{N}^*, \nu > 1 \tag{5}$$

δίνεται από τον τύπο

$$y = \overbrace{\int [\int [\cdots [\int \varphi(x) dx] \cdots] dx] dx}^{\nu - \text{ολοκληρώσεις}} + c_1 x^{\nu-1} + c_2 x^{\nu-2} + \cdots + c_{\nu-1} x + c_\nu, \tag{6}$$

όπου $c_1, c_2, \cdots, c_\nu$ είναι αυθαίρετα στοιχεία του $\mathbf{R}$.

Απόδειξη

Αν στον τύπο (3) θέσουμε όπου y τη συνάρτηση $\dfrac{d^{\nu-1}y}{dx^{\nu-1}}$, τότε παίρνουμε την ισότητα

$$\frac{d^{\nu-1}y}{dx^{\nu-1}} = \int \left(\frac{d^\nu y}{dx^\nu} \right) dx + c_1' \overset{(5)}{=} \int \varphi(x) dx + c_1' .$$

Με νέα εφαρμογή του τύπου (3) παίρνουμε

1 Οι λέξεις "οικογένεια" και "σύνολο" είναι στα Μαθηματικά συνώνυμες.

$$\frac{d^{\nu-2}y}{dx^{\nu-2}}=\int[\int\varphi(x)dx+c_1']dx+c_2'=\int[\int\varphi(x)dx]dx+c_1'x+c_2' \ .$$

Μετά από ν τέτοια βήματα φθάνουμε στον τύπο

$$y=\overbrace{\int[\int[\cdots[\int\varphi(x)dx]\cdots]dx]dx}^{\nu-\text{ολοκληρώσεις}}+c_1'\frac{x^{\nu-1}}{(\nu-1)!}+c_2'\frac{x^{\nu-2}}{(\nu-2)!}+\ \cdots\ +c_{\nu-1}'+c_\nu' \ . \qquad (7)$$

Τέλος, αν στον τύπο (7) θέσουμε

$$\frac{c_1'}{(\nu-1)!}=c_1,\ \ \frac{c_2'}{(\nu-2)!}=c_2,\ \cdots,\ \ c_{\nu-1}'=c_{\nu-1},\ \ c_\nu'=c_\nu\ ,$$

τότε παίρνουμε τον τύπο (6).

1.3.10. Παρατήρηση. Το σύνολο των λύσεων της Δ.Ε. (5) είναι ένα ν- παραμετρικό σύνολο συναρτήσεων ή, με άλλα λόγια, οι λύσεις της Δ.Ε. (5) αποτελούν μια ν-παραμετρική οικογένεια καμπυλών του επιπέδου.

1.3.11. Παρατήρηση. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.3.9., ***"η λύση της Δ.Ε. (5) βρίσκεται με ν διαδοχικές ολοκληρώσεις των μελών της και εξαρτάται από ν ακριβώς αυθαίρετες σταθερές".***

1.3.12. Παρατήρηση. Αν το c είναι αυθαίρετο στοιχείο του $\mathbf{R}$ και το $a\neq 0$ είναι ένα συγκεκριμένο στοιχείο του $\mathbf{R}$, τότε και τα

$$c_1=c+a,\quad c_2=c-a,\quad c_3=ac,\quad c_4=\frac{c}{a}$$

είναι αυθαίρετα στοιχεία του $\mathbf{R}$.

1.3.13. Παράδειγμα. Να λυθεί η Δ.Ε : $\dfrac{d^2y}{dx^2}=e^{-2x}$.

Λύση

Αυτή είναι μια Δ.Ε. της μορφής (5). Επειδή ν=2 η λύση της βρίσκεται με δυο διαδοχικές ολοκληρώσεις των μελών της. Με την πρώτη ολοκλήρωση των μελών της έχουμε

$$\frac{dy}{dx}=\int e^{-2x}dx+c_1=-\frac{1}{2}e^{-2x}+c_1$$

και με τη δεύτερη ολοκλήρωση βρίσκουμε

$$y=\int\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}+c_1\right)dx+c_2=-\frac{1}{2}\int e^{-2x}dx+c_1x+c_2$$

ή

$$y=\frac{1}{4}e^{-2x}+c_1x+c_2 \quad .$$

1.3.14. Ορισμός. Κάθε λύση μιας Δ.Ε. ν-οστης τάξης

$$F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(\nu)})=0 \ , \tag{8}$$

η οποία εξαρτάται από ν ακριβώς αυθαίρετες σταθερές και η οποία δίνεται σε (λυμένη) μορφή

$$y=f(x,c_1,c_2,\cdots,c_\nu) \tag{9}$$

ή σε πλεγμένη μορφή

$$g(x,y,c_1,c_2,\cdots,c_\nu)=0 \tag{10}$$

λέγεται ***γενική λύση*** ή ***γενικό ολοκλήρωμα*** της Δ.Ε. (8).

1.3.15. Παρατήρηση. Από Γεωμετρική άποψη, μια γενική λύση της Δ.Ε. (8) είναι η εξίσωση μιας ν-παραμετρικής οικογένειας καμπυλών του επιπέδου Oxy. Οι διάφορες καμπύλες της οικογένειας αντιστοιχούν στις διάφορες τιμές των αυθαιρέτων σταθερών $c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_\nu$.

1.3.16. Ορισμός. Κάθε λύση της Δ.Ε. (8) που προκύπτει από μια γενική της λύση, αν δοθούν συγκεκριμένες τιμές σε ***όλες τις αυθαίρετες σταθερές***, λέγεται ***μερική λύση*** ή ***ολοκληρωτική καμπύλη*** της Δ.Ε. (8).

1.3.17. Ορισμός. Μια λύση της Δ.Ε. (8), η οποία δεν εξαρτάται από αυθαίρετες σταθερές και η οποία δεν προκύπτει από κάποια γενική της λύση (εφόσον βέβαια υπάρχει) λέγεται ***ιδιάζουσα λύση*** της.

1.3.18. Ορισμός. Για να εκλέξουμε μια μερική λύση της Δ.Ε. (8), δηλ. για να υπολογίσουμε τις τιμές των ν αυθαιρέτων σταθερών που αντιστοιχούν σ'αυτήν, πρέπει να μας δοθούν ν ανεξάρτητες μεταξύ τους συνθήκες που ικανοποιεί η ζητούμενη μερική λύση. Οι συνθήκες αυτές έχουν συνήθως τη μορφή

$$y(a)=\beta_0,\ y'(a)=\beta_1,\ y''(a)=\beta_2,\ \cdots,\ y^{(\nu-1)}(a)=\beta_{\nu-1}\ , \tag{9}$$

δηλ. υποχρεώνουν τις συναρτήσεις $y,y',y'',\cdots,y^{(\nu-1)}$ να πάρουν καθορισμένες τιμές $\beta_0,\beta_1,\beta_2,\ \cdots,\beta_{\nu-1}$ για καθορισμένη τιμή $x=a$ της ανεξάρτητης μεταβλητής και λέγονται ***αρχικές συνθήκες*** της Δ.Ε. Το πρόβλημα της εύρεσης μιας μερικής λύσης που ικανοποιεί αρχικές συνθήκες λέγεται ***πρόβλημα αρχικών τιμών***.

1.3.19. Ορισμός. Υποθέτουμε ότι ζητούμε μια μερική λύση $y=y(x)$ της Δ.Ε (8) ορισμένη στο κλειστό διάστημα $I=[a,\beta]$. Αν οι συνθήκες που ικανοποιεί η ζητούμενη μερική λύση υποχρεώνουν κάποιες από τις συναρτήσεις $y,\ y',\ y'',\ \cdots,\ y^{(\nu-1)}$,

όπου $\nu > 1$, να πάρουν καθορισμένες τιμές στο ένα άκρο $x = a$ του διαστήματος I και οι υπόλοιπες να πάρουν καθορισμένες τιμές στο άλλο άκρο $x = \beta$ του I, τότε οι συνθήκες αυτές λέγονται ***συνοριακές συνθήκες***. Το πρόβλημα του υπολογισμού μιας μερικής λύσης που ικανοποιεί συνοριακές συνθήκες λέγεται ***πρόβλημα συνοριακών τιμών***.

1.3.20. Παράδειγμα. *(Πρόβλημα αρχικών τιμών)*
Να βρεθεί η μερική λύση της Δ.Ε.

$$y' = x^2 - x + 2, \tag{10}$$

η οποία επαληθεύει τη συνθήκη $y(1) = 2$.

(**Ισοδύναμη διατύπωση**: Να βρεθεί η ολοκληρωτική καμπύλη της Δ.Ε. (10) η οποία περνά από το σημείο $P(1,\ 2)$ του επιπέδου Oxy.)

Λύση
Μια γενική λύση της Δ.Ε. (10) είναι ή

$$y = \int (x^2 - x + 2)dx + c = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + c\ ,$$

δηλ. η

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + c\,. \tag{11}$$

Υπολογίζουμε τώρα την τιμή της αυθαίρετης σταθερής c έτσι ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη $y(1) = 2$. Για το σκοπό αυτό, θέτουμε $x = 1,\ y = 2$ στην (11) και έχουμε

$$2 = \frac{1}{3}\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot 1 + 2\cdot 1 + c \quad \text{ή} \quad c = \frac{1}{6}\,.$$

Άρα η ζητούμενη μερική λύση είναι η συνάρτηση

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{6}\,.$$

1.3.21. Παράδειγμα. *(Πρόβλημα συνοριακών τιμών)*
Να βρεθεί η μερική λύση της Δ.Ε.

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right) = 0\,, \tag{12}$$

η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες $V(a) = V_1$ και $V(\beta) = 0$. ($V = V(r)$ είναι το δυναμικό σε απόσταση r, $a \le r \le \beta$, από το κοινό κέντρο δυο σφαιρικών αγωγών με ακτίνες a και β και δυναμικά V_1 και 0, αντίστοιχα .)

Λύση
Βρίσκουμε πρώτα μια γενική λύση της Δ.Ε. (12). Με μια ολοκλήρωση (ως προς r) των μελών της (12) έχουμε

$$r^2\frac{dV}{dr}=\int 0\,dr+c_1 \quad ή \quad r^2\frac{dV}{dr}=c_1 \quad ή \quad \frac{dV}{dr}=\frac{c_1}{r^2}\ . \tag{13}$$

Με νέα ολοκλήρωση των μελών της (13) έχουμε

$$V=\int\frac{c_1}{r^2}dr+c_2=-\frac{c_1}{r}+c_2$$

ή

$$V=-\frac{c_1}{r}+c_2\ . \tag{14}$$

Η συνάρτηση $V=V(r)$ που ορίζεται από τη (14) είναι γενική λύση της Δ.Ε (12).

Υπολογίζουμε τώρα τις αυθαίρετες σταθερές c_1 και c_2 έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες που δίνονται. Για το σκοπό αυτό, θέτουμε $r=\alpha,\ V=V_1$ στη (14) και έχουμε

$$V_1=-\frac{c_1}{a}+c_2\ . \tag{15}$$

Θέτουμε, ακόμη, $r=\beta,\ V=0$ στη (14) και έχουμε

$$0=-\frac{c_1}{\beta}+c_2\ . \tag{16}$$

Λύνοντας το ως προς c_1 *και* c_2 σύστημα των (15) και (16) βρίσκουμε

$$c_1=\frac{V_1 a\beta}{a-\beta}\ ,\quad c_2=\frac{V_1 a}{a-\beta}\ .$$

Τέλος, αντικαθιστούμε τις τιμές αυτές των c_1, c_2 στη (14) και έχουμε τη ζητούμενη μερική λύση

$$V(r)=-\frac{V_1 a\beta}{a-\beta}\cdot\frac{1}{r}+\frac{V_1 a}{a-\beta}\ .$$

1.3.22. Ορισμός. Μια συνάρτηση $v+1$ μεταβλητών

$$z=f(x,y_1,y_2,\cdots,y_v),$$

ορισμένη σε μια περιοχή D του χώρου $\mathbf{R}^{v+1}$, λέμε ότι ικανοποιεί (ως προς x) τη ***συνθήκη του Lipschitz*** στην περιοχή D αν

$$\exists\ M>0\ :\ \left|f(x,y_1,y_2,\cdots,y_v)-f(x,\overline{y}_1,\overline{y}_2,\cdots,\overline{y}_v)\right|\le$$
$$\le M(|y_1-\overline{y}_1|+|y_2-\overline{y}_2|+\ \cdots\ +|y_v-\overline{y}_v|\ ,$$

για όλα τα σημεία $(x,y_1,y_2,\cdots,y_v)$ και $(x,\overline{y}_1,\overline{y}_2,\cdots,\overline{y}_v)$ της περιοχής D.

1.3.23. Θεώρημα. *(Υπαρξης λύσης).*
Θεωρούμε μια Δ.Ε. ν τάξης της μορφής

$$\frac{d^{\nu}y}{dx^{\nu}} = f(x, y, y', y'', \cdots, y^{(\nu-1)}), \tag{17}$$

όπου f είναι μια συνάρτηση ν+1 μεταβλητών ορισμένη σε μια περιοχή D του χώρου $\mathbf{R}^{\nu+1}$. Αν η f είναι συνεχής και ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz στην περιοχή D και αν $(a, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{\nu-1})$ είναι ένα εσωτερικό σημείο της D, τότε υπάρχει μία, και μόνο μία, λύση $y = \sigma(x)$ της Δ.Ε. (17), ορισμένη σε μια περιοχή $(a-\delta\,,\ a+\delta)$ του σημείου a, που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες

$$\sigma(a) = \beta_0,\ \sigma'(a) = \beta_1,\ \sigma''(a) = \beta_2,\ \cdots\ ,\ \sigma^{(\nu-1)}(a) = \beta_{\nu-1}.$$

1.3.24. Παρατήρηση. Όπως είπαμε στην §1.1.20, το κύριο πρόβλημα της Θεωρίας των Δ.Ε. είναι η εύρεση όλων των λύσεων μιας δοσμένης Δ.Ε.
Το πρόβλημα κατά το οποίο μας δίνεται μια συνάρτηση[2] της μορφής

$$y = f(x, c_1, c_2, \cdots, c_\nu), \tag{18}$$

όπου $\nu \in \mathbf{N}^*$ και $c_1, c_2, \cdots,\ c_\nu$ είναι αυθαίρετες σταθερές και ζητείται μια Δ.Ε. η οποία να έχει γενική λύση τη συνάρτηση (18), λέγεται ***αντίστροφο του κυρίου προβλήματος***.

1.3.25. Παρατήρηση. Για να επιλύσουμε το αντίστροφο του κυρίου προβλήματος ακολουθούμε την εξής διαδικασία :
Παραγωγίζουμε ν φορές τα μέλη της (18) ως προς x , θεωρώντας τα $c_1, c_2, \cdots, c_\nu$ σταθερά. Έτσι βρίσκουμε τις ν σε πλήθος εξισώσεις

$$\begin{cases} y' = f'(x, c_1, c_2, \cdots, c_\nu) \\ y'' = f''(x, c_1, c_2, \cdots, c_\nu) \\ \vdots \\ y^{(\nu)} = f^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \cdots, c_\nu) \end{cases}. \tag{19}$$

Κατόπιν απαλείφουμε[3] τα $c_1, c_2, \cdots,\ c_\nu$ από τις ν+1 εξισώσεις (18) και (19) . Η εξίσωση

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(\nu)}) = 0\ , \tag{20}$$

την οποία βρίσκουμε με την απαλοιφή αυτή, είναι η ζητούμενη.

1.3.26. Ορισμός. Η Δ.Ε. (20) λέγεται ***Δ.Ε. της ν παραμετρικής οικογένειας καμπυλών του επιπέδου*** Oxy ***που ορίζεται από τη (18)***.

2 Υποτίθεται ότι η συνάρτηση αυτή ορίζεται και παραγωγίζεται ν τουλάχιστον φορές σε ένα διάστημα πραγματικών αριθμών Ι .

3 Βρίσκουμε μια άλλη εξίσωση, που προκύπτει από τις (18) και (19) με αλγεβρικούς μετασχηματισμούς, στην οποία δεν εμφανίζονται τα $c_1, c_2, \ldots, c_\nu$.

1.3.27. Παρατήρηση. Από τις §1.3.25 και §1.3.26 προκύπτει ότι: "Αν η Δ.Ε. (20) είναι η Δ.Ε. της ν-παραμετρικής οικογένειας καμπυλών του επιπέδου (18), τότε η συνάρτηση (18) είναι γενική λύση της Δ.Ε. (20)."

1.3.28. Παράδειγμα. Να βρεθεί η Δ.Ε. της διπαραμετρικής οικογένειας παραβολών

$$y = 2ax + bx^2 \tag{21}$$

του επιπέδου Oxy.

Λύση

Επειδή η οικογένεια (21) είναι διπαραμετρική, παραγωγίζουμε δυο φορές τα μέλη της εξίσωσης (21) ως προς x, θεωρώντας τις παραμέτρους a και b σταθερές. Έτσι έχουμε

$$y' = 2a + 2bx \tag{22}$$

και

$$y'' = 2b\,. \tag{23}$$

Απαλείφουμε τώρα τις παραμέτρους a και b από τις εξισώσεις (21), (22) και (23). Θέτουμε την τιμή του $2b$ από την (23) στην (22) και έχουμε την εξίσωση

$$y' = 2a + xy'' \text{ ή } \quad 2a = y' - xy''\,.$$

Τέλος, θέτοντας $b = \frac{1}{2}y''$ και $2a = y' - xy''$ στην (21) παίρνουμε την εξίσωση

$$y = (y' - xy'')x + \frac{1}{2}y''x^2\,,$$

η οποία γράφεται

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$$

και είναι η ζητούμενη Δ.Ε. της οικογένειας (21).

1.3.29. Παρατήρηση. Σε ότι ακολουθεί, η φράση "να λυθεί η Δ. Ε." θα σημαίνει "να βρεθεί μια γενική λύση της Δ.Ε."

1.4. Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να λυθούν οι Δ.Ε:

(i) $\dfrac{dy}{dx} = \eta\mu x$ **(ii)** $\dfrac{dx}{dt} - t^2 + 2 = 0$.

Λύση

(i) Σύμφωνα με τον τύπο (2) έχουμε, $y = \int \eta\mu x dx + c = -\sigma\upsilon\nu x + c$, δηλ.

$$y = -\sigma\upsilon\nu\, x + c \ .$$

Η συνάρτηση αυτή είναι γενική λύση της Δ.Ε. που δόθηκε.

(ii) Άγνωστη συνάρτηση είναι η $x = x(t)$. Η Δ.Ε. (ii) γράφεται

$$\frac{dx}{dt} = t^2 - 2$$

και σύμφωνα με τον τύπο (2) έχουμε $x = \int (t^2 - 2)dt + c = \dfrac{t^3}{3} - 2t + c$,

δηλ. $x = \dfrac{t^3}{3} - 2t + c$.

Η τελευταία συνάρτηση είναι γενική λύση της Δ.Ε. (ii).

Άσκηση 2

Να λυθούν οι Δ.Ε:

(i) $\dfrac{d^2y}{dt^2} = 5$ **(ii)** $\dfrac{d^3y}{dx^3} = e^x$.

Λύση

(i) Άγνωστη συνάρτηση είναι η $y = y(t)$. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.3.9, μια γενική λύση της Δ.Ε. **(i)** βρίσκεται με δυο διαδοχικές ολοκληρώσεις των μελών της. Με την πρώτη ολοκλήρωση των μελών της έχουμε

$$\frac{dy}{dt} = \int 5dt + c_1 \quad \text{ή} \quad \frac{dy}{dt} = 5t + c_1$$

και με τη δεύτερη ολοκλήρωση παίρνουμε

$$y = \int (5t + c_1)dt + c_2 \qquad \text{ή} \qquad y = \frac{5}{2}t^2 + c_1 t + c_2 \ .$$

(ii) Άγνωστη συνάρτηση είναι η $y = y(x)$. Ολοκληρώνουμε τρεις φορές τα μέλη της (ii) και έχουμε :

1 η ολοκλήρωση : $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \int e^x dx + c_1'$ ή $\dfrac{d^2y}{dx^2} = e^x + c_1'$.

2 η ολοκλήρωση : $\dfrac{dy}{dx} = \int (e^x + c_1')dx + c_2$ ή $\dfrac{dy}{dx} = e^x + c_1'x + c_2$.

3 η ολοκλήρωση : $y = \int (e^x + c_1'x + c_2)dx + c_3$ ή $y = e^x + c_1'\dfrac{x^2}{2} + c_2x + c_3$.

Τέλος, επειδή όταν η c_1' είναι αυθαίρετη σταθερή, τότε και η $c_1 = \dfrac{c_1'}{2}$ είναι επίσης αυθαίρετη σταθερή, η παραπάνω γενική λύση γράφεται

$$y = e^x + c_1x^2 + c_2x + c_3 ,$$

όπου c_1, c_2, c_3 είναι αυθαίρετες σταθερές.

Άσκηση 3

Να λυθούν οι Δ.Ε:

(i) $\dfrac{d^4y}{dx^4} = \sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{x}{2}\right)$. **(ii)** $\dfrac{d^5x}{dt^5} = e^t + e^{-t}$.

Λύση

(i) Ολοκληρώνουμε τέσσερις φορές τα μέλη της (i) .

1 η ολοκλήρωση : $\dfrac{d^3y}{dx^3} = \int \sigma\upsilon\nu(\dfrac{x}{2})dx + c_1' = 2\eta\mu\left(\dfrac{x}{2}\right) + c_1'$.

2 η ολοκλήρωση: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \int \left[2\eta\mu\left(\dfrac{x}{2}\right) + c_1'\right]dx + c_2' = -2^2\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{x}{2}\right) + c_1'x + c_2'$.

3 η ολοκλήρωση : $\dfrac{dy}{dx} = \int \left[-2^2\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{x}{2}\right) + c_1'x + c_2'\right]dx + c_3 =$

$$= -2^3\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right) + c_1'\frac{x^2}{2} + c_2'x + c_3 .$$

4 η ολοκλήρωση : $y = \int \left[-2^3\eta\mu\left(\dfrac{x}{2}\right) + c_1'\dfrac{x^2}{2} + c_2'x + c_3\right]dx + c_4 =$

$$= 2^4\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}\right) + c_1'\frac{x^3}{2.3} + c_2'\frac{x^2}{2} + c_3x + c_4$$

ή

$$y = 2^4\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}\right) + c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4 ,$$

όπου $c_1 = \dfrac{c_1'}{6}$, $c_2 = \dfrac{c_2'}{2}$.

(ii) Μετά από πέντε διαδοχικές ολοκληρώσεις η συνάρτηση $e^t + e^{-t}$ γίνεται

$$e^t - e^{-t}$$

και άρα

$$x = e^t - e^{-t} + c_1 t^4 + c_2 t^3 + c_3 t^2 + c_4 t + c_5 \ .$$

Άσκηση 4

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad , \quad y(0)=1,\ y'(0)=4 \ .$$

Λύση

Βρίσκουμε πρώτα μια γενική λύση της Δ.Ε. που δόθηκε. Έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = \int \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx + c_1 = \int (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} x\,dx + c_1 = -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} d(1-x^2) + c_1 =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-x^2)^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + c_1 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + c_1$$

και

$$y = \int \left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + c_1\right] dx + c_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + c_1 x + c_2$$

ή

$$y = \textit{τοξημ}\, x + c_1 x + c_2 \ . \qquad (1)$$

Υπολογίζουμε τώρα τις αυθαίρετες σταθερές c_1, c_2 έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες που δίνονται. Θέτουμε στην (1) $x=0$, $y=1$ και έχουμε

$$1 = \textit{τοξημ}0 + c_1\cdot 0 + c_2 \quad \text{ή} \quad c_2 = 1 \ .$$

Θέτουμε στην ισότητα

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + c_1$$

$x=0$, $y'=4$ και παίρνουμε $4=c_1$. Επομένως η ζητούμενη μερική λύση είναι η συνάρτηση

$$y = \textit{τοξημ}\, x + 4x + 1 \ .$$

Άσκηση 5

Να λυθεί το πρόβλημα των συνοριακών τιμών

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\ ,\ \ y(0)=-\frac{\pi}{4}\ ,\ \ y'(1)=1.$$

Λύση

Βρίσκουμε πρώτα μια γενική λύση της Δ.Ε. που δόθηκε. Έχουμε

$$\frac{dy}{dx}=\int\left[-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right]dx+c_1=-\int(1+x^2)^{-2}d(1+x^2)+c_1=$$

$$=-\frac{(1+x^2)^{-2+1}}{-2+1}+c_1=\frac{1}{1+x^2}+c_1$$

και

$$y=\int\left(\frac{1}{1+x^2}+c_1\right)dx+c_2=\int\frac{dx}{1+x^2}+c_1x+c_2$$

ή

$$y=\tau o\xi\varepsilon\varphi x+c_1x+c_2\,. \qquad (1)$$

Υπολογίζουμε τώρα τις αυθαίρετες σταθερές c_1, c_2 έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες που δίνονται . Θέτουμε στην (1) $x=0$, $y=-\dfrac{\pi}{4}$ και έχουμε

$$-\frac{\pi}{4}=\tau o\xi\varepsilon\varphi\,0+c_1\cdot 0+c_2 \quad ή \quad c_2=-\frac{\pi}{4}\ .$$

Θέτουμε στην ισότητα

$$y'=\frac{1}{1+x^2}+c_1$$

$x=1$, $y'=1$ και έχουμε $1=\dfrac{1}{2}+c_1$ ή $c_1=\dfrac{1}{2}$. Επομένως η ζητούμενη μερική λύση είναι η συνάρτηση

$$y=\tau o\xi\varepsilon\varphi\,x+\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\ .$$

Άσκηση 6

Να βρεθεί η Δ.Ε. της οικογένειας καμπυλών του επιπέδου Oxy

$$y=e^{-x}+\beta e^{2x},$$

όπου $\beta\in\mathbf{R}$ είναι αυθαίρετη σταθερή.

Λύση

Η οικογένεια καμπυλών που δόθηκε είναι μονοπαραμετρική. Παραγωγίζουμε μια φορά τα μέλη της ισότητας

$$y = e^{-x} + \beta e^{2x} \tag{1}$$

ως προς x και έχουμε

$$y' = -e^{-x} + 2\beta e^{2x} . \tag{2}$$

Για να απαλείψουμε το β από τις (1) και (2), πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της (1) επί –2 και προσθέτουμε κατά μέλη την εξίσωση που προκύπτει με τη (2). Έτσι έχουμε

$$y' - 2y = -e^{-x} + 2\beta e^{2x} - 2(e^{-x} + \beta e^{2x})$$

ή

$$y' - 2y = -3e^{-x} . \tag{3}$$

Η εξίσωση (3) είναι η ζητούμενη Δ.Ε.

Άσκηση 7

Να βρεθεί η Δ.Ε. της οικογένειας καμπυλών

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} ,$$

όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

Λύση

Η οικογένεια καμπυλών που δόθηκε είναι διπαραμετρική. Παραγωγίζουμε δυο φορές τα μέλη της ισότητας

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} \tag{1}$$

ως προς x και έχουμε

$$y' = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} , \tag{2}$$

$$y'' = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} . \tag{3}$$

Απαλείφουμε τώρα τις αυθαίρετες σταθερές c_1 και c_2 από τις (1) , (2) και (3). Για το σκοπό αυτό, αφαιρούμε τις (3) και (1) κατά μέλη και έχουμε

$$y'' - y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} - (c_1 e^{-x} + c_2 e^{x})$$

ή

$$y'' - y = 0 \ .$$

Η τελευταία εξίσωση είναι η ζητούμενη Δ.Ε.

Άσκηση 8

Να βρεθεί η Δ. Ε. της οικογένειας των παραλλήλων προς την ευθεία $y = 2x$ ευθειών του επιπέδου Oxy.

Λύση

Η εξίσωση της οικογένειας των παραλλήλων προς την ευθεία $y = 2x$ ευθειών του επιπέδου ταυτίζεται με την εξίσωση της τυχαίας ευθείας της οικογένειας, δηλ. είναι η

εξίσωση

$$y = 2x + c, \tag{1}$$

όπου $c \in \mathbf{R}$ είναι μεταβλητή παράμετρος (αυθαίρετη σταθερή). Επειδή η οικογένεια καμπυλών (1) είναι μονοπαραμετρική, παραγωγίζουμε μια φορά τα μέλη της (1) ως προς x. Έτσι έχουμε την ισότητα

$$y' = 2. \tag{2}$$

Στην ισότητα (2) έγινε ήδη η απαλοιφή της αυθαίρετης σταθερής c, δηλ. αυτή είναι η εξίσωση που προκύπτει με απαλοιφή της c από τις (1) και (2). Με άλλα λόγια, η εξίσωση (2) είναι η Δ.Ε. της οικογένειας καμπυλών (1).

Άσκηση 9

Να βρεθεί η Δ.Ε της οικογένειας των κύκλων του επιπέδου Oxy που εφάπτονται του άξονα $y'Oy$ στο σημείο του O.

Λύση

Ο τυχαίος κύκλος που εφάπτεται του άξονα $y'Oy$ στο σημείο O έχει κέντρο του ένα σημείο $\mathrm{K}(a,\ 0)$ του άξονα $x'Ox$ και ακτίνα $r = |a|$, δηλ. έχει εξίσωση

$$(x-a)^2 + y^2 = |a|^2.$$

Η εξίσωση αυτή γράφεται

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = a^2$$

ή

$$x^2 - 2ax + y^2 = 0 \tag{1}$$

και είναι η εξίσωση της οικογένειας των κύκλων που δόθηκε.

Επειδή η οικογένεια (1) είναι μονοπαραμετρική, παραγωγίζουμε μια φορά τα μέλη της (1) ως προς x, θεωρούμε το y συνάρτηση του x και κρατούμε το a σταθερό. Έτσι έχουμε

$$2x - 2a + 2yy' = 0 \quad \text{ή} \quad x - a + yy' = 0. \tag{2}$$

Θέτοντας την τιμή του a από τη (2) στην (1) έχουμε την εξίσωση

$$x^2 - 2(x + yy')x + y^2 = 0$$

η οποία γράφεται

$$x^2 - 2x^2 - 2xyy' + y^2 = 0$$

ή

$$2xyy' + x^2 - y^2 = 0$$

και είναι η ζητούμενη Δ.Ε.

1.5. Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης χωριζομένων μεταβλητών

1.5.1. Παρατήρηση. Θεωρούμε μια Δ.Ε. της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = f(x)h(y)\,, \tag{1}$$

της οποίας το β′ μέλος είναι γινόμενο μιας συνάρτησης του x και μιας συνάρτησης του y. Όπως γνωρίζουμε από το Διαφορικό Λογισμό, το $\dfrac{dy}{dx}$ είναι μεν το σύμβολο της παραγώγου y'_x, δηλ. $\dfrac{dy}{dx} \equiv y'_x$, αλλά μπορεί να θεωρηθεί και σαν πηλίκο (κλάσμα) των δυο διαφορικών dy και dx, αφού $dy \equiv y'_x dx$.
Έτσι η Δ.Ε (1) γράφεται

$$dy = f(x)h(y)dx \quad \text{ή} \quad \frac{1}{h(y)}dy = f(x)dx\,,$$

δηλ. παίρνει τη μορφή

$$g(y)dy = f(x)dx\,. \tag{2}$$

Στη Δ.Ε. (2) λέμε ότι οι ***μεταβλητές*** (εξαρτημένη και ανεξάρτητη) ***έχουν διαχωριστεί***, δηλ. στο ένα μέλος εμφανίζεται μόνο η y και στο άλλο μόνο η x.

1.5.2. Ορισμός. Κάθε Δ.Ε. πρώτης τάξης η οποία έχει ή μπορεί με αλγεβρικούς μετασχηματισμούς να πάρει τη μορφή (2) λέγεται ***Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών.***

1.5.3. Πρόταση. Η επίλυση της Δ.Ε.(2) επιτυγχάνεται με ολοκλήρωση των μελών της, δηλ. μια γενική της λύση δίνεται από τον τύπο

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + c\,, \tag{3}$$

όπου $c \in \mathbf{R}$ είναι η αυθαίρετη σταθερή της ολοκλήρωσης.

1.5.4. Παρατήρηση. Στον τύπο (3) έχουμε γράψει προκαταβολικά την αυθαίρετη σταθερή της ολοκλήρωσης c. Έτσι κατά τον υπολογισμό των αορίστων ολοκληρωμάτων

$$\int g(y)dy \quad \text{και} \quad \int f(x)dx$$

δεν ξαναγράφουμε αυθαίρετες σταθερές.

1.5.5. Παρατήρηση. Μετά τον υπολογισμό των παραπάνω ολοκληρωμάτων είμαστε

υποχρεωμένοι να λύσουμε ως προς y την ισότητα που προκύπτει, εφόσον βέβαια αυτό είναι δυνατό. Αν η ισότητα που προκύπτει δεν λύνεται ως προς y, τότε έχουμε τη γενική λύση της Δ.Ε. (2) στη μορφή πλεγμένης συνάρτησης.

1.5.6. Παρατήρηση. Αν κάποιο από τα ολοκληρώματα στα δυο μέλη του τύπου (3) δεν υπολογίζεται με τις γνωστές στοιχειώδεις συναρτήσεις, τότε αναζητούμε προσεγγιστικές λύσεις της Δ.Ε. (2).

1.5.7. Παρατήρηση. Η διαδικασία χωρισμού των μεταβλητών συχνά περιλαμβάνει διαίρεση των μελών της εξίσωσης που δίνεται με μια παράσταση της μορφής $F(x)\cdot G(y)$. Τότε υποθέτουμε σιωπηρά ότι είναι $F(x)\neq 0$ και $G(y)\neq 0$. Αν άγνωστη συνάρτηση είναι η $y=y(x)$, τότε εξαιτίας της υπόθεσης $G(y)\neq 0$ είναι δυνατό να χάσαμε λύσεις. Για το λόγο αυτό πρέπει, μετά την εύρεση της γενικής λύσης, να λύσουμε την εξίσωση $G(y)=0$ και να βρούμε ποιές από τις σταθερές συναρτήσεις $y=y_0$, όπου $G(y_0)$=0, είναι λύσεις της αρχικής Δ. Ε. που χάθηκαν κατά τη διαδικασία χωρισμού των μεταβλητών.

1.5.8. Παράδειγμα. Να λυθεί η Δ. Ε.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{1+x^2}. \tag{4}$$

Λύση

Αυτή γράφεται

$$\frac{dy}{y^2}=\frac{dx}{1+x^2},$$

άρα είναι Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών και μια γενική της λύση δίνεται από τον τύπο

$$\int\frac{dy}{y^2}=\int\frac{dx}{1+x^2}+c. \tag{5}$$

Επειδή

$$\int\frac{dy}{y^2}=\int y^{-2}dy=\frac{y^{-2+1}}{-2+1}=-\frac{1}{y} \quad \text{και} \quad \int\frac{dx}{1+x^2}=\tau o\xi\varepsilon\varphi x,$$

από την ισότητα (5) έχουμε

$$-\frac{1}{y}=\tau o\xi\varepsilon\varphi x+c$$

ή

$$y=-\frac{1}{c+\tau o\xi\varepsilon\varphi x}. \tag{6}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι για να διαχωρίσουμε τις μεταβλητές διαιρέσαμε τα μέλη της

Δ.Ε. (4) με y^2 και ότι η εξίσωση $y^2 = 0$ έχει μια μόνο ρίζα , y_1 =0. Όπως είναι φανερό, η σταθερή συνάρτηση $y = 0$ είναι λύση της Δ.Ε. (4). Η λύση αυτή δεν περιλαμβάνεται στην (6), δηλ. δεν προκύπτει από τον τύπο (6) για κάποια τιμή της παραμέτρου c. Επομένως η σταθερή συνάρτηση $y = 0$ ***είναι ιδιάζουσα λύση της Δ.Ε. (4)***, η οποία χάθηκε κατά τη διαδικασία χωρισμού των μεταβλητών.

1.5.9. Παρατήρηση. Συχνά, για να πετύχουμε μια πιο απλή έκφραση της γενικής λύσης μιας Δ.Ε. 1ης τάξης, αντικαθιστούμε την αυθαίρετη σταθερή c της ολοκλήρωσης με $\ell n c_1$, όπου $c_1 > 0$. Έχουμε το δικαίωμα αυτό, γιατί $-\infty < \ell n c_1 < +\infty$ και δεν μειώνουμε έτσι τη γενικότητα της λύσης .

1.5.10. Παράδειγμα. Να λυθεί η Δ.Ε.

$$xdy = 3ydx \quad . \tag{10}$$

Λύση

Η Δ.Ε. (10) γράφεται

$$\frac{dy}{y} = \frac{3dx}{x} \quad ,$$

άρα είναι Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών και μια γενική της λύση δίνεται από τον τύπο

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{3dx}{x} + c_1 \; .$$

Θέτοντας $c_1 = \ell n c_2$, όπου $c_2 > 0$, η παραπάνω γενική λύση γράφεται, διαδοχικά,

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{3dx}{x} + \ell n c_2 ,$$

$$\ell n|y| = 3\ell n|x| + \ell n c_2 ,$$

$$\ell n|y| = \ell n|x|^3 + \ell n c_2 \quad ,$$

$$\ell n|y| = \ell n\left|c_2 x^3\right|$$

και δίνει

$$|y| = \left|c_2 x^3\right|$$

ή, ισοδύναμα,

$$y = \pm c_2 x^3 \ , \ \ c_2 > 0 \, . \tag{11}$$

Η παραπάνω γενική λύση (11) μπορεί να γραφεί και υπό τη μορφή

$$y = cx^3, \quad \text{όπου} \quad c \in \mathbf{R}^* \; , \tag{12}$$

γιατί κάθε συνάρτηση που παίρνεται από τον τύπο (11) για κάποια τιμή του $c_2 > 0$

παίρνεται και από τον τύπο (12) για κάποια (άλλη γενικά) τιμή του $c \in \mathbf{R}^*$ και αντίστροφα.

Σημειώνουμε ακόμη ότι η σταθερή συνάρτηση $y=0$ είναι λύση της Δ.Ε. (10), η οποία χάθηκε κατά τη διαδικασία χωρισμού των μεταβλητών. Όμως, η λύση αυτή $y=0$ προκύπτει από τον τύπο (12) αν επιτρέψουμε στο c να πάρει και την τιμή $c=0$. Έτσι, μια γενική λύση της Δ.Ε. (10) δίνεται από τον τύπο

$$y = cx^3,$$

όπου $c \in \mathbf{R}$.

1.5.11. Πρόταση. Κάθε Δ.Ε. της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = f(\alpha x + \beta y + \gamma), \tag{13}$$

όπου $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^*$, $\gamma \in \mathbf{R}$, ανάγεται με την αλλαγή συνάρτησης

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma \tag{14}$$

σε Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών της νέας συνάρτησης $z = z(x)$.

Απόδειξη. Παραγωγίζουμε τα μέλη της (14) ως προς x και έχουμε

$$\frac{dz}{dx} = \alpha + \beta\frac{dy}{dx}$$

ή, επειδή $\beta \neq 0$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\beta}\left(\frac{dz}{dx} - \alpha\right). \tag{15}$$

Αντικαθιστούμε τώρα τις τιμές των $\frac{dy}{dx}$ και $\alpha x + \beta y + \gamma$ από τις (15) και (14) στη (13) και αυτή μετασχηματίζεται στην εξίσωση

$$\frac{1}{\beta}\left(\frac{dz}{dx} - \alpha\right) = f(z),$$

η οποία γράφεται

$$\frac{dz}{dx} = \alpha + \beta f(z)$$

ή

$$\frac{dz}{\alpha + \beta f(z)} = dx. \tag{16}$$

Η (16) είναι μια Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών με άγνωστη συνάρτηση τη $z = z(x)$ και λύνεται κατά τα γνωστά.

1.5.12. Πόρισμα. Αν $z = h(x,c)$ είναι μια γενική λύση της Δ.Ε. (16), τότε η συνάρτηση $y = y(x)$ που ορίζεται από την ισότητα

$$\alpha x + \beta y + \gamma = h(x,c),$$

δηλ. η

$$y = \frac{1}{\beta}[h(x,c) - \alpha x - \gamma],$$

είναι γενική λύση της Δ.Ε. (13).

1.5.13. Παράδειγμα. Να λυθεί η Δ.Ε.

$$\frac{dy}{dx} = (x-y)^2. \tag{17}$$

Λύση

Αυτή είναι μια Δ.Ε. της μορφής (13) με $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 0$. Θέτουμε

$$z = x - y \tag{18}$$

και έχουμε

$$\frac{dz}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx}$$

ή

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dz}{dx}. \tag{19}$$

Αντικαθιστούμε τις τιμές των $\dfrac{dy}{dx}$ και $x-y$ από τις (19) και (18) στη Δ.Ε. (17) και αυτή μετασχηματίζεται στην εξίσωση

$$1 - \frac{dz}{dx} = z^2. \tag{20}$$

Η Δ.Ε. (20) γράφεται

$$\frac{dz}{dx} = -(z^2 - 1) \quad \text{ή} \quad \frac{dz}{z^2 - 1} = -dx$$

και μια γενική της λύση είναι η

$$\int \frac{dz}{z^2 - 1} = -\int dx + \ell n c \ , \ c > 0.$$

Η λύση αυτή γράφεται, διαδοχικά,

$$\int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)dz = -x + \ell nc ,$$

$$\int \left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right) dz = -2x + 2\ell nc ,$$

$$\ell n|z-1| - \ell n|z+1| = -2x + \ell nc^2 ,$$

$$\ell n\left|\frac{z-1}{c^2(z+1)}\right| = -2x ,$$

$$\left|\frac{z-1}{c^2(z+1)}\right| = e^{-2x},$$

$$\frac{z-1}{z+1} = \pm c^2 e^{-2x} ,$$

$$\frac{z-1}{z+1} = c_1 e^{-2x} ,$$

$$z = \frac{1+c_1 e^{-2x}}{1-c_1 e^{-2x}} , \tag{21}$$

όπου $c_1 = \pm c^2 \in \mathbf{R}$.
Τέλος, θέτοντας $z = x - y$ στην (21) έχουμε την ισότητα

$$x - y = \frac{1+c_1 e^{-2x}}{1-c_1 e^{-2x}} ,$$

από την οποία παίρνουμε μια γενική λύση

$$y = x - \frac{1+c_1 e^{-2x}}{1-c_1 e^{-2x}}$$

της Δ.Ε. (17) .