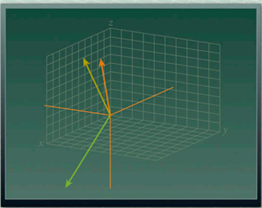
Δημήτρης Καραγιαννάκης

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΘΕΩΡΙΑ & ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ



ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ISBN 978-960-456-340-1

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση
Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσσαλονίκης - Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ:
Αρμενοπούλου 27 - 546 35 Θεσσαλονίκη • Τηλ.: 2310-203.720 • Fax 2310-211.305
e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΕΝΩΣΗ ΕΚΔΟΤΩΝ ΒΙΒΛΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ:
Στοά του Βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5) - 105 64 ΑΘΗΝΑ • Τηλ.-Fax: 210-3211.097

ΑΠΟΘΗΚΗ ΑΘΗΝΩΝ - ΠΩΛΗΣΗ ΧΟΝΔΡΙΚΗ:
Ασκληπιού 60 - Εξάρχεια 114 71, Αθήνα • Τηλ.-Fax: 210-3816.650 • e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

Προλεγόμενα

Δεν υπάρχει καμία αμφιβολία ότι τόσο στην διεθνή όσο και στην εγχώρια βιβλιογραφία (σε ελληνικές μεταφράσεις ή/και μέσω αυθεντικής συγγραφής) υπάρχουν **πολλά καλά βιβλία** για την Γραμμική Άλγεβρα (Γ.Α.).

Στην Εισαγωγή που ακολουθεί, μαζί με τις «συμβουλές» μας για το **πώς** θα κάνει ο αναγνώστης –διδάσκων ή διδασκόμενος– την πιο **καλή χρήση** του παρόντος βιβλίου, εξηγούμε γιατί θα ήταν πιο ακριβές να αποκαλούσαμε τόσο την ύλη μας, όσο και το περιεχόμενο των πιο πολλών από τα συναφή υπάρχοντα βιβλία, ως **Γραμμική Άλγεβρα Ι**. (Παραμένει φιλοδοξία μας-που μπορεί όμως να μείνει και ανεκπλήρωτη! –να μπορέσουμε κάποτε να παρουσιάσουμε και ένα **βατό** –ή έστω «βατό»– σύγγραμμα **Γ.Α. ΙΙ**).

Γιατί λοιπόν **άλλο ένα βιβλίο Γ.Α. Ι**; Διότι χωρίς να πρέπει να καταφύγουμε, ως συνήθως, σε ένα ογκώδες σύγγραμμα, με πάρα πολλές τεχνικές λεπτομέρειες, επιχειρούμε να δώσουμε **χωρίς εκπτώσεις** το **απόσταγμα** μιας, ας πούμε, πρώτης προσέγγισης με αυτόν τον **πολύ χρήσιμο** μαθηματικό κλάδο.

Όπως θα δείτε στην Εισαγωγή επιδιώξαμε –και εσείς θα κρίνετε αν το πετύχαμε– να καλύψουμε **βασικές εκπαιδευτικές ανάγκες των τριών πρώτων εξαμήνων** –και σε μερικά σημεία ίσως και ακόμα πιο μεγάλων– των φοιτητών των **Φυσικομαθηματικών και Πολυτεχνικών Σχολών**, αλλά και των **Σχολών Τεχνολογικών Εφαρμογών** των **ΤΕΙ**.

Βέβαια πέρα από έναν **επιμελή αναγνώστη** το βιβλίο αυτό έχει ανάγκη και από ένα **διδάσκοντα με ζήλο**. Αυτός είναι ο πραγματικός **μαέστρος** και εμείς απλώς του προσφέραμε την δική μας μπαγκέτα!

Ηράκλειο, Σεπτέμβρης 2012 *Δημήτρης Καραγιαννάκης*

Περιεχόμενα

Κεφ. 3: Γραμμική Ανεξαρτησία Διανυσμάτων & Βάσεις Διανυσματικών Χώρων

Κεφ. 4: Οι Τετραγωνικοί Πίνακες ως Γραμμικοί Μετασχηματισμοί

Κεφ. 5: Τέσσερα Θεμελιώδη Θεωρήματα της Γραμμικής Άλγεβρας

Παραρτήματα

Εισαγωγή

A Κατατοπιστική γενική παρατήρηση

Στον πρόλογο της πρώτης έκδοσης του γνωστού –και πολλαπλών εκδόσεων πλέον– βιβλίου του, **“Introduction to Linear Algebra”**, ο διάσημος γαλλοαμερικανός μαθηματικός **Serge Lang** έγραφε ότι (σε ελεύθερη μετάφραση από τα αγγλικά) **τα πιο πολλά** μαθηματικά προβλήματα **μπορούν να επιλυθούν μέσω της Γραμμικής Άλγεβρας**, αρκεί να την ξέρει κάποιος πολύ καλά! Εμείς θα συμπληρώναμε ότι κάτι τέτοιο γίνεται ακόμα πιο εφικτό αν η καλή γνώση της Γ.Α συνδυαστεί με καλή γνώση του «αδελφού» της, του **Απειροστικού Λογισμού**. Υπό αυτή την έννοια **δεν** μπορούμε να σας υποσχεθούμε ότι τελειώνοντας αυτό το βιβλίο, ακόμα και αν το έχετε εμπεδώσει και επίσης κατέχετε πλήρως τον **Α.Λ.Ι** & **ΙΙ**, μπορείτε μέσω της Γ.Α. που μάθατε, να επιλύετε «τα πιο πολλά μαθηματικά προβλήματα». **Γιατί αυτό**; Διότι θα έχετε καλύψει **κυρίως τα θεμέλια μόνο** (ας πούμε κάτι σαν μία **Γ.Α.Ι**), ενώ για να δικαιώσετε την εκτίμηση του Lang χρειάζεστε ακόμα αν όχι όλη τουλάχιστον ένα μέρος και από την **Γ.Α. ΙΙ**, αλλά και από την λεγόμενη Αριθμητική Γ.Α. (βλέπε Παράρτημα Δ). Μπορούμε όμως να σας υποσχεθούμε ότι θα μπορείτε να λύσετε **αρκετά προβλήματα** που περιγράφουν μία ποικιλία μαθηματικών μοντέλων από αυτά που μπορεί να σας εμφανιστούν κατά την εμβάθυνση θεμάτων πληροφορικής, **μηχανολογίας**, **καθαρής φυσικής** ή ακόμα και θεμάτων **οικονομίας**, ακόμα και **διαχείρισης επιχειρήσεων**.

B Μικρή ιστορική αναδρομή της γραμμικής άλγεβρας

Η Γ.Α. είναι ένας μαθηματικός κλάδος τόσο **παλαιός** όσο και τα ίδια τα μαθηματικά. Η λύση **γραμμικών εξισώσεων**, δηλαδή εξισώσεων της μορφής $\alpha x + \beta = 0$, εμφανίζεται σε αρχαία Κινέζικα κείμενα! Τα **γραμμικά συστήματα**, με πολλούς αγνώστους αυτή την φορά, μετά την θεμελίωση της **Αναλυτικής Γεωμετρίας** από τον René Descartes στα μέσα του 17^{ου} αιώνα, αποκτούν νέα αίγλη και απαιτούν τεχνικές επίλυσης που κυριαρχούν εντός της Γ.Α, υπό την επωνυμία «**Θεωρία Πινάκων**». Μάλιστα αυτή η τελευταία, στην πορεία, αναπτύχθηκε τόσο πολύ που

συχνά αποτελεί ένα «ανεξάρτητο» από την υπόλοιπη Γ.Α. θέμα. Παρόλο που διάφορα συναφή προβλήματα απασχόλησαν κατά καιρούς μεγάλους (**Cramer, Wronski, Jacobi**), ή ακόμα και **πολύ μεγάλους μαθηματικούς**, (**Leibnitz, Cauchy, Euler, Gauss**) η Γ. Α θεμελιώθηκε **πλήρως** στα μέσα του 19^{ου} αιώνα (κυρίως από τους **Cayley**, **Grassmann**, και **Frobenius**): Ένα κομμάτι της μάλιστα, που ανήκει σε αυτό που θα λέγαμε **Γ.Α.ΙΙ** ή/και **Αριθμητική Γ.Α.** ολοκληρώθηκε στο β′ μισό του 20^{ου} αιώνα. Μπορούμε μάλιστα να πούμε ότι, ακολουθώντας τις επιστημονικές ανάγκες και την ανάπτυξη της τεχνολογίας και του λογισμικού των Η/Υ, η Γ.Α. εξακολουθεί και σήμερα να αναπτύσσεται ιδίως σε θέματα που αφορούν την ανάπτυξη **ειδικών αλγορίθμων**.

Γ Πώς διαστρωματώνεται η ύλη του βιβλίου

Ανεξάρτητα ποιο είναι το ακριβές αντικείμενο που ενδιαφέρει, πέρα από κύκλο σπουδών, ή ποια επί μέρους σχολή παρακολουθεί ο αναγνώστης φοιτητής ή σπουδαστής, οι ενότητες **§2.1**, **§2.2**, **§2.3** και **§2.4** (του **Κεφαλαίου 2**) είναι **εντελώς υποχρεωτικές** ως προς την **καλή** τους **μελέτη**! Το ίδιο και η επίλυση όσων ασκήσεων συσχετίζονται με αυτή την θεωρία και δεν έχουν τον **αστερίσκο*** που υποδηλώνει μία **κάπως πιο δύσκολη** άσκηση. Στον αντίποδα των πιο πάνω, ο αναγνώστης μπορεί να αφήσει **τελευταίο** για μελέτη το **Κεφάλαιο 1**. Μπορεί όμως ακόμα και να το **παραλείψει εντελώς** (π.χ. αν είναι σπουδαστής μιας ΣΤΕΦ, **εκτός** αν σκοπεύει σε μία **εξειδίκευση** όπως στην **ΨΕΣ**, ή ακόμα και σε μεταπτυχιακές σπουδές σε αντικείμενο που –έστω και κατά πλάγιο τρόπο– απαιτεί ορισμένες γνώσεις **συναρτησιακής ανάλυσης**).

Κατά ανάλογο τρόπο μπορείτε να περιλάβετε στα τελευταία μαθήματα τα **Παραρτήματα Α** και **Β** ή να τα παραλείψετε πάντα με τις ίδιες εξαιρέσεις. Κατά την γνώμη μας ακόμα και αν ο αναγνώστης δεν σπουδάζει σε τμήμα Φυσικομαθηματικής ή Πολυτεχνικής Σχολής και ανάλογα με το διδακτικό φόρτο, πρέπει να ασχοληθεί με **όλα τα υπόλοιπα κεφάλαια** (σε τι βαθμό θα το καθορίσει ο διδάσκων). Ειδικά το **Παράρτημα Δ** (με ψήγματα **Αριθμητικής Γ.Α.**) καλόν είναι να συνδυαστεί με εργασίες για το σπίτι-αν η θεωρία δεν υποστηρίζεται από ανάλογες εργαστηρικές ασκήσεις – όπου θα γίνεται χρήση του **Matlab** ή της **Mathematica**.

Καλό διάβασμα λοιπόν και αν, εκ πρώτης όψεως, σας φανεί η ύλη κάτι σαν ένας μεγάλος βράχος θυμηθείτε το γνωμικό του **Χορίλου**: ***Πέτρην κοιλαίνει ρανίς ύδατος ενδελεχείη***.

1ο Κεφάλαιο

Τα Θεμέλια των Χώρων Εσωτερικού Γινομένου

Εισαγωγή

Πολλές έννοιες που θα παρουσιάσουμε τώρα στο παρόν κεφάλαιο τις συναντάμε σχεδόν σε κάθε προπτυχιακό εισαγωγικό μάθημα Γραμμικής Άλγεβρας. Υπάρχουν όμως και μέρη της θεωρίας της Γραμμικής Άλγεβρας που μάλλον ένας διδασκόμενος είτε δεν θα τα χρειασθεί καθόλου, είτε θα τα συναντήσει για πρώτη φορά σε εξειδικευμένα μαθήματα, όπως για παράδειγμα σε προχωρημένα **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά** ή/και σε συνδυασμό με την **Ψηφιακή Ανάλυση Σήματος**, την **Θεωρητική Φυσική** κ.λπ. Αυτά κυρίως θα αφορούν τα απείρου πλήθους ορθοκανονικά συστήματα και τα συναφή τους θεωρήματα (π.χ. ανισότητα Bessel, το Λήμμα των Riemann & Lebesgue και άλλα), τον διακριτό μετασχηματισμό Fourier, ακόμα και μερικές εφαρμογές των μεθόδων της Γ.Α στην επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων.

Αφού το ανά χείρας σύγγραμμα δεν σκοπεύει να παίξει τον ρόλο ενός συγγράμματος προχωρημένης Γραμμικής Άλγεβρας, όλα αυτά θα τα περιλάβουμε συνοπτικά στα **τρία Παραρτήματα** όπου θα παραλείψουμε μεν τις αποδείξεις μερικών, αλλά θα δώσουμε μια ποικιλία από βιβλιογραφικές παραπομπές για όποιον ενδιαφέρεται.

Όσοι πάντως θέλουν να επεκτείνουν τις γνώσεις τους, αλλά αισθάνονται μία σχετική «μαθηματική ανασφάλεια», φοβούμενοι μήπως χαθούν μέσα σε ένα κυκεώνα δύσκολων εννοιών, μπορούν να δούνε μία σχετικά εκλαϊκευμένη εκδοχή όλων αυτών των πραγμάτων στο βιβλίο μας «**Ανάλυση Σήματος. Θεωρία και Εφαρμογές**» (Εκδόσεις Ζήτη, Οκτώβρης 2011).

§1.1 Διανυσματικοί Χώροι *(Linear Spaces)*

Η πιο θεμελιώδης αλγεβρική δομή, που χρειαζόμαστε όχι μόνο στην Γ.Α. αλλά και στους περισσότερους κλάδους των Μαθηματικών, αν εξαιρέσουμε τις εντελώς πρωταρχικές δομές –όπως είναι οι ομάδες, οι δακτύλιοι και τα σώματα– είναι ο λεγόμενος **διανυσματικός χώρος** (δ.χ.). Οι αριθμοί που θα χρησιμοποιηθούν σε σχέση με τον ορισμό ενός δ.χ. μπορεί να είναι το $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$ (τυπικά έπρεπε να πούμε ότι αυτά τα αριθμητικά σύνολα έχουν την δομή σώματος αλλά δεν θα μας απασχολούν τέτοιες "λεπτομέρειες"). Τα στοιχεία ενός δ.χ. θα τα ονομάζουμε διανύσματα (αλλά ας μην παρασύρεται ο αναγνώστης από την τετριμμένη χρήση του όρου, λόγω της Φυσικής που γνωρίζει , στον χώρο ή στο επίπεδο). Τυπικά ένα (μη κενό προφανώς) σύνολο V θα καλείται δ.χ. πάνω στο αριθμοσύνολο $F\left(F=\mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C}\right)$ αν το εμπλουτίσουμε με τις εξής πράξεις, $+$ και $\cdot$,

1. **Πρόσθεση διανυσμάτων**: αν $u,v\in V$ ορίζεται ένα τρίτο διάνυσμα $u+v$ πάλι στον V.
2. **Πολλαπλασιασμός με αριθμό**: για κάθε $u\in V$ και $\alpha\in F$ ορίζεται ένα διάνυσμα $\alpha\cdot u\in V$.

Οι εν λόγω πράξεις πρέπει να διασφαλίζουν και τα εξής:

3. $(u+v)+w=u(v+w)$ για κάθε $u,v,w\in V$.
4. Υπάρχει διάνυσμα ονομαζόμενο "μηδενικό διάνυσμα" $\vec{0}$ (το βέλος το βάζουμε για να μην το μπερδεύουμε με τον αριθμό 0 και όχι για να παραπέμψουμε στη συνηθισμένη από την Φυσική γραφή) με την ιδιότητα $\vec{0}+v=\vec{v}+\vec{0}=v$ για κάθε $v\in V$.
5. Για κάθε $v\in V$ υπάρχει ένα διάνυσμα ονομαζόμενο "μείον v", $-v$ με την ιδιότητα $v+(-v)=\vec{0}$.
6. $u+v=v+u$ για κάθε $v,u\in V$.
7. Για κάθε $\alpha\in F$ και $v,u\in V$, $\alpha\cdot(u+v)=\alpha\cdot u+\alpha\cdot v$.
8. Για κάθε $\alpha,b\in F$ και $u\in V$, $(\alpha+b)\cdot u=\alpha\cdot u+b\cdot u$ και $\alpha\cdot(b\cdot u)=(\alpha b)\cdot u$.
9. Για κάθε $v\in V$, $1\cdot v=v$.

Σχόλιο: Αφού επισημάνουμε ότι η ιδιότητα 9 χρειάζεται διότι δεν πρόκειται περί του συνηθισμένου πολλαπλασιασμού έχουμε από τις 8 και 9 ότι

$$u+(-1)u=(1-1)u=0\cdot u=-0\cdot\vec{u}$$

και επειδή $u-0\cdot u=(1-0)u=u \Rightarrow 0\cdot u=\vec{0}$

άρα το $-u$ της 4 δεν είναι παρά το $(-1)u$ το ήδη εξασφαλισμένο… Και άλλες παρόμοιες “περικοπές” θα μπορούσαν να γίνουν σε έναν πιο αυστηρό ορισμό του δ.χ. V, αλλά με αυτή τη μακρά λίστα ιδιοτήτων αισθανόμαστε πιο απελευθερωμένοι όταν αργότερα οι πράξεις μας γίνουν πιο σύνθετες από ό,τι είχαμε συνηθίσει με τα διανύσματα του τρισδιάστατου χώρου.

Ανάλογα με το αν $F=\mathbb{R}$ ή $F=\mathbb{C}$ καλούμε τον δ.χ. V πραγματικό ή μιγαδικό δ.χ. και προσοχή διότι αυτά τα επίθετα αφορούν τους αριθμούς και όχι τα διανύσματα!

Ένα $W\subseteq V$ (W υποσύνολο του V) ονομάζεται διανυσματικός υποχώρος (δ.υ.) του V αν στο W οι ίδιες +, και με το ίδιο F έχουμε τις ίδιες ιδιότητες του ορισμού ενός δ.χ. Αν θέλουμε να ελέγξουμε “γρήγορα” κατά πόσο το W είναι δ.υ. έχουμε το εξής κριτήριο ελέγχου.

➲ *Κριτήριο Ελέγχου Ενός Διανυσματικού Υποχώρου*

Για $W\neq\varnothing$, έχουμε δ.υ. αν για κάθε $u,v\in W$ και κάθε $\alpha,b\in F \;\Rightarrow\; \alpha u+bv\in W$.

Θα χρειαστούμε τέσσερεις ακόμα ορισμούς:

Ορισμός Γραμμικού Συνδυασμού Διανυσμάτων

Αν $v_1,\ldots,v_n$ διανύσματα ενός δ.χ. V, το διάνυσμα u καλείται γραμμικός συνδυασμός (γ.σ.) των $v_1,\ldots,v_n$ αν $u=v_1\alpha_1+\ldots+v_n\alpha_n$ για κάποιους αριθμούς $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in F$.

Ορισμός Γραμμικής Ανεξαρτησίας Διανυσμάτων

Τα $v_1,v_2,\ldots,v_n$ ενός δ.χ. V θα καλούνται γραμμικώς ανεξάρτητα (γ.α.) αν η εξίσωση $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\ldots+\alpha_nv_n=\vec{0}$ με $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in F$ ικανοποιείται μόνο αν $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$. Αλλιώς τα καλούμε γραμμικώς εξαρτημένα (γ.ε.).

➲ **Σημαντική Παρατήρηση**

Ολοκληρωμένη εικόνα, αλλά και μία μέθοδο διαπίστωσης αν ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων είναι (στον χώρο των n διαστάσεων) γ.α. ή όχι θα αποκτήσετε στην Ενότητα **§3.1**.

Ορισμός Γραμμικού Αναπτύγματος

Το σύνολο όλων των u που είναι γραμμικός συνδυασμός των $v_1,...,v_n$ καθώς τα $\alpha_1,...,\alpha_n$ μεταβάλλονται, ονομάζεται **γραμμικό ανάπτυγμα** των $v_1,...,v_n$ και συμβολίζεται με $span\{v_1,...,v_n\}$.

Ορισμός Βάσης Ενός Δ.Χ.

Ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων $v_1,...,v_n$ ενός δ.χ. V θα ονομάζεται βάση του V αν είναι γ.α. και $V = span\{v_1,...,v_n\}$. Ο αριθμός αυτών, n, μάλιστα ονομάζεται διάσταση του δ.χ. V και γράφουμε $n = \dim V$.

Σχόλια

α) Από τους πιο πάνω ορισμούς βγαίνει (και είναι μια εύκολη άσκηση για το σπίτι) ότι τα $v_1,...,v_n$ είναι γ.α. αν και μόνο αν κανένα από αυτά δεν είναι γ.σ. των υπολοίπων $n-1$ διανυσμάτων.

β) Ο αναγνώστης θα πρέπει ήδη να διαισθάνεται ότι ένας δ.χ. (πραγματικός ή μη) που δεν είναι ο τετριμένος $V = \{0\}$ έχει άπειρο πλήθος βάσεων που οδηγεί μετά από σκέψη ότι η διάσταση του V είναι ανεξάρτητη της επιλογής της βάσης.

γ) Ο ορισμός αυτός της βάσης που δόθηκε αφορά εκ κατασκευής δ.χ. πεπερασμένης διάστασης. Αλλά με αυτούς που είναι **απειροδιάστατοι** θα ασχοληθούμε **ως θεωρία μόνο στα Παραρτήματα** και ενδιάμεσα και σε διάφορες ασκήσεις όταν θα υπάρξει μία «επιτόπια» ανάγκη.

Ασκήσεις §1.1 Διανυσματικοί Χώροι *(Linear Spaces)*

1) Ελέγξτε το (μάλλον προφανές) ότι η ***τομή*** πεπερασμένου πλήθους δ. υποχώρων ενός δ.χ. είναι και αυτός δ.υ. Μπορείτε να πείτε το ίδιο για την ***ένωσή*** τους; Γιατί;

2) Αν V ένας δ.χ. ως προς F και $u \in V$ τότε το σύνολο $\{\alpha u | \alpha \in F\}$ είναι δ.υ. του V και μάλιστα εμπεριέχεται σε κάθε δ.υ. που περιέχει το u.

3) Αποδείξτε ότι το συναρτησιοσύνολο $L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f \mid f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty \right\}$ καθίσταται πραγματικός δ.χ. με τις συνήθεις πράξεις *f+g* και *kf*.

4) Ορίζουμε ως $V = C^1[\alpha,\beta]$ τις συναρτήσεις που έχουν συνεχείς παραγώγους στο $[\alpha,\beta]$. Δείξτε ότι με τις συνήθεις πράξεις καθίσταται ένας δ.χ. και επομένως θα είναι και δ.υ. του δ.χ. $C[\alpha,\beta]$.

5) Παρουσιάζουμε τώρα έναν «εξωτικό» δ.χ. πολύ χρήσιμο (σε ειδικότερες μορφές του) για προχωρημένα προβλήματα Φυσικής. Έστω Ω ένα μη κενό υποσύνολο του F και V ένας οποιοσδήποτε δ.χ. Ορίζουμε το σύνολο V^{Ω} όλων των $f:\Omega \to V$ με τις συνήθεις πράξεις $f+g$ και kf. Αποδείξτε ότι έχουμε έναν νέο δ.χ. Σημειώστε ότι η $f(z)$ είναι διάνυσμα και όχι αριθμός και ότι η μηδενική συνάρτησή μας στον V^{Ω} είναι αυτή με εικόνα το ουδέτερο στοιχείο τού V. Προσπαθήστε να μην μπερδεύετε την συνάρτηση $0(z)=\vec{0}$ με το $\vec{0}$. Τέτοιες συναρτήσεις ονομάζονται διανυσματικές συναρτήσεις και αν περιορισθούμε στο υποδιάστημα [0, ∞) και με $V=\mathbb{R}^3$ έχουμε την περιγραφή των ***διανυσματικών πεδίων*** της κλασσικής Μηχανικής (αλλά και που, ως θεωρία, τα συναντάμε στον λεγόμενο Απειροστικό Λογισμό ΙΙ).

6) Όπως έχουμε αναφέρει στην θεωρία όταν ένα σύνολο διανυσμάτων εντός ενός δ.χ. είναι γ.ε. τότε τουλάχιστον ένα εξ αυτών είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Παρ' όλον που είναι σχετικά απλή άσκηση , σας δίνουμε μία υπόδειξη στο μέρος των απαντήσεων.

7) Έστω V ένας δ.χ. και δύο δ.υ. αυτού V_1 και V_2. Το **σύνολο** των διανυσμάτων της μορφής v_1+v_2, όπου τα v_1, v_2 ανήκουν , αντίστοιχα, στους V_1, V_2 ονομάζεται **άθροισμα** των V_1 και V_2 και απλώς γράφουμε V_1+V_2. Εξετάστε αν έχουμε τώρα έναν νέο δ.υ. του V. (Επειδή είναι απλή άσκηση δεν θα δοθεί υπόδειξη!)

8) Όταν στην #7 έχουμε ότι **κάθε** v του V μπορεί να γραφεί ως v_1+v_2 κατά ένα **μοναδικό** τρόπο τότε λέμε τον V **απευθείας άθροισμα** των δύο δ.υ. και το γράφουμε ως $V = V_1 \oplus V_2$.

(α) Δώστε ένα συγκεκριμένο **παράδειγμα** μιας τέτοιας ανάλυσης για τον συνήθη δ.χ. $\mathbb{R}^2$.

(β) Γενικεύοντας τον ορισμό της #8 σε περισσότερους από δύο δ.υ. δώστε ένα συγκεκριμένο **παράδειγμα** μιας τέτοιας ανάλυσης για τον συνήθη δ.χ. $\mathbb{R}^3$.

9) Έστω V ένας δ.χ. και οι δ.υ. V_1 και V_2. Δείξτε ότι $V = V_1 \oplus V_2$ **αν και μόνον αν** ισχύουν οι σχέσεις $V = V_1 + V_2$ **και** $V_1 \cap V_2 = \{\vec{0}\}$. (Είναι πιο εύκολη από όσο φαντάζει!)

§1.2 Διανυσματικοί Χώροι και Εσωτερικό Γινόμενο *(Inner Product Spaces)*

Ας παρατηρήσουμε πρώτα ότι ο ορισμός ενός δ.χ. δεν περιλαμβάνει την πράξη πολλαπλασιασμού μεταξύ διανυσμάτων. Η έννοια του εσωτερικού γινομένου (ε.γ.) μπορούμε να πούμε ότι έρχεται να εμπλουτίσει την δομή ενός δ.χ. προς αυτή την κατεύθυνση και όπως θα φανεί αργότερα δημιουργεί το άριστο μαθηματικό περιβάλλον για την μελέτη των σημάτων. Προειδοποιούμε όμως τον αναγνώστη ότι εν γένει οι δ.χ. δεν έχουν "αυτομάτως" και εκ του φυσικού τους κάποιο εσωτερικό γινόμενο.

Ορισμός Εσωτερικού Γινομένου

Έστω V ένας δ.χ. με $F=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Για $u,v\in V$ ορίζουμε ως ε.γ. των δύο αυτών διανυσμάτων μία πράξη ανάμεσά τους που οδηγεί σε ένα αριθμό του F (προσοχή όχι διάνυσμα) που συμβολίζουμε $\langle u,v\rangle$. Η πράξη $\langle\ ,\ \rangle$ έχει τις ιδιότητες:

1. Για κάθε $v\in V$, $\langle v,v\rangle\geq 0$.
2. Για κάθε $u\in V$, $\langle u,u\rangle=\vec{0} \Leftrightarrow u=\vec{0}$.
3. Για κάθε $u,v,w\in V$ και $\alpha,b\in F$, $\langle \alpha u+bu,w\rangle=\alpha\langle u,w\rangle+b\langle u,w\rangle$.
4. Για κάθε $u,v\in V$, $\overline{\langle u,v\rangle}=\langle v,u\rangle$.

Ορισμός Χώρου Εσωτερικού Γινομένου

Ο δ.χ. V με ένα ε.γ. ονομάζεται χώρος εσωτερικού γινομένου (χ.ε.γ.)

Μπορούμε να απαριθμήσουμε πολλές ιδιότητες ενός ε.γ. στηριγμένες στις (1)-(4) του ορισμό του (και τις οποίες τις αφήνουμε για ασκήσεις εύκολης ως μέτριας δυσκολίας):

α) Για κάθε $u,v,w\in V$ και $\alpha,b\in F$ ισχύει ότι $\langle u,\alpha v+bw\rangle=\overline{\alpha}\langle u,v\rangle+\overline{b}\langle u,w\rangle$.

β) Για κάθε $v\in V$ και κάθε $\alpha\in F$, $\langle \alpha v,\alpha v\rangle=|\alpha|^2\langle v,v\rangle$.

γ) Για κάθε $v\in V$, $\langle\overline{0},v\rangle=0$.

δ) Στον φυσικό χώρο $\mathbb{R}^3$ πιθανόν να έχετε συναντήσει για $\vec{u}_1=(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$ και $\vec{u}_2=(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$ το εσωτερικό γινόμενο να ορίζεται μέσω της πράξης $\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2=\alpha_1\cdot\alpha_2+\beta_1\cdot\beta_2+\gamma_1\cdot\gamma_2$ (ή ακόμα και ίσως να θυμάστε τον ορισμό από τη

φυσική $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = |\vec{u}_1||\vec{u}_2|\cos\theta$, με θ την γωνία μεταξύ των $\vec{u}_1, \vec{u}_2$). Επαληθεύστε ότι το $\langle u_1, u_2 \rangle = \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2$ έχει τις ιδιότητες του ε.γ. που δώσαμε για τον αφηρημένο δ.χ. V.

ε) Γενικεύστε και αποδείξτε την ιδιότητα 3 του ορισμού ενός ε.γ. και την α) για πεπερασμένο πλήθος διανυσμάτων και αριθμών F.

Επιτέλους ήρθε η στιγμή να δώσουμε συγκεκριμένα παραδείγματα (αν και το κάναμε πλαγίως στο δ) για χώρους με ε.γ.

Παράδειγμα 1

Παίρνουμε για $V = \mathbb{C}^n$ (n-άδες, γραμμές ή στήλες, με μιγαδικές συντεταγμένες) και $F = \mathbb{C}$. Με τη συνήθη πρόσθεση n-άδων και τον συνήθη πολλαπλασιασμό αριθμών επί n-άδα έχουμε έναν δ.χ. Ορίζουμε για $r_1, \ldots, r_n > 0$ την εξής πράξη μεταξύ δύο $z = (z_\kappa)$ και $w = (w_\kappa)$, $1 \le \kappa \le n$, με $z_{\boldsymbol{i}}, w_{\boldsymbol{i}} \in \mathbb{C}$: $\langle z, w \rangle = \sum_{k=1}^{n} r_k z_k \overline{w}_k$.

Τότε ο $(\mathbb{C}^n, \langle\ \rangle)$ είναι χ.ε.γ. Οι αριθμοί $r_1, \ldots, r_n$ ονομάζονται σταθμά (ή βάρη) του $(\mathbb{C}^n, \langle\ \rangle)$. Συνήθως εμφανίζεται μόνο η περίπτωση $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 1$.

Παράδειγμα 2

Έστω $V = \mathbb{C}[\alpha, \beta]$ όπως ορίστηκε στο §0.2 και που όπως είδαμε ήδη στην §1.1 με τις συνήθεις πράξεις του αθροίσματος συναρτήσεων $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ και του πολλαπλασιασμού αριθμού επί συνάρτηση έχουμε έναν (μιγαδικό) δ.χ. Ορίζουμε τώρα την εξής πράξη μεταξύ $f, g \in V$: $\langle f, g \rangle = \int_\beta^\alpha f(x)\overline{g(x)}dx$. (Ο Απειροστικός Λογισμός Ι πρέπει να σας έχει ήδη πείσει ότι η πράξη αυτή είναι εφικτή!). Δοκιμάστε τώρα τις γνώσεις στα ορισμένα ολοκληρώματα για να δείτε ότι πράγματι έχει ορισθεί ένα έ.γ.

Παράδειγμα 3

Έστω $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ μία (άπειρο) ακολουθία μιγαδικών αριθμών τέτοια ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2 < \infty$. (Για παράδειγμα/άσκηση: όταν $z_n = \frac{1}{2^n \boldsymbol{i}}$ έχουμε $|z_n|^2 = \frac{1}{4^n}$ και η

$\left\{\frac{1}{4^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μία κλασσική φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος με «πρώτον όρο» το $\frac{1}{4}$ και «λόγο» το $\frac{1}{4}$ και η αντίστοιχη σειρά έχει τιμή $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$. (Γιατί;)

Το σύνολο όλων των $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ με αυτή την ιδιότητα το ονομάζουμε ℓ^2. Η πρόσθεση των διανυσμάτων του (υπενθυμίζουμε ότι εδώ είναι ακολουθίες) και ο πολλαπλασιασμός αριθμού επί διάνυσμα που κάνουν τον ℓ^2 δ.χ. είναι οι συνηθισμένες επεκτάσεις των πράξεων όταν είχαμε πεπερασμένο πλήθος συντεταγμένων (όπως στο Παράδειγμα 1). Προσοχή όμως: δεν είναι όμως εντελώς προφανές ότι $z=\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ και $w=\{w_n\}_{n=1}^{\infty}\in\ell^2$ τότε η $\{z_nw_n\}_{n=1}^{\infty}\in\ell^2$. Θα είναι μία από τις προτεινόμενες ασκήσεις του Παραρτήματος Α και θα συνοδεύεται από εκτεταμένη υπόδειξη. Αν ορίσουμε (σαν γενίκευση του Παραδείγματος 1) για πράξη $\langle z,w\rangle=z\cdot w=$ $=\sum_{n=1}^{\infty}z_n\cdot\overline{w_n}$ δεν είναι δύσκολο να ελέγξουμε ότι ισχύουν οι 4 ιδιότητες ενός ε.γ.
Αυτό που ίσως σας δυσκολέψει είναι ότι η προκύπτουσα σειρά συγκλίνει, ή σε απλουστευμένη διατύπωση ότι το απειροάθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty}z_n\cdot\overline{w_n}$ είναι κάποιος αριθμός στο $\mathbb{C}$ όπως θα το βρείτε στις ασκήσεις του §1.3 με επαρκή υπόδειξη.

Παράδειγμα 4

Ο χ.ε.γ. $L^2(-\infty,+\infty)$. Είτε θα περιμένετε να ωριμάσουν οι πιο εύκολες περιπτώσεις χ.ε.γ. ή, αν ανυπομονείτε, πηγαίνετε τώρα στο Παράρτημα Α.

➲ *Σημαντική ακροτελεύτια παρατήρηση*

Όπως αμέσως μπορείτε να διαπιστώσετε τα Παραδείγματα 2 και 3 (αλλά ίσως υποψιάζεσθε και το 4) δεν αφορούν δ.χ. πεπερασμένης διάστασης. Ακόμα και αν στο Παράρτημα Α θα πούμε λίγο πιο πολλά πράγματα, για αυτούς τους χώρους , στο κατά φυσιολογικό τρόπο προκύπτον ερώτημα να δοθεί ένα παράδειγμα βάσης τους **δεν** πρόκειται να δώσουμε **αυστηρή απάντηση**. Διότι τότε θα πρέπει να σας οδηγήσουμε στα βαθειά νερά της προχωρημένης Ανάλυσης πράγμα που δεν είναι ο στόχος μας!

Ασκήσεις §1.2 Διανυσματικοί Χώροι και Εσωτερικό Γινόμενο *(Inner Product Spaces)*

1) Στον γνωστό μας δ.χ. $C[-1,\ 1]$ ορίζουμε τώρα την σχέση:

$\left\langle f, g\right\rangle = \int_{-1}^{1} | f(x)+g(x)|dx$. Εξετάστε αν έχουμε ορίσει τώρα ένα ε.γ.

2) Στον δ.χ. $V = C^1\left[\alpha,\beta\right]$ (δείτε την Άσκ. 4 της §1.1) ας πάρουμε $\left[\alpha,\ \beta\right]=[-1,\ 1]$. Ορίζουμε για δύο διανύσματα-συναρτήσεις του V την σχέση:

$\left\langle f, g\right\rangle = f(0)\,g(0)+\int_{-1}^{1} f'(x)\,\overline{g'(x)}\,dx$.

Είναι το $\langle\ ,\ \rangle$ ένα ε.γ. επί του V;

3) Ας υποθέσουμε ότι στον γνωστό μας **πραγματικό** δ.χ. $C(\alpha,\beta)$ έχουμε το γνωστό ε.γ. του Παραδ. 2 της §1.2. Δείξτε ότι **δεν** έχουμε πλέον ένα ε.γ. επί του δ. **υπερχώρου** $C^0(\alpha,\beta)$.

4) Έστω V ένας δ.χ. και δύο δ.υ. αυτού V_1 και V_2. Εξετάστε αν, όταν $V = V_1 \oplus V_2$ και $\langle\ ,\ \rangle_1$ $\langle\ ,\ \rangle_2$ είναι, αντίστοιχα ε.γ. επί των δύο αυτών δ.υ. τότε το $\langle\ ,\ \rangle_1 + \langle\ ,\ \rangle_2$ είναι ε.γ. επί του V.

§1.3 Η έννοια της Στάθμης και οι δ.χ. με Στάθμη *(Norm & Normed Spaces)*

Αντί του όρου **στάθμη** στην ελληνική βιβλιογραφία κυρίως της λεγομένης Συναρτησιακής Ανάλυσης αλλά μερικές φορές και της Γενικής Τοπολογίας συναντάμε και τον όρο **νόρμα** που είναι ελληνικοποίηση του όρου **norm**. Και υπό τις δύο όμως γλωσσικές του εκδοχές η συνηθισμένη χρήση του όρου στην καθημερινότητα αντανακλά ένα μέρος της βασικής μαθηματικής ιδέας που υποκρύπτει ο ορισμός που ακολουθεί:

Ορισμός Στάθμης

Έστω V ένας δ.χ. επί του F. Μία συνάρτηση $f : V \to \mathbb{R}$, που θα συμβολίζουμε $\|\cdot\|$, θα καλείται στάθμη επί του V και ο δ.χ. σταθμητός χώρος, αν ισχύουν οι εξής ιδιότητές της:

1. Για κάθε $v \in V$, $\|v\| \geq 0$.
2. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$.
3. $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$, για κάθε $v \in V$ και κάθε $\alpha \in F$.
4. Για κάθε u, $v \in V$, $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$. (Η περίφημη «τριγωνική ιδιότητα»).

Ο ορισμός αυτός πρέπει να σας θυμίζει την έννοια της απόλυτης τιμής μέσω της οποίας πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών βρίσκαμε την απόσταση ενός αριθμού από το 0 ή την απόσταση μεταξύ των. Ακριβώς μία γενίκευση αυτής της ιδέας είναι και η στάθμη αυτήν όμως την φορά ως προς το $\vec{0}$ του V. Σε αυτό λοιπόν το πνεύμα μπορούμε να θεωρήσουμε για δύο διανύσματα $u, v \in V$ την απόστασή τους ως την στάθμη της διαφοράς τους $\|u - v\|$.

(*Σχόλιο*: Πολλοί συγγραφείς εισάγουν απευθείας την έννοια της απόστασής των γράφοντας $d(u,v): V \times V \to \mathbb{R}_+$, με συναφείς ιδιότητες τής συνάρτησης d που ονομάζεται μετρική επί του V, αλλά η θεωρία των μετρικών είναι μεν σημαντικό κομμάτι την Γενική Τοπολογία αλλά εκτός των στόχων του παρόντος συγγράμματος).

Παρατήρηση

Παρόλη την άμεση διασύνδεση, που θα παρουσιάσουμε μέσα από τα επόμενα παραδείγματα, μεταξύ ενός ε.γ. και μιας στάθμης, δεν πρέπει να νομίσουμε ότι κάθε σταθμητός χώρος πρέπει **αυτόματα** να θεωρείται και χ.ε.γ. ακόμα και αν όπως θα φανεί εκ της στάθμης κατασκευάζεται το «μητρικό» ε.γ. Αυτό που συμβαίνει είναι ότι συνήθως μία «καλή στάθμη», με την έννοια ότι αυτή εξυπηρετεί τις ανάγκες μας, ορίζεται μέσω ενώ ε.γ. με την βοήθεια ενός απλού τύπου (βλέπε Παράδειγμα 5).

Παράδειγμα 1

Στον δ.χ. $V = \mathbb{C}^n$ με $z = (z_1, \ldots, z_n)$ ορίζουμε $\|z\| = \sqrt{\sum_{\kappa=1}^{n} |z_\kappa|^2}$. Παίρνουμε τότε μία στάθμη που ειδικά αν περιορισθούμε στον $\mathbb{R}^n$ θυμίζει την Ευκλείδεια απόσταση (στις n διαστάσεις). Βέβαια οι 3 πρώτες ιδιότητες του ορισμού είναι προφανείς και η (4) που δεν είναι θα περιληφθεί στις αντίστοιχες Ασκήσεις με υπόδειξη. Μερικοί συγγραφείς γράφουν την εν λόγω στάθμη ως $\| \;\|_2$ και αυτό θα εξηγηθεί πολύ αργότερα, αλλά μία “πρώτη ιδέα” του γιατί δείχνουν τα αμέσως επόμενα δύο παραδείγματα.

Παράδειγμα 2

Στον ίδιο V με το Παρ. 1 ορίζουμε μία άλλη στάθμη μέσω του τύπου $\|z\|_\infty = \max\left\{|z_\kappa| \middle| 1 \le \kappa \le n\right\}$. Την $\| \ \|_\infty$ την αποκαλούμε ομοιόμορφη στάθμη. Εδώ και οι 4 ιδιότητες του ορισμών είναι προφανείς.

Παράδειγμα 3

Πάλι στον δ.χ. $V = \mathbb{C}^n$ μπορούμε να ορίσουμε μία τρίτη στάθμη μέσω του τύπου $\|z\|_1 = \sum_{\kappa=1}^{n} |z_\kappa|$. Εύκολα διαπιστώνεται ότι ισχύουν οι ιδιότητες του ορισμού μιας στάθμης.

Παράδειγμα 4

Αν $V = C[\alpha, \beta]$ και $f \in V$, ορίζουμε την $\|f\|_\infty = \max\left\{|f(x)| \middle| x \in [\alpha, \beta]\right\}$. Εύκολα διαπιστώνονται οι ιδιότητες του ορισμού της και πάλι μιλάμε για ομοιόμορφη στάθμη (γιατί;).
Ήρθε τώρα και η σειρά, όπως το υποσχεθήκαμε, να κατασκευάσουμε μία στάθμη επί οποιουδήποτε δ.χ. με εσωτερικό γινόμενο $\langle \ \rangle$.

Παράδειγμα 5

Για $v \in V$, όπου V είναι χ.ε.γ., θέτουμε $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$. Τότε έχουμε μία στάθμη! Από τις 4 ιδιότητες του ορισμού οι 3 πρώτες ικανοποιούνται αν θυμηθούμε τις αντίστοιχες ιδιότητες του ορισμού ενός ε.γ. (Κάντε το ως άσκηση για το σπίτι!) Για την 4η όμως θα χρειαστούμε μία από τις σπουδαιότερες ανισότητες στους χ.ε.γ.

Η Ανισότητα των Cauchy & Schwarz

Αν V είναι χ.ε.γ., $u, v \in V$, $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ και $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ τότε $|\langle u, v\rangle| \le \|u\| \cdot \|v\|$. (Προσοχή δεν έχουμε αποδείξει ακόμη ότι έχουμε στάθμη και άρα γίνεται μόνο χρήση του συμβολισμού).

Απόδειξη:

Αν $\langle u, v\rangle = 0$ προφανές, αν όχι (οπότε $u, v \ne \vec{0}$), θέτοντας $t = \langle u, v\rangle$ (που είναι ένας αριθμός εν γένει μιγαδικός), βλέπουμε ότι η προφανής ανισότητα $0 \le \|u - \lambda t v\|^2$, με $\lambda \in \mathbb{R}$, μετά από πράξεις (κάντε τις για εξάσκηση!) οδηγεί στην τριωνυμική ως

προς λ ανισότητα $|t|^2 \|u\|^2 \lambda^2 - 2|t|^2 \lambda + \|u\|^2 \geq 0$. Επειδή έχουμε μη αρνητικό πρόσημο για όλα τα λ (γυμνασιακή γνώση!) πρέπει η διακρίνουσά του να είναι ≤ 0. Αυτό σημαίνει $4|t|^2\left[|t|^2 - \|u\|^2\|v\|^2\right] \leq 0$ και επειδή $|t|^2 > 0 \Rightarrow |t| \leq \|u\|\|v\|$.
Επομένως θα έχουμε πράγματι στο Παρ. 5 μία στάθμη πάνω στον χ.ε.γ. V θέτοντας $\|v\| = \sqrt{<v,v>}$ αν δείξουμε την τριγωνική ανισότητα. Τώρα όμως μέσω της Ανισότητας *C-S* θα αρκεί να δείξουμε για κάθε $u,v \in V$ ότι $\sqrt{<u+v,u+v>} \leq$ $\leq \|u\| + \|v\|$ που το αφήνουμε ως άσκηση μέτριας δυσκολίας και την περιλάβαμε στο §1.3 του CD με μία γενναιόδωρη υπόδειξη. Στις Ασκήσεις του §1.3 θα δούμε πώς μέσω της Ανισότητας *C-S* και σε συνδυασμό με την τριγωνική ιδιότητα σε ένα χ.ε.γ με $\|\ \|$, που επάγεται από το ε.γ., προκύπτουν και άλλες κομψές ανισότητες που οδηγούν σε αυτά που έχουμε ήδη προαναγγείλει όπως το ότι ο ℓ_2 είναι όντως δ.χ. και ότι στο Παράδειγμα 4 του §1.2 πράγματι έχουμε ένα εσωτερικό γινόμενο.

Ας δούμε τώρα μία επίπτωση της ανισότητας *C-S* όταν χρησιμοποιήσουμε για χ.ε.γ. τον $V = C[\alpha,\beta]$ και την εκ του ε.γ. αυτού επαγόμενης νόρμας. Είναι αποτέλεσμα χρήσιμο στον Απειρ. Λογισμό Ι και όχι μόνο.

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\overline{g(x)}dx\right|^2 \leq \left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^2 dx\right)\left(\int_\alpha^\beta |g(x)|^2 dx\right).$$

Σχόλιο Από τις 3 νόρμες που ορίσαμε στα Παρ. 1, Παρ. 2 και Παρ. 3 μόνο εκείνη του Παρ. 1 προκύπτει μέσω του αντίστοιχου ε.γ. (αλλά αυτό δεν θα το αποδείξουμε). Μάλιστα επειδή $\|z\|^2 = \sum_{\kappa=1}^n |z_\kappa|^2 = \sum_{\kappa=1}^n z_\kappa \overline{z_\kappa}$ αυτό σημαίνει ότι όντως έχουμε ότι η $\|\ \|$ είναι στάθμη. Δηλαδή η Ευκλείδεια απόσταση προέρχεται από κατάλληλο εσωτερικό γινόμενο (είτε για $\mathbb{C}^n$ πρόκειται είτε για $\mathbb{R}^n$).

Ασκήσεις §1.3 Η έννοια της Στάθμης και οι δ.χ. με Στάθμη *(Norm & Normed Spaces)*

1) Στο παράδειγμα 5 της §1.3 ελέγξτε ότι πράγματι $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

2) Για τον γνωστό χ.ε.γ. $V = \mathbb{R}^n$ με την αντίστοιχη επαγόμενη στάθμη

$\|x\| = \left(\sum_{\kappa=1}^{n} (x_\kappa)^2 \right)^{1/2}$ όπου $x = (x_\kappa)$, $1 \le \kappa \le n$, δείξτε ότι:

$$\left(\sum_{\kappa=1}^{n} x_\kappa y_\kappa \right)^2 \le \left(\sum_{\kappa=1}^{n} {x_\kappa}^2 \right) \left(\sum_{\kappa=1}^{n} {y_\kappa}^2 \right).$$

Ας σημειωθεί ότι μερικοί μπορεί να θυμούνται την εν λόγω ανισότητα , από τα … σχολικά τους βιβλία, πάλι υπό την… επωνυμία Ανισότητα C–S! Τότε η ευρηματική αλλά στοιχειώδης υπόδειξη συνίστατο στο να δείξουμε ότι η διαφορά μεταξύ του δεξιού και αριστερού σκέλους μπορούσε να γραφεί ως άθροισμα τετραγώνων και μάλιστα έτσι παίρναμε και ως … bonus το πότε ακριβώς ισχύει η ισότητα.

3) Υπό το φως της Άσκ. 2, βρείτε τώρα, γενικά, για έναν οποιοδήποτε πραγματικό χ.ε.γ. V ***πότε ακριβώς*** δύο διανύσματα του, u και v, κάνουν ισότητα την Ανισότητα C–S.

4) Μπορείτε να γενικεύσετε τώρα την Άσκ. 3 και για μιγαδικό χ.ε.γ.;

5) Στο πνεύμα της Άσκησης 1 αλλά τώρα για $V = \mathbb{C}^n$ με διανύσματα $z = (z_\kappa)$, $\mathrm{w} = (\mathrm{w}_\kappa)$, $1 \le \kappa \le n$, δείξτε ότι:

α) $\left| \sum_{\kappa=1}^{n} z_\kappa \overline{w_\kappa} \right| \le \sqrt{\sum_{\kappa=1}^{n} |z_\kappa|^2} \sqrt{\sum_{\kappa=1}^{n} |w_\kappa|^2}$.

β) $\sqrt{\sum_{\kappa=1}^{n} |z_\kappa w_\kappa|^2} \le \sqrt{\sum_{\kappa=1}^{n} |z_\kappa|^2} + \sqrt{\sum_{\kappa=1}^{n} |w_\kappa|^2}$.

6) Έστω $V = C[-\pi, \pi]$ ο γνωστός χ.ε.γ. με την αντίστοιχη στάθμη. Δείξτε ότι, για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$, η συνάρτηση $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \kappa x$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα του V.

7) Στην Ευκλείδεια επιπεδομετρία μία άσκηση που, με εξαίρεση ίσως το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ή/και τον ρόμβο, μάλλον δυσκόλεψε όσους κάποτε ασχολήθηκαν μαζί της ήταν η εξής: «το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων ενός παραλληλόγραμμου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών του». Αποδείξτε τώρα το γενικευμένο ισοδύναμό της, δηλαδή ότι σε κάθε χ.ε.γ. V η επαγομένη στάθμη επαληθεύει τον λεγόμενο «***κανόνα του παραλληλογράμμου***»:

για κάθε $u, v \in V$, $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left[\|u\|^2 + \|v\|^2 \right]$.

8) Για τον δ.χ. V^{Ω} που ορίσθηκε στην Ασκ. 5 της §1.1 θεωρήστε τον δ.χ. V ως χ.ε.γ. με επαγόμενη στάθμη $\|\ \|$. (Θα μπορούσε βέβαια η $\|\ \|$ να μην ήταν επαγόμενη αλλά μία αυθαίρετα δοσμένη κατ' ευθείαν επί του V, αλλά για να μείνουμε στο πνεύμα της προσέγγισής μας κάνουμε αυτή την επιπλέον υπόθεση). Ορίζουμε ως φραγμένη μία $f \in V^{\Omega}$ αν $\|f(z)\| \leq \kappa$ για κάθε $z \in \Omega$ (όπου $k > 0$ σταθερά που εξαρτάται από την f). Δείξτε ότι το υποσύνολο των φραγμένων συναρτήσεων του V^{Ω} είναι δ. υπόχωρός του.

9) Είναι εντελώς φυσικό διαβάζοντας την θεωρία να σας προκύψει η εξής απορία: αν σε χ.ε.γ. V με μία γνωστή επαγόμενη στάθμη $\|\ \|$ εξ ενός ε.γ. $\langle\ \rangle$ που δεν γνωρίζουμε, πώς θα βρούμε το $\langle\ \rangle$; Δείξτε ότι:

α) Αν $F = \mathbb{R}$, η σχέση $\langle u,\ v\rangle = \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 = \|u\|^2 - \|v\|^2\right)$ δίνει το ζητούμενο ε.γ.

β) Αν $F = \mathbb{C}$, η σχέση είναι τώρα η

$$\langle u,\ v\rangle = \frac{1}{2}\left[\|u+v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - (1+i)\left(\|u\|^2 - \|v\|^2\right)\right].$$

§1.4 Ορθογώνια και Ορθοκανονικά Συστήματα *(Orthogonality - Orthonormality)*

Όπως μπορέσαμε και επεκτείναμε την φυσική έννοια του ε.γ. από τον συνήθη δ.χ. $\mathbb{R}^3$ σε τυχαίο δ.χ. V, είναι λογικό να μπορούμε να ορίσουμε και την **καθετότητα** στον V, που όμως πλέον δεν θα έχει την γνωστή εικόνα μίας γωνίας $\theta = 90°$, αλλά μόνο την συναφή ισοδύναμη σχέση με τον μηδενισμό του ε.γ. δύο διανυσμάτων.

Ορισμός Ορθογωνίου Συστήματος Διανυσμάτων

Σε έναν χ.ε.γ. V, με $u,v \in V$, θα λέμε ότι το u είναι κάθετο στο v, ή ότι αυτά τα δύο είναι ορθογώνια μεταξύ τους, αν $\langle u,v\rangle = 0$. Γράφουμε τότε $u \perp v$. Αν μάλιστα έχουμε μία πεπερασμένη ακολουθία $\{u_\kappa\}$, $1 \leq \kappa \leq n$ από μη μηδενικά ανά δύο κάθετα διανύσματα του V, τότε λέμε την $\{u_\kappa\}_{\kappa=1}^{n}$ ορθογώνιο σύστημα του V.

Ορισμός Ορθοκανονικού Συστήματος Διανυσμάτων

Όταν σε έναν χ.ε.γ. V έχουμε ένα ορθογώνιο σύστημα διανυσμάτων μοναδιαίας στάθμης, λέμε το σύστημα ορθοκανονικό. Επομένως με αλγεβρική γραφή έχουμε $\left\langle v_1, v_2 \right\rangle = 0$ για $i \neq j,\ 1 \leq i,\ j \leq n$ και $\left\| u_\kappa \right\| = 1$ για κάθε $\kappa,\ 1 \leq \kappa \leq n.$

Επειδή έχουμε πει πως η στάθμη γενικεύει την έννοια της απόστασης από το $\vec{0}$ του $V,$ είναι φυσικό όταν έχουμε $\|u\| = 1$ να λέμε το u διάνυσμα μοναδιαίου μήκους ή απλώς **μοναδιαίο**.

Σχόλιο του Συγγραφέα:

Στις λεγόμενες **σειρές Fourier** που όμως δεν θα αναπτύξουμε στο ανά χείρας σύγγραμμα, αν και σχετίζονται με τον **Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier** (Παράρτημα Β), καθίσταται φανερή η αξία της ύπαρξης ενός ορθοκανονικού συστήματος (όχι όμως πεπερασμένου πλήθους πια) σε μη πεπερασμένης διάστασης χώρους με ε.γ.

Επί του παρόντος, θα περιορισθούμε μόνο στην παρατήρηση ότι από ένα ορθογώνιο σύστημα $\{u_\kappa\}$ με $1 \leq \kappa \leq n,$ (αλλά ακόμα και από ένα τέτοιο με άπειρο πλήθος όρων!), μπορούμε να πάρουμε με απλή διαίρεση ένα ορθοκανονικό σύστημα αφού τα $e_\kappa = \dfrac{u_\kappa}{\|u_\kappa\|}$ **παραμένουν** ανά δύο κάθετα και επί πλέον είναι μοναδιαία (Γιατί; Αν δεν το βρείτε σχεδόν αμέσως πρέπει να ξαναδιαβάστε τις ιδιότητες ενός ε.γ.!)

Και όχι μόνο αυτό, αλλά επίσης $span\left\{e_\kappa \middle| 1 \leq \kappa \leq n\right\} = span\left\{u_\kappa \middle| 1 \leq \kappa \leq n\right\}.$ (Βλέπε τις ασκήσεις της §1.4).

Ιδού τώρα μία σημαντική ιδιότητα που έχει **κάθε** πεπερασμένο ορθογώνιο σύστημα ενός χ.ε.γ. Αφορά την γραμμική ανεξαρτησία των εν λόγω διανυσμάτων.

Θεώρημα 1

Σε έναν χ.ε.γ. $V,$ **κάθε** πεπερασμένο ορθογώνιο σύστημά του είναι γ.α.

Απόδειξη: Από την $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots \alpha_n u_n = \vec{0}$ με $\alpha_\kappa \in \mathbb{C},\ 1 \leq \kappa \leq n,$ πάρτε $\left\langle \vec{0}, u_\kappa \right\rangle = 0$ και συμπεράνατε ότι $\alpha_1 \cdot 0 + \ldots + \alpha_\kappa \left\langle u, u_\kappa \right\rangle + \alpha_{\kappa+1} \cdot 0 + \ldots + \alpha_n \cdot 0 = 0.$ Άρα, επειδή $\|u_\kappa\|^2 \neq 0,\ \alpha_\kappa = 0$ για όλα τα $\kappa.$ (Ξαναδείτε τον ορισμό της γραμμικής ανεξαρτησίας αν δεν τον θυμάστε!). Θα χρειαστούμε τώρα έναν ακόμα χειρισμό που θα χρησιμοποιηθεί για να δείξει την μεγάλη χρησιμότητα της ύπαρξης ορθοκανονικού συστήματος.

Ορισμός Συντελεστών Fourier Διανύσματος

Αν $\{e_\kappa\}$ $1 \le \kappa \le n$ (η ακόμα $1 \le \kappa \le \infty$) ένα ορθοκανονικό σύστημα ενός V χ.ε.γ. και $u \in V$ οι αριθμοί $\langle u, e_\kappa \rangle$ καλούνται ***γενικευμένοι συντελεστές Fourier*** του u ως προς το εν λόγω σύστημα.

Ιδού τώρα σε σύνοψη ένα πλήθος από χρήσιμα συμπεράσματα πριν αυτό τα ακόμα πιο “δυνατά” αποτελέσματα που αφορούν τους συντελεστές Fourier και θα παρουσιασθούν στην §1.6.

Θεώρημα 2

Αν δοθεί ένας χ.ε.γ. V και ένα ορθοκανονικό σύστημα $\{e_1, \dots, e_n\}$ εντός του V τότε:

α) Για $u, v \in span\{e_1, \dots, e_n\}$ έχουμε $\langle u, v \rangle = \sum_{\kappa=1}^{n} \langle u, e_\kappa \rangle \overline{\langle v, e_\kappa \rangle}$ (δηλαδή μόνο οι αντίστοιχοι συντελεστές Fourier αυτών των δύο διανυσμάτων έχουν σημασία στον υπολογισμό του εσωτερικού τους γινομένου)

β) $\|u\|^2 = \sum_{\kappa=1}^{n} \left| \langle u, e_\kappa \rangle \right|^2$

Η απόδειξή του α) είναι αποτέλεσμα άμεσων πράξεων.

Παρατήρηση

Αν περιορισθούμε σε ένα ορθογώνιο σύστημα $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ στο Θεώρημα 2 τότε έχουμε για κάθε σύνολο αριθμών $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ την ιδιότητα (μετά από πράξεις) $\left\| \sum_{\kappa=1}^{n} \alpha_\kappa u_\kappa \right\|^2 = \sum_{\kappa=1}^{n} |\alpha_\kappa|^2 \|u_\kappa\|^2$ που μπορεί να θεωρηθεί γενίκευση του πυθαγορείου θεωρήματος. Αυτό το αποτέλεσμα σε συνδυασμό με το α) οδηγούν στην απόδειξη του 2 β).

Ασκήσεις §1.4 Ορθογώνια και Ορθοκανονικά Συστήματα *(Orthogonality - Orthonormality)*

1) Γενικεύοντας την συνήθη γεωμετρική έννοια της γωνίας από τον Ευκλείδειο $\mathbb{R}^3$ σε οποιονδήποτε χ.ε.γ. V, ονομάζουμε γωνία θ των $u,\ v \neq \vec{0}$ εντός του V τον αριθμό θ για τον οποίο $\cos\theta = \dfrac{\langle u,\ v\rangle}{\|u\|\|v\|}$ με $\|\ \|$ την επαγόμενη στάθμη. Βρείτε την γωνία των διανυσματικών συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = x$.

2) **α)** Στον γνωστό μας χ.ε.γ. $V = C[-1,\ 1]$ αποδείξτε ότι τα πολυώνυμα $\{P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3\}$ με $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \dfrac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)$, $P_3(x) = \dfrac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right)$ αποτελούν ένα ορθογώνιο σύνολο εντός του V.

β) Κανονικοποιήστε το ορθογώνιο σύνολο ώστε να προκύψει ένα ορθοκανονικό σύνολο.

3) Στον γνωστόν δ.χ. $V = C(-1,\ 1)$ αποδείξτε ότι τα πολυώνυμα $T_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$, $T_1 = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}x$ και $T_2 = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left(2x^2 - 1\right)$ αποτελούν ένα ορθοκανονικό σύνολο διανυσμάτων-συναρτήσεων αν έχουμε ορίζει ως εσωτερικό γινόμενο εντός του V το "ασυνήθιστο" $\langle f,\ g\rangle = \kappa.\tau.\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$. (Το ότι έχουμε πράγματι ένα ε.γ. είναι απλή άσκηση).

Παρατήρηση: Σημειώστε ότι στην Άσκ. 3 (και αλλού όμως, πού;), το καταχρηστικό ολοκλήρωμα, μέσω του οποίου ορίσαμε το ε.γ., το εννοούμε με την *κυρία κατά Cauchy τιμή* του γράφοντας κ.τ. (ή *PV* εκ του Principal Value), που θα πεί ότι το εκλαμβάνουμε ως $\displaystyle\lim_{\alpha\to 1}\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

4) Υπολογίστε (μέχρι τέλους!) τους γενικευμένους συντελεστές Fourier της $f(x) = x^3$ ως διάνυσμα του χ.ε.γ. $C(-1,\ 1)$ ως προς το ορθοκανονικό σύστημα της Άσκησης 3.

5) Στο πνεύμα των Ασκήσεων 3 και 4 μπορούμε πλέον να ισχυρισθούμε ότι αν

θεωρήσουμε τον δ. υποχώρο $W = span\{T_0,\ T_2\}$ του $V = C(-1,\ 1)$, δηλαδή όλα τα πολυώνυμα της μορφής $\alpha x^2 + \beta$ τότε κάθε πολυώνυμο της μορφής

$p_n(x) = \alpha_0 x^{2n-1} + \alpha_2 x^{2n-3} + \ldots + \alpha_{n-1} x \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$ έχουμε $p_n \perp W$. .

6) Σε σχέση με το πλαίσιο της Άσκ. 5, δείξτε ότι δεν υπάρχει μη μηδενικό πολυώνυμο $q\ (x) = \beta_0 x^2 + \beta_1$ κάθετο στον W.
Πάντα στο ίδιο πλαίσιο με τις Ασκ. 5 & 6, εξηγήστε σύντομα γιατί **δεν** ισχύει ότι $W^{\perp} = \{P_n | n = 1,\ 2,\ \ldots\}$.

§1.5 Ορθογώνιες Προβολές & Προσεγγίσεις *(Projections & Approximations)*

Όπως είδαμε πριν στην §1.4 σε έναν χ.ε.γ. V με εντός του ένα ορθογώνιο σύστημα $\{e_1,\ldots,e_n\}$ (μπορεί το $n \to +\infty$ αλλά δεν θα ασχοληθούμε ακόμα με αυτό) αν $u \notin sp\{e_1,\ldots,e_n\}$ τότε δεν μπορεί το u να γραφεί ως $\sum_{\kappa=1}^{n} \langle u, e_\kappa \rangle e_\kappa$.

Ακόμα και σε αυτήν όμως την περίπτωση οι γενικευμένοι συντελεστές Fourier μπορεί να αποδειχθούν χρήσιμοι εκκινώντας πρώτα από τον εξής ορισμό:

Ορισμός Ορθογώνιας Προβολής

Έστω V ένας χ.ε.γ. $u \in V$ και $W = spa\{e_1,\ldots,e_n\}$, όπου $\{e_k, 1 \le \kappa \le n\}$ ένα ορθοκανονικό σύστημα του V.

Το διάνυσμα $\tilde{u} = \sum_{\kappa=1}^{n} \langle u, e_\kappa \rangle e_\kappa$ το καλούμε ορθογώνια προβολή του u επί του W (ως γνωστόν το W είναι διανυσματικός υποχώρος με $\dim W = n$, αφού έχουμε δει ότι τα $\{e_k\}$ είναι γ.α.). Ισχύει για οποιονδήποτε χ.ε.γ. V και πεπερασμένο ορθοκανονικό του σύστημα, το εξής σημαντικό θεώρημα – "εγγύτητας και υπολογισμού αυτής", όπως θα λέγαμε σε χαλαρή διατύπωση, κάτι που εξηγεί και το περιεχόμενου του ορισμού που δώσαμε πιο πριν:

Θεώρημα 1

Για κάθε $u \in V$,

α) $\langle u-\tilde{u}, w\rangle = 0$ για κάθε $w \in W$.

β) $\|u-w\|^2 = \|u-\tilde{u}\|^2 + \|\tilde{u}-w\|^2$, για κάθε $w \in W$.

Σχόλια:

i. Το μέρος (α) λέει ότι $u-\tilde{u} \perp w$ για κάθε $w \in W$ που συνοπτικά γράφεται σε μερικά συγγράμματα ως $u-\overline{u} \perp W$.

ii. Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση με (εκτενή υπόδειξη!) στις Ασκήσεις .

iii. Αν την στάθμη $\|u-v\|$ για u,v σε δ.χ. V εφοδιασμένο με στάθμη $\| \ \|$, την ονομάσουμε απόσταση μεταξύ των u και v Δείτε τώρα και παλαιότερες αναφορές στις προηγούμενες ενότητες του Κεφ. Ι, οπότε είναι εύκολη άσκηση να ελέγξετε τις 4 ιδιότητες της απόστασης από τις αντίστοιχες 4 ιδιότητες τις στάθμης.

Όλα τα πιο πάνω έχουν μεγάλη σημασία όταν θέλουμε να βρούμε εκείνο το διάνυσμα του W που είναι το εγγύτερο προς το δοθέν u σε χ.ε.γ. V με $\{e_k\}, 1 \le \kappa \le n$ ορθοκανονικό σύστημα του V και $W = span\{e_1,\ldots,e_n\}$. Όπως θα έχετε ήδη μαντέψει η απάντηση έχει εμμέσως δοθεί από το Θεώρημα 1.
Έχουμε λοιπόν τώρα:

Θεώρημα 2

Το **εγγύτερο** στο u διάνυσμα του W είναι το $\tilde{w}$, υπό την έννοια $\|u-\tilde{u}\| \le \|u-w\|$ για κάθε $w \in W$.

Απόδειξη: Κατ' ευθείαν από το Θεώρημα 1 b).

$\|u-w\| \ge \|u-\tilde{u}\|$ με "=" αν και μόνο αν $w = \tilde{u}$.

Παρατηρήσεις:

i) Προφανώς αν $u \in W$ τότε $u = \tilde{u}$.

ii) Αν στο Θεώρημα 1 (b) έχουμε για $w = 0$ τότε $\|u\|^2 = \|u-\tilde{u}\|^2 + \|\tilde{u}\|^2$. Με βάση αυτή την παρατήρηση και αφού $\|u\|^2 \ge \|\tilde{u}\|^2$ καταλήγουμε (χωρίς άλλη υπόδειξη)

στις Ασκήσεις του CD, στην $\|u\|^2 \geq \sum_{\kappa=1}^{n} \left|\langle u, e_\kappa \rangle\right|^2$. Δείτε επίσης και το Θεώρημα 1 του §1.6.

Ας κάνουμε χρήση του Θεωρήματος 2 σε μία συγκεκριμένη περίπτωση:

Παράδειγμα 1

(α) Έστω $V = C[-1,1]$ ο δ.χ. εφοδιασμένος με το ε.γ. $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx.$

Τότε η επαγόμενη στάθμη θα είναι η $\|f\| = \left[\int_{-1}^{1} f^2(x)dx\right]^{1/2}$. Αν πάρουμε τα διανύσματα-συναρτήσεις 1 και x τότε $w = span\{1, x\} = \{\alpha + \beta x | \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$, δηλαδή παίρνουμε όλα τα πρωτοβάθμια πολυώνυμα.
Αν δοθεί λοιπόν μια $f \in V$ πώς θα βρούμε το πρωτοβάθμιο πολυώνυμο το εγγύτερο στην f; Σε αλγεβρική διατύπωση, θα ψάξουμε να βρούμε τις τιμές των $\tilde{\alpha}$ και $\tilde{\beta}$ για τις οποίες $\left\|f - \left(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}x\right)\right\| \leq \left\|f - (\alpha + bx)\right\|$ για κάθε $x \in [-1, 1]$ και κάθε $a, b \in \mathbb{C}$. Αυτομάτως θα έχουμε λύσει το πρόβλημα αν βρούμε ένα ζεύγος διανυσμάτων-συναρτήσεων e_1, e_2 του V που να είναι κάθετα μεταξύ τους και μοναδιαία και $W = span\{e_1, e_2\}$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $\left\|\frac{1}{\sqrt{2}}\right\| = \left\|\sqrt{\frac{3}{2}}x\right\| = 1$ και ότι $\frac{1}{\sqrt{2}} \perp \frac{\sqrt{3}}{2}x$. (Γιατί; Αν δεν το απαντήσετε με σχετική άνεση μείνετε στην §1.5 μέχρι να το ξεκαθαρίσετε!).
Άρα, από το Θεώρημα 2, έχουμε αμέσως ότι πρέπει να πάρουμε $\tilde{\alpha} = \langle f, e_1 \rangle$ και $\tilde{b} = \langle f, e_2 \rangle$ δηλαδή $\tilde{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1} f(x)dx$ και $\tilde{\beta} = \sqrt{\frac{3}{2}}\int_{-1}^{1} xf(x)dx.$

(β) Φτιάξτε τώρα **μία δικιά ας άσκηση** παίρνοντας π.χ. $f(x) = \cos(\pi x/2)$, ή μία άλλη με εύκολες αντίστοιχες δύο ολοκληρώσεις για να δείτε τι παίρνετε ή επισκεφθείτε πρώτα το μέρος (γ) που ακολουθεί!

(γ) Για να έχουμε μία ακόμα πιο συγκεκριμένη κατάληξη εφαρμογής των γενικευμένων συντελεστών Fourier ας πάρουμε $f(x) = x^2$. Τότε $\tilde{\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ και $\tilde{\beta} = 0$

(γιατί;) άρα $\tilde{x}^2 = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ (όχι γνήσιο πρωτοβάθμιο πολυώνυμο), ενώ αν πάρουμε $g(x) = x^3$ έχουμε το αντίστοιχο $\tilde{\alpha} = 0$ (γιατί;) και $\tilde{\beta} = \dfrac{\sqrt{6}}{5}$ δηλαδή $\tilde{x}^3 = \dfrac{3}{5}x.$

Παράδειγμα 2 **Το Διάνυσμα του Διακριτού Μετασχηματισμού Fourier**

Όσοι είστε αποφασισμένοι να φτάσετε μέχρι και το **Παράρτημα Β** καλόν είναι να θυμηθείτε τότε να διαβάσετε πάλι αυτό το παράδειγμα! Στον χ.ε.γ. $\mathbb{C}^N$ του Παραδείγματος 1 της §1.2 ορίζουμε το εξής πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων-γραμμών $\{u_\kappa | \kappa = 0,1,\ldots, N-1\}$, με $u_\kappa = \left(1, e^{-2\kappa\pi \boldsymbol{i}/N}, \ldots, e^{-2\kappa\pi(N-1)\boldsymbol{i}/N}\right)$. Για παράδειγμα όταν $N = 2$, τότε $u_0 = (1, 1)$, $u_2 = \left(1, e^{-4\pi \boldsymbol{i}/N}\right)$.

Μπορείτε να ελέγξετε αμέσως ότι $\langle u_\kappa, u_m \rangle = 0$ για $\kappa \neq m$, $0 \leq \kappa, m \leq N-1$ (με N τυχαίο φυσικό σταθερό). Συμβουλευτείτε και τις (xiii), (xv) της §0.3 για όλο το Παράδειγμα 2. Εύκολα ελέγχετε επίσης για την επαγόμενη στάθμη ότι $\|u_\kappa\| = \sqrt{N}$. Στις ασκήσεις της §1.5 σας ζητάμε να δείξετε ότι κάθε $u \in \mathbb{C}^N$ γράφεται ως $\dfrac{1}{N}\sum_{\kappa=0}^{N-1} \langle u, u_\kappa \rangle u_\kappa$. (Ακολουθείστε την υπόδειξη).

Υπάρχει βέβαια μία "τεχνητή ευκολία" στις δύο περιπτώσεις που σας παρουσιάσαμε στο Παράδειγμα 1(γ), αφού τα αναγκαία e_1, e_2 ήταν μόνο δύο και προσδιορίζονται εύκολα: μπορούμε να βάλουμε $v_1 = \kappa, v_2 = \lambda x$ και αφού βρούμε πότε $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ μέσω μίας απλής ολοκλήρωσης θα πάρουμε $e_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|}$ και $e_2 = \dfrac{v_2}{\|v_2\|}$ όπου τα $\|v_1\|$, $\|v_2\|$ είναι πάλι δύο ορισμένα ολοκληρώματα εύκολα στον υπολογισμό τους. Φαντασθείτε όμως αν ζητάγαμε για W το σύνολο των n-βάθμιων πολυωνύμων δηλαδή $w = sp\{1, x, \ldots, x^n\}$ και μία ορθοκανονική βάση αυτού του δ. υποχώρου.

Ευτυχώς υπάρχει ένας στέρεος και εύχρηστος αλγόριθμος που επιτρέπει από ένα σύνολο γ.α. διανυσμάτων $\{v_1, \ldots, v_n\}$ να πάρουμε ένα ορθοκανονικό σύστημα $\{e_1, \ldots, e_n\}$ με $span\{e_1, \ldots, e_n\} = span\{v_1, \ldots, v_n\}$ και αυτό οποιονδήποτε χώρον ε.γ.

Έχουμε λοιπόν το:

Θεώρημα του Αλγορίθμου των Gram & Schmidt

Βήμα 1: Έχουμε $v_1 \neq \vec{0}$. Ορίζουμε $e_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|}$.

Βήμα 2: Έστω $W_1 = span\{e_1\}$. Θεωρούμε την ορθογώνια προβολή $\tilde{v}_2$ του v_2 επί του W_1 και άρα $v_2 - \tilde{v}_2 \perp e_1$ (γιατί;) και $v_2 - \tilde{v}_2 \neq 0$ (γιατί;). Μην ξεχνάτε ότι το $\{v_1, v_2\}$ αποτελείται από διανύσματα που είναι γ.α. Άρα ορίζεται το $e_2 = \dfrac{v_2 - \tilde{v}_2}{\|v_2 - \tilde{v}_2\|}$. Εύκολα ελέγχετε ότι $e_2 \perp e_1$ και ασφαλώς $\|e_2\| = 1$. Επίσης $span\{e_1, e_2\} = span\{v_1, v_2\}$ (γιατί; Θεωρήστε τα όλα ως ασκήσεις που δεν χρειάζονται όμως καν υπόδειξη)

Το κ-βήμα: Αν $W_{\kappa-1} = span\{e_1, \ldots, e_{\kappa-1}\}, \kappa \geq 2$ και $\tilde{v}_\kappa$ η ορθογώνια προβολή του v_κ επί του $W_{\kappa-1}$ ομοίως έχουμε $v_\kappa - \tilde{v}_\kappa \perp W_{\kappa-1}$, $v_\kappa - \tilde{v}_\kappa \neq \vec{0}$ (γιατί;) και άρα αν $e_\kappa = \dfrac{v - \tilde{v}_\kappa}{\|v - \tilde{v}_\kappa\|}$ έχουμε πάλι τις ίδιες ιδιότητες με όλα τα $e_1, \ldots, e_{\kappa-1}$ και φυσικά $span\{e_1, \ldots, e_\kappa\} = span\{v_1, \ldots, v_\kappa\}$. Η διαδικασία εξαντλείται όταν φτάσουμε στο $\kappa = n$.

Παρατήρηση

Αφήσαμε **ως άσκηση προπόνησης** την ανάγκη να εκφράσει ο αναγνώστης κάθε $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \ldots, \tilde{u}_\kappa$ μέσω των γενικευμένων συντελεστών Fourier.

Ασκήσεις §1.5 Ορθογώνιες Προβολές & Προσεγγίσεις *(Projections & Approximations)*

1) Εύκολα διαπιστώνεται ότι τα διανύσματα-στήλες $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ και $u_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. είναι γ.α. εντός του δ.χ. $\mathbb{R}^3$ με το συνηθισμένο ε.γ. Μέσω της διαδικα-

σίας Gram & Schmidt κατασκευάστε εκ του $\{u_1, u_2, u_3\}$ μία ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$, $\{e_1, e_2, e_3\}$, με $e_1 = u_1$.

2) ***Αποδείξτε*** το Θεώρημα 1 της ενότητας §1.5

3) Έστω $V = C[-1, 1]$ ο γνωστός μας γ.χ. με το γνωστό ε.γ. Προφανώς το σύνολο των διανυσμάτων-συναρτήσεων $\{1, x, ..., x^n\}$ είναι γ.α. εντός του V για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θέλει βέβαια λίγη προσοχή ***να μην νομίζετε*** ότι η σχέση $\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot x + ... + \alpha \cdot x^n = \vec{0}$ (όπου $\vec{0}$ η συνάρτηση $0(x) = 0$ για κάθε x) οδηγεί σε… αναζήτηση του x. Επομένως αν $W = span\{1, ..., x^n\}$ έχουμε τώρα έναν $n+1-$*διάστατο* δ. υποχώρο του V. Συνεπώς το $B = \{1, x, ..., x^n\}$ είναι μία βάση του W. Καλείσθε να βρείτε μέσω της διαδικασίας Gram & Schmidt μία ορθοκανονική βάση του W που είναι και αυτός ένας χ.ε.γ.

(***Παρατήρηση***: Η άσκηση αυτή έχει «τεχνικές δυσκολίες» άνω του μετρίου και ως εκ τούτου δίνεται με πλουσιοπάροχη υπόδειξη!)

Επαναληπτικές Ασκήσεις 1ου Κεφαλαίου

1) Αποδείξτε ότι σε οποιονδήποτε σταθμητό χώρο V αν
$u, v \in V \Rightarrow \big|\|u\| - \|v\|\big| \leq \|u - v\|$.
(Τι σας θυμίζει αυτό στην πιο στοιχειώδη εκδοχή του;)

2) Στον συνήθη δ.χ. $V = \mathbb{R}^n$ είναι μάλλον προφανές ότι αν $x = (x)_{\kappa=1}^{n}$ ένα τυχαίο διάνυσμα του, οι τύποι $\|x\|_1 = \sum_{\kappa=1}^{n} |x_\kappa|$ και $\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq \kappa \leq n} |x_\kappa|$ εισάγουν ***στάθμες*** επί του V (Γιατί;).
Δείξτε ότι $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x_\infty\|$.

3) Η σημασία της (μάλλον απλής) Άσκ. 2 έγκειται στο ότι έχουμε αμέσως το συμπέρασμα ότι η «σύγκλιση μίας ακολουθίας διανυσμάτων» (ως προς τη νόρμα) εντός του V αν ισχύει για την $\| \ \|_\infty$ ισχύει και για την $\| \ \|_1$ και τανάπαλιν. (Γιατί;) Μία τέτοια κατάσταση περιγράφεται σε γενικότερους σταθμητούς χώρο με τον όρο ***ισοδύναμες στάθμες***.

4) Όπως ήδη έχει οριστεί ο ℓ^2 σε προηγούμενα παραδείγματα ή/και ασκήσεις έτσι ορίζουμε τους χώρους $\ell^1(\mathbb{N})$ και $\ell^\infty(\mathbb{N})$ ως τα σύνολα των πραγματικών ακολουθιών $\{x_\kappa\}_{\kappa=1}^\infty$ με την ιδιότητα, αντίστοιχα, $\sum_{\kappa=1}^\infty |x_\kappa| < \infty$ και $\sup_{1\le\kappa\le n}\{|x_\kappa|\} < \infty$. Με τις κλασσικές πράξεις πρόσθεσης ακολουθιών ("όρο με όρο") και πολλαπλασιασμού αριθμού επί ακολουθία (πολλαπλασιασμός κάθε όρου) έχουμε δύο δ.χ. (Γιατί;). Οι σειρές που συγκλίνουν, όπως εξηγήθηκε πιο πάνω, ορίζουν επί αυτών των δ.χ. από μία στάθμη αντίστοιχα. (Γιατί;)

5) Δίνεται ο $V = C^2[-\pi, \pi]$, δηλαδή το σύνολο των $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ με τις δεύτερες παραγώγους τους να υπάρχουν στο αντίστοιχο Π.Ο και να είναι συνεχείς. Με την συνήθη δομή ενός δ.χ., όπως κάναμε με τους συναρτησιακούς χώρους C^0, C και C^1, καθίσταται δ.χ. (Γιατί;). Αν για $f, g \in V$ ορίσουμε την σχέση $\langle f, g\rangle = f(-\pi)g(-\pi) + \int_{-\pi}^{\pi} f''(x)g''(x)dx$ ελέγξτε αν έχουμε τώρα έναν χ.ε.γ.

6) Έστω V ο χ.ε.γ. που ορίσθηκε στο Παράδειγμα 2 της §1.2.

α) Βρείτε τις σταθερές α, β, γ έτσι ώστε το $q(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + x^3$ να είναι ορθογώνιο ως προς όλα τα $p_\kappa(x)$, $\kappa = 0, 1, 2$ όπως ορίσθηκαν στην Άσκηση 2(α) της §1.4.

β) Κανονικοποιήστε τώρα το $q(x)$ και συγκρίνατέ το με το $P_3(x)/\|P_3(x)\|$ της Άσκ 2 (β).

7) Αν $u = \{u_\kappa\}_{\kappa=1}^\infty \in \ell^1(\mathbb{N})$ και $v = \{v_\kappa\}_{\kappa=1}^\infty \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, δείξτε ότι $\sum_{\kappa=1}^\infty u_\kappa v_\kappa < \infty$.

8) Στην Άσκηση 3 μιλήσαμε γενικά και αόριστα για «σύγκλιση ακολουθίας διανυσμάτων εντός σταθμητού χώρου», αφήνοντας τον αναγνώστη πιθανόν με την (εσφαλμένη!) εντύπωση ότι είναι μία απλή γενίκευση αυτών που γνωρίζει από την συνήθη σύγκλιση μίας ακολουθίας αριθμών (πραγματικών ή μιγαδικών). Επειδή όμως δεν είναι τόσο απλά τα πράγματα και χωρίς να έχουμε σκοπό να τον μυήσουμε στην θεωρία των Μετρικών Χώρων, δίνουμε ένα νέον ορισμό, που ούτως ή άλλως θα έπρεπε να είχε ήδη εισαχθεί και στους χ.ε.γ. όταν μιλάγαμε για την **διάκριση μεταξύ κλειστότητας και πληρότητας** στα απειροσύνολα των διανυσμάτων. Τον δίνουμε όμως τώρα, μέσω των Επαναληπτικών Ασκήσεων, διότι ο αναγνώστης θα έχει ήδη από το Κεφάλαιο 1 αποκτήσει κά-

ποια τριβή (αν όχι μαθηματική ωριμότητα!) σε σχέση με τις «αφηρημένες» γενικεύσεις.

"Απλοϊκός" Ορισμός Ακολουθίας Cauchy

Σε έναν σταθμητό χώρο V μία ακολουθία διανυσμάτων $\{u_\kappa\}_{\kappa=1}^{\infty}$ ονομάζεται Cauchy αν η $\|x_m - x_n\|$ έρχεται ***όσο πιο κοντά στο 0 θέλουμε μετά από έναν ορισμένο δείκτη*** (δηλαδή μετά από κάμποσους όρους της).

Παρατήρηση

Δυστυχώς δεν μπορούμε τώρα να μην δώσουμε τον ***αυστηρό*** «εψιλοντικό» λεγόμενο ορισμό της, ζητώντας από όσους αναγνώστες έχουν μία σχετική φοβία να την τιθασεύσουν κάπως ή, εν ανάγκη, ας τον παραλείψουν. Ούτως ή άλλως πάντως οι φοιτητές των Μαθηματικών Τμημάτων και μερικών Τμημάτων Φυσικής ή/και Πολυτεχνείων θα «σκοντάψουν» πάνω του στο μάθημα Πραγματική Ανάλυση/Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ :

Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ (που φυσικά εξαρτάται από το ε) έτσι ώστε όταν $n \geq n_0$ και $m \geq n_0 \Rightarrow \|x_m - x_n\| \leq \varepsilon$.

Σας ζητάμε τώρα, με βάση τις ιδιότητες της στάθμης, να δείξετε ότι σε **κάθε** χώρο V με (ακόμα και συνήθη) στάθμη, αν $\lim_{\kappa\to\infty}\|v_\kappa - v\| = 0$, δηλαδή η $\{v_\kappa\}_{\kappa=1}^{\infty}$ συγκλίνει σε $v \in V$, αυτή είναι ακολουθία Cauchy αλλά **το αντίστροφο δεν ισχύει**! Δηλαδή μπορεί μία ακολουθία διανυσμάτων να είναι Cauchy αλλά να μην συγκλίνει εντός του V. (Επειδή και εδώ η δυσκολία είναι άνω του μετρίου θα δοθεί μία εκτενής υπόδειξη!)

Παράρτημα Γ

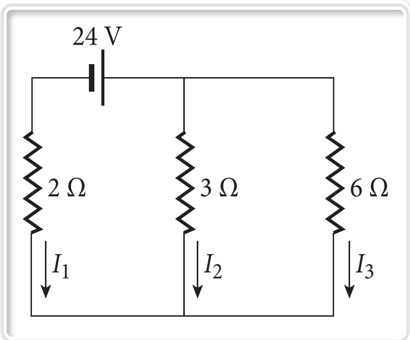
Ειδικές Εφαρμογές της Γραμμικής Άλγεβρας

Εισαγωγή

Δίνουμε 5 μόνο περιοχές εφαρμογών των τεχνικών της Γραμμικής Άλγεβρας που μέχρι τώρα συναντήσαμε, ως ένα μικρό δείγμα του μεγάλου ψηφιδωτού εφαρμογών που υπάρχει! Οι δύο πρώτες εξ αυτών είναι σχετικά απλές (και δανεισμένες με μία ελαφρά παραλλαγή από τον ιστότοπο http://www.intmath.com/matrices-determinants/6-matrices-linear-equations.php), ενώ οι άλλες τρεις είναι κάπως πιο απαιτητικές. Όμως να λάβετε υπ' όψιν σας ότι αυτό το δείγμα θα εμπλουτιστεί και με άλλες εφαρμογές από την θεωρία του **Παραρτ. Δ**. (όπου παρουσιάζουμε στοιχεία από την **Αριθμητικής Γ.Α.**).
Θα παρουσιάσουμε αυτές τις εφαρμογές σε πέντε μέρη. Συγκεκριμένα, στο **Α θα** δώσουμε μία εφαρμογή στην μελέτη ενός **απλού ηλεκτρικού κυκλώματος**, στο **Β** μία εφαρμογή στην μελέτη **στατικής ισορροπίας απλής δοκού**, στο **Γ** θα μελετήσουμε μέσω πινάκων μια ειδική περίπτωση του γενικότερου **Προβλήματος των Ελαχίστων Τετραγώνων**, στο **Δ** θα αναπτύξουμε μερικές από τις πολλές τεχνικές του κλάδου που ονομάζεται **Λογισμός των Πινάκων** (**Matrix Calculus**) και, τέλος, στο **Ε** θα δώσουμε μία εφαρμογή των λεγομένων **συναρτησιακών οριζουσών (functional determinants)** στις **Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις** και μία της θεωρίας **Διαγωνιοποίησης** σε απλά **Συστήματα Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων**.

Μέρος Α

Στο κύκλωμα του σχήματος με την δεδομένη ΗΕΔ και τις Ωμικές αντιστάσεις συνδυάστε τον Πρώτο και τον Δεύτερο **Νόμο του Kirchhoff** με την μέθοδο επίλυσης γραμμικών συστημάτων μέσω των πινάκων, για να βρείτε (σε Ampere) τα **ρεύματα** I_1, I_2 και I_3.



Λύση

$-2I_1 + 3I_2 = 24 - 2I_1 + 3I_2 + 0I_3 = 24$

$\{-3I_2 + 6I_3 = 0\} \Leftrightarrow \{0I_1 - I_2 + 2I_3 = 0\} \Leftrightarrow Ax = b$,

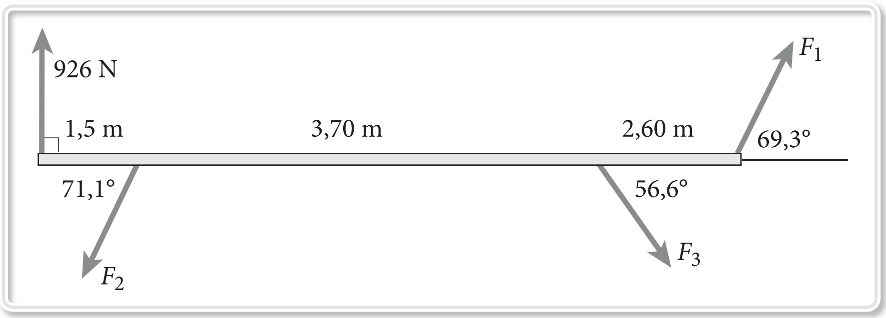
$I_1 + I_2 + I_3 = 0I_1 + I_2 + I_3 = 0$

όπου θέσαμε $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$ και $b = \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Επειδή $|A| = 12$, υπάρχει ο A^{-1} και επομένως $\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (γιατί;) $= \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Συμπεραίνουμε ότι $I_1 = -6A$, $I_2 = 4A$ και $I_3 = 2A$ και αφήνουμε στην φυσική σας «διαίσθηση» την εξήγηση του προσήμου του I_1.

Μέρος Β

Στο διάγραμμα εμφανίζεται μία **λεπτή δοκός σε κατάσταση στατικής ισορροπίας**.



Με δεδομένες τις **δυνάμεις** που ασκούνται επ' αυτής, τις **γωνίες** και τις **αποστάσεις** του σχήματος, βρείτε (σε Newton) τα **μέτρα** F_1, F_2 και F_3 των αντιστοίχων δυνάμεων. Κάντε χρήση τόσο της **οριζόντιας** όσο και της **κατακόρυφης** ισορροπίας των δυνάμεων και του μηδενισμού του (αλγεβρικού) αθροίσματος των **ροπών** τους ώστε να πάρετε ένα 3×3 **γραμμικό σύστημα**.
Επιλύστε το μέσω της θεωρίας των πινάκων.

Λύση

Κατακόρυφες δυνάμεις: (1) $F_1 \sin 69,3° - F_2 \sin 71,1° - F_3 \sin 56,6° = -926$

Οριζόντιες δυνάμεις: (2) $F_1 \cos 69,3° - F_2 \cos 71,1° + F_3 \cos 56,6° = 0$