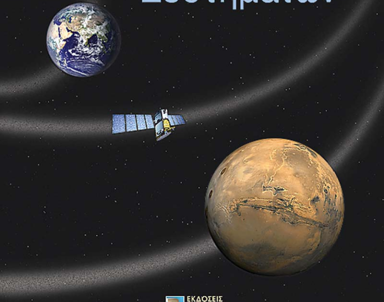
Νικόλαος Καραμπετάκης

Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων



ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό είναι αποτέλεσμα των παραδόσεων, των τελευταίων έξι χρόνων (2002-08), του μαθήματος *Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου* στο πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών του Τμήματος Μαθηματικών του Α.Π.Θ.. Απευθύνεται κυρίως σε τελειόφοιτους προπτυχιακούς φοιτητές καθώς και μεταπτυχιακούς φοιτητές των Σχολών Θετικών Επιστημών, των Πολυτεχνικών Σχολών και των Σχολών Τεχνολογικών Εφαρμογών. Μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για ανεξάρτητη μελέτη από εφαρμοσμένους μαθηματικούς και μηχανικούς.

Ο αναγνώστης θα πρέπει να έχει βασικές γνώσεις σε Γραμμική Άλγεβρα (Θεωρία Πινάκων και Γραμμικά Συστήματα), Απειροστικό Λογισμό μιας ή και περισσοτέρων μεταβλητών, Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις και Θεωρία Γραμμικών Συστημάτων. Για τον λόγο αυτό στο παράρτημα που βρίσκεται στο τέλος του βιβλίου γίνεται μια σύντομη παρουσίαση βασικών εννοιών από αυτούς τους τομείς των μαθηματικών.

Στην Ελληνική βιβλιογραφία υπάρχουν βιβλία που έχουν γραφεί μόνο για τον Λογισμό Μεταβολών και απευθύνονται κυρίως σε Μαθηματικούς ή μόνο για την Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου και απευθύνονται κυρίως σε Μηχανικούς χωρίς να μπαίνουν σε λεπτομέρειες μαθηματικής φύσεως. Στόχος του παρόντος βιβλίου είναι να χτίσει μια γέφυρα μεταξύ των δύο πολύ σημαντικών τομέων μιας και η Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου αποτελεί μια από τις σημαντικότερες εφαρμογές του Λογισμού των Μεταβολών. Υπήρξε σημαντική προσπάθεια ώστε να μην ξεφύγουμε πολύ σε μια από τις δύο κατευθύνσεις αποθαρρύνοντας κάποιους από τους αναγνώστες στην ανάγνωση του. Για τον λόγο αυτό παραλείψαμε κάποια σημαντικά κομμάτια από μαθηματικής πλευράς δίνοντας όμως αναφορές στην βιβλιογραφία για περεταίρω ανάγνωση, ενώ προσθέσαμε έναν πολύ σημαντικό αριθμό λυμένων παραδειγμάτων ώστε να γίνει πιο κατανοητή η θεωρία. Λαμβάνοντας υπόψη την μεγάλη χρήση των ηλεκτρονικών υπολογιστών σε όλες τις επιστήμες, θεωρήσαμε αναγκαίο τον εμπλουτισμό του βιβλίου με παραδείγματα τα οποία επιλύονται με την χρήση συγκεκριμένων προγραμμάτων όπως το *Mathematica* και το πακέτο του *Control Systems Professional* που αναφέρεται στην Θεωρία Ελέγχου, το *Matlab* και τα πακέτα που βρίσκονται σ' αυτό *Control Systems Toolbox* και *Simulink*, καθώς και το *Microsoft Excel* του *Microsoft Office*.

Το περιεχόμενο του βιβλίου χωρίζεται σε τρία κεφάλαια. Το *πρώτο κεφάλαιο* αποτελεί μια ιστορική εισαγωγή που ξεκινά με προβλήματα που οδήγησαν στην γέννηση του Λογισμού των Μεταβολών, συνεχίζει με τα στάδια της εξέλιξης του Λογισμού Μεταβολών και καταλήγει στην διατύπωση του προβλήματος που πραγματεύεται ο Βέλτιστος Έλεγχος δίνοντας αρκετά παραδείγματα από την σύγχρονη ζωή. Το *δεύτερο κεφάλαιο* αποτελεί μια εισαγωγική προσέγγιση της θεωρίας του Λογισμού των Μεταβολών, ξεκινώντας με βασικές έννοιες που αναφέρονται πάνω σε χώρους συναρτήσεων αλλά και στην έννοια του συναρτησιακού μιας ή και περισσοτέρων συ-

ναρτήσεων. Διατυπώνει αναγκαίες και ικανές συνθήκης ύπαρξης ακρότατου σε ένα συναρτησιακό μέσω των διαφορικών εξισώσεων Euler-Lagrange στην πρώτη περίπτωση και των συνθηκών Legendre-Jacobi στην δεύτερη περίπτωση, ενώ προτείνει έναν εναλλακτικό τρόπο επίλυσης του προβλήματος εύρεσης ακρότατου μέσω των μερικών διαφορικών εξισώσεων Hamilton-Jacobi. Στη συνέχεια μελετάει την εύρεση ακρότατης καμπύλης συναρτησιακού η οποία μπορεί να έχει ασυνέχεια στις παραγώγους ή μπορεί να ικανοποιεί κάποιους συγκεκριμένους περιορισμούς υπό την μορφή αλγεβρο-διαφορικών εξισώσεων. Τέλος επιλύεται το ισοπεριμετρικό πρόβλημα, το οποίο ανάγεται σε πρόβλημα εύρεσης ακρότατης καμπύλης συναρτησιακού που υπόκειται σε περιορισμούς. Το *τρίτο κεφάλαιο* αναφέρεται πάνω στις εφαρμογές της θεωρίας του Λογισμού των Μεταβολών στον Βέλτιστο Έλεγχο. Πιο συγκεκριμένα επιλύεται το πρόβλημα Bolza με δύο διαφορετικούς τρόπους. Ο πρώτος τρόπος βασίζεται στην θεωρία του Λογισμού των Μεταβολών ενώ ο δεύτερος τρόπος στην θεωρία του Δυναμικού Προγραμματισμού που αναπτύχθηκε από τον Richard Bellman και η οποία μας οδηγεί στην μερική διαφορική εξίσωση των Hamilton-Jacobi-Bellman. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τα αποτελέσματα αυτά στην επίλυση του γραμμικού τετραγωνικού προβλήματος (linear quadratic regulator problem) πεπερασμένου αλλά και άπειρου χρονικού ορίζοντα σε συνεχή γραμμικά συστήματα (χρονικά μεταβαλλόμενα αλλά και χρονικά αμετάβλητα). Με τις ίδιες μεθόδους μελετούμε το πρόβλημα ανίχνευσης (tracking problem). Στο τελευταίο μέρος του κεφαλαίου διατυπώνουμε την αρχή ελαχίστου του Pontryagin (αλλού αναφέρεται και ως αρχή μεγίστου όπως θα δούμε) και βλέπουμε εφαρμογές της αρχής αυτής στην επίλυση των εξής προβλημάτων: α) πρόβλημα ελάχιστου χρόνου (time optimal control problem), β) πρόβλημα ελάχιστων καυσίμων (fuel optimal control problem), γ) πρόβλημα ελάχιστης ενέργειας (energy optimal control problem), δ) πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου με περιορισμούς στα διανύσματα κατάστασης. Όπως αναφέραμε και προηγουμένως στο τέλος του βιβλίου υπάρχει *παράρτημα* με αναφορά σε βασικές μαθηματικές έννοιες καθώς και έννοιες της θεωρίας συστημάτων που χρησιμοποιούνται στο βιβλίο.

Το βιβλίο συνοδεύεται από ένα μεγάλο πλήθος λυμένων αλλά και άλυτων παραδειγμάτων τα οποία κάνουν το βιβλίο ιδανικό για ανεξάρτητη μελέτη όπως και για ασκήσεις στην τάξη. Επίσης υπάρχει ένας μικρός αριθμών ασκήσεων αυτοαξιολόγησης τις οποίες καλείται να λύσει ο αναγνώστης και στη συνέχεια να ελέγξει την λύση τους που βρίσκεται στο τέλος του κεφαλαίου. Ένα μέρος των παραδειγμάτων λύνεται με χρήση καθαρά μαθηματικών εργαλείων προκειμένου ο αναγνώστης να κάνει μια επανάληψη σε βασικά μαθηματικά εργαλεία που χρειάζεται ενώ ένα άλλο μέρος των παραδειγμάτων λύνεται με την χρήση συναρτήσεων από γνωστά πακέτα προγραμμάτων όπως *Mathematica*, *Matlab*, *Excel* για να δει ο αναγνώστης τις δυνατότητες που του δίνει η τεχνολογία για την επίλυση των προβλημάτων αυτών μιας και η επίλυση τους γίνεται εξαιρετικά δύσκολη σε πραγματικά προβλήματα.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους παλαιούς μου καθηγητές και πλέον συναδέλφους κ. Θωμά Κυβεντίδη και κ. Αντώνιο Βαρδουλάκη για τα εποικοδομητικά τους σχόλια. Τέλος, να ευχαριστήσω τις μεταπτυχιακές φοιτήτριες Χρύσα Ζιώγου, και Σοφία Καραθανάση για την τεχνική βοήθεια που μου προσέφεραν στην συγγραφή του βιβλίου.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

Η ιστορία της Θεωρίας Βέλτιστου Ελέγχου έχει τις ρίζες της, στην ανάπτυξη ενός σημαντικού κλάδου των Μαθηματικών, του Λογισμού των Μεταβολών. Για τον λόγο αυτό θα ξεκινήσουμε με μια αναφορά στο ιστορικό της γέννησης του σημαντικού αυτού κλάδου των Μαθηματικών, ενώ στη συνέχεια θα αναφερθούμε στον βασικό στόχο της Θεωρίας Βέλτιστου Ελέγχου.

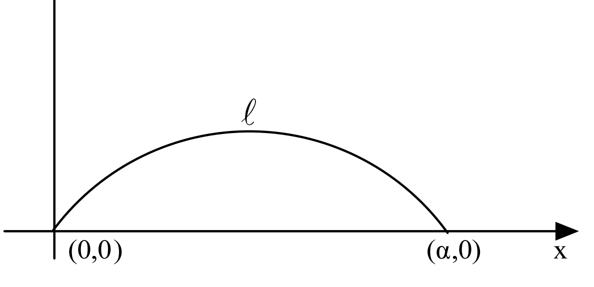
1.1 Ιστορία του Λογισμού των Μεταβολών

Ο Βιργίλιος (70-19 π.Χ.) στην *Αινειάδα* αναφέρεται σε ένα πρόβλημα που είναι γνωστό ως *πρόβλημα της Διδούς*, το οποίο σήμερα είναι γνωστό στα Μαθηματικά ως *ισοπεριμετρικό πρόβλημα*. Πιο συγκεκριμένα όταν η πριγκίπισσα Διδώ της Φοινίκης κατέπλευσε προς αναζήτηση ασύλου στα παράλια που είναι γνωστά σήμερα ως κόλπος της Τύνιδας, ζήτησε από τον τοπικό ηγεμόνα Ιάρβα, να αγοράσει τόση έκταση όση μπορούσε να «περικλείσει με τη δορά ενός ταύρου». Έπειτα από συμφωνία με τον τοπικό ηγεμόνα, η Διδώ τεμάχισε τη δορά του ταύρου σε λεπτές λωρίδες, τις έδεσε τη μια μετά την άλλη και *κύκλωσε* (circumdare) σύμφωνα με τον Βιργίλιο μια μεγάλη έκταση γης, όπου έκτισε ένα φρούριο και, κοντά του, την πόλη της Καρχηδόνας. Αυτό δηλώνει ότι η λύση του προβλήματος ήταν γνωστή εκείνη την εποχή. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής :

«Μεταξύ όλων των κλειστών επίπεδων καμπύλων με δεδομένο μήκος ℓ να βρεθεί εκείνη η οποία περικλείει το χωρίο με το μέγιστο δυνατό εμβαδό»»

ή αν υποθέσουμε ότι η Διδώ επιθυμούσε πρόσβαση στη θάλασσα :

«Μεταξύ όλων των τόξων με μήκος ℓ τα οποία περιέχονται στην ημιλωρίδα $0 \leq x \leq a$, $y \geq 0$ και έχουν καθορισμένα άκρα $(0,0)$ και $(a,0)$ να βρεθεί ένα τόξο το οποίο, μαζί με το τμήμα $y = 0, 0 \leq x \leq a$ να περικλείει ένα χωρίο με το μέγιστο δυνατό εμβαδόν.»



Το παραπάνω πρόβλημα συνεπώς ανάγεται στην εύρεση του μέγιστου της παρακάτω ποσότητας :

$$J(y) = \int_0^a y(x)\,dx \tag{1.1.1}$$

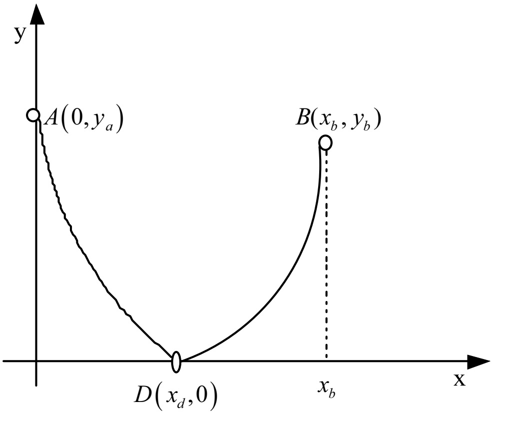
υπό τον περιορισμό

$$L(y) = \int_0^a \sqrt{1+\left(\dot{y}(x)\right)^2}\,dx = \ell \tag{1.1.2}$$

Το παραπάνω πρόβλημα είναι γνωστό από τους αρχαίους Έλληνες ότι έχει ως λύση τον κύκλο, παρόλο που έπρεπε να έρθει ο $19^{ος}$ αιώνας για να αποδειχθεί με σύγχρονες τεχνικές τις οποίες θα αναλύσουμε παρακάτω. Η $J(y)$ που δεν είναι τίποτα άλλο από ένας κανόνας αντιστοίχισης από ένα σύνολο συναρτήσεων Ω στο $\mathbb{R}$ ονομάζεται *συναρτησιακό*.

Ο πρώτος που ασχολήθηκε σοβαρά με προβλήματα βελτιστοποίησης ήταν ο Ήρων από την Αλεξάνδρεια (έζησε μεταξύ 150 μ.Χ. και 300 μ.Χ.). Ο Ήρων στο βιβλίο του με τίτλο *Κατοπτρικά* έδειξε ότι όταν το φως αντανακλάται από έναν καθρέφτη, η διαδρομή που ακολουθεί από το αντικείμενο ως τα μάτια του παρατηρητή είναι η *συντομότερη* δυνατή από οποιαδήποτε άλλη διαδρομή. Επειδή το μέσο στο οποίο διαδίδεται το φως κατά τον Ήρωνα είναι ένα, η έννοια του συντομότερου είναι ταυτόσημη με την έννοια του *γρηγορότερου*. Η μελέτη της μετάδοσης του φωτός μέσα από διαφορετικά μέσα και η διατύπωση ότι το φως ακολουθεί τη γρηγορότερη διαδρομή (που δεν είναι κατά ανάγκη και η συντομότερη από άποψη απόστασης) διατυπώθηκε αργότερα από τον Fermat (1601-1655). Η λύση μάλιστα που πρότεινε ο Fermat έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην επίλυση του βραχυστόχρονου προβλήματος που θα δούμε παρακάτω από τον Bernoulli. Το πρόβλημα του Ήρωνα μπορεί να διατυπωθεί μαθηματικά και ως εξής :

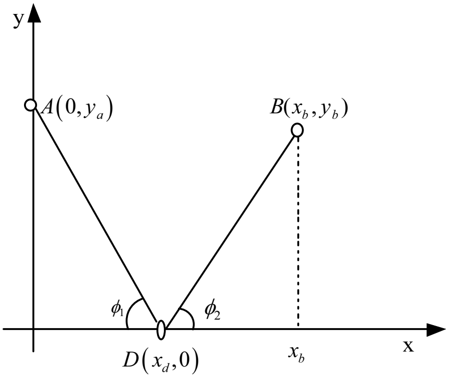
«Στο επίπεδο δίνονται τα σημεία $A(0, y_a)$ και $B(x_b, y_b)$ που κείνται προς το ίδιο μέρος μαζί με το τμήμα $y(x) = 0, 0 \le x \le x_b$. Να βρεθεί σημείο $D(x_d, 0)$ καθώς και διαδρομή ADB η οποία να είναι η ελάχιστη δυνατή που συνδέει τα σημεία A, B.»



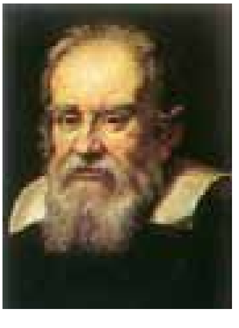
Το παραπάνω πρόβλημα συνεπώς ανάγεται στην εύρεση του ελαχίστου του παρακάτω συναρτησιακού:

$$J(y)=\int_0^{x_b}\sqrt{1+\left(\dot{y}(x)\right)^2}\,dx \tag{1.1.3}$$

με τις προϋποθέσεις $y(0)=y_a, y(x_d)=0, y(x_b)=y_b$ καθώς και την υπόθεση ότι η παράγωγος της $y(x)$ πιθανώς να μην είναι συνεχής στο σημείο $x=x_d$. Όπως θα δούμε παρακάτω και όπως έδειξε και ο Ήρωνας η συντομότερη διαδρομή είναι τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα σημεία A,D και τα σημεία D,B, ενώ το σημείο D είναι τέτοιο ώστε η γωνία πρόσπτωσης να είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης δηλαδή θα έπρεπε να ισχύει $\sin(\phi_1)=\sin(\phi_2)$.



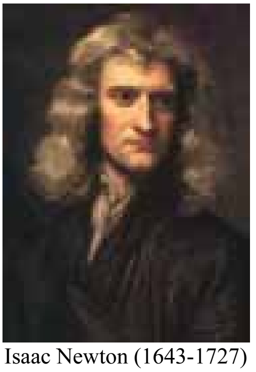
Οι αρχές του Λογισμού των Μεταβολών ξεκινούν με τη διατύπωση, από τον Pierre de Fermat (1601-1665), της αρχής ότι το φως ταξιδεύει διαμέσου μιας ακολουθίας οπτικών μέσων στον ελάχιστο δυνατό χρόνο (1662). Στη συνέχεια ο Galileo Galilei (1564-1642) διατύπωσε δύο προβλήματα τα οποία λύθηκαν στη συνέχεια με τον Λογισμό των Μεταβολών: α) το βραχυστόχρονο πρόβλημα (το οποίο θα διατυπώσουμε παρακάτω) και β) το πρόβλημα εύρεσης του σχήματος που θα πρέπει να έχει μια αλυσίδα που κρέμεται από δύο σημεία. Οι λύσεις που πρότεινε ο Galileo (ο κύκλος και η παραβολή αντίστοιχα) δεν ταυτίζονταν με τις λύσεις που δόθηκαν στην συνέχεια (η *κυκλοειδής καμπύλη* ($x(t)=r(t-\sin t)$, $y(t)=r(1-\cos t)$) και η *αλυσοειδής καμπύλη* ($y(x)=C\cosh\left(\dfrac{x+C_1}{C}\right)+C_2$) αντίστοιχα).



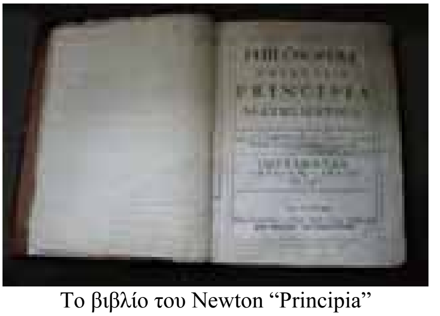
Galileo Galilei 1564-1642

Pierre de Fermat (1601-1655)

Αργότερα το 1685 ο Newton (1643-1727) στην περίφημη εργασία του στη μηχανική Philosophiae naturalis principia mathematica (ή αλλιώς Principia για συντομία), μελετά τη μορφή που θα πρέπει να έχει ένα σώμα ώστε να έχει την ελάχιστη αντίσταση κατά την κίνηση του με σταθερή ταχύτητα μέσα σε ένα υγρό. Αυτό ήταν το πρώτο πρόβλημα που διατυπώθηκε και λύθηκε σωστά, σημειώνοντας τη γέννηση της θεωρίας του λογισμού των μεταβολών. Ο Newton δεν δημοσίευσε την εργασία αυτή παρά μόνο το 1694. Παρ' όλη την σπουδαιότητα του και τη δυσκολία επίλυσης του, το πρόβλημα αυτό δεν έτυχε της αντίστοιχης προσοχής. Η γεωμετρική τεχνική απόδειξης του παραπάνω προβλήματος καθώς και οι ιδέες του Fermat χρησιμοποιήθηκαν αργότερα από τον Jacob Bernoulli στη λύση του βραχυστόχρονου προβλήματος και αργότερα από τον Euler.



Isaac Newton (1643-1727)



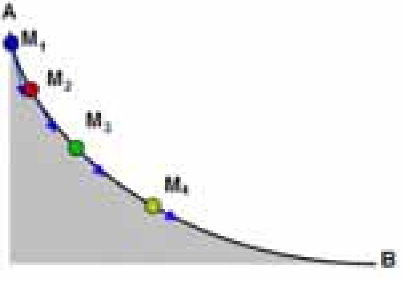
Το βιβλίο του Newton “Principia”

Το 1659 στο *Horologium oscillatorium* ο Christiaan Huygens (1629-1695) διατυπώνει και επιλύει το *ταυτόχρονο πρόβλημα* :

«Δοσμένων των σημείων A και B σε ένα κάθετο επίπεδο, να υπολογιστεί η καμπύλη η οποία έχει την ιδιότητα, κάθε σημείο M που κινείται στην διαδρομή AMB υπό την επίδραση του βάρους του και χωρίς τριβές, να φτάνει στο κατώτατο σημείο B στον ίδιο πάντα χρόνο»

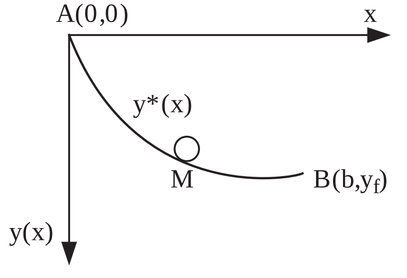
Η λύση του ταυτόχρονου προβλήματος αποδεικνύεται ότι είναι η κυκλοειδής καμπύλη. Το πρόβλημα αυτό λύθηκε αργότερα και από άλλους μεγάλους μαθηματικούς όπως ο Jacob Bernoulli (το 1690 στο Acta Eruditorum), ο Joseph Louis Lagrange και ο Leonhard Euler.

Christiaan Huygens (1629-1695)



Τον Ιούνιο του 1696, στο περιοδικό Acta Eruditorim, ο Johann Bernoulli (1667-1748) διατυπώνει το παρακάτω ανοικτό πρόβλημα :

«Δοσμένων των σημείων Α και Β σε ένα κάθετο επίπεδο, να υπολογιστεί η καμπύλη που πρέπει να διαγράψει ένα σημείο Μ που κινείται στη διαδρομή ΑΜΒ υπό την επίδραση του βάρους του, έτσι ώστε ξεκινώντας από το Α, να φτάσει στο Β στον ελάχιστο χρόνο»



Εικόνα 1.1 Η καμπύλη $y^* \in C^1[a,b]$ που ενώνει τα σημεία Α, Β.

όπου με $C^1[a,b]$ δηλώνουμε το σύνολο των συναρτήσεων με συνεχείς πρώτες παραγώγους. Ο Bernoulli διαβεβαίωσε τους αναγνώστες του περιοδικού ότι η λύση του προβλήματος είναι πολύ χρήσιμη στη Μηχανική και δεν είναι η ευθεία γραμμή αλλά μια πολύ γνωστή ευθεία για τους γεωμέτρες. Το πρόβλημα αυτό ονομάστηκε από τον Bernoulli «*βραχυστόχρονο πρόβλημα* (*brachistochrone problem*)» από τη λέξη «βράχυστος (brachistos)» που θα πει σύντομος και τη λέξη «χρόνος (chronos)».

Από την αρχή διατήρηση της ενέργειας θα έχουμε ότι η κινητική ενέργεια σε οποιαδήποτε θέση της καμπύλης $B(b, y_f)$ θα είναι ίση με τη δυναμική ενέργεια στη θέση $A(0,0)$ και άρα

$$\frac{1}{2} m u(t)^2 = m g y(x) \Rightarrow u(t) = \sqrt{2 g y(x)} = \frac{ds}{dt} \tag{1.1.4}$$

όπου $u(t)$ και m είναι η ταχύτητα και η μάζα του σώματος αντίστοιχα, ενώ g=9.81 $m/\sec^2$ είναι η σταθερά επιτάχυνσης της βαρύτητας. Εάν T είναι ο χρόνος κατάβασης και s το μήκος της καμπύλης, τότε θα έχουμε :

$$T = \int_0^T dt = \int_0^T \frac{dt}{ds} ds = \int_0^b \frac{1}{\sqrt{2gy(x)}} \sqrt{1+\dot{y}(x)^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \frac{\left(1+\dot{y}(x)^2\right)^{1/2}}{y(x)^{1/2}} dx \tag{1.1.5}$$

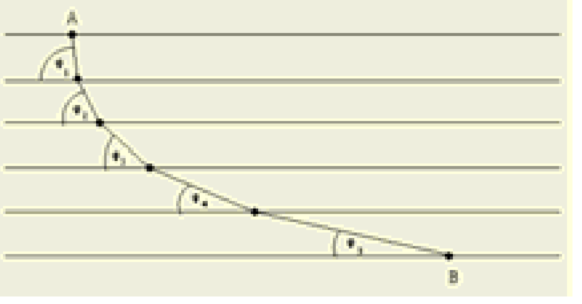
Συνεπώς η μαθηματική διατύπωση του παραπάνω προβλήματος έχει ως εξής :

Να βρεθεί η καμπύλη $y^* \in C^1[0,b]$ που ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό :

$$T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \frac{(1+\dot{y}(x)^2)^{1/2}}{y(x)^{1/2}} dx \tag{1.1.6}$$

Η λύση του βραχυστόχρονου προβλήματος, όπως και στο ταυτόχρονο πρόβλημα (όπως θα δούμε και αναλυτικά στο κεφ. §2), είναι η *κυκλοειδής καμπύλη*. Την λύση στο παραπάνω πρόβλημα έδωσαν οι : Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716) (όμοια με του Johann Bernoulli), ο Newton, ο νεότερος αδερφός του Bernoulli ο Jacob Bernoulli (1654-1705) (στηρίχτηκε στην αρχή του Huygens), ο Tschirnhaus, και τέλος ο L'Hospital.

Jacob Bernoulli (1654-1705)

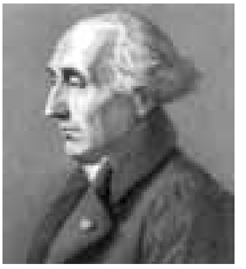


Βασιζόμενος στην αρχή ελαχίστου χρόνου του Fermat ο Bernoulli έλυσε το βραχυστόχρονο πρόβλημα με τη μέθοδο της διακριτοποίησης.

Το μνημείο του βραχυστόχρονου προβλήματος που βρίσκεται στο Groningen όπου ήταν καθηγητής ο J. Bernoulli από το 1695 έως το 1705.

O Leonhard Euler (1707-1783) που ήταν μαθητής του Bernoulli, πήρε τις μεθόδους επίλυσης συγκεκριμένων προβλημάτων όπως το παραπάνω και τις συστηματοποίησε σε μια συγκεκριμένη μέθοδο. Με την μέθοδο αυτή επίλυσε μια πολύ γενική κλάση προβλημάτων. Ο Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) ήρθε αργότερα να δείξει στον Euler με ποιο τρόπο θα μπορούσε να απαλλαγεί από τη χρήση των γεωμετρικών μεθόδων στις αποδείξεις του, κάνοντας χρήση συναρτήσεων σύγκρισης. Ο Euler ακολούθησε τις μεθόδους του Lagrange, βγάζοντας όλες τις γεωμετρικές μεθόδους από τις αποδείξεις του και ονόμασε το νέο αυτό ερευνητικό πεδίο με το όνομα που χρησιμοποιούμε σήμερα «*Λογισμός των Μεταβολών*» προς τιμή των μεθόδων μεταβολής που χρησιμοποίησε ο Lagrange.

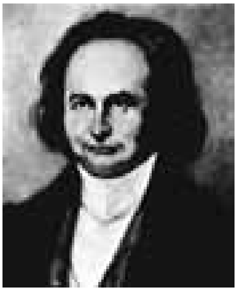
Leonhard Euler(1707-1783)



Joseph Louis Lagrange (1736-1813)

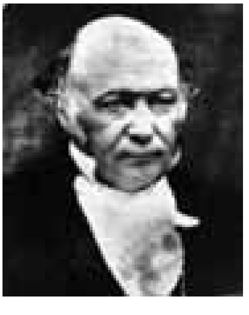
Το 1786, ο Adrien-Marie Legendre (1752-1833) προσπάθησε να διατυπώσει συνθήκες μέσω της δεύτερης μεταβολής του συναρτησιακού που να ελέγχουν αν το ακρότατο ενός συναρτησιακού δίνει ελάχιστη ή μέγιστη τιμή στο συναρτησιακό (σε αντιστοιχία με το κριτήριο της παραγώγου δεύτερης τάξης για τον έλεγχο του ακρότατου σε συναρτήσεις). Η απόπειρα αυτή του Legendre δεν στέφθηκε με επιτυχία, μιας και ο Lagrange διατύπωσε πολλές αντιρρήσεις στη μέθοδο αυτή. Ότι δεν κατάφερε ο Legendre, το ολοκλήρωσε ο Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) το 1836 (50 χρόνια αργότερα), ο οποίος διατύπωσε ικανές και αναγκαίες συνθήκες ύπαρξης ακρότατου σε ένα συναρτησιακό.

Andrien-Marie Legendre 1752-1833



Carl Gustav Jacob Jacobi 1804-1851

Την ίδια εποχή ο William Rowan Hamilton (1805-1865) διατυπώνει την αρχή ελάχιστης δράσης σε μηχανικά συστήματα, σύμφωνα με την οποία η χρονική εξέλιξη ενός μηχανικού σώματος γίνεται κατά τέτοιον τρόπο ώστε το ολοκλήρωμα της διαφοράς



Sir William R. Hamilton 1805-1865

Richard E. Bellman, 1920-1984.

μεταξύ κινητικής και δυναμικής ενέργειας να είναι στάσιμο. Η αρχή αυτή περιλάμβανε δύο μερικές διαφορικές εξισώσεις. Ο Jacobi δείχνει το 1838, ότι μόνο μια από τις μερικές διαφορικές εξισώσεις χρειάζεται και έτσι δημιουργείται η περίφημη Hamilton-Jacobi εξίσωση η οποία αποτέλεσε την βάση του Δυναμικού Προγραμματισμού που ανακαλύφθηκε από τον Richard Ernest Bellman (1920-1984) 100 χρόνια αργότερα (το 1953).

Σημαντικά βήματα στην εξέλιξη του λογισμού μεταβολών γίνονται στη συνέχεια από τον Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (1815-1897) και αργότερα από τους Oskar Bolza (1857-1942), Gilbert A. Bliss (1876-1951), Constantin Carathéodory (1873-1950) και McShane (1904-1989).

Ο Λογισμός των Μεταβολών, βρήκε πολλές εφαρμογές όπως για παράδειγμα στη *Θεωρία Morse* (Marston Morse (1892-1977)), στη *Θεωρία Ελαχίστων Επιφανειών* (2 μετάλλια Field δόθηκαν στην περιοχή αυτή στους Jesse Douglas το 1936 και Enrico Bombieri αντίστοιχα), στη *Φυσική* (πέραν της αρχής ελάχιστης δράσης του Hamilton, ο λογισμός μεταβολών χρησιμοποιήθηκε στην κβαντική μηχανική από τον Richard Feynman (1918-1988)), αλλά και στη *Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου*.

1.2 Εισαγωγή στη Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου

Ένα από τα θεμελιώδη προβλήματα του λογισμού μεταβολών είναι το εξής : Δεδομένου ενός καλώς ορισμένου συνόλου συναρτήσεων A και ενός συναρτησιακού $J: A \to \mathbb{R}$, να προσδιοριστούν οι συναρτήσεις $y \in A$ που ελαχιστοποιούν (ή μεγιστοποιούν) το $J(y)$. Έστω για παράδειγμα το διάστημα $[a,b] \subset \mathbb{R}$ και ας ορίσουμε με $C^1_{[a,b]}$ το σύνολο των συναρτήσεων που έχουν συνεχή πρώτη παράγωγο στο διάστημα $[a,b]$. Έστω επίσης

$$J: C^1_{[a,b]} \to \mathbb{R}, \quad J(y) = \int_a^b f\left(x, y(x), \dot{y}(x)\right) dx \tag{1.2.1}$$

Στόχος του λογισμού των μεταβολών είναι λοιπόν να υπολογίσει τη συνάρτηση $y \in C^1_{[a,b]}$ που ελαχιστοποιεί (ή μεγιστοποιεί) το συναρτησιακό $J(y)$. Φυσικά μπορούμε αντί για απλές συναρτήσεις από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$, να έχουμε διανυσματικές συναρτήσεις μέσα στο ολοκλήρωμα ή συναρτήσεις με περισσότερες από μια μεταβλητές και κατά συνέπεια αντί για απλό ολοκλήρωμα να έχουμε πολλαπλά ολοκληρώματα.

Ο στόχος της *Θεωρίας Βέλτιστου Ελέγχου*, είναι να προσδιορίσει τα *σήματα εισόδου* τα οποία θα εξαναγκάσουν μια *διαδικασία* να ικανοποιήσει *φυσικούς περιορισμούς* και ταυτόχρονα να ελαχιστοποιήσει (ή να μεγιστοποιήσει) κάποια *κριτήρια απόδοσης*. Έχουμε λοιπόν για παράδειγμα μια *διαδικασία* (σύστημα) η οποία περιγράφεται, αν το σύστημα είναι συνεχές, από ένα σύνολο διαφορικών εξισώσεων της μορφής :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a\left(x(t), u(t), t\right) \\ y(t) &= c\left(x(t), u(t), t\right) \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

όπου

$$x(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, u(t)=\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{pmatrix}, y(t)=\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{pmatrix} \tag{1.2.3}$$

είναι τα διανύσματα κατάστασης, εισόδου και εξόδου αντίστοιχα. Επίσης έχουμε ένα *δείκτη απόδοσης* ο οποίος συνήθως περιγράφεται από ένα συναρτησιακό της μορφής :

$$J(u)=h\left(x(t_f),t_f\right)+\int_{t_0}^{t_f} g\left(x(t),u(t),t\right)dt \tag{1.2.4}$$

Έστω ότι η είσοδος u ικανοποιεί ένα σύνολο φυσικών περιορισμών και συνεπώς ανήκει σε έναν χώρο επιτρεπτών συναρτήσεων Ω_u. Ας υποθέσουμε επίσης ότι και το διάνυσμα κατάστασης x^* ικανοποιεί ένα σύνολο φυσικών περιορισμών και συνεπώς θα πρέπει να ανήκει σε έναν χώρο επιτρεπτών συναρτήσεων Ω_x. Η Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου έχει ως στόχο να υπολογίσει μια *επιτρεπτή είσοδο* $u^* \in \Omega_u$, η οποία θα οδηγήσει το σύστημα που περιγράφεται από τις διαφορικές εξισώσεις (1.2.2), σε μια επιτρεπτή τροχιά $x^* \in \Omega_x$, η οποία θα ελαχιστοποιεί τον δείκτη απόδοσης της σχέσεως (1.2.4). Η είσοδος u^* ονομάζεται *βέλτιστος έλεγχος* (*optimal control*), ενώ το διάνυσμα κατάστασης x^* ονομάζεται *βέλτιστη τροχιά* (*optimal trajectory*).

$$J^*\left(u^*\right)=h\left(x^*(t_f),t_f\right)+\int_{t_0}^{t_f} g\left(x^*(t),u^*(t),t\right)dt \le h\left(x(t_f),t_f\right)+\int_{t_0}^{t_f} g\left(x(t),u(t),t\right)dt = J(u)$$
$$\forall u \in \Omega_u, x \in \Omega_x \tag{1.2.5}$$

Φυσικά αντί για συνεχή συστήματα μπορούμε να έχουμε διακριτά συστήματα, αντί για συναρτήσεις μιας μεταβλητής να έχουμε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών και αντί απλού ολοκληρώματος να έχουμε πολλαπλά ολοκληρώματα. Τέλος το συναρτησιακό είναι δυνατό να μην περιέχει ολοκλήρωμα. Αυτές είναι περιπτώσεις που δεν θα μελετήσουμε στον παρόν βιβλίο.

Η κύρια διαφορά λοιπόν που παρατηρούμε σε σχέση με τα προβλήματα του λογισμού μεταβολών είναι ότι οι συναρτήσεις από τις οποίες εξαρτάται το συναρτησιακό (1.2.4), ικανοποιούν κάποιες επιπλέον συνθήκες είτε με τη μορφή αλγεβρικών εξισώσεων, είτε με τη μορφή διαφορικών εξισώσεων, είτε τέλος με τη μορφή ανισοτικών σχέσεων. Ένα από τα προβλήματα που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη ενότητα και το οποίο μοιάζει με αυτά του βέλτιστου ελέγχου, είναι το βραχυστόχρονο πρόβλημα μιας και είναι το πρώτο πρόβλημα που μελετά τη δυναμική συμπεριφορά ενός σώματος (σύστημα), ενώ ταυτόχρονα ζητάει την εύρεση της βέλτιστης τροχιάς του σώματος αυτού (συναρτησιακό). Θα δούμε στη συνέχεια ένα παράδειγμα όπου φαίνεται καθαρά ο στόχος του βέλτιστου ελέγχου.

Παράδειγμα 1.1 (Kirk 1970) Θεωρείστε ένα αυτοκίνητο το οποίο κινείται.