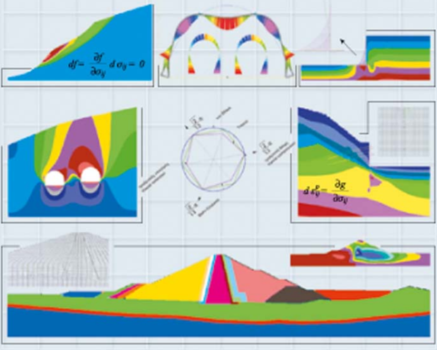
υπολογιστική

# ΓΕΩΤΕΧΝΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

## γραμμική – μη γραμμική ανάλυση

ΑΙΜΙΛΙΟΣ Μ. ΚΩΜΟΔΡΟΜΟΣ




ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

# Πρόλογος

Η συνεχής εξέλιξη της τεχνολογίας, κάτω από το πρίσμα των διογκούμενων αναγκών που επιβάλλει ο τρόπος ζωής της νέας χιλιετίας, οδηγεί στην πραγμάτωση έργων αυξανόμενης πολυπλοκότητας, κόστους και απαιτήσεων ασφαλείας. Η εξέλιξη αυτή εμφανίζεται εν γένει σε όλους τους κλάδους των επιστημών, με εντονότερη εντούτοις επίπτωση και απαιτήσεις στους τομείς της Μηχανικής.

Η πλήρης και άμεση κατανόηση πολύπλοκων έργων με σύνθετα προβλήματα, τα οποία κυριαρχούνται ταυτόχρονα από σειρά πεπλεγμένων φαινομένων, είναι αδύνατη για το ανθρώπινο μυαλό. Το γεγονός αυτό έγινε ευθύς εξ αρχής σαφές στον κόσμο των μηχανικών, οι οποίοι εφάρμοσαν την αρχή της *Ανάλυσης – Σύνθεσης* για την κατανόηση και εν συνεχεία την επίλυση των προβλημάτων. Πρώτο στάδιο της μεθοδολογίας αποτελεί η Ανάλυση κάποιου φαινομένου ή σειράς συζευγμένων φαινομένων σε απλούστερα συστατικά στοιχεία, η κατανόηση της λειτουργίας τους, και εν συνεχεία η αναζήτηση μαθηματικών μεθοδολογιών προσομοίωσης τους. Με τον τρόπο αυτό επιχειρείται η αναγωγή *φυσικών* και *συνεχών* προβλημάτων σε *μαθηματικά* και *διακριτά*.

Η επανασύνθεση των επιμέρους συστατικών στοιχείων του γενικού οδηγεί μεν και πάλι σε πολυπλοκότητα, με τη διαφορά εντούτοις ότι το πρόβλημα είναι πλέον διακριτό και μαθηματικά επιλύσιμο. Οι Αριθμητικές Μέθοδοι, με προεξέχουσα την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων (Finite Element Method), ή ακόμα την Μέθοδο Πεπερασμένων Διαφορών (Finite Difference Method), αποτέλεσαν καρπό της ανάγκης υλοποίησης της μεθοδολογίας *Ανάλυσης – Σύνθεσης* και της μετάβασης από συστήματα συνεχή σε διακριτά, μετά από κατάλληλη διακριτοποίηση. Τα επιμέρους τμήματα του προβλήματος, μετά την διακριτοποίηση και την αποσύζευξη συζευγμένων φαινομένων όπου χρειαστεί, μπορούν να προσομοιωθούν με καταστατικούς νόμους συμπεριφοράς (μαθηματικά προσομοιώματα), κατάλληλης για κάθε ειδική περίπτωση μορφής.

Θα πρέπει να διευκρινισθεί στο σημείο αυτό ότι οι επιλύσεις που προκύπτουν από την χρήση των Αριθμητικών Μεθόδων δεν αποτελούν παρά προσέγγιση της αναλυτικής

λύσης, η οποία για σύνθετα προβλήματα είναι αδύνατη. Τόσο η διακριτοποίηση όσο, και η χρήση κατάλληλου καταστατικού νόμου συμπεριφοράς, και εν γένει η προσομοίωση του προβλήματος, επηρεάζουν καθοριστικά την ακρίβεια της επίλυσης.

Οι πρώτες εφαρμογές της Αριθμητικής Ανάλυσης πραγματοποιήθηκαν κυρίως στον τομέα των κατασκευών, και οδήγησαν στην εκπόνηση προγραμμάτων Πεπερασμένων Στοιχείων υψηλών δυνατοτήτων, ήδη από την δεκαετία του 80 (αναφέρονται χαρακτηριστικά το NASTRAN, SAP, ANSYS,ADINA κ.α). Η συνεχής βελτίωση και η εξάπλωση της χρήσης τους οδήγησε στην ανάπτυξη της Υπολογιστικής Μηχανικής (Numerical Engineering) ως νέου τομέα, σε όλες τις επιμέρους ειδικότητες της Μηχανικής. Η χρήση των προγραμμάτων Γενικής Μηχανικής βρήκε εύκολα πεδίο εφαρμογής στον τομέα των κατασκευών, όπου κατά κύριο λόγο η ανάλυση, για τις συνήθεις τουλάχιστον κατασκευές, πραγματοποιείται σε γραμμική ελαστικότητα και χρήση στοιχείων μιας διάστασης.

Οι απαιτήσεις στον χώρο της Γεωτεχνικής Μηχανικής είναι αισθητά πιο σύνθετες, τόσο στη περίπτωση της αλληλεπίδρασης εδάφους-κατασκευών, όσο και στις περιπτώσεις προβλημάτων με σύζευξη μηχανικών και υδραυλικών χαρακτηριστικών, ενώ η θεώρηση του εδάφους ως τριφασικού υλικού (ημικορεσμένα εδάφη) καθιστά τα γεωτεχνικά προβλήματα πεδίο δράσης εξαιρετικά δύσκολο. Το πρόσθετο γεγονός ότι στα γεωτεχνικά προβλήματα κυρίαρχο στοιχείο αποτελεί η μη γραμμική απόκριση του εδάφους, ενώ στην απλούστερη περίπτωση επιβάλλεται η εισαγωγή του όρου των δύο διαστάσεων, οδήγησαν στην ανάγκη ανάπτυξης της Υπολογιστικής Γεωτεχνικής Μηχανικής (Numerical Methods in Geotechnics).

Αντικείμενο της Γεωτεχνικής Υπολογιστικής Μηχανικής αποτελεί η Προσομοίωση – Ανάλυση – Επίλυση προβλημάτων αλληλεπίδρασης εδάφους – κατασκευών πολυσταδιακών προβλημάτων, με μεταβλητά όρια και διαστάσεις καθώς και προβλήματα με μεταβολή υδραυλικών ή/και μηχανικών επικρατουσών συνθηκών. Χαρακτηριστικά αναφέρονται, ως μερική και μόνο ένδειξη της εφαρμογής των Αριθμητικών Μεθόδων στη Γεωτεχνική Μηχανική τα προβλήματα επιφανειακών και υπογείων εκσκαφών, ειδικών αντιστηρίξεων, σταδιακή κατασκευή επιχωμάτων σε συμπιεστά εδάφη, πρόβλεψη της επίδρασης της αύξησης της πίεσης του νερού των πόρων σε χαλαρά εδάφη σε σεισμική ή άλλη δράση, εισαγωγή του αρχικού εντατικού πεδίου.

Η αναφορά και μόνο των προβλημάτων και του αντικειμένου της Υπολογιστικής Γεωτεχνικής Μηχανικής καταδεικνύει ότι η μονομερής γνώση των Αριθμητικών Μεθόδων ή της Γεωτεχνικής Μηχανικής δεν είναι επαρκής. Απαιτείται η, σε ικανοποιητικό βαθμό, σύζευξη των δύο αντικειμένων. Σε αντίθετη περίπτωση ελλοχεύει πάντοτε ο κίνδυνος κάποια ορθή, κατά την φυσική θεώρηση, επιλογή να οδηγήσει σε αριθμητική

αστάθεια ή παρασιτική δράση. Αντίστοιχα, η ανεπαρκής γνώση και χρήση καταστατικών νόμων μη γραμμικής συμπεριφοράς συχνά οδηγεί σε επιλύσεις όπου τα κυρίαρχα στοιχεία του προβλήματος δεν λαμβάνονται υπόψη στην διαδικασία επίλυσης.

Αντικείμενο του παρόντος συγγράμματος δεν αποτελεί η πλήρης παρουσίαση όλων των συνιστωσών της Υπολογιστικής Γεωτεχνικής Μηχανικής. Θεωρείται εντούτοις απαραίτητη η παρουσίαση των βασικών αρχών της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων, καθώς επίσης και των καταστατικών εξισώσεων για την περίπτωση της γραμμικής ελαστικότητας. Στην συνέχεια επιχειρείται διείσδυση στο χώρο της μη γραμμικής ανάλυσης, των κριτηρίων και των επιφανειών θραύσης, καθώς επίσης και στη θεωρεία της Τέλειας (Perfect) και Κρατυνόμενης Ελαστοπλαστικής (Hardening Plastic) συμπεριφοράς. Ο διδακτικός, τέλος, χαρακτήρας του συγγράμματος επέβαλε τη συστηματική χρήση απλοποιημένων κατά κανόνα παραδειγμάτων.

# ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Εισαγωγή στην Μη Γραμμική Συμπεριφορά**



**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Εφαρμογές Μη Γραμμικής Συμπεριφοράς**



**ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

# ΠΙΝΑΚΑΣ ΚΥΡΙΟΤΕΡΩΝ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

| | |
|---|---|
| $a$ | παράμετρος της επιφάνειας Drucker-Prager |
| $\mathbf{a}^T$ | το ανάστροφο μητρώο του διανύσματος **a** |
| ${}^t\mathbf{a}$ | το ανάστροφο μητρώο του διανύσματος **a** (κεφ. 4) |
| $\mathbf{B}$ | το μητρώο μετασχηματισμού παραμορφώσεων |
| $c$ | συνοχή εδάφους |
| $C_c$ | συντελεστής στερεοποίησης |
| $C_r$ | συντελεστής διόγκωσης |
| $C_v$ | συντελεστής στερεοποίσης |
| $\mathbf{C}$ | μητρώο δυσκαμψίας στοιχείου |
| $\mathbf{C^e}$ | ελαστικό μητρώο δυσκαμψίας στοιχείου |
| $\mathbf{C^p}$ | πλαστικό μητρώο δυσκαμψίας στοιχείου |
| $d\varepsilon_v$ | μεταβολή πλαστικών παραμορφώσεων |
| $\mathbf{D}$ | μητρώο ευκαμψίας στοιχείου |
| $D$ | παράμετρος κράτυνσης του μοντέλου CAP |
| $e$ | λόγος κενών |
| $e_o$ | αρχικός λόγος κενών |
| $e_c$ | κρίσιμος λόγος κενών |
| $\mathbf{e}_{ij}$ | τανυστής εκτροπής παραμορφώσεων |
| $E$ | μέτρο του Young |
| $E_s$ | μέτρο συμπιεστότητας |
| $f$ | συνάρτηση επιφάνειας θραύσης κατά την ελαστοπλαστική ανάλυση |
| $F$ | συντελεστής ασφαλείας |
| $\mathbf{F}$ | διάνυσμα επικομβίων δυνάμεων |
| $g$ | συνάρτηση επιφάνειας φόρτισης κατά την ελαστοπλαστική ανάλυση |
| $G$ | μέτρο διάτμησης |

| | |
|---|---|
| $I_{zi}$ | συντελεστής κατανομής τάσεων |
| J | συμβολισμός του Ιακωβιανού πίνακα |
| K | μέτρο διόγκωσης |
| **k** | μητρώο ακαμψίας στοιχείου |
| **K** | γενικό μητρώο δυσκαμψίας |
| K | μέτρο διόγκωσης |
| $\kappa_0$ | συντελεστής ωθήσεων ηρεμίας |
| $K_a$ | συντελεστής ενεργητικών ωθήσεων |
| $K_p$ | συντελεστής παθητικών ωθήσεων |
| $N_d$ | ισοδυναμικές γραμμές |
| $N_f$ | κανάλια ροής |
| **N** | μητρώο συναρτήσεων παρεμβολής |
| $\overline{\mathbf{N}}$ | γεωμετρικές συναρτήσεις αναγωγής |
| q | παροχή |
| $r_u$ | συντελεστής ανάπτυξης πίεσης πόρων |
| $\mathbf{R}^b$ | γενικό διάνυσμα επικομβίων φορτίων λόγω βαρύτητας |
| $\mathbf{R}^c$ | "  "  "  "  επιφανειακής φόρτισης |
| $\mathbf{R}^I$ | "  "  "  "  αρχικών τάσεων |
| $\mathbf{R}^s$ | "  "  "  "  εξωτερικής φόρτισης |
| RQD | δείκτης ποιότητας βραχομάζας |
| $\mathbf{S}_{ij}$ | τανυστής εκτροπής τάσεων |
| u | πίεση πόρων |
| **u** | διάνυσμα μετακινήσεων στοιχείου |
| **U** | γενικό διάνυσμα μετακινήσεων |
| $W_i$ | συντελεστής βαρύτητας σημείου ολοκλήρωσης |
| $W_{intr}$ | εσωτερικό παραγώμενο έργο |
| $W_{extr}$ | εξωτερικό παραγώμενο έργο |

| | |
|---|---|
| $\boldsymbol{\alpha}$ | διάνυσμα γενικευμένων μετακινήσεων |
| $\gamma$ | φαινόμενο βάρος εδάφους |
| $\boldsymbol{\delta}_{ij}$ | δέλτα του Kronecker |
| $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{e}}$ | μητρώο ελαστικών παραμορφώσεων |
| $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}$ | μητρώο πλαστικών παραμορφώσεων |
| $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$ | τανυστής παραμορφώσεων |
| $\varepsilon_v$ | παραμόρφωση όγκου ($\varepsilon_v = I_{1'}$) |

| | |
|---|---|
| $\varepsilon_{\kappa\kappa}$ | η πρώτη αμετάβλητη του τανυστή των παραμορφώσεων ($=\varepsilon_v$) |
| $\varepsilon_{oct}$ | ορθή οκταεδρική παραμόρφωση ($\varepsilon_{oct}= 1/3\ \varepsilon_v$) |
| κ | συνάρτηση κράτυνσης |
| λ | τανυστής μηδενικού βαθμού - πολλαπλασιαστής πλαστικοποίησης |
| ν | συντελεστής Poisson |
| $\boldsymbol{\xi}$ | γενικευμένοι άξονες στοιχείου αναφοράς |
| **P** | διάνυσμα συναρτήσεων των βάσεων προσέγγισης |
| $\boldsymbol{\sigma}_{ij}$ | τανυστής τάσεων |
| $\sigma_{oct}$ | ορθή οκταεδρική τάση ($\sigma_{oct}= \sigma_m$) |
| $\sigma_m$ | μέση ορθή τάση ($\sigma_m= 1/3\ I_1$) |
| $\tau^e$ | σχέσεις μετατροπής για την αναγωγή πραγματικού στοιχείου σε στοιχείο αναφοράς |
| φ | γωνία εσωτερικής τριβής εδάφους |

## *1.1 Εισαγωγή*

Αντικείμενο της μεθόδου των Πεπερασμένων στοιχείων, ή ακόμη της Μεθόδου των Πεπερασμένων Διαφορών, αποτελεί κατά πρώτον η αναγωγή ενός συνεχούς συστήματος σε διακριτό. Στη συνέχεια προσδιορίζονται τα μητρώα δυσκαμψίας των επιμέρους στοιχείων και ακολουθεί η συναρμολόγηση του υπερμητρώου δυσκαμψίας. Με τον τρόπο αυτό, το φυσικό πρόβλημα προσεγγίζεται από ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων. Κύριο ζητούμενο αποτελεί η αυτοματοποίηση της διαδικασίας προσδιορισμού των γεωμετρικών παραμέτρων των στοιχείων. Τούτο μπορεί να πραγματοποιηθεί με την εισαγωγή μετασχηματισμού και αναγωγής των στοιχείων με διαφορετικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά και δεδομένη θέση στο πραγματικό σύστημα συντεταγμένων, σε κοινό στοιχείο αναφοράς (master ή reference element).

Η σύντομη παρουσίαση της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων θα αρχίσει με τη προσέγγιση συνεχών προβλημάτων, αρχικά με πολυώνυμα και στη συνέχεια με πεπερασμένα στοιχεία. Θα ακολουθήσει παρουσίαση των στοιχείων αναφοράς και του τρόπου αναγωγής των πραγματικών στοιχείων σε στοιχεία αναφοράς, με χρήση πολυωνυμικών βάσεων και συναρτήσεων παρεμβολής, των οποίων θα δοθεί και η μεθοδολογία κατάστρωσης. Το κεφάλαιο θα ολοκληρωθεί με την περιγραφή προσδιορισμού του μητρώου δυσκαμψίας ενός ομογενούς στοιχείου και την αναγωγή γενικών φορτίσεων σε επικόμβια φορτία.

Δεδομένου ότι στο κεφάλαιο αυτό γίνεται εκτεταμένη χρήση μητρώων και των αντιστοίχων συμβολισμών τους σημειώνεται ότι οι συμβολισμοί < >, { }, και [ ] χρησιμοποιούνται για να υποδείξουν διάνυσμα γραμμής, διάνυσμα στήλης και μητρώο αντίστοιχα. Εξαίρεση θα αποτελέσουν ορισμένες και μόνο εξισώσεις, όπου κρίνεται πιο λειτουργική η χρήση δεικτών i, j, k, l.

## 1.2 Προσέγγιση Συνεχούς Προβλήματος

Σε ένα φυσικό, συνεχές πρόβλημα είναι δυνατός ο ακριβής προσδιορισμός κάποιας μεταβλητής με διεξαγωγή μετρήσεων σε καθορισμένα σημεία. Ο περαιτέρω προσδιορισμός της μεταβολής της μεταβλητής σε όλο εύρος του προβλήματος μπορεί να γίνει με μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος. Για την κατάστρωση των εξισώσεων μοντελοποίησης, πολυωνυμικής κατά κανόνα μορφής, χρησιμοποιούνται οι γνωστές ακριβείς τιμές σε ορισμένα σημεία ως οριακές συνθήκες. Οι πολυωνυμικές εξισώσεις μπορούν να δώσουν τις τιμές της εξεταζόμενης μεταβλητής σε οποιοδήποτε σημείο του προβλήματος. Οι προσδιοριζόμενες τιμές εμπεριέχουν πάντα ποσοστό σφάλματος το οποίο εξαρτάται από τις πολυωνυμικές βάσεις που χρησιμοποιούνται. Η αύξηση του βαθμού των πολυωνυμικών βάσεων βελτιώνει την προσέγγιση και μειώνει το σφάλμα, προϋποθέτει εντούτοις αύξηση των σημείων στα οποία είναι γνωστή η ακριβής τιμή της προς προσδιορισμό μεταβλητής. Συγκεκριμένα ο βαθμός τους δεν μπορεί να υπερβεί τον αριθμό των σημείων όπου είναι γνωστές οι ακριβείς τιμές. Οι μεταβλητές των οποίων επιδιώκεται ο προσδιορισμός είναι τιμές τάσεων, παραμορφώσεων, μετακινήσεων, μεταβολής θερμοκρασίας, μεταβολής ροών, ή ακόμα και φυσικά μεγέθη όπως ο προσδιορισμός διαστάσεων.

Το σχετικό σφάλμα προσέγγισης μιας τιμής σε κάποια θέση δίνεται από την εξίσωση 1.1

$$e_r(x) = u(x) - u_{ex}(x) \tag{1.1}$$

όπου

$e_r(x)$ : το σφάλμα προσέγγισης
$u(x)$ : η εκτιμούμενη τιμή
$u_{ex}(x)$ : η ακριβής τιμή

Η τιμή u(x) μπορεί να προσδιορισθεί από πολυωνυμική συνάρτηση, της οποίας ο μέγιστος βαθμός εξαρτάται από τον αριθμό των σημείων στα οποία είναι γνωστή η ακριβής τιμή.

<u>Παράδειγμα 1.1 Προσέγγιση της μεταβολής ενός φυσικού μεγέθους</u>

Ας υποτεθεί ότι το πάχος μιας ξύλινης δοκού μήκους 2.0 m μετρήθηκε σε τρία σημεία ως ακολούθως:

| x | $U_{ex}(x)$ |
|---|---|
| 0 m | 22 mm |
| 1 m | 27 mm |
| 2 m | 21 mm |

Ζητείται η εκτίμηση του πάχους της δοκού σε οποιοδήποτε σημείο της.

Επιλέγεται εξίσωση προσέγγισης πολυωνυμικής μορφής δευτέρου βαθμού:

$u_{ex}(x) \approx u(x,a_1,a_2,a_3) = a_1 + a_2\,x + a_3\,x^2$

Στις θέσεις των σημείων όπου είναι γνωστή η τιμή του πάχους η εξίσωση παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$u_{ex}(x=0) = u(x=0) = a_1 = 22$
$u_{ex}(x=1) = u(x=1) = a_1 + a_2 + a_3 = 27$
$u_{ex}(x=2) = u(x=2) = a_1 + 2\,a_2 + 4\,a_3 = 21$

Οι τιμές των παραμέτρων $a_1$, $a_2$ και $a_3$ παίρνουν τις τιμές 22, 10.5 και –5.5, αντίστοιχα, και η εξίσωση προσέγγισης παίρνει την ακόλουθη μορφή

$u_{ex}(x) \approx u(x) = 22 + 10.5\,x - 5.5\,x^2$

Σε τυχόν σημείο, έστω για x=1.8 m, το αναμενόμενο πάχος της δοκού είναι 23.08 mm.

Η συνάρτηση προσέγγισης του παραδείγματος 1.1 είναι της μορφής

$$u(x) = <P>\,\{a\} \tag{1.2}$$

όπου
P : συναρτήσεις γραμμικώς ανεξάρτητες
a : γενικοί παράμετροι προσέγγισης

Στην περίπτωση που αντί των γενικών παραμέτρων προσέγγισης χρησιμοποιηθούν παράμετροι ή μεταβλητές κόμβων, η εξίσωση 1. 2. Παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$u(x) = \langle N_1(x)\ \ N_2(x)\ \ N_3(x)\ \ N_4(x) \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \langle \mathrm{N} \rangle \{ \mathrm{u_n} \} \tag{1.3}$$

όπου
N(x) : οι συναρτήσεις παρεμβολής

Στην περίπτωση χρήσης συναρτήσεων παρεμβολής, η εξίσωση προσέγγισης ορίζεται ως κομβική, κυριαρχείται δε από δύο βασικές ιδιότητες:

1. $N_j(x_i) = \begin{cases} 0 & \forall\ \mathrm{i} \neq \mathrm{j} \\ 1 & \forall\ \mathrm{i} = \mathrm{j} \end{cases}$

2. Το λάθος προσέγγισης το οποίο εκφράζεται από την εξίσωση 1.1 μηδενίζεται στις θέσεις των κόμβων

*Παράδειγμα 1.2 Κομβική Προσέγγιση τύπου Lagrange τεσσάρων σημείων*

Ας υποτεθεί τυχούσα συνάρτηση $u_{ex}(x)$ με γνωστές τιμές σε τέσσερα σημεία, στα δε υπόλοιπα σημεία οι τιμές προσεγγίζονται από την ακόλουθη εξίσωση:

$u(x)= N_1(x)\, u_1 + N_2(x)\, u_2 + N_3(x)\, u_3 + N_4(x)\, u_4$

όπου

N(x) : πολυώνυμα Lagrange $3^{ου}$ βαθμού του ακόλουθου τύπου

$$N_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)}$$

Αν οι τέσσερις θέσεις στις οποίες είναι γνωστές οι τιμές της συνάρτησης αντιστοιχούν στις τιμές $x_1$=0.5, $x_2$=1.0, $x_3$=4 και $x_4$=6, το N1 παίρνει την ακόλουθη τιμή:

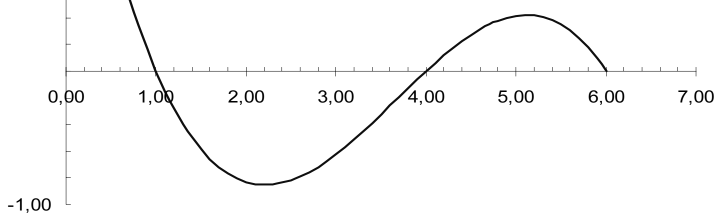
$N_1$= -1/9.625 *(x-1.0) *(x-4.0)*(x-6.0)
Η ανωτέρω εξίσωση για διάφορες τιμές του x δίνει της ακόλουθες τιμές του $N_1$:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X : | ***0.5*** | ***1.0*** | 2.0 | 3.0 | ***4.0*** | 5.0 | ***6.0*** |
| $N_1$: | ***1*** | ***0*** | -0.83 | -0.62 | ***0*** | 0.42 | ***0*** |

Είναι φανερό ότι η συνάρτηση παρεμβολής $N_1$ ικανοποιεί την πρώτη ιδιότητα (μοναδιαία τιμή στη θέση της αντίστοιχης τετμημένης, μηδενικές τιμές στις θέσεις των άλλων τετμημένων όπου είναι γνωστές οι τιμές της τυχούσας συνάρτησης, μη μηδενικές τιμές στις υπόλοιπες θέσεις). Ως συμπληρωματική άσκηση μπορεί να θεωρηθεί ο προσδιορισμός των υπολοίπων συναρτήσεων παρεμβολής και η εξέταση τήρησης της ιδιότητας 1. Η δεύτερη ιδιότητα ικανοποιείται αυτομάτως δεδομένου ότι σε κάθε σημείο με γνωστή την τιμή της συνάρτησης θα είναι:
$u(x_1)= N_1(x)\, u_1 + N_2(x)\, u_2 + N_3(x)\, u_3 + N_4(x)\, u_4= 1\, u_1 + 0\, u_2 + 0\, u_3 + 0\, u_4= u_1$

Κατ’αντιστοιχία $u(x_2)= u_2$, $u(x_3)= u_3$, $u(x_4)= u_4$

Στο σχήμα που ακολουθεί δίνεται η μεταβολή της τιμής της $N_1$ συναρτήσει της απόστασης x, εκφράζει δε πρακτικά την γραμμή επιρροής της τιμής του εξεταζόμενου μεγέθους στο σημείο x= 0,5, σε οποιοδήποτε σημείο εντός των ορίων του προβλήματος.



# 1.3 Προσέγγιση με Πεπερασμένα Στοιχεία

Κατά τη μέθοδο προσέγγισης με πεπερασμένα στοιχεία, η περιοχή ενδιαφέροντος υποδιαιρείται σε υποπεριοχές, κάθε μία εκ των οποίων αποτελεί πεπερασμένο στοιχείο $V^e$.

### *Ορισμοί*

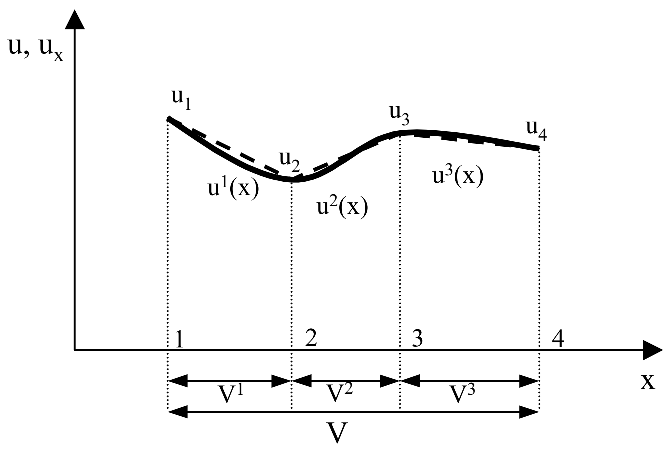
- Οι υποπεριοχές $V^e$ ονομάζονται ***στοιχεία***
- Τα σημεία όπου οι συναρτήσεις προσέγγισης παίρνουν ίδια τιμή με την ακριβή ονομάζονται ***κόμβοι παρεμβολής***
- Οι γεωμετρικές θέσεις $x_i$ των κόμβων ονομάζονται ***συντεταγμένες***

Η προσέγγιση με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων παρουσιάζει τα ακόλουθα κύρια χαρακτηριστικά:

- Η γεωμετρία κάθε στοιχείου θα πρέπει να προσδιορίζεται με αναλυτικό τρόπο.
- Οι συναρτήσεις παρεμβολής $N_i(x)$ προσδιορίζονται για κάθε στοιχείο ξεχωριστά.
- Οι εξισώσεις προσέγγισης των τιμών των κόμβων εντός μιας υποπεριοχής (στοιχείου) εξαρτώνται μόνο από τις τιμές των κόμβων του $V^e$.
- Οι συναρτήσεις προσέγγισης $u_e(x)$ είναι συνεχείς στην περιοχή κάθε στοιχείου $V^e$, ενώ παράλληλα ικανοποιούν τις συνθήκες συνεχείας ανάμεσα στα γειτνιάζοντα στοιχεία.

<u>*Παράδειγμα 1.3: Προσέγγιση μονοδιάστατου προβλήματος με χρήση πεπερασμένων στοιχείων*</u>

Στο ακόλουθο σχήμα απεικονίζεται με καμπύλη συνεχή γραμμή η ακριβής τιμή τυχαίας συνάρτησης, ενώ με εστιγμένη γραμμή δίνεται η συνάρτηση προσέγγισης πολυγωνικής μορφής.



Γεωμετρικά δεδομένα στοιχείων:
Κόμβοι: 1,2,3,4
Συντεταγμένες Στοιχείων: $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$
Πλήρης Περιοχή V: $x_1 \leq x \leq x_4$
Στοιχεία:

$V^1$: $x_1 \leq x \leq x_2$
$V^2$: $x_2 \leq x \leq x_3$
$V^3$: $x_3 \leq x \leq x_4$

**Προσδιορισμός των συναρτήσεων προσέγγισης $u^e(x)$:**

Μεταβλητές κόμβων: $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$
Συναρτήσεις Προσέγγισης **$u^e(x)$** γραμμικές κατά μήκος κάθε στοιχείου

*Στοιχείο 1 (υποπεριοχή $V^1$)*

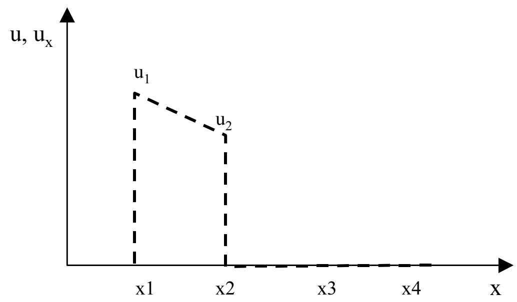
$U^1(x) = N_1 u_1 + N_2 u_2$

όπου $N_1$ και $N_2$ γραμμικές συναρτήσεις που τηρούν τις δύο βασικές ιδιότητες της παραγράφου 1.2

$$N_1 = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \qquad N_1(x_1) = 1 \qquad N_1(x_2) = 0$$

$$N_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad N_2(x_1) = 0 \qquad N_2(x_2) = 1$$

$$x_1 \leq x \leq x_2$$



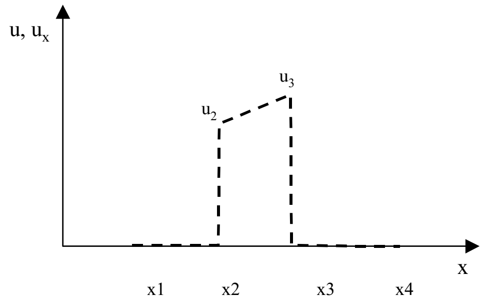

*Στοιχείο 2 (υποπεριοχή $V^2$)*

$U^2(x) = N_1 u_2 + N_2 u_3$

$$N_1 = \frac{x - x_3}{x_2 - x_3} \qquad N_1(x_2) = 1 \qquad N_1(x_3) = 0$$

$$N_2 = \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} \qquad N_2(x_2) = 0 \qquad N_2(x_3) = 1$$

$$x_2 \leq x \leq x_3$$



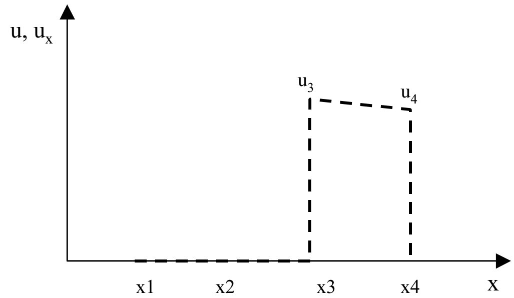

*Στοιχείο 3 (υποπεριοχή $V^3$)*

$U^3(x) = N_1\, u_3 + N_2\, u_4$

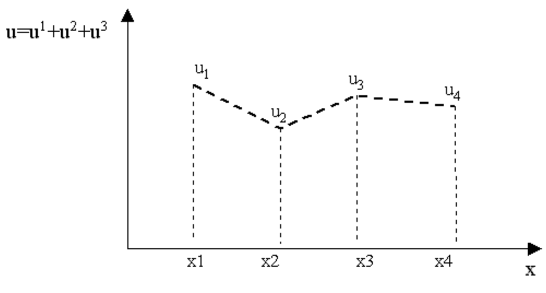
$$N_1 = \frac{x - x_4}{x_3 - x_4} \qquad N_1(x_3) = 1 \qquad N_1(x_4) = 0$$

$$N_2 = \frac{x - x_3}{x_4 - x_3} \qquad N_2(x_3) = 0 \qquad N_2(x_4) = 1$$

$$x_3 \le x \le x_4$$




Το άθροισμα των συναρτήσεων $U^1(x)$, $U^2(x)$ και $U^3(x)$ δίνει την συνάρτηση προσέγγισης $U(x)$ όλης της περιοχής V.

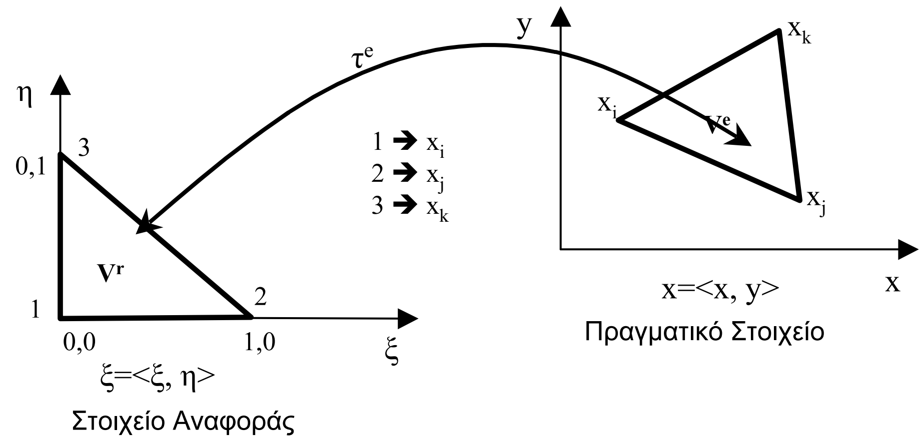


# 1.4 Στοιχεία Αναφοράς Πεπερασμένων Στοιχείων

Στο προηγούμενο κεφάλαιο οι συναρτήσεις $u^e(x)$ και $N_i(x)$, οι οποίες ας σημειωθεί και πάλι ότι μηδενίζονται πέραν του εξεταζόμενου στοιχείου, είναι διαφορετικές για κάθε στοιχείο.

Με στόχο την συστηματικοποίηση της διαδικασίας ώστε, για όμοιου τύπου στοιχεία[1], να χρησιμοποιούνται ίδιες συναρτήσεις παρεμβολής, γίνεται χρήση στοιχείου αναφοράς. Κάθε στοιχείο του πραγματικού χώρου ανάγεται σε ένα και μοναδικό στοιχείο του χώρου αναφοράς. Η αναγωγή πραγματοποιείται με χρήση των συναρτήσεων γεωμετρικής μεταφοράς $\overline{N_i}$ . Κατά την μεταφορά

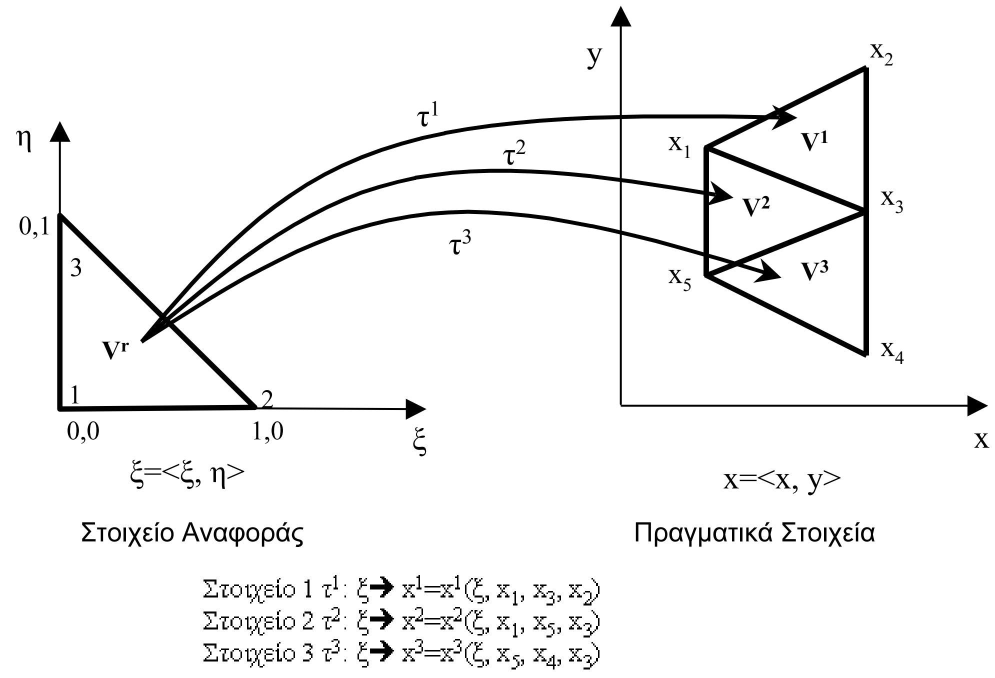
- κάθε σημείο του πραγματικού στοιχείου απεικονίζεται σε ένα και μόνο σημείο του στοιχείου αναφοράς και αντιστρόφως
- κάθε πλευρά του στοιχείου, καθοριζόμενη από δύο κόμβους του πραγματικού στοιχείου, απεικονίζεται αμφιμονοσήμαντα από την πλευρά του στοιχείου αναφοράς που ορίζεται από τους αντίστοιχους κόμβους του στοιχείου αναφοράς.




**Σχήμα 1.1 Απεικόνιση τριγωνικού πραγματικού στοιχείου σε στοιχείο αναφοράς**

Στο σχήμα 1.1 δίνεται η απεικόνιση ενός πραγματικού τριγωνικού στοιχείου τριών κόμβων στο αντίστοιχο στοιχείο αναφοράς. Οι σχέσεις μετατροπής $\tau^e$ εξαρτώνται από τον τύπο και τη θέση του πραγματικού στοιχείου και κατά συνέπεια από τις συντεταγμένες των κόμβων του στοιχείου. Για την αναγωγή όλων των τριγωνικών στοιχείων τριών κόμβων του πραγματικού χώρου χρησιμοποιείται το ίδιο στοιχείο αναφοράς, όπως χαρακτηριστικά απεικονίζεται στο σχήμα 1.2 .

[1] Ο τύπος των στοιχείων καθορίζεται από τον αριθμό των πλευρών και των κόμβων του.



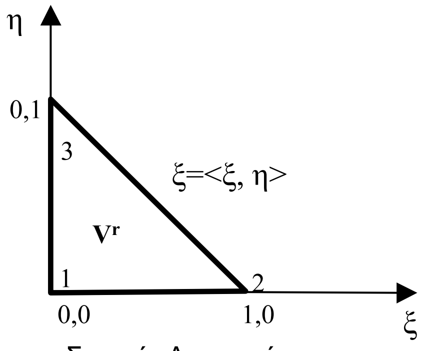

**Σχήμα 1.2 Αναγωγή τριγωνικών στοιχείων πραγματικού χώρου στο ίδιο στοιχείο αναφοράς**

Ως συναρτήσεις αναγωγής τ χρησιμοποιούνται οι γεωμετρικές συναρτήσεις αναγωγής $\overline{N_i}$ ,

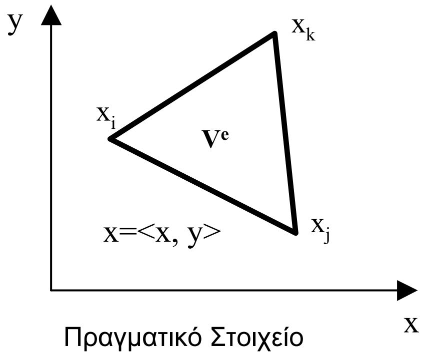
$$\mathrm{\tau} : \xi \longrightarrow \mathbf{x}(\xi) = \left\lfloor \overline{\mathrm{N}}(\xi) \right\rfloor \{x_n\} \tag{1.4}$$

Στην περίπτωση που οι συναρτήσεις παρεμβολής $\mathbf{N_i}$ ταυτίζονται με τις γεωμετρικές συναρτήσεις αναγωγής $\overline{N_i}$ , τότε τα στοιχεία αποκαλούνται ισοπαραμετρικά.

*Παράδειγμα 1.4: Αναλυτικός προσδιορισμός τριγωνικού στοιχείου τριών κόμβων*




Στοιχείο Αναφοράς




Πραγματικό Στοιχείο

Το στοιχείο αναφοράς προσδιορίζεται αναλυτικά ως ακολούθως:

$\xi + \eta \leq 1$
$\xi \geq 0$
$\eta \geq 0$

Η γεωμετρική μεταφορά του πραγματικού στοιχείου στο στοιχείο αναφοράς πραγματοποιείται με χρήση των ακολούθων συναρτήσεων:

$$x(\xi,\eta) = \langle 1-\xi-\eta \quad \xi \quad \eta \rangle \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \\ x_k \end{Bmatrix}$$

$$y(\xi,\eta) = \langle 1-\xi-\eta \quad \xi \quad \eta \rangle \begin{Bmatrix} y_i \\ y_j \\ y_k \end{Bmatrix}$$

Η ανωτέρω συνάρτηση γεωμετρικής μεταφοράς παρουσιάζει τις ακόλουθες τρεις ιδιότητες:

- Οι κόμβοι του στοιχείου αναφοράς αντιστοιχούν αμφιμονοσήμαντα στους κόμβους του πραγματικού στοιχείου. Για παράδειγμα ο κόμβος 1 (ξ=0 και η=0) αντιστοιχεί στον κόμβο $x_i$, ο κόμβος 2 (ξ=1 και η=0) στον $x_j$ και ο κόμβος 3 (ξ=0 και η=1) στον κόμβο $x_k$.

$$x(\xi=0 \ \ \eta=0) = \langle 1 \ \ 0 \ \ 0 \rangle \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \\ x_k \end{Bmatrix} = x_i$$

$$y(\xi=0 \ \ \eta=0) = \langle 1 \ \ 0 \ \ 0 \rangle \begin{Bmatrix} y_i \\ y_j \\ y_k \end{Bmatrix} = y_k$$

- Κάθε πλευρά του πραγματικού στοιχείου αντιστοιχεί σε μία καθορισμένη πλευρά του στοιχείου αναφοράς. Για παράδειγμα η πλευρά που ενώνει τους κόμβους 2 (1,0) και 3 (0,1) ορίζεται από την εξίσωση 1-ξ-η=0. Με σχετική αντικατάσταση στην επόμενη εξίσωση προσδιορίζεται η παραμετρική εξίσωση της αντίστοιχης πλευράς του πραγματικού στοιχείου.

$$x = \langle 0 \;\; \xi \;\; 1\text{-}\xi \rangle \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \\ x_k \end{Bmatrix} = \xi \, x_j + (1-\xi) x_k$$

$$y = \langle 0 \;\; \xi \;\; 1\text{-}\xi \rangle \begin{Bmatrix} y_i \\ y_j \\ y_k \end{Bmatrix} = \xi \, y_j + (1-\xi) y_k$$

- Μονοσήμαντη αντιστοιχία κάθε εσωτερικού σημείου του στοιχείου αναφοράς προς το αντίστοιχο πραγματικό. Ειδικά για την ισχύ της τρίτης αυτής συνθήκης αποδεικνύεται ότι το μητρώο που ορίζεται από την παράγωγο των συναρτήσεων των γενικευμένων συντεταγμένων ως προς τις κομβικές πρέπει να είναι θετικά ορισμένο. Το ανωτέρω μητρώο αποκαλείται Ιακωβιανό μητρώο (Jacobien matrix) και για να είναι θετικά ορισμένο θα πρέπει η ορίζουσα του να είναι θετικός αριθμός μεγαλύτερος του μηδενός. Η ορίζουσα δίνει ουσιαστικά τον όγκο (το εμβαδόν στην περίπτωση των δύο διαστάσεων) του πραγματικού στοιχείου. Η μεταφορά είναι δυνατή με την προϋπόθεση ότι το Ιακωβιανό μητρώο είναι θετικά ορισμένο, ήτοι το εμβαδόν του πραγματικού στοιχείου δεν είναι μηδενικό. Η τιμή της ορίζουσας μηδενίζεται στην περίπτωση που οι κόμβοι του πραγματικού τριγώνου είναι συνευθειακοί (το τρίγωνο εκφυλίζεται σε ευθεία). Σημειώνεται εντούτοις ότι είναι δυνατόν αλγεβρικά να παραχθεί και αρνητικό εμβαδόν στην περίπτωση που η αλληλουχία αρίθμησης των κόμβων, ειδικά στα στοιχεία υψηλής ακρίβειας με πολλούς κόμβους ανά πλευρά, δεν δοθεί σύμφωνα με την μόρφωση του στοιχείου αναφοράς. Στην περίπτωση αυτή το υπερμητρώο του προβλήματος δεν είναι θετικά ορισμένο, με αποτέλεσμα την διακοπή της διαδικασίας επίλυσης του προβλήματος.

# 1.5 Κατάστρωση Συναρτήσεων Παρεμβολής

Η τιμή κάποιας μεταβλητής σε οποιοδήποτε σημείο του στοιχείου αναφοράς δίνεται με χρήση της εξίσωσης 1.2, η οποία με τους αντίστοιχους συμβολισμούς παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$u(\xi) = <P(\xi)> \{a\} \tag{1.5}$$

όπου:
**P**(ξ) : η πολυωνυμική βάση με αριθμό όρων ίσο με τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας του στοιχείου αναφοράς

Σε κάθε κόμβο παρεμβολής *n,* όπου είναι γνωστή η ακριβής τιμή του $u_n$, η εξίσωση 1.5 παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\{u_n\} = [P_n] \; \{a\} \tag{1.6}$$

Με αντιστροφή του μητρώου $[P_n]$, θεωρώντας ότι είναι θετικά ορισμένο, η εξίσωση 1.6 μετατρέπεται σε

$$\{ a \} = [P_n]^{-1} \; \{ u_n \} \tag{1.7}$$

Με αντικατάσταση της 1.7 στην 1.5 η τιμή μιας μεταβλητής στη θέση ξ δίνεται από την κατωτέρω εξίσωση

$$u(\xi) = <P(\xi)> [P_n]^{-1} \; \{ u_n \} \tag{1.8}$$

ή

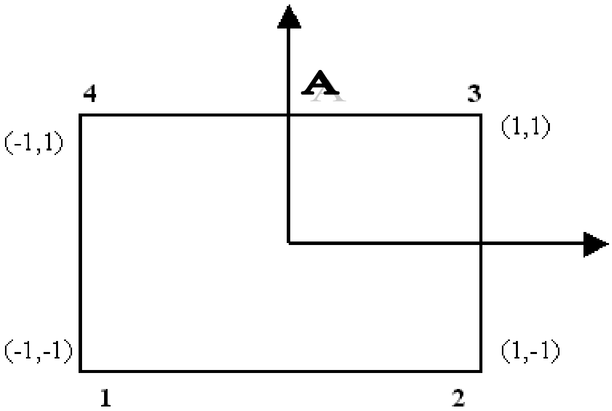
$$u(\xi) = <N(\xi)> \; \{ u_n \} \tag{1.9}$$

όπου:
**N**(ξ) το μητρώο συναρτήσεων παρεμβολής (interpolation functions) του στοιχείου αναφοράς

Οι συναρτήσεις παρεμβολής προκύπτουν από τις πολυωνυμικές βάσεις που χαρακτηρίζουν το κάθε στοιχείο και δίνονται από την σχέση 1.10

$$< N(\xi) > \; = <P(\xi)> [P_\eta^{-1}] \tag{1.10}$$

Εστω $e_f$ ένα τετράπλευρο στοιχείο αναφοράς τεσσάρων κόμβων με άξονες συντεταγμένων ξ, η ($\boldsymbol{\xi} = <\xi,\eta>$).




**Σχήμα 1.3. Στοιχείο αναφοράς δύο διαστάσεων και τεσσάρων κόμβων**

Το P(ξ) αποτελείται από τέσσερις όρους (όσοι και οι κόμβοι) που καθορίζονται συναρτήσει των αξόνων και είναι

$$< \mathrm{P} > = < 1, \xi, \eta, \xi\,\eta > \qquad (1.11)$$

Οι κόμβοι αναφοράς έχουν συντεταγμένες ξ= ±1, η= ±1 και από την 1.11 προκύπτει το μητρώο

$$P_\eta = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (1.12)$$

Αντικαθιστώντας την 1.12 και 1.11 στην 1.10 και λαμβάνοντας υπόψη ότι $[P_n]^{-1}=1/4\ [P_n]^T$ προσδιορίζονται οι συναρτήσεις μορφής του ανωτέρω στοιχείου.

$$< N > = < N_1, N_2, N_3, N_4 > \qquad (1.13)$$

όπου

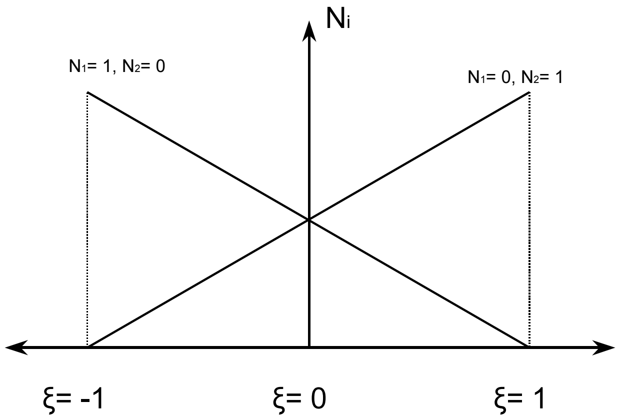
$$N_1 = \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}$$
$$N_2 = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}$$
$$N_3 = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \qquad (1.14)$$
$$N_4 = \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}$$

Κάθε εσωτερικό σημείο του $e_f$ μπορεί να προσδιοριστεί σε συνάρτηση των $N_1$, $N_2$, $N_3$, $N_4$ και των συντεταγμένων των τεσσάρων κόμβων από την σχέση 1.9.

Για παράδειγμα για το σημείο Α, σχήμα 1.3, το οποίο στις πραγματικές συνθήκες αποτελεί το μέσο της ευθείας των κόμβων 3-4 οι συντεταγμένες είναι

$$X_A = < 0, 0, N_3, N_4 > \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} \qquad (1.15)$$

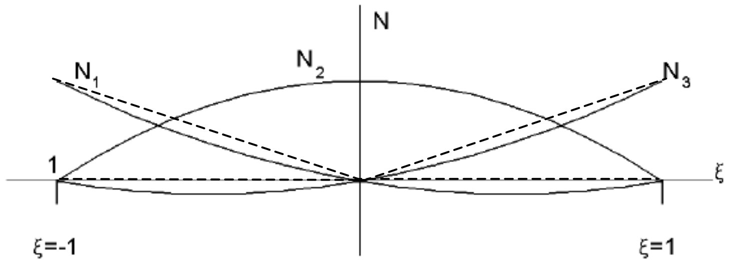
Η μορφή των **N**, ανάλογα με τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας και των αριθμό των κόμβων κάθε πλευράς, μπορεί να είναι γραμμική, τετραγωνική ή και κυβική ακόμα για ιδιαίτερα ψηλή ακρίβεια. Για μονοδιάστατο στοιχείο (αναφοράς πάντα) δύο κόμβων (**ξ**= -1, 1) με ένα βαθμό ελευθερίας ανά κόμβο τα $N_1$, $N_2$ πρέπει να είναι γραμμικά για να εξασφαλίζεται η αρχή της συνέχειας (ευθεία ή καμπύλη χωρίς άλμα και μετάπτωση). Στο σχήμα 1.4 φαίνεται η γραμμική μεταβολή των **N** στην περίπτωση αυτή.




**Σχήμα 1.4. Γραφική παράσταση μεταβολής των** N **μονοδιάστατου στοιχείου δύο κόμβων με ένα βαθμό ελευθερίας ανά κόμβο**

Αντίθετα για μονοδιάστατο στοιχείο τριών κόμβων με ένα πάντα βαθμό ελευθερίας οι συναρτήσεις **N** έχουν παραβολική μορφή. Η γραμμική μορφή που τις ικανοποιεί παρουσιάζει αναγκαστικά μετάπτωση στο σημείο ξ= 0 και απορρίπτεται διότι δεν εξασφαλίζει την αρχή της συνέχειας. Συγκεκριμένα η συνθήκη $N_1$= 1, $N_2$= 0, $N_3$= 0, σχήμα 1.5, εξασφαλίζεται είτε από την πολυγωνική γραμμή (διακεκομένη γραμμή), είτε από την παραβολική καμπύλη (συνεχής γραμμή). Η πολυγωνική επειδή αντιβαίνει την αρχή της συνέχειας απορρίπτεται και υιοθετείται η παραβολική. Με την ίδια λογική και τα $N_2$, $N_3$ έχουν παραβολική μορφή. Γίνεται

επίσης φανερό ότι στο μονοδιάστατο στοιχείο τεσσάρων κόμβων με ένα βαθμό ελευθερίας ανά κόμβο οι συναρτήσεις μορφής **N** έχουν κυβικό ρυθμό μεταβολής.




**Σχήμα 1.5. Γραφική παράσταση μεταβολής των N μονοδιάστατου στοιχείου τριών κόμβων με ένα βαθμό ελευθερίας ανά κόμβο**

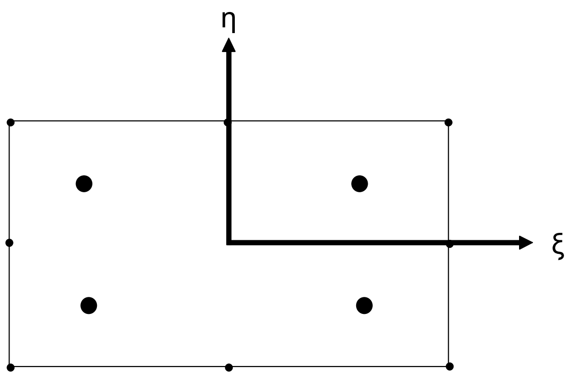
Ολα τα στοιχεία που προαναφέρθηκαν εξασφαλίζουν την αρχή της συνέχειας των μετακινήσεων και είναι γνωστά ως τύπου Lagrange. Υπάρχουν στοιχεία υψηλής ακρίβειας όπου εξασφαλίζεται η αρχή της συνέχειας τόσο των μετακινήσεων όσο και των παραγώγων τους. Στην περίπτωση αυτή, για το παράδειγμα του σχήματος 1.4 θα έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο και η μορφή των **N** θα είναι παραβολική παρ'ότι οι κόμβοι είναι μόνο δύο. Τα στοιχεία αυτά είναι γνωστά ως τύπου Hermite.

Με παρόμοιο τρόπο προσδιορίζεται γραφικά και η μορφή των **N** για διαφόρων διαστάσεων στοιχεία με διάφορους βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο. Στον πίνακα 1.1 δίνονται τα χαρακτηριστικά του στοιχείου δύο διαστάσεων και οκτώ κόμβων με δύο βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο. Είναι φανερό ότι το στοιχείο αυτό είναι τύπου Lagrange, οι συναρτήσεις παρεμβολής **N** έχουν παραβολική μορφή και θεωρείται μέσης ή ακόμα και υψηλής ακρίβειας (ανάλογα πάντα και με την χρήση του) αφού εξασφαλίζει την τετραγωνική μεταβολή των μετακινήσεων στο εσωτερικό του.

Η αντιστοιχία των πραγματικών στοιχείων με το στοιχείο αναφοράς είναι δυνατή μέσω των συναρτήσεων γεωμετρικής μετατροπής, ή ευρύτερα γνωστών σαν συναρτήσεων μορφής (shape functions). Οπως σημειώνεται και στην προηγούμενη παράγραφο, στην περίπτωση που οι συναρτήσεις μορφής ταυτίζονται με τις συναρτήσεις παρεμβολής (interpolation functions) **N** τα στοιχεία αποκαλούνται ισοπαραμετρικά. Οι συναρτήσεις **N** εξαρτώνται από τις συντεταγμένες των πραγματικών στοιχείων και κατά συνέπεια είναι διαφορετικές για καθένα από αυτά. Με κατάλληλη όμως αναγωγή από το πραγματικό στοιχείο στο στοιχείο αναφοράς, οι συναρτήσεις **N** είναι οι ίδιες (για το ίδιο πάντα στοιχείο αναφοράς). Η αναγωγή αυτή είναι ιδιαίτερα σημαντική γιατί απαλλάσσει από την επαναληπτική διαδικασία υπολογισμού των συναρτήσεων **N** για κάθε στοιχείο.

Στην εξίσωση 1.16 δίνεται η πολυωνυμική βάση για τετράπλευρο στοιχείο οκτώ κόμβων, το οποίο δίνεται στο σχήμα 1.6.

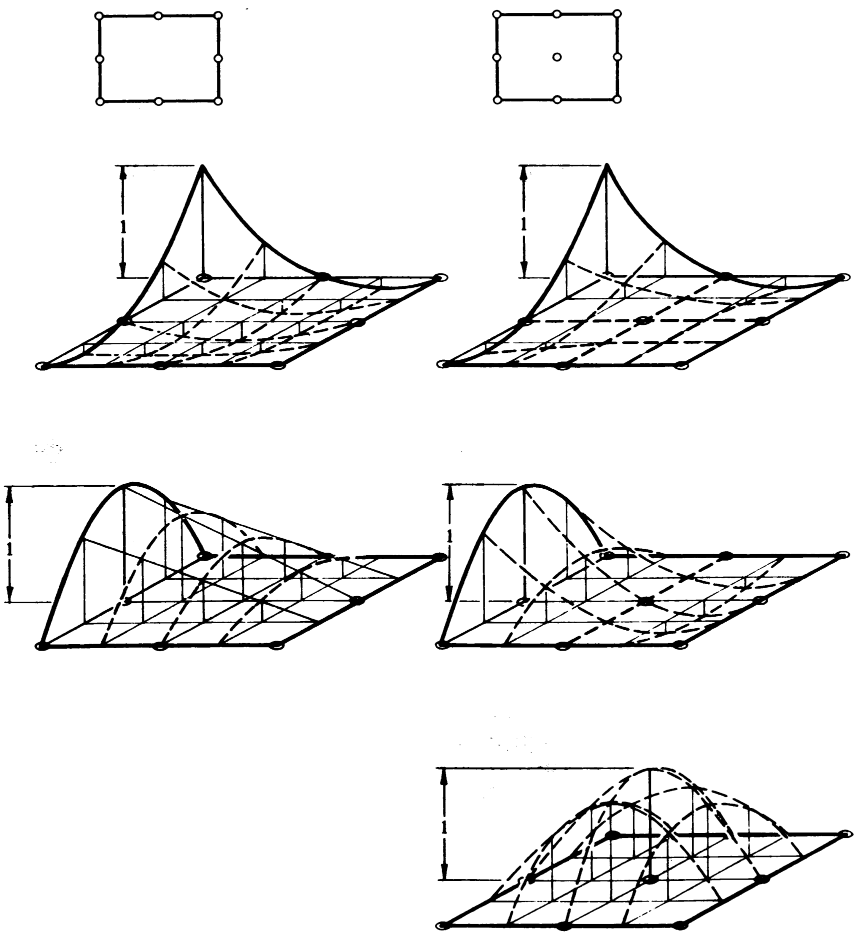
$$< P > = < 1 \;\; \xi \;\; \eta \;\; \xi^2 \;\; \xi\eta \;\; \eta^2 \;\; \xi^2\eta \;\; \xi\eta^2 > \tag{1.16}$$




**Σχήμα 1.6. Στοιχείο αναφοράς δύο διαστάσεων τύπου Lagrange, οκτώ κόμβων και τεσσάρων σημείων ολοκλήρωσης**

| α/α | {**N**} | { $\mathbf{B}_\xi$ } | { $\mathbf{B}_\eta$ } |
|---|---|---|---|
| 1 | $\dfrac{-(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)}{4}$ | $\dfrac{(1-\eta)(2\xi+\eta)}{4}$ | $\dfrac{(1-\xi)(\xi+2\eta)}{4}$ |
| 2 | $\dfrac{(1-\xi^2)(1-\eta)}{2}$ | $-(1-\eta)\,\xi$ | $\dfrac{-(1-\xi^2)}{2}$ |
| 3 | $\dfrac{-(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta)}{4}$ | $\dfrac{(1-\eta)(2\xi-\eta)}{4}$ | $\dfrac{-(1+\xi)(\xi-2\eta)}{4}$ |
| 4 | $\dfrac{(1+\xi)(1-\eta^2)}{2}$ | $\dfrac{(1-\eta^2)}{2}$ | $-(1+\xi)\,\eta$ |
| 5 | $\dfrac{-(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta)}{4}$ | $\dfrac{(1+\eta)(2\xi+\eta)}{4}$ | $\dfrac{(1+\xi)(\xi+2\eta)}{4}$ |
| 6 | $\dfrac{(1-\xi^2)(1+\eta)}{2}$ | $-(1+\eta)\,\xi$ | $\dfrac{(1-\eta^2)}{2}$ |
| 7 | $\dfrac{-(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta)}{4}$ | $\dfrac{(1+\eta)(2\xi-\eta)}{4}$ | $\dfrac{-(1-\xi)(\xi-2\eta)}{4}$ |
| 8 | $\dfrac{(1-\xi)(1-\eta^2)}{2}$ | $\dfrac{-(1-\eta^2)}{2}$ | $-(1-\xi)\,\eta$ |

**Πίνακας 1.1. Συναρτήσεις μορφής** N **και συναρτήσεις μετασχηματισμού** B **για στοιχείο δύο διαστάσεων και οκτώ κόμβων.**



**Σχήμα 1.7. Συναρτήσεις μορφής για δευτεροβάθμια ισοπαραμετρικά στοιχεία τύπου Lagrange (αριστερά) και τύπου Serendipity, Zienkiewicz [65].**

Μετά τον προσδιορισμό των συναρτήσεων **N** για τα στοιχεία αναφοράς και την αναγωγή των πραγματικών στοιχείων σε στοιχεία αναφοράς, είναι δυνατός ο υπολογισμός των μητρώων δυσκαμψίας των στοιχείων, από την εξίσωση 1.17, της οποίας αναλυτικότερη παρουσίαση θα γίνει στα επόμενα κεφάλαια. Σημειώνεται ότι τα μητρώα **B** προέρχονται από την παραγώγιση των μητρώων **N**.

$$[k]=\int[B^T][C][B]\,dv=\int[B^T][C][B]\,\det J \qquad (1.17)$$

όπου

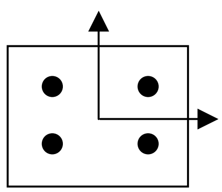
k : το μητρώο δυσκαμψίας του εξεταζόμενου στοιχείου
B : το μητρώο μετασχηματισμού (transformation matrix) παραμορφώσεων
C : το μητρώο τάσεων-παραμορφώσεων του εξεταζόμενου στοιχείου

Για την ολοκλήρωση της 1.17 έχουν προταθεί διάφορες αριθμητικές μεθόδοι με γνωστότερη ίσως και πιο διαδεδομένη την μέθοδο Gauss, κατά την οποία το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης μπορεί να προσεγγιστεί από το αθροιστικό γινόμενο της τιμής της συνάρτησης, σε κάποια καθορισμένα σημεία, πολλαπλασιασμένης με κάποιον αριθμό βαρύτητας για κάθε σημείο, εξίσωση 1.18.

$$\int_{-1}^{1} y(z)\,dz = \sum_{i=1}^{r} W_i\, y(z_i) \tag{1.18}$$

Η ακρίβεια της μεθόδου Gauss αυξάνει προφανώς αυξανομένου του αριθμού r, ο οποίος είναι γνωστός και ως αριθμός σημείων ολοκλήρωσης, ενώ ο αριθμός $W_i$ αποκαλείται βαρύτητα ολοκλήρωσης του σημείου i.

Το ολοκλήρωμα της 1.18 για στοιχείο αναφοράς δύο διαστάσεων μπορεί να προσεγγιστεί από ένα μέχρι και εννιά σημεία ολοκλήρωσης. Από διάφορες ειδικές ερευνητικές εργασίες έχει δειχθεί ότι τέσσερα σημεία ολοκλήρωσης, κατάλληλα διατεταγμένα, παρέχουν ικανοποιητική ακρίβεια και σχετικά ικανοποιητικό όγκο υπολογισμών, βλ. Dhatt, G. et Touzot, G. [34] και Zienkiewicz, O. C. [65]. Αντίθετα ένα μόνο σημείο ολοκλήρωσης δίνει ανακριβείς λύσεις γιατί προϋποθέτει σταθερή τιμή τάσης σε κάθε σημείο του στοιχείου. Η περίπτωση αυτή παρουσιάζεται σπάνια για το σύνολο όλων των στοιχείων και εξαρτάται τόσο από τις διαστάσεις του στοιχείου όσο και από το διάνυσμα φόρτισης. Είναι δε φανερό ότι η ακρίβεια προσέγγισης του εσωτερικού έργου μειώνεται στην περίπτωση αμετάβλητων τάσεων στο εσωτερικό των στοιχείων. Η χρήση εννιά σημείων από την άλλη πλευρά επιβαρύνει σημαντικά τον όγκο των υπολογισμών χωρίς να βελτιώνει ιδιαίτερα την ακρίβεια στην επίλυση. Στον πίνακα 1.2 δίνονται τα σημεία ολοκλήρωσης, οι συντεταγμένες τους και η βαρύτητα τους για τετράπλευρο στοιχείο τεσσάρων σημείων ολοκλήρωσης. Σημειώνεται ότι λόγω της διάταξης των σημείων ολοκλήρωσης (δισυμμετρία) είναι ευκολότερη η αυτοματοποίηση των υπολογισμών της 1.18. Η διάταξη αυτή είναι γνωστή σαν διάταξη γινομένου, στην πιο πάνω δε περίπτωση συμβολίζεται ως 2*2 διάταξη σημείων ολοκλήρωσης.

| Μορφή Στοιχείου | Συντεταγμένες Σημείου Ολοκλήρωσης | | Βαρύτητα Σημείου Ολοκλήρωσης |
|---|---|---|---|
|  | $\xi_i$ | $\eta_i$ | $W_i$ |
| | ±1/√3 | ±1/√3 | 1 |

**Πίνακας 1.2. Συντεταγμένες και τιμές βαρύτητας σημείων ολοκλήρωσης τετράπλευρου στοιχείου**

Η ανάπτυξη της 1.18 για τετράπλευρο στοιχείο με τέσσερα σημεία αναφοράς δίνεται από την 1.19.

$$
\begin{aligned}
k= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [B]^t[C][B]\ \det J = \\
[B]^T(\xi_1,\eta_1)\ [C]\ W_1\ W_1\ [B]\ (\xi_1,\eta_1)\ \det J(\xi_1,\eta_1)\ + \\
[B]^T(\xi_1,\eta_2)\ [C]\ W_1\ W_2\ [B]\ (\xi_1,\eta_2)\ \det J(\xi_1,\eta_2)\ + \\
[B]^T(\xi_2,\eta_1)\ [C]\ W_2\ W_1\ [B]\ (\xi_2,\eta_1)\ \det J(\xi_2,\eta_1)\ + \\
[B]^T(\xi_2,\eta_2)\ [C]\ W_2\ W_2\ [B]\ (\xi_2,\eta_2)\ \det J(\xi_2,\eta_2)
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

Ο όγκος υπολογισμών της εξίσωσης 1.19 για μητρώο **C** διαστάσεων 3*3, με αξιοποίηση της συμμετρίας του, είναι 1184 πολλαπλασιασμοί, ενώ στη περίπτωση 9 σημείων ολοκλήρωσης (μέθοδος γινομένου 3*3) ανέρχεται στους 2664 υπολογισμούς για κάθε στοιχείο. Είναι φανερή λοιπόν η επιβάρυνση που επιφέρει η αύξηση των σημείων ολοκλήρωσης που σημειωτέον συχνά, ανάλογα πάντα με την τοπολογία του προβλήματος, παρουσιάζει ακρίβεια της ίδιας περίπου τάξης με την ανάλυση με τέσσερα σημεία ολοκλήρωσης.

## 1.6 Προσδιορισμός Μητρώου Δυσκαμψίας Ομογενούς Στοιχείου

Με βάση την αρχή εξίσωσης εσωτερικού και εξωτερικού έργου μπορούν να συσχετισθούν τα μεγέθη των σημείων ολοκλήρωσης (τάσεις, διαστάσεις) και τα κομβικά μεγέθη (κομβικά φορτία, μετακινήσεις).

Οι μετακινήσεις σε οποιοδήποτε σημείο στο εσωτερικό κάποιου στοιχείου μπορούν να υπολογιστούν από την εξίσωση 1.2, η οποία για την περίπτωση χρήσης πεπερασμένων στοιχείων παίρνει την μορφή της 1.9 της οποίας η διαφορική παραγώγιση οδηγεί στην 1.20.

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u\} \tag{1.20}$$

όπου
$\{\varepsilon\}$ : το διάνυσμα παραμορφώσεων
$\{u\}$ : το διάνυσμα των μετακινήσεων

Με βάση την συμπεριφορά του υλικού και τις ανάλογες απλοποιητικές παραδοχές γίνεται η κατάλληλη επιλογή του καταστατικού νόμου από τον οποίο προκύπτει το μητρώο δυσκαμψίας **C** το οποίο συνδέει τον τανυστή τάσεων και τον τανυστή παραμορφώσεων, εξίσωση 1.21.

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \tag{1.21}$$

όπου
$\{\sigma\}$ : το διάνυσμα τάσεων

Με αντικατάσταση της 1.20 στην 1.21 προκύπτει το διάνυσμα τάσεων συναρτήσει των μετακινήσεων,

$$\{\sigma\} = [C][\mathrm{B}]\{u\} \tag{1.22}$$

Το έργο των εξωτερικών δυνάμεων που παράγεται από δεδομένο διάνυσμα μετακινήσεων δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$W_{extr} = \{u\}^T \{F\} \tag{1.23}$$

όπου
$W_{extr}$ : το έργο των εξωτερικών δυνάμεων
$\{F\}$ : το διάνυσμα επικομβίων φορτίων

Το έργο των εσωτερικών δυνάμεων αντίστοιχα δίνεται από την εξίσωση 1.24

$$W_{intr} = \int \{\varepsilon\}^T \{\sigma\}\, \mathrm{dv} \tag{1.24}$$

όπου

$W_{intr}$ : το έργο των εσωτερικών δυνάμεων

$\{\varepsilon\}^T$ : το ανάστροφο διάνυσμα των παραμορφώσεων

dv : ο όγκος του στοιχείου

Με αντικατάσταση της 1.20 στην 1.24 προκύπτει

$$W_{intr} = \{u\}^T \int [B]^T \ \{\sigma\} \ dv \tag{1.25}$$

και στην συνέχεια με αντικατάσταση της 1.22 στην 1.25

$$W_{intr} = \{u\}^T ( \int [B]^T \ [C] \ [B] \ dv) \{u\} \tag{1.26}$$

Με εξίσωση του εσωτερικού και εξωτερικού έργου συνεπάγεται

$$\{u\}^T \ \{F\} = \{u\}^T ( \int [B]^T \ [C] \ [B] \ dv) \{u\} \tag{1.27}$$

και τελικά

$$\{F\} = ( \int [B]^T \ [C] \ [B] \ dv) \{u\} \tag{1.28}$$

ή ακόμα με την γνωστή μορφή

$$\{F\} = [K] \{u\} \tag{1.29}$$

όπου

$$[K] = \int [B]^T \ [C] \ [B] \ dv \tag{1.30}$$

το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου

Με κατάλληλο μετασχηματισμό από το τοπικό σύστημα στο γενικό μπορούν να εκφραστούν όλες οι εξισώσεις στο γενικό σύστημα συντεταγμένων οπότε είναι πια δυνατή η ολοκλήρωση της διαδικασίας για όλα τα στοιχεία και η ενσωμάτωση των διανυσμάτων κάθε στοιχείου στα καθολικά υπερδιανύσματα

$$\{R\} = [K] \{U\} \tag{1.31}$$

όπου

{R} το γενικό διάνυσμα φόρτισης των κόμβων

{U} το " " μετακίνησης "

[K] το " μητρώο δυσκαμψίας

Μετά από την επίλυση του γραμμικού συστήματος 1.31 είναι δυνατός ο προσδιορισμός των παραμορφώσεων με χρήση της 1.20 και των τάσεων με την χρήση της 1.21.

Το σύστημα εξισώσεων της 1.31 είναι γραμμικό. Το γενικό μητρώο [K] εντούτοις είναι σταθερό και ανεξάρτητο του βήματος των τάσεων μόνο για τα ελαστικά μέσα. Σε αντίθετη περίπτωση, η πλαστικοποίηση ή θραύση του στοιχείου, αλλάζει την τοπολογία της κατασκευής και επακόλουθα τροποποιείται και το μητρώο [K].

Από την σχέση 1.30 είναι φανερή η επίδραση των μητρώων [B] και συνεπώς των <N> στο γενικό μητρώο ακαμψίας [K]. Σημειώνεται ακόμη ότι η σχέση 1.24 εκφράζει την ολοκλήρωση του εσωτερικού έργου ενός στοιχείου και μπορεί να εκτιμηθεί με μεγαλύτερη ακρίβεια αν το στοιχείο υποδιαιρεθεί σε μικρότερα κομμάτια για τα οποία υπολογίζεται διαφορετικό διάνυσμα τάσεων (πολυάριθμα σημεία ολοκλήρωσης).

# 1.7 Αναγωγή Γενικών Φορτίσεων σε Επικομβία Φορτία

Στην εξίσωση 1.31 το διάνυσμα κομβικών δυνάμεων {R} και το γενικό μητρώο [K] θεωρούνται δεδομένα και η επίλυση της οδηγεί στον προσδιορισμό των μετακινήσεων {U}. Στη συνέχεια, υπολογίζονται οι παραμορφώσεις και οι τάσεις κάθε στοιχείου με χρήση των εξισώσεων 1.20 και 1.21.

Στην απλή περίπτωση του αβαρούς γραμμικού ελαστικού μέσου οι ελαστικές σταθερές παραμένουν αμετάβλητες, ενώ το διάνυσμα φόρτισης {R} καθορίζεται από την δράση των επικομβίων και επιφανειακών δυνάμεων. Είναι φανερό πως στην περίπτωση αυτή, τόσο το μητρώο [K] όσο και το διάνυσμα {R} είναι αμετάβλητα και δεν υπολογίζονται παρά μία μόνο φορά στην περίπτωση πολυσταδιακής ανάλυσης. Στην γενική όμως περίπτωση της μη γραμμικής συμπεριφοράς, όπου η ιστορία φόρτισης και παραμορφώσεων καθορίζει σημαντικά την συμπεριφορά του υλικού μέσου, τόσο το μητρώο [K] όσο και το διάνυσμα {R} μεταβάλλονται και επιβάλλεται η ανακατασκευή τους κατά την βήμα προς βήμα ανάλυση.

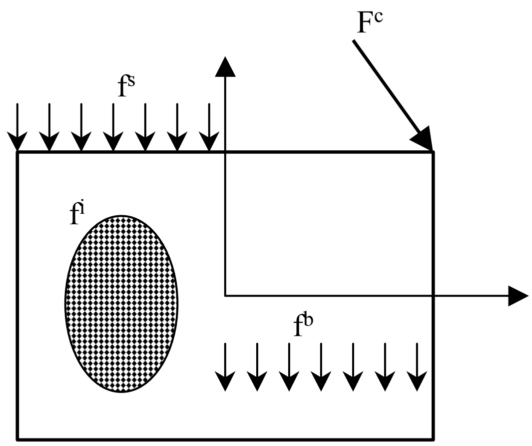
Η μεταβολή του μητρώου δυσκαμψίας οφείλεται στην μη γραμμική απόκριση του υλικού μέσου, και θα αποτελέσει αντικείμενο των επόμενων κεφαλαίων, ενώ στο διάνυσμα κομβικών δυνάμεων πρέπει να συμπεριληφθούν οι επιπλέον δυνάμεις λόγω των μεταβαλλόμενων σε κάθε βήμα αρχικών τάσεων και οι αντίστοιχες των δυνάμεων βαρύτητας δυνάμεις που επιβάλλονται για να εξασφαλίσουν την ισορροπία δυνάμεων του στοιχείου σε περίπτωση ηρεμίας.

Συγκεκριμένα έστω ότι σε στοιχείο αναφοράς οι δυνάμεις βαρύτητας είναι $f^b$ ανά μονάδα όγκου. Στην περίπτωση που στο στοιχείο δεν επιβάλλεται καμία φόρτιση είναι φανερό ότι το στοιχείο θα τείνει να διογκωθεί μέχρι να επέλθει εξίσωση εσωτερικής και εξωτερικής τάσης. Επειδή όμως το στοιχείο βρίσκεται στην αρχική του κατάσταση χωρίς καμία επιφόρτιση, προκύπτει η ανάγκη επιβολής τέτοιων επικομβίων δυνάμεων που να εξασφαλίζουν μηδενικές μετακινήσεις. Το διάνυσμα επικομβίων δυνάμεων μπορεί τελικά να γραφεί σαν άθροισμα διανυσμάτων,

$$\{R\} = \{R^b\} + \{R^s\} - \{R^I\} + \{R^c\} \tag{1.32}$$

όπου

$\{R^b\}$ το διάνυσμα επικομβίων φορτίων λόγω φορτίων βαρύτητας
$\{R^s\}$ το διάνυσμα επικομβίων φορτίων λόγω επιφανειακής φόρτισης
$\{R^I\}$ το διάνυσμα επικομβίων φορτίων λόγω αρχικών τάσεων
$\{R^c\}$ το διάνυσμα επικομβίων φορτίων λόγω συγκεντρωμένων φορτίων




**Σχήμα 1.8. Στοιχείο αναφοράς σε γενική φόρτιση.**

Τα επικόμβια φορτία $\{R^c\}$ και τα αντίστοιχα της επιφανειακής φόρτισης $\{R^s\}$, μετά από κατανομή, προστίθενται στο γενικό διάνυσμα φόρτισης όπως έχουν, ενώ τα φορτία βαρύτητας {f} και τα φορτία αρχικών τάσεων $\{\sigma_I\}$ ανάγονται στα αντίστοιχα επικόμβια διανύσματα φόρτισης $\{R^b\}$ και $\{R^I\}$ σύμφωνα με τι συναρτήσεις κατανομής του στοιχείου.

### *Αναγωγή των δυνάμεων Βαρύτητας και αρχικών τάσεων σε επικόμβια φορτία*

Τα φορτία βαρύτητας ανάγονται σε επικόμβια από την σχέση 1.33

$$\left\{R^b\right\} = \int_V \left\langle \mathrm{N} \right\rangle^{\mathrm{T}} \mathrm{b\,dv} \qquad (1.33)$$

όπου

dv ο όγκος του στοιχείου

b το ειδικό βάρος του υλικού

Με την βοήθεια της 1.18 και με αντικατάσταση του dv με την ορίζουσα του Ιακωβιανού μητρώου, η 1.33 μετασχηματίζεται σε

$$\left\{R^b\right\} = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{W}_\iota \;\; \mathrm{N}_{\mathrm{j,i}} \;\; \mathrm{f} \;\; \det \mathrm{J}_i \qquad (1.34)$$

όπου

i : ο αριθμός του σημείου ολοκλήρωσης

j : ο αριθμός του κόμβου

$N_{i,j}$ : η τιμή της συνάρτηση μορφής του κόμβου j στο σημείο ολοκλήρωσης i

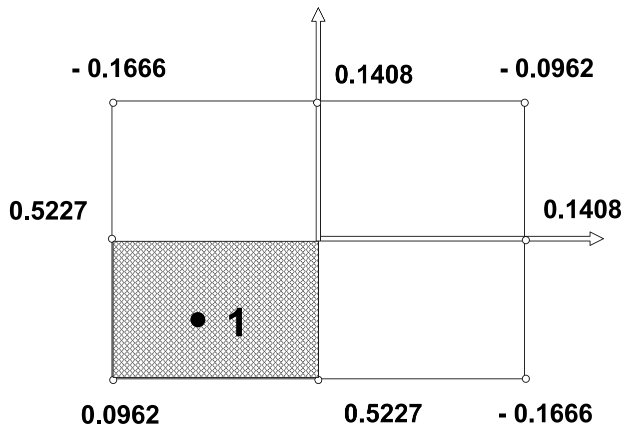
det $\mathbf{J}_i$ : η ορίζουσα της Ιακωβιανού μητρώου (τιμή ίση με τον όγκο του στοιχείου)

Για το στοιχείο του σχήματος 1.10, με βάση τους πίνακες 1.1 και 1.2, και για το σημείο ολοκλήρωσης 1 (-1/√3, -1/√3) το οποίο αντιπροσωπεύει το κάτω αριστερά τεταρτημόριο του στοιχείου προκύπτει

| | | | |
|---|---|---|---|
| $N_{1,1}$= -0.0962 | $N_{1,2}$= -0.1666 | $N_{1,3}$= 0.0962 | $N_{1,4}$= -0.1666 |
| $N_{1,5}$= 0.1408 | $N_{1,6}$= 0.5227 | $N_{1,7}$= 0.5227 | $N_{1,8}$= 0.1408 |

Με κυκλική εναλλαγή υπολογίζονται όλα τα $N_{i,j}$. Αν ληφθεί υπ'όψη ότι το στοιχείο αναφοράς είναι ορθογώνιο η εξίσωση 1.33 για τέσσερα σημεία ολοκλήρωσης μετασχηματίζεται σε

$$R_j^b = \frac{v}{4}\ f\ ( N_{j,1} + N_{j,2} + N_{j,3} + N_{j,4} + N_{j,5} + N_{j,6} + N_{j,7} + N_{j,8} ) \qquad (1.35)$$




**Σχήμα 1.10. Συντελεστές αναγωγής των δυνάμεων βαρύτητας σε επικόμβια φορτία.**

Η εξίσωση 1.35 κατανέμει τις δυνάμεις βαρύτητας σε επικόμβια φορτία σύμφωνα με τους συντελεστές του σχήματος 3.8.

Με εντελώς ανάλογο τρόπο ανάγονται και οι δυνάμεις αρχικών τάσεων σε επικόμβια φορτία. Η αναγωγή, την φορά αυτή δίνεται από την σχέση 1.36.

$$\{R^I\} = \int_v [B]^T \{\sigma\} dv \qquad (1.36)$$

Η σχέση 1.36 μετασχηματίζεται στην αντίστοιχη της 1.34

$$R_j^b = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{W_i}\ \ \mathrm{B_{j,i}}\ \sigma_\mathrm{I}\ \ \det \mathrm{J}_i \qquad (1.37)$$

όπου
- i ο αριθμός του σημείου ολοκλήρωσης
- j ο αριθμός του κόμβου
- det**J**$_i$ η ορίζουσα του Ιακωβιανού μητρώου (τιμή ίση με τον όγκο του στοιχείου)

Σημειώνεται ότι τόσο η βαρύτητα του σημείου ολοκλήρωσης $W_i$ όσο και ο όγκος det**J**$_i$ εξαρτώνται από την μορφή του στοιχείου αναφοράς. Για τα στοιχεία τύπου γινομένου η βαρύτητα είναι ίση με μονάδα για όλα τα σημεία ολοκλήρωσης.