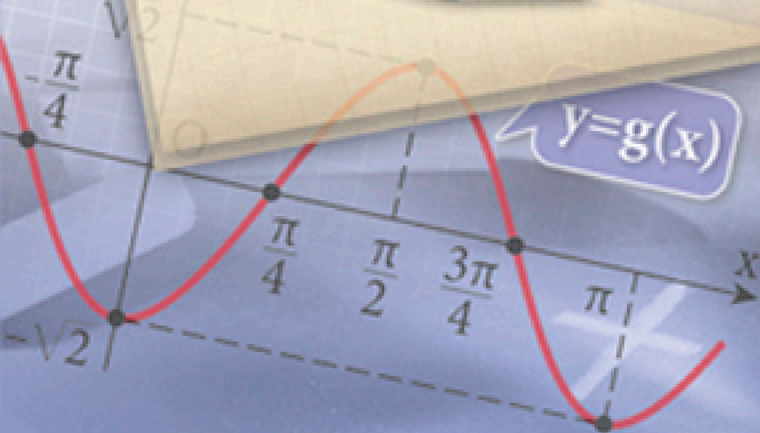
Θανάσης Π. Ξένος

Άλγεβρα

Β′ ΛΥΚΕΙΟΥ



- Θεωρία
- Παραδείγματα
- Ασκήσεις με υποδείξεις - απαντήσεις
- Διαγωνίσματα

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα

Με το συγγραφέα επικοινωνείτε:
Τηλ. 2310.348.086, e-mail: thanasisxenos@yahoo.gr

ISBN 978-960-456-359-3

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση
Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ:
Αρμενοπούλου 27, 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ.: 2310.203.720, Fax: 2310.211.305 • e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΕΝΩΣΗ ΕΚΔΟΤΩΝ ΒΙΒΛΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ:
Στοά του Βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5), 105 64 Αθήνα • Τηλ.-Fax: 210.3211.097

ΑΠΟΘΗΚΗ ΑΘΗΝΩΝ - ΠΩΛΗΣΗ ΧΟΝΔΡΙΚΗ:
Ασκληπιού 60, 114 71 Αθήνα
Τηλ.-Fax: 210.3816.650 • e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό είναι γραμμένο με βάση την αναμορφωμένη έκδοση του σχολικού βιβλίου Άλγεβρας Β′ Λυκείου, που θα διδάσκεται από το σχολικό έτος 2012-2013.

Είναι ένα σημαντικό βοήθημα για τους μαθητές, αλλά και οι συνάδελφοι καθηγητές θα βρουν πλούσιο υλικό για το έργο τους.

✓ Κάθε ενότητα περιλαμβάνει:

- **Θεωρία**, γραμμένη με κάθε λεπτομέρεια.
- **Παραδείγματα και εφαρμογές** για όλες τις περιπτώσεις.
- **Ασκήσεις** κλιμακούμενης δυσκολίας.

✓ Στο τέλος κάθε κεφαλαίου δίνονται:

- **Ερωτήσεις κατανόησης** (Σωστού-Λάθους και πολλαπλής επιλογής)
- **Γενικές ασκήσεις**, κυρίως για μαθητές με αυξημένο ενδιαφέρον για τα Μαθηματικά.
- **Διαγώνισμα** με τέσσερα αντιπροσωπευτικά θέματα.

✓ Τα κεφάλαια που αναπτύσσονται είναι:

Κεφάλαιο 1: Συστήματα (Γραμμικά συστήματα 2×2, 3×3 και μη γραμμικά συστήματα)

Κεφάλαιο 2: Ιδιότητες συναρτήσεων (Μονοτονία – ακρότατα – συμμετρίες συνάρτησης και μετατόπιση γραφικής παράστασης).

Κεφάλαιο 3: Τριγωνομετρία.

Κεφάλαιο 4: Πολυώνυμα – Πολυωνυμικές εξισώσεις.

Κεφάλαιο 5: Εκθετική και Λογαριθμική συνάρτηση.

✓ Στο τέλος του βιβλίου γίνεται μια **επανάληψη** με όλη τη θεωρία σε ερωτήσεις και κατάλληλα επιλεγμένες επαναληπτικές ασκήσεις.

Επίσης, δίνονται οι **απαντήσεις και υποδείξεις** για όλες τις ερωτήσεις και ασκήσεις του βιβλίου.

Με ευχαρίστηση θα δεχθώ οποιαδήποτε υπόδειξη που θα μπορούσε να συμβάλλει στη βελτίωση αυτού του βιβλίου.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Συστήματα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Ιδιότητες συναρτήσεων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Τριγωνομετρία

Κεφάλαιο 1: Συστήματα

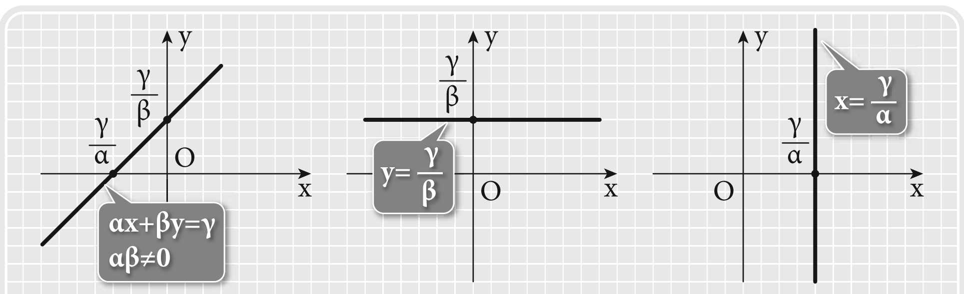
1.1 Γραμμικά συστήματα

Η εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$

Κάθε εξίσωση της μορφής $\boldsymbol{\alpha x+\beta y=\gamma}$ ονομάζεται **γραμμική εξίσωση** με αγνώστους x και y. Κάθε ζεύγος (x, y) που επαληθεύει αυτήν, ονομάζεται **λύση** της γραμμικής εξίσωσης.

Θα αποδείξουμε ότι **η εξίσωση $\boldsymbol{\alpha x+\beta y=\gamma}$, με $\boldsymbol{\alpha \neq 0}$ ή $\boldsymbol{\beta \neq 0}$, παριστάνει ευθεία.**

- Αν $\beta \neq 0$, η εξίσωση αυτή γράφεται $\beta y = -\alpha x + \gamma$, δηλαδή $y = -\frac{\alpha}{\beta}x + \frac{\gamma}{\beta}$. Επομένως, παριστάνει ευθεία με κλίση $-\frac{\alpha}{\beta}$ και τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $\left(0, \frac{\gamma}{\beta}\right)$ (σχήματα 1 και 2, $\alpha \neq 0$ και $\alpha = 0$ αντιστοίχως).
- Αν $\beta = 0$, οπότε $\alpha \neq 0$, η εξίσωση γράφεται $x = \frac{\gamma}{\alpha}$ και παριστάνει ευθεία παράλληλη στον $y'y$, που τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $\left(\frac{\gamma}{\alpha}, 0\right)$ (σχήμα 3).



Σχήμα 1 Σχήμα 2 Σχήμα 3

Αντιστρόφως, η εξίσωση μιας ευθείας παίρνει τη μορφή $αx+βy=γ$, με $α\neq 0$ ή $β\neq 0$, διότι:

- Αν η ευθεία έχει κλίση $λ$, η εξίσωσή της είναι $y=λx+κ$ ή $λx+(-1)y=-κ$, δηλαδή έχει τη μορφή $αx+βy=γ$ με $β=-1\neq 0$.
- Αν η ευθεία δεν έχει κλίση, δηλαδή είναι κατακόρυφη, η εξίσωσή της είναι $x=κ$, δηλαδή έχει τη μορφή $αx+βy=γ$, με $α=1\neq 0$.

Γραμμικό σύστημα 2×2

Αν ζητούνται οι κοινές λύσεις των γραμμικών εξισώσεων

$$αx+βy=γ \quad \text{και} \quad α'x+β'y=γ',$$

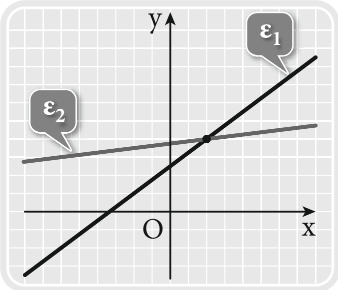
τότε λέμε ότι έχουμε να λύσουμε ένα **γραμμικό σύστημα** δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους (συντομότερα, γραμμικό σύστημα 2×2) και το γράφουμε

$$\begin{cases} αx+βy=γ \\ α'x+β'y=γ' \end{cases}$$

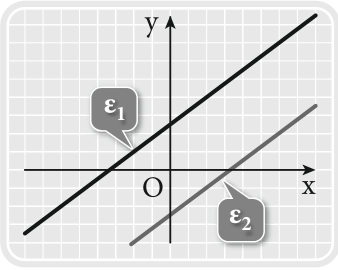
Λύση αυτού του συστήματος ονομάζεται κάθε ζεύγος (x, y) που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις. Δύο συστήματα με τις ίδιες λύσεις ονομάζονται **ισοδύναμα**.

Οι δύο γραμμικές εξισώσεις του συστήματος παριστάνουν δύο ευθείες $ε_1$ και $ε_2$.

i) Αν οι $ε_1$, $ε_2$ τέμνονται, τότε υπάρχει **μοναδική λύση** του συστήματος, που είναι οι συντεταγμένες του κοινού σημείου των δύο ευθειών.



ii) Αν $ε_1//ε_2$, τότε το σύστημα δεν έχει καμιά λύση και είναι **αδύνατο**.



iii) Αν οι ε_1, ε_2 συμπίπτουν, τότε το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις,** που είναι οι συντεταγμένες όλων των σημείων της ευθείας.

- Η επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 2×2 γίνεται με μια από τις παρακάτω μεθόδους, γνωστές από το Γυμνάσιο.

Μέθοδος της αντικατάστασης

Λύνουμε τη μια εξίσωση ως προς ένα άγνωστο, τον οποίο αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση και έτσι βρίσκουμε τον άλλο άγνωστο. Μετά, βρίσκουμε και τον πρώτο άγνωστο.

Για παράδειγμα, θα λύσουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 3x + y = -1 & \textbf{(1)} \\ 5x + 4y = 3 & \textbf{(2)} \end{cases}$$

Η **(1)** γράφεται $y = -3x - 1$ και αντικαθιστούμε στη **(2)**.

$$5x + 4(-3x - 1) = 3 \Leftrightarrow 5x - 12x - 4 = 3 \Leftrightarrow -7x = 7 \Leftrightarrow x = -1.$$

Επομένως, $y = -3\cdot(-1) - 1 = 3 - 1 = 2$.

Άρα, λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x, y) = (-1, 2)$.

Μέθοδος των αντίθετων συντελεστών ή της απαλοιφής

Πολλαπλασιάζουμε με κατάλληλους αριθμούς τα μέλη των δύο εξισώσεων, ώστε να προκύψουν αντίθετοι συντελεστές του ενός αγνώστου στις δύο εξισώσεις. Στη συνέχεια, προσθέτουμε τις δύο εξισώσεις και βρίσκουμε τον άλλο άγνωστο.

Για παράδειγμα, θα λύσουμε το σύστημα $\begin{cases} 2x - 3y = 13 \\ 3x + 4y = -6 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x - 3y = 13 \\ 3x + 4y = -6 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot\ (-3) \\ \cdot\quad 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} -6x + 9y = -39 \\ \ \ 6x + 8y = -12 \end{cases}$$

Προσθέτουμε τις δύο εξισώσεις και έχουμε

$$17y = -51 \Leftrightarrow y = -3.$$

Η εξίσωση $2x - 3y = 13$, για $y = -3$, δίνει $2x + 9 = 13$ ή $2x = 4$ ή $x = 2$.

Άρα, λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x, y) = (2, -3)$.

Μέθοδος των οριζουσών

- Αν δοθούν τέσσερις πραγματικοί αριθμοί α, β, α' και β', η παράσταση $\alpha\beta' - \alpha'\beta$ συμβολίζεται με $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$ και ονομάζεται **ορίζουσα**.

  Δηλαδή, έχουμε $\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\alpha'} & \boldsymbol{\beta'} \end{vmatrix} = \boldsymbol{\alpha\beta' - \alpha'\beta}.$

  Για παράδειγμα, έχουμε $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-1) \cdot 3 = 8 + 3 = 11.$

- Για το σύστημα $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$

  θέτουμε $\mathbf{D} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\alpha'} & \boldsymbol{\beta'} \end{vmatrix}$, $\mathbf{D_x} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\gamma} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma'} & \boldsymbol{\beta'} \end{vmatrix}$ **και** $\mathbf{D_y} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\gamma} \\ \boldsymbol{\alpha'} & \boldsymbol{\gamma'} \end{vmatrix}$

  i) Αν $D \neq 0$, το σύστημα έχει τη μοναδική λύση (x, y) με

  $$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{Dx}}{\mathbf{D}}, \quad \mathbf{y} = \frac{\mathbf{Dy}}{\mathbf{D}}.$$

  ii) Αν $D = 0$, το σύστημα είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις.

  Για παράδειγμα, θα λύσουμε το παραμετρικό σύστημα

  $$\begin{cases} x + \lambda^2 y = 2 \\ x + y = 2\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R} \text{ παράμετρος})$$

  Έχουμε:

  $$D = \begin{vmatrix} 1 & \lambda^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \lambda^2 = (1-\lambda)(1+\lambda),$$

  $$D_x = \begin{vmatrix} 2 & \lambda^2 \\ 2\lambda & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2\lambda^3 = 2(1-\lambda^3) = 2(1-\lambda)(1+\lambda+\lambda^2)$$

  $$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2\lambda \end{vmatrix} = 2\lambda - 2 = 2(\lambda - 1).$$

  ► Αν $D \neq 0$, δηλαδή $\lambda \neq \pm 1$, τότε το σύστημα έχει τη μοναδική λύση (x, y) με

  $$x = \frac{Dx}{D} = \frac{2(1-\lambda)(1+\lambda+\lambda^2)}{(1-\lambda)(1+\lambda)} = \frac{2(1+\lambda+\lambda^2)}{1+\lambda} \quad \text{και}$$

  $$y = \frac{Dy}{D} = \frac{2(\lambda-1)}{(1-\lambda)(1+\lambda)} = \frac{-2}{1+\lambda}.$$

▸ Αν $\lambda=1$, τότε $D=0$ και το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow x+y=2 \Leftrightarrow y=2-x$$

Άρα, έχει άπειρες λύσεις, που είναι τα ζεύγη $(x, y)=(\kappa, 2-\kappa)$, $\kappa\in\mathbb{R}$

▸ Αν $\lambda=-1$, τότε $D=0$ και το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=-2 \end{cases}, \quad \text{που είναι αδύνατο.}$$

Γραμμικό σύστημα 3×3

Ένα γραμμικό σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους λύνεται συνήθως με τη μέθοδο αντικατάστασης, ως εξής: Λύνουμε τη μια εξίσωση ως προς ένα άγνωστο και τον αντικαθιστούμε στις άλλες δύο εξισώσεις. Έτσι, καταλήγουμε σ' ένα γραμμικό σύστημα 2×2. Επομένως, ένα γραμμικό σύστημα 3×3 ή έχει μοναδική λύση ή είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις.

Φυσικά, αυτή η μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί σ' ένα οποιοδήποτε γραμμικό σύστημα $\nu\times\nu$, με $\nu\geq4$.

Για παράδειγμα, θα λύσουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 2x+3y-z=-2 & (1) \\ x+5y+2z=3 & (2) \\ 3x-4y+5z=25 & (3) \end{cases}$$

Λύνουμε την (1) ως προς z και έχουμε

$$z=2x+3y+2 \qquad (4)$$

Οι (2) και (3), λόγω της (4), γράφονται

$$\begin{cases} x+5y+2(2x+3y+2)=3 \\ 3x-4y+5(2x+3y+2)=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+11y=-1 & (5) \\ 13x+11y=15 & (6) \end{cases}$$

Λύνουμε, τώρα, το σύστημα των (5) και (6) με οποιαδήποτε μέθοδο. Παρατηρούμε, όμως, ότι το y έχει τον ίδιο συντελεστή στις δύο εξισώσεις. Έτσι, αφαιρώντας τις (5) και (6) κατά μέλη, έχουμε $-8x=-16$ ή $x=2$.

Η (5) γράφεται $10+11y=-1 \Leftrightarrow 11y=-11 \Leftrightarrow y=-1$.

Η (4) γράφεται $z=2\cdot2+3\cdot(-1)+2 \Leftrightarrow z=3$.

Άρα, λύση του συστήματος είναι η τριάδα $(x, y, z)=(2, -1, 3)$.

Παραδείγματα και εφαρμογές

1.

Να λυθεί γραφικά και αλγεβρικά το σύστημα

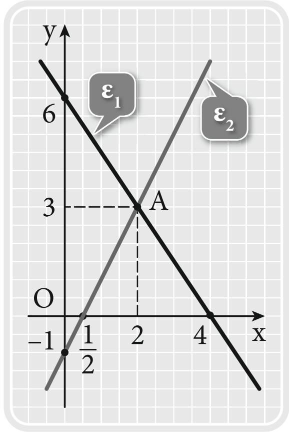
$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 & (1) \\ 2x - y = 1 & (2) \end{cases}$$

Λύση:

- Κατασκευάζουμε τις ευθείες

$$\varepsilon_1:\ 3x+2y=12 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2:\ 2x-y=1$$

Η ε_1 τέμνει τους άξονες στα σημεία $(0, 6)$ και $(4, 0)$, ενώ η ε_2 τους τέμνει στα σημεία $(0, -1)$ και $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.



Η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x, y) = (2, 3)$ των συντεταγμένων του κοινού σημείου Α των δύο ευθειών. Οι συντεταγμένες αυτές βρίσκονται αλγεβρικά.

- Λύνουμε τη (2) ως προς y και έχουμε

$$y = 2x - 1 \quad \textbf{(3)}$$

Η (1), λόγω της (3), γράφεται

$$3x+2(2x-1)=12 \Leftrightarrow 3x+4x-2=12 \Leftrightarrow 7x=14 \Leftrightarrow x=2.$$

Η (3) δίνει $y=2\cdot 2-1=3$.

Άρα, λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x, y) = (2, 3)$.

2.

Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα

α) $\begin{cases} \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y} = 7 \\ \dfrac{5}{x} + \dfrac{3}{y} = 12 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 2x - 5y = 8 \\ |3x + y| = 5 \end{cases}$

Λύση:

α) Θέτουμε $\frac{1}{x} = α$ και $\frac{1}{y} = β$, οπότε το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} 2α - β = 7 & (1) \\ 5α + 3β = 12 & (2) \end{cases}$$

Λύνουμε την **(1)** ως προς β και έχουμε $β = 2α - 7$ **(3)**

Η **(2)**, λόγω της **(3)**, γράφεται

$$5α + 3(2α - 7) = 12 \Leftrightarrow 5α + 6α - 21 = 12 \Leftrightarrow 11α = 33 \Leftrightarrow α = 3.$$

Η (3) δίνει $β = -1$.

Επομένως, $\frac{1}{x} = 3$ και $\frac{1}{y} = -1$, δηλαδή $x = \frac{1}{3}$ και $y = -1$.

β) Το σύστημα αυτό είναι ισοδύναμο με τα συστήματα

$$(Σ_1)\begin{cases} 2x - 5y = 8 \\ 3x + y = 5 \end{cases} \quad \text{και} \quad (Σ_2)\begin{cases} 2x - 5y = 8 \\ 3x + y = -5 \end{cases}$$

Με μια από τις γνωστές μεθόδους, βρίσκουμε ότι η λύση του $(Σ_1)$ είναι $(x, y) = \left(\frac{33}{17}, \frac{-14}{17}\right)$, ενώ η λύση του $(Σ_2)$ είναι $(x, y) = (-1, -2)$.

Άρα, το αρχικό σύστημα έχει δύο λύσεις, τις

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{33}{17}, \frac{-14}{17}\right) \quad \textit{και} \quad (x_2, y_2) = (-1, -2).$$

3.

Να βρεθεί διψήφιος αριθμός, του οποίου το ψηφίο των δεκάδων είναι τα $\frac{2}{3}$ των ψηφίων των μονάδων και με εναλλαγή των ψηφίων του προκύπτει αριθμός κατά 18 μεγαλύτερος.

Λύση:

Έστω ότι ο αριθμός έχει x δεκάδες και y μονάδες, οπότε ισχύει

$$x = \frac{2}{3}y \qquad (1)$$

Ο αριθμός αυτός ισούται με $x \cdot 10 + y \cdot 1 = 10x + y$. Με αλλαγή των ψηφίων του (y δεκάδες και x μονάδες), ο αριθμός ισούται με $10y + x$, οπότε έχουμε

$$10y + x = (10x + y) + 18 \Leftrightarrow 9y - 9x = 18 \Leftrightarrow y - x = 2 \qquad (2)$$

Η (2), λόγω της (1), γράφεται

$$y-\frac{2}{3}y=2 \Leftrightarrow 3y-2y=6 \Leftrightarrow y=6$$

Η (1) δίνει $x=\frac{2}{3}\cdot 6=4$. Άρα, ο αριθμός είναι το 46.

4.

Να βρεθεί η σχετική θέση των ευθειών

$$\varepsilon_1:\ \lambda x+y=2 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2:\ x+4y=3\mu$$

για τις διάφορες πραγματικές τιμές των λ και μ.

Λύση:

Θεωρούμε το σύστημα των εξισώσεων των δύο ευθειών, που είναι το

$$\begin{cases} \lambda x+y=2 \\ x+4y=3\mu \end{cases}.$$

► Οι δύο ευθείες τέμνονται, όταν η ορίζουσα D του συστήματος είναι διάφορη του μηδενός, δηλαδή όταν

$$D=\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\neq 0 \Leftrightarrow 4\lambda-1\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq\frac{1}{4}.$$

► Αν $\lambda=\frac{1}{4}$, το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x+y=2 \\ x+4y=3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4y=8 \\ x+4y=3\mu \end{cases}.$$

i) Αν $3\mu\neq 8$, δηλαδή $\mu\neq\frac{8}{3}$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο, που σημαίνει ότι οι ευθείες είναι παράλληλες.

ii) Αν $3\mu=8$, δηλαδή $\mu=\frac{8}{3}$, τότε οι δύο ευθείες συμπίπτουν.

Συμπέρασμα: Αν $\lambda\neq\frac{1}{4}$, τότε οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται.

Αν $\lambda=\frac{1}{4}$ και $\mu\neq\frac{8}{3}$, τότε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

Αν $\lambda=\frac{1}{4}$ και $\mu=\frac{8}{3}$, τότε οι ευθείες συμπίπτουν.

5.

Να λυθεί και να διερευνηθεί το σύστημα

$$\begin{cases} (\alpha+1)x-2(\alpha-1)y=3 \\ x+3\alpha y=4\alpha+5 \end{cases}$$

Λύση:

Έχουμε

► $D=\begin{vmatrix} \alpha+1 & -2(\alpha-1) \\ 1 & 3\alpha \end{vmatrix}=3\alpha(\alpha+1)+2(\alpha-1)=3\alpha^2+5\alpha-2.$

Το τριώνυμο $3\alpha^2+5\alpha-2$ έχει $\Delta=25+24=49$ και ρίζες

$$\alpha_1=\frac{-5+7}{6}=\frac{1}{3} \quad \textit{και} \quad \alpha_2=\frac{-5-7}{6}=-2.$$

Επομένως, $D=3\left(\alpha-\frac{1}{3}\right)(\alpha+2)=(3\alpha-1)(\alpha+2).$

► $D_x=\begin{vmatrix} 3 & -2(\alpha-1) \\ 4\alpha+5 & 3\alpha \end{vmatrix}=9\alpha+2(\alpha-1)(4\alpha+5)=8\alpha^2+11\alpha-10=(8\alpha-5)(\alpha+2).$

► $D_y=\begin{vmatrix} \alpha+1 & 3 \\ 1 & 4\alpha+5 \end{vmatrix}=(\alpha+1)(4\alpha+5)-3=4\alpha^2+9\alpha+2=(4\alpha+1)(\alpha+2).$

Η ορίζουσα D μηδενίζεται όταν $\alpha=\frac{1}{3}$ ή $\alpha=-2$.

Έτσι, έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

i) Αν $D\neq 0$, δηλαδή $\alpha\neq\frac{1}{3}$ και $\alpha\neq -2$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση (x, y) με

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{(8\alpha-5)(\alpha+2)}{(3\alpha-1)(\alpha+2)}=\frac{8\alpha-5}{3\alpha-1} \quad \text{και} \quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{(4\alpha+1)(\alpha+2)}{(3\alpha-1)(\alpha+2)}=\frac{4\alpha+1}{3\alpha-1}.$$

ii) Αν $\alpha=\frac{1}{3}$, τότε $D=0$ και το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x+\frac{4}{3}y=3 \\ x+y=\frac{19}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\frac{9}{4} \\ x+y=\frac{19}{3} \end{cases},$$

που προφανώς είναι αδύνατο.

iii) Αν $\alpha=-2$, τότε $D=0$ και το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} -x+6y=3 \\ x-6y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow x-6y=-3 \Leftrightarrow x=6y-3.$$

Άρα, το σύστημα έχει τις άπειρες λύσεις $(x, y)=(6\kappa-3, \kappa)$, $\kappa\in\mathbb{R}$.

6.

Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί x, y, z και w που επαληθεύουν συγχρόνως τις εξισώσεις

$x-y+z-w=0$, $8x+4y+2z+w=-12$, $3x-2y+z=8$ και $12x+4y+z=7$

Λύση:

Λύνουμε την 1η εξίσωση ως προς w και έχουμε $w=x-y+z$.

Οι άλλες τρεις εξισώσεις γράφονται

$$\begin{cases} 8x+4y+2z+x-y+z=12 \\ 3x-2y+z=8 \\ 12x+4y+z=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x+3y+3z=-12 \\ 3x-2y+z=8 \\ 12x+4y+z=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y+z=-4 & (1) \\ 3x-2y+z=8 & (2) \\ 12x+4y+z=7 & (3) \end{cases}$$

Θα λύσουμε το σύστημα των (1), (2) και (3).

Με αφαίρεση των (1) και (2) κατά μέλη έχουμε $3y=-12$, δηλαδή $y=-4$.

Η (1), τώρα, γράφεται $3x-4+z=-4 \Leftrightarrow 3x+z=0 \Leftrightarrow z=-3x$.

Επίσης, η (3) γράφεται

$$12x+4(-4)-3x=7 \Leftrightarrow 9x=23 \Leftrightarrow x=\frac{23}{9}.$$

Τέλος, έχουμε $z=-3\cdot\frac{23}{9}=-\frac{23}{3}$ και $w=x-y+z=\frac{23}{9}+4-\frac{23}{3}=-\frac{10}{9}$.

Άρα, $x=\frac{23}{9}$, $y=-4$, $z=\frac{-23}{3}$ και $w=-\frac{10}{9}$.

7.

Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής που διέρχεται από τα σημεία $A(1, 0)$, $B(2, 9)$ και $\Gamma(-1, -6)$.

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση μιας παραβολής έχει τη μορφή $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

Για να διέρχεται η παραβολή αυτή από τα σημεία Α, Β και Γ, θα πρέπει οι συντεταγμένες των σημείων αυτών να επαληθεύουν την εξίσωσή της, δηλαδή

$$\begin{cases} 0 = \alpha\cdot 1^2+\beta\cdot 1+\gamma \\ 9 = \alpha\cdot 2^2+\beta\cdot 2+\gamma \\ -6 = \alpha(-1)^2+\beta(-1)+\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 & (1) \\ 4\alpha+2\beta+\gamma = 9 & (2) \\ \alpha-\beta+\gamma = -6 & (3) \end{cases}$$

Με αφαίρεση την (1) και (3) κατά μέλη έχουμε $2\beta=6$, δηλαδή $\beta=3$.

Η (1), τώρα, δίνει $\gamma=-\alpha-3$ και η (2) γράφεται

$$4\alpha+6-\alpha-3=9 \Leftrightarrow 3\alpha=6 \Leftrightarrow \alpha=2.$$

Επομένως, $\gamma=-2-3=-5$ και η εξίσωση της παραβολής είναι

$$y=2x^2+3x-5.$$

8.

Να λυθούν τα συστήματα

α) $\begin{cases} x+y=-1 \\ y+z=2 \\ z+x=7 \end{cases}$ **και** **β)** $\begin{cases} x+y+z=\alpha \\ y+z+w=\beta \\ z+w+x=\gamma \\ w+x+y=\delta \end{cases}$

Λύση:

α) Προσθέτουμε τις εξισώσεις του συστήματος κατά μέλη και έχουμε

$$2x+2y+2z=8 \Leftrightarrow x+y+z=4.$$

Η τελευταία, λόγω της 1ης εξίσωσης, γράφεται $-1+z=4 \Leftrightarrow z=5$.

Η 2η εξίσωση δίνει $y=2-5=-3$, ενώ η 1η δίνει $x=-1+3=2$.

Άρα, $(x, y, z)=(2, -3, 5)$.

β) Με πρόσθεση κατά μέλη όλων των εξισώσεων, έχουμε

$$3x+3y+3z+3w=\alpha+\beta+\gamma+\delta \Leftrightarrow x+y+z+w=\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{3}$$

Επομένως,

- $(x+y+z)+w=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{3} \Leftrightarrow \alpha+w=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{3} \Leftrightarrow w=\dfrac{\beta+\gamma+\delta-2\alpha}{3}$.
- $(y+z+w)+x=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{3} \Leftrightarrow \beta+x=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{3} \Leftrightarrow x=\dfrac{\alpha+\gamma+\delta-2\beta}{3}$.

- $(z+w+x)+y = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{3} \Leftrightarrow \gamma+y = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{3} \Leftrightarrow y = \dfrac{\alpha+\beta+\delta-2\gamma}{3}$.

- $(w+x+y)+z = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{3} \Leftrightarrow \delta+z = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{3} \Leftrightarrow z = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma-2\delta}{3}$.

Άρα,

$$(x,y,z,w) = \left(\frac{\alpha-2\beta+\gamma+\delta}{3}, \frac{\alpha+\beta-2\gamma+\delta}{3}, \frac{\alpha+\beta+\gamma-2\delta}{3}, \frac{-2\alpha+\beta+\gamma+\delta}{3}\right).$$

9.

Να εξεταστεί αν οι ευθείες

$$\boldsymbol{\varepsilon_1: x-2y=\alpha+2, \quad \varepsilon_2: x+y=-1 \quad \text{και} \quad \varepsilon_3: \alpha x+y=1}$$

διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Λύση:

Οι τρεις ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο $A(x, y)$, όταν έχει μοναδική λύση το σύστημα

$$\begin{cases} x-2y = \alpha+2 & (1)\\ x+y = -1 & (2)\\ \alpha x+y = 1 & (3)\end{cases}$$

- Αρχικά, θα λύσουμε το σύστημα των **(1)** και **(2)**, δηλαδή θα βρούμε το κοινό σημείο (αν υπάρχει) των ε_1 και ε_2.

  Με αφαίρεση των **(1)** και **(2)** κατά μέλη έχουμε

  $$-3y = \alpha+3 \Leftrightarrow y = -\frac{\alpha+3}{3}$$

  Η **(2)** δίνει $x = -1-y = -1+\dfrac{\alpha+3}{3} = \dfrac{\alpha}{3}$.

- Εξετάζουμε, τώρα, αν η λύση $(x,y) = \left(\dfrac{\alpha}{3}, -\dfrac{\alpha+3}{3}\right)$ επαληθεύει και την **(3)**. Αυτό συμβαίνει όταν ισχύει:

  $$\alpha \cdot \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha+3}{3} = 1 \Leftrightarrow \alpha^2-\alpha-3 = 3 \Leftrightarrow \alpha^2-\alpha-6 = 0 \Leftrightarrow \alpha=3 \text{ ή } \alpha=-2.$$

  Έτσι, έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

  i) Αν $\alpha \neq 3$ και $\alpha \neq -2$, τότε οι τρεις ευθείες δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο.

ii) Αν $\alpha = 3$, οι τρεις ευθείες διέρχονται από το σημείο με συντεταγμένες $(x, y) = \left(\frac{\alpha}{3}, -\frac{\alpha+3}{3}\right) = (1, -2)$.

iii) Αν $\alpha = -2$, οι τρεις ευθείες διέρχονται από το σημείο με συντεταγμένες $(x, y) = \left(\frac{-2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

10.

Αν ένα τρένο αυξήσει την ταχύτητά του κατά 25 km/h, τότε φτάνει στον προορισμό του 1 ώρα νωρίτερα. Αν ελαττώσει την ταχύτητά του κατά 25 km/h, τότε φτάνει 1 ώρα και 40 λεπτά αργότερα. Να βρεθεί η ταχύτητα του τρένου και η απόσταση που διήνυσε.

Λύση:

Έστω υ(km/h) η ταχύτητα του τρένου, x η απόσταση που διήνυσε (σε km) και t ο χρόνος του ταξιδίου (σε ώρες).

Γνωρίζουμε ότι ισχύει $$x = \upsilon t \qquad \textbf{(1)}$$

Από τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε και τις εξισώσεις

$$x = (\upsilon + 25)\cdot(t - 1) \qquad \textbf{(2)}$$

και $$x = (\upsilon - 25)\cdot\left(t + \frac{5}{3}\right) \qquad \textbf{(3)}$$

$$\left(1\text{h } 40\text{min} = \frac{5}{3}\text{h}\right)$$

Οι **(2)** και **(3)**, λόγω της **(1)**, γράφονται

$$\begin{cases} \upsilon t = \upsilon t - \upsilon + 25t - 25 \\ \upsilon t = \upsilon t + \frac{5}{3}\upsilon - 25t - \frac{125}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\upsilon + 25t = 25 & \textbf{(4)} \\ \frac{5}{3}\upsilon - 25t = \frac{125}{3} & \textbf{(5)} \end{cases}$$

Με πρόσθεση των **(4)** και **(5)** έχουμε $\frac{2}{3}\upsilon = \frac{200}{3}$, δηλαδή $\upsilon = 100\,\text{km/h}$.

Η **(4)** δίνει $t = 5\,\text{h}$, οπότε η **(1)** δίνει $x = 500\,\text{km}$.

Άρα, η ταχύτητα του τρένου είναι $100\,\text{km/h}$ και η απόσταση που διήνυσε είναι $500\,\text{km}$.

Ασκήσεις Α΄ ομάδας

1. Να λυθούν γραφικά τα παρακάτω συστήματα.

α. $\begin{cases} x = 2 \\ x+y = 5 \end{cases}$ **β.** $\begin{cases} y = 1 \\ x+2y = 3 \end{cases}$ **γ.** $\begin{cases} x+y = 5 \\ x-y = 1 \end{cases}$ **δ.** $\begin{cases} 2x+y = 3 \\ 4x-2y = 2 \end{cases}$

2. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα.

α. $\begin{cases} x+3y = 2 \\ 5x-3y = 10 \end{cases}$ **δ.** $\begin{cases} 3x+2y = 5 \\ 0,6x+0,4y = 1 \end{cases}$ **ζ.** $\begin{cases} 2(3x-y)-5(x+3y) = x-34 \\ \dfrac{x-1}{3}-\dfrac{4-2y}{5} = 0 \end{cases}$

β. $\begin{cases} 4x+y = 2 \\ 3x+2y = -1 \end{cases}$ **ε.** $\begin{cases} x-2y = 15 \\ -3x+6y = 18 \end{cases}$ **η.** $\begin{cases} 0,3x+0,7y = 1 \\ 0,5x+1,3y = 1,8 \end{cases}$

γ. $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3} = 7 \\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{4} = 4 \end{cases}$ **στ.** $\begin{cases} \dfrac{3x+y}{2}-\dfrac{x-3y}{3} = -3 \\ \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{4y-1}{27} \end{cases}$ **θ.** $\begin{cases} \dfrac{x+y-3}{2} = \dfrac{3x-2y+1}{5} \\ -0,2x+1,8y = 3,4 \end{cases}$

3. **α.** Να βρεθούν δύο αριθμοί με άθροισμα 34 και διαφορά 12.

β. Να βρεθούν δύο αριθμοί με άθροισμα α και διαφορά β.

4. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα.

α. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{y} = 5 \\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{7}{y} = -17 \end{cases}$ **γ.** $\begin{cases} \sqrt{x}-3\sqrt{y} = 1 \\ 5\sqrt{x}-8\sqrt{y} = 12 \end{cases}$ **ε.** $\begin{cases} 2x^2-3y^2 = -7 \\ x^2+5y^2 = 16 \end{cases}$

β. $\begin{cases} \dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{y+2} = -5 \\ \dfrac{5}{x-1}-\dfrac{7}{y+2} = 31 \end{cases}$ **δ.** $\begin{cases} 3|x|+8|y| = 46 \\ 2|x|+|y| = 9 \end{cases}$ **στ.** $\begin{cases} x^2+y^3 = 12 \\ 2y^3-4x^2 = 0 \end{cases}$

5. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία

α. $A(2, 3)$ και $B(-5, 10)$ **β.** $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$ και $B\left(-3, \frac{1}{5}\right)$.

6. Να βρεθούν οι αριθμοί α και β, για τους οποίους το σύστημα

$\begin{cases} \alpha x+\beta y = 6 \\ (\alpha+2)x-(\beta-2)y = \alpha-5\beta+1 \end{cases}$ έχει λύση το ζεύγος $(x, y)=(-2, 3)$.

7. Ο οδηγός ενός αυτοκινήτου χρησιμοποιεί το φρένο και το αυτοκίνητο συνεχίζει να κινείται με ταχύτητα $\upsilon=\alpha t+\beta$, όπου α, β, σταθερές και t ο χρόνος που πέρασε από τη στιγμή που πάτησε το φρένο. Τη στιγμή του φρεναρίσματος το αυτοκίνητο είχε ταχύτητα $30m/sec$ και μετά $5sec$ έχει ταχύτητα $5m/sec$. Να βρεθούν:

α. οι αριθμοί α και β,

β. η ταχύτητα του αυτοκινήτου 2sec μετά το φρενάρισμα και

γ. ο χρόνος που χρειάζεται μέχρι να σταματήσει.

8. Αν στους όρους ενός κλάσματος προσθέσουμε το 4, τότε γίνεται ίσο με $\frac{3}{4}$. Αν όμως αφαιρέσουμε από τους όρους το 2, τότε γίνεται ίσο με $\frac{1}{2}$. Να βρεθεί το κλάσμα.

9. Να βρεθούν οι αριθμοί λ και μ, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{\lambda x + \mu}{x^2 + 1}$ να διέρχεται από τα σημεία $A\left(1, \frac{-5}{2}\right)$ και $B(-2, 2)$. Μετά να αποδειχθεί ότι η C_f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

10. Να λυθούν με τη μέθοδο οριζουσών τα παρακάτω συστήματα.

α. $\begin{cases} 3x+5y=-9 \\ -\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=-2 \end{cases}$ **β.** $\begin{cases} 3x-4y = 1 \\ -1,5x+2y = 3,4 \end{cases}$ **γ.** $\begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{2-3y}{2} \\ 4x+18y-16 = 0 \end{cases}$

11. Να λυθούν οι εξισώσεις

α. $\begin{vmatrix} x & x-2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$ **β.** $\begin{vmatrix} x & x+2 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0$ **γ.** $\begin{vmatrix} x^2-1 & (x-1)^2 \\ x+1 & 2x-1 \end{vmatrix} = 0$

12. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $\begin{vmatrix} x+y & x-y \\ 2y & x-y \end{vmatrix} \geq 0$.

13. Να λυθούν τα παραμετρικά συστήματα

α. $\begin{cases} (\lambda-1)x-y = 2 \\ x+(\lambda+1)y = 2 \end{cases}$ και **β.** $\begin{cases} (\lambda+2)x-3y = 2\lambda+3 \\ x+\lambda y = 3 \end{cases}$

14. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα

α. $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-3y+5z=5 \\ 3x+5y-7z=-2 \end{cases}$ **δ.** $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x-y+z=-5 \\ 5x+5y-2z=-2 \end{cases}$ **ζ.** $\begin{cases} 3x-2y+3z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ 5x-y+7z=0 \end{cases}$

β. $\begin{cases} 2x+3y-5z=18 \\ 8y+7z=17 \\ 5x-9z=19 \end{cases}$ **ε.** $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 3y+5z=7 \\ 2x+5z=11 \end{cases}$ **η.** $\begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$

γ. $\begin{cases} 2x+3y+5z=3 \\ -x+6y-10z=-\frac{1}{2} \\ 4x-9y+z=-\frac{4}{5} \end{cases}$ **στ.** $\begin{cases} 2x+3y-7z=13 \\ 5x-y+2z=-17 \\ -7x-2y+5z=30 \end{cases}$ **θ.** $\begin{cases} 2x-5y+3z=0 \\ 3x+y+z=0 \\ x+6y-2z=0 \end{cases}$

15. Ένα τρίγωνο έχει μήκη πλευρών $AB=6$, $A\Gamma=7$ και $B\Gamma=9$. Αν ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου εφάπτεται των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ στα σημεία Δ, Ε και Ζ αντίστοιχα, να βρεθούν τα μήκη των ΑΔ, ΒΖ και ΓΕ.

16. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2+\beta x+\gamma$, αν γνωρίζαμε ότι διέρχεται από το σημείο Α(3, 10) και το ένα σημείο τομής της με τον $x'x$ έχει τετμημένη –2.

17. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, η οποία διέρχεται από τα σημεία Α(0, –3), Β(1, –3) και Γ(2, –5).

Ασκήσεις Β′ ομάδας

1. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα.

α. $\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=5 \\ |x-2y|=1 \end{cases}$ **γ.** $\begin{cases} 4|x-2|+|y-1|=5 \\ 4x-3y=6 \end{cases}$ **ε.** $\begin{cases} |x|-2y=2 \\ |y|+x=5 \end{cases}$

β. $\begin{cases} |x-1|+|2y+1|=0 \\ 3x+4y=10 \end{cases}$ **δ.** $\begin{cases} |x|+|y-1|=3 \\ |x|+|y-2|=4 \end{cases}$ **στ.** $\begin{cases} |x|+2|y-1|=4 \\ |x|+|y|=2 \end{cases}$

2. Να βρεθούν οι αριθμοί α και β, για τους οποίους είναι ισοδύναμα τα συστήματα

$$\begin{cases} 2x-3y=5 \\ \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{3y+6}{3} \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} (\alpha-2)x+(2\beta-1)y=\alpha-3\beta \\ \alpha x-(\beta-3)y=1 \end{cases}$$

3. Αν $0{,}5\alpha-0{,}4\beta=0{,}9$ και $0{,}1\alpha+0{,}21\beta+0{,}11=0$, να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} \alpha|x-1|+2\beta|y|=-4 \\ (\alpha^2+2)|x-1|+\beta^2|y|=4\alpha^3+5\beta^2 \end{cases}$$

4. Να λυθούν τα παραμετρικά συστήματα

α. $\begin{cases} (\lambda+1)x-2y=\lambda \\ \lambda x-\lambda y=2\lambda-\dfrac{3}{2} \end{cases}$ **γ.** $\begin{cases} (\lambda-2)x+5y=0 \\ x+(\lambda+2)y=0 \end{cases}$ **ε.** $\begin{cases} \lambda x+\mu y=0 \\ -\mu x+\lambda y=0 \end{cases}$

β. $\begin{cases} (\lambda-1)x+2\lambda y=2 \\ 2\lambda x+(\lambda-1)y=\lambda-1 \end{cases}$ **δ.** $\begin{cases} (2-\lambda)x+y=\lambda+4 \\ (\lambda+4)x+(3\lambda+2)y=8-7\lambda \end{cases}$

5. Να λυθούν με τη μέθοδο οριζουσών τα συστήματα

α. $\begin{cases} (2-\sqrt{3})x+(2+\sqrt{3})y=2 \\ \sqrt{3}x-(4-3\sqrt{3})y=12\sqrt{3}-14 \end{cases}$ και **β.** $\begin{cases} \sqrt{2}x+\sqrt[3]{4}y=4 \\ (1-2\sqrt{2})y+2\sqrt[3]{2}x=\sqrt[3]{2} \end{cases}$

6. Να βρεθούν οι αριθμοί λ και μ, για τους οποίους είναι συγχρόνως αδύνατα τα συστήματα

$$\begin{cases} \lambda x+\mu y=1 \\ 2x+3y=-2 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} (2\lambda-1)x+(\mu-4)y=4 \\ 6x-2y=5 \end{cases}$$

7. Να βρεθεί ο αριθμός λ, ώστε να είναι αδύνατο το σύστημα

$$\begin{cases} (\lambda+6)x+(3\lambda+4)y=\lambda+2 \\ (2\lambda+3)x+(\lambda+2)y=3\lambda+1 \end{cases}$$

8. Να βρεθεί ο αριθμός μ, για τον οποίο οι ευθείες

$\varepsilon_1: (\mu+1)x-y=2\mu$ και $\varepsilon_2: (5\mu-2)x+4y=20\mu+16$

τέμνονται πάνω στην ευθεία $\varepsilon_3: y=\dfrac{3}{2}x$.

9. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα.

α. $\begin{cases} 2x+\lambda y-z=0 \\ -x+2y+3z=5 \\ 3x-3y-4z=0 \end{cases}$

δ. $\begin{cases} \alpha x=\beta y=\gamma z \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{\delta} \end{cases}$ $(\alpha\beta\gamma\delta\neq 0)$

β. $\begin{cases} \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{3y-1}{7}=\dfrac{z+1}{4} \\ 5x-2y+3z=21 \end{cases}$

ε. $\begin{cases} x+y=\alpha \\ y+z=\beta \\ z+x=\gamma \end{cases}$

γ. $\begin{cases} \dfrac{x+2y}{3x-y}=\dfrac{10}{9} \\ \dfrac{2x-z}{y+z}=\dfrac{7}{4} \\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{5}=\dfrac{11}{5} \end{cases}$

στ. $\begin{cases} \dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{y}=1 \\ \dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=1 \\ \dfrac{3}{z}+\dfrac{5}{x}=4 \end{cases}$

10. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα.

α. $\begin{cases} x+y+z=6 \\ y+z+w=9 \\ z+w+x=8 \\ w+x+y=7 \end{cases}$

β. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1 \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{w}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{w}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{6} \\ \dfrac{1}{w}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{11}{6} \end{cases}$

γ. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{w}=\dfrac{1}{\alpha} \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{w}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\beta} \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{w}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{\gamma} \\ \alpha\beta\gamma(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)\neq 0 \end{cases}$

δ. $\begin{cases} 2x+y+z+w=3 \\ x+2y+z+w=0 \\ x+y+2z+w=2 \\ x+y+z+2w=5 \end{cases}$

ε. $\begin{cases} y+z+w-x=\alpha \\ z+w+x-y=\beta \\ w+x+y-z=\gamma \\ x+y+z-w=\delta \end{cases}$

στ. $\begin{cases} 2x+3(y+z+w)=11 \\ 3y+4(z+w+x)=15 \\ 4z+5(w+x+y)=19 \\ 5w+6(x+y+z)=23 \end{cases}$

ζ. $\begin{cases} x+2(y+z)=\alpha \\ y+3(z+x)=\beta \\ z+4(x+y)=\gamma \end{cases}$

η. $\begin{cases} x+y=3 \\ y+z=5 \\ z+w=7 \\ w+x=5 \end{cases}$

θ. $\begin{cases} x+y=3 \\ y+z=5 \\ z+w=7 \\ w+\varphi=9 \\ \varphi+x=6 \end{cases}$

11. Να λυθούν τα συστήματα

α. $\begin{cases} \dfrac{xy}{3x+2y} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{yz}{3z-5y} = \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{zx}{2z-5x} = \dfrac{1}{7} \end{cases}$ **β.** $\begin{cases} \dfrac{xy}{\alpha x+\beta y} = \gamma \\ \dfrac{yz}{\gamma y+\alpha z} = \beta \\ \dfrac{zx}{\beta z+\gamma x} = \alpha \end{cases}$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*)$

12. Να λυθούν τα συστήματα

α. $\begin{cases} x+y+z+w = 4 \\ 3x-y+2z-w = 3 \\ -x+7y-z+2w = 7 \\ y+z-2w = 0 \end{cases}$ **β.** $\begin{cases} x+y+z+w = 0 \\ 2x-3y+z-2w = 0 \\ 3x-2y+2z-w = 0 \\ x-4y-3w = 0 \end{cases}$ **γ.** $\begin{cases} x+2(y+z+w) = 3 \\ 2y+3(x+z+w) = 6 \\ 5z+4(x+y+w) = 6 \\ 10w-8(x+y+z) = 38 \end{cases}$

13. Να λυθεί το παραμετρικό σύστημα $\begin{cases} x+\lambda y+z = 0 \\ 2x+3y-z = 3 \\ 5x-y+4z = 1 \end{cases}$

14. Να βρεθεί τριψήφιος αριθμός με άθροισμα ψηφίων 17, αν γνωρίζουμε ότι το ψηφίο των μονάδων είναι τριπλάσιο του ψηφίου των εκατοντάδων και ο αριθμός που προκύπτει με αντίστροφη γραφή των ψηφίων του να είναι κατά 594 μεγαλύτερος.

15. Να βρεθεί το έτος ανακάλυψης της τυπογραφίας, αν γνωρίζουμε ότι:

i) είναι τετραψήφιος αριθμός με άθροισμα ψηφίων 14,

ii) το ψηφίο των μονάδων είναι διπλάσιο του ψηφίου των δεκάδων,

iii) το ψηφίο των χιλιάδων ισούται με την ημιδιαφορά του ψηφίου των εκατοντάδων από το ψηφίο των μονάδων και

iv) ο αριθμός που προκύπτει με αντίστροφη γραφή των ψηφίων του είναι κατά 4.905 μεγαλύτερος.

16. Ο Α λέει στον Β:
«Η ηλικία μου είναι διπλάσια από την ηλικία που είχες όταν είχα την ηλικία σου».
Ο Β λέει στον Α:
«Όταν θα έχω την ηλικία σου, το άθροισμα των ηλικιών μας θα είναι 63».
Να βρείτε τις ηλικίες των Α και Β.

17. Για να παρασκευάσουμε διάλυμα 200 gr ενός οξέος περιεκτικότητας 10%, αναμειγνύουμε διαλύματα του οξέος αυτού περιεκτικότητας 7% και 12%. Πόσα γραμμάρια του οξέος από κάθε διάλυμα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε;

18. Ένας χρυσοχόος έχει τρία κράματα χαλκού και αργύρου με βάρος 50 gr, 30 gr και 20 gr. Αναμειγνύει το 1ο με το 2ο και παίρνει κράμα περιεκτικότητας 750‰. Αναμειγνύει το 2ο με το 3ο και παίρνει κράμα περιεκτικότητας 852‰. Τέλος, αναμειγνύει το 1ο με το 3ο και παίρνει κράμα περιεκτικότητας 780‰. Να βρεθούν οι περιεκτικότητες των αρχικών κραμάτων.

19. Να βρεθεί θετικός ακέραιος, που αν διαιρεθεί με τους αριθμούς 8, 13 και 39 να δίνει υπόλοιπα 3, 4 και 30 αντιστοίχως, ενώ τα πηλίκα των διαιρέσεων αυτών να έχουν άθροισμα 32.

20. Να βρεθούν όλοι οι διψήφιοι αριθμοί, που γίνονται κατά 18 μικρότεροι με την εναλλαγή των ψηφίων τους.

21. Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, αν γνωρίζουμε ότι έχει ελάχιστο το $f(3) = -1$ και για $x = 2$ μηδενίζεται. Στη συνέχεια, να βρεθούν οι τιμές του x (γραφικά και αλγεβρικά), για τις οποίες η C_f βρίσκεται κάτω από την ευθεία $x - 2y - 2 = 0$.

22. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ διέρχεται από τα σημεία $A(2, 6)$, $B(-1, -6)$, $\Gamma(3, 30)$ και την αρχή O των αξόνων.

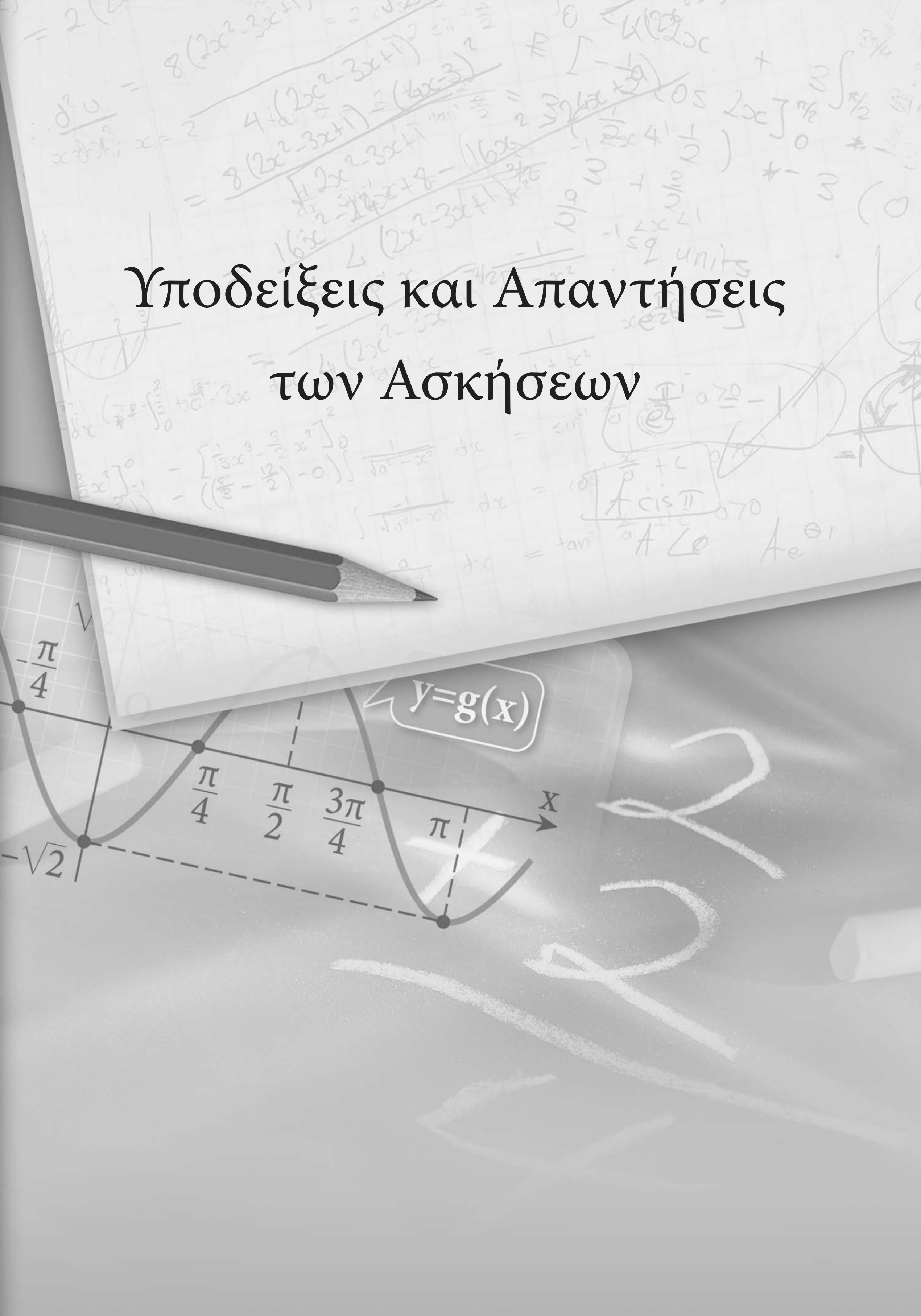
α. Να βρεθούν οι συντελεστές α, β, γ και δ.

β. Να βρεθούν τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

γ. Να βρεθεί το διάστημα τιμών του x, για το οποίο η C_f βρίσκεται στο 4ο τεταρτημόριο.

23. Ένα αυτοκίνητο κάνει τη διαδρομή A έως B με μέση ταχύτητα $100\,km/h$, ενώ τη διαδρομή B έως A με μέση ταχύτητα $80\,km/h$. Να βρεθεί η μέση ταχύτητα του ταξιδιού «πήγαινε-έλα».

Υποδείξεις και Απαντήσεις των Ασκήσεων



1.1 Γραμμικά συστήματα

Α΄ Ομάδα σελ 22

1) **α)** $(2, 3)$ **β)** $(1, 1)$ **γ)** $(3, 2)$ **δ)** $(1, 1)$

2) **α)** $(2, 0)$ **β)** $(1, -2$ **γ)** $(6, 12)$

δ) $\left(\frac{5-2\kappa}{3}, \kappa\right), \kappa\in\mathbb{R}$ **ε)** αδύνατο

στ) $(0, -2)$ **ζ)** $(1, 2)$ **η)** $(1, 1)$,

θ) $(9\kappa-17, \kappa)$, $\kappa\in\mathbb{R}$.

3) **α)** 23 και 11 **β)** $\frac{\alpha+\beta}{2}$ και $\frac{\alpha-\beta}{2}$.

4) **α)** $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ **β)** $\left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{3}\right)$ **γ)** $(16, 1)$

δ) $(2, 5), (2, -5), (-2, 5)$ και $(-2, -5)$

ε) $(1, \sqrt{3}), (1, -\sqrt{3}), (-1, \sqrt{3})$ και $(-1, -\sqrt{3})$

στ) $(2, 2)$ και $(-2, 2)$.

5) **α)** $y=-x+5$ **β)** $16x+105y+27=0$.

6) $\alpha=3$ και $\beta=4$.

7) **α)** $\alpha=-5$ και $\beta=30$ **β)** 20 m/sec **γ)** 6 sec.

8) $\frac{5}{8}$.

9) $\lambda=-5$ και $\mu=0$. Η f είναι περιττή.

10) **α)** $(2, -3)$ **β)** αδύνατο **γ)** $\left(4-\frac{9}{2}\kappa, \kappa\right), \kappa\in\mathbb{R}$.

11) **α)** $x=\frac{4}{3}$ **β)** $x=2$ ή 1 **γ)** $x=-1$ ή 0 ή 1.

12) $(x-y)^2\geq 0$.

13) **α)** Αν $\lambda\neq 0$, τότε $(x, y)=\left(\frac{2\lambda+4}{\lambda^2}, \frac{2\lambda-4}{\lambda^2}\right)$.

Αν $\lambda=0$, είναι αδύνατο.

β) $(x, y)=\left(\frac{2\lambda^2+3\lambda+9}{\lambda^2+2\lambda+3}, \frac{\lambda+3}{\lambda^2+2\lambda+3}\right)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

14) **α)** $(1, -1, 0)$ **β)** $(2, 3, -1)$ **γ)** $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right)$

δ) $\left(\frac{-\kappa-9}{5}, \frac{3\kappa+7}{5}, \kappa\right), \kappa\in\mathbb{R}$

ε) αδύνατο **στ)** αδύνατο **ζ)** $(0, 0, 0)$

η) $(\kappa, -\kappa, \kappa), \kappa\in\mathbb{R}$ **θ)** $\left(\kappa, -\frac{7}{8}\kappa, -\frac{17}{8}\kappa\right), \kappa\in\mathbb{R}$.

15) $ΑΔ=2$, $ΒΖ=4$ και $ΓΕ=5$.

16) $\beta=1$, $\gamma=-2$.

17) $y=-x^2+x-3$.

1.1 Β΄ Ομάδα σελ 24

1) **α)** $(9, 4)$ και $\left(\frac{57}{7}, \frac{32}{7}\right)$ **β)** αδύνατο

γ) $(3, 2)$ και $\left(\frac{9}{8}, -\frac{1}{2}\right)$

δ) Για $y\leq 1$ έχει λύσεις τα ζεύγη $(2+y, y)$ και $(-2-y, y)$ με $-2\leq y\leq 1$.

Για $1<y<2$ και για $y\geq 2$ είναι αδύνατο.

ε) $(4, 1)$ **στ)** $(2, 0)$ και $(-2, 0)$.

2) Η λύση $(x, y)=(1, -1)$ του πρώτου, πρέπει να είναι λύση του δευτέρου. Τελικά, $\alpha=3$ και $\beta=1$.

3) $\alpha=1$, $\beta=-1$ και
$(x, y)=(3, 3)$ ή $(-1, 3)$ ή $(3, -3)$ ή $(-1, -3)$

4) **α)** Αν $\lambda\neq 0$ και $\lambda\neq 1$, τότε
$(x, y)=\left(\frac{\lambda-3}{\lambda}, \frac{-2\lambda-3}{2\lambda}\right)$.

Αν $\lambda=0$, είναι αδύνατο.

Αν $\lambda=1$, τότε $(x, y)=\left(\kappa+\frac{1}{2}, \kappa\right), \kappa\in\mathbb{R}$.

β) Αν $\lambda\neq\frac{1}{3}$ και $\lambda\neq -1$, τότε
$(x, y)=\left(\frac{2(\lambda-1)^2}{(\lambda+1)(3\lambda-1)}, -\frac{\lambda^2-6\lambda+1}{(\lambda+1)(3\lambda-1)}\right)$.

Αν $\lambda=\frac{1}{3}$ ή $\lambda=-1$, είναι αδύνατο.

γ) Αν $\lambda\neq\pm 3$, τότε $(x, y)=(0, 0)$.

Αν $\lambda=3$, τότε $(x, y)=(-5\kappa, \kappa), \kappa\in\mathbb{R}$.

Αν $\lambda=-3$, τότε $(x, y)=(\kappa, \kappa), \kappa\in\mathbb{R}$.

δ) Αν $\lambda\neq 0$ και $\lambda\neq 1$, τότε
$(x, y)=\left(\frac{\lambda+7}{1-\lambda}, \frac{2(\lambda-5)}{1-\lambda}\right)$.

Αν $\lambda=0$, τότε $(x, y)=(\kappa, 4-2\kappa), \kappa\in\mathbb{R}$.

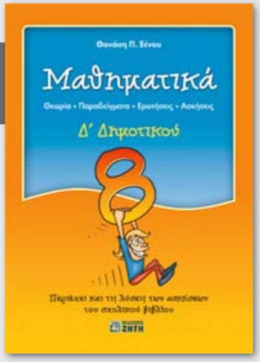
Αν $\lambda=1$, είναι αδύνατο.

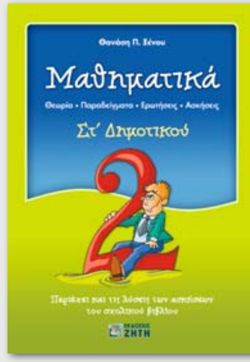
ε) Αν $\lambda\neq 0$ ή $\mu\neq 0$, τότε $(x, y)=(0, 0)$.

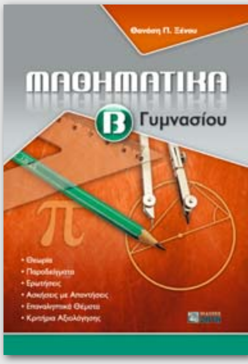
Αν $\lambda=\mu=0$, τότε έχει λύσεις όλα τα ζεύγη πραγματικών αριθμών (αόριστο).

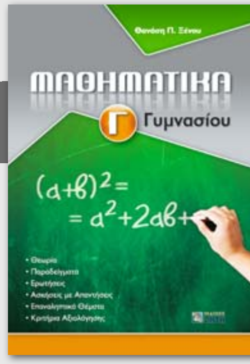
Βιβλία Μαθηματικών του Θανάση Ξένου

Μαθηματικά
ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ



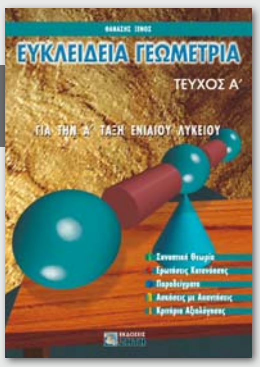


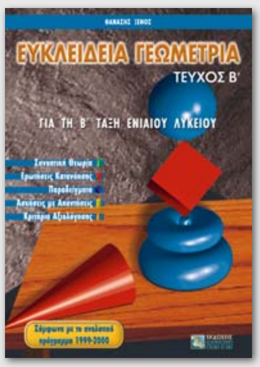


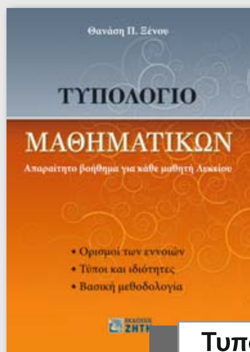


Μαθηματικά
ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

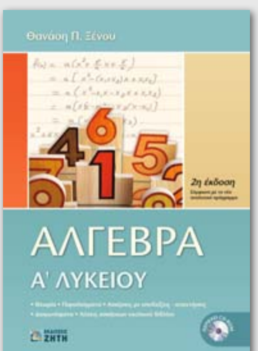
Ευκλείδεια Γεωμετρία
Α' & Β' Λυκείου

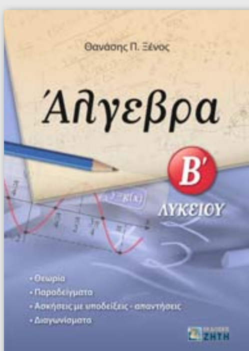






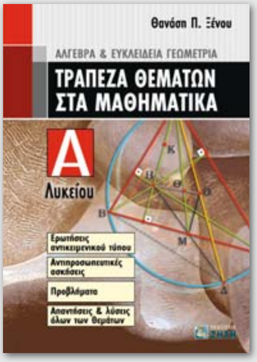
Τυπολόγιο
για όλες τις τάξεις



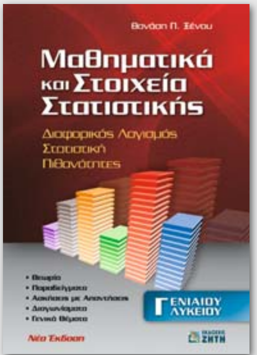


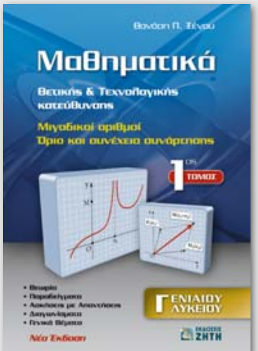
Μαθηματικά
Α' & Β' Λυκείου

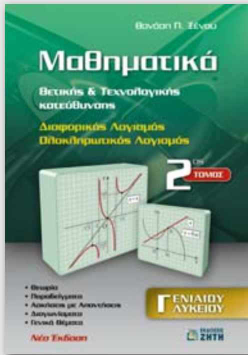
Προβλήματα & Κριτήρια Α΄ & Β΄ Λυκείου



Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου







Προβλήματα & Κριτήρια Γ΄ Λυκείου

ΕΠΑΛ & ΑΣΕΠ

Μαθηματικά

ΑΕΙ-ΤΕΙ