Θανάσης Π. Ξένος

...για μια καλή

Επανάληψη στα Μαθηματικά

Γ Λυκείου
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

- Η θεωρία σε ερωτήσεις
- Ερωτήσεις Σωστού - Λάθους με αιτιολόγηση
- Επαναληπτικά θέματα με τις λύσεις τους

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Με τον συγγραφέα επικοινωνείτε:
Τηλ. 2310.348.086, e-mail: thanasisxenos@yahoo.gr

ISBN 978-960-456-514-6

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση
Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & Σια Ι.Κ.Ε.
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ:
Αρμενοπούλου 27, 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ.: 2310.203.720, Fax: 2310.211.305 • e-mail: sales@ziti.gr

ΑΠΟΘΗΚΗ ΑΘΗΝΩΝ:
Ασκληπιού 60, 114 71 Αθήνα
Τηλ.-Fax: 210.3816.650 • e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

Περιεχόμενα

Το βιβλίο έχει ως στόχο να βοηθήσει αποτελεσματικά τον τελειόφοιτο του Γενικού Λυκείου, που θα συμμετάσχει στις πανελλαδικές εξετάσεις.

Η δομή του είναι η εξής:

- **Θεωρία σε ερωτήσεις**
  - Αναφέρονται οι προτάσεις, για τις οποίες ο εξεταζόμενος πρέπει να γνωρίζει τις αποδείξεις τους.
  - Αναφέρονται τα θεωρήματα, για τα οποία ο εξεταζόμενος πρέπει να γνωρίζει διατύπωση ή και γεωμετρική ερμηνεία.
  - Αναφέρονται οι ορισμοί των εννοιών που πρέπει να γνωρίζει ο εξεταζόμενος.
  - Αναλύονται χαρακτηριστικές ερωτήσεις «Σωστού – Λάθους» με αιτιολόγηση.
  - Αναφέρονται προτάσεις που δεν περιέχονται στο σχολικό βιβλίο, αλλά μπορούν να χρησιμοποιηθούν χωρίς απόδειξη.
  - Αναφέρονται χαρακτηριστικές βοηθητικές προτάσεις, οι οποίες πρέπει να αποδεικνύονται.
- **Επαναληπτικά θέματα**

  Περιέχονται 110 πλήρη θέματα, κατάλληλα επιλεγμένα, ώστε να καλύπτεται η εξεταστέα ύλη σε κάθε λεπτομέρεια.
- **Απαντήσεις των θεμάτων**

  Για όλα τα θέματα δίνονται οι λύσεις τους, χωρίς να αναφέρονται οι επιμέρους πράξεις, αφού σ’ αυτό το επίπεδο θεωρούμε ότι ο αναγνώστης έχει την απαραίτητη ευχέρεια.

Εύχομαι επιτυχία στις εξετάσεις σας!

Θανάσης Ξένος

Δεκέμβριος 2018

Κεφάλαιο 1: Η θεωρία σε ερωτήσεις

1.1 Αποδείξεις

1. Οι γραφικές παραστάσεις C και C′ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

2. **α)** Αν $P(x)$ είναι πολυώνυμο του x και $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0).$$

β) Αν $P(x), Q(x)$ είναι πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$, τότε

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

3. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$, τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $f(x_0) = \eta$.

4. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

5. Η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 0$.

6. Η συνάρτηση $f(x) = x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 1$.

7. Η συνάρτηση $f(x) = x^\nu$, $\nu \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \nu x^{\nu - 1}$.

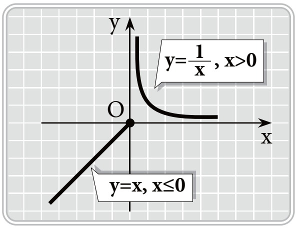
8. Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, ενώ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

1.4 Ερωτήσεις «Σωστού-Λάθους» με αιτιολόγηση

1.

«Αν μια συνάρτηση είναι 1-1, τότε είναι γνησίως μονότονη».

Λάθος, διότι π.χ. η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x\,, & x \le 0 \\ \frac{1}{x}\,, & x > 0 \end{cases}$



είναι $1-1$ και δεν είναι γνησίως μονότονη.

2.

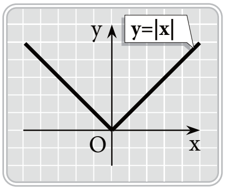
«Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα».

Λάθος. Αληθεύει όταν η f δεν είναι σταθερή συνάρτηση. Η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$ έχει σύνολο τιμών $f(\mathbb{R}) = \{c\}$, που είναι μονοσύνολο και όχι διάστημα.

3.

«Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο x_0, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο x_0».

Λάθος, διότι π.χ. η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, ενώ δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.



4.

«Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο Α με $f'(x) = 0$, τότε η f είναι σταθερή στο Α».

Λάθος, διότι π.χ. η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1, & x<0 \\ 2, & x>0 \end{cases}$ δεν είναι σταθερή στο $A=\mathbb{R}^*$

κι όμως ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\in A$.

(Προφανώς, η πρόταση αληθεύει όταν το A είναι διάστημα).

5.

«Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο σύνολο A με $f'(x)=g'(x)$, τότε υπάρχει σταθερά $c\in\mathbb{R}$ με $f(x)=g(x)+c$ για κάθε $x\in A$».

Λάθος, διότι θα πρέπει το A να είναι διάστημα, ώστε να αληθεύει.

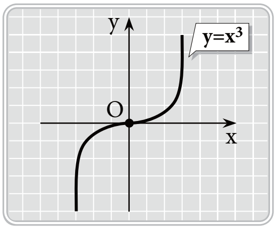
Για παράδειγμα, αν $f(x) = \begin{cases} x, & x<0 \\ -x, & x>0 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} x+1, & x<0 \\ -x+2, & x>0 \end{cases}$,

τότε $f'(x) = g'(x) = \begin{cases} 1, & x<0 \\ -1, & x>0 \end{cases}$ κι όμως δεν υπάρχει σταθερά c με $f(x)=g(x)+c$.

(Εδώ έχουμε $f(x) = \begin{cases} g(x)-1, & x<0 \\ g(x)-2, & x>0 \end{cases}$).

6.

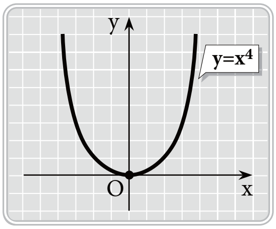
«Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ, τότε ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$».



Λάθος, διότι π.χ. η συνάρτηση $f(x)=x^3$ είναι γνησίως αύξουσα και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ενώ ισχύει $f'(x)=3x^2\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

7.

«Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή και δύο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ, τότε ισχύει $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$».



Λάθος, διότι π.χ. η συνάρτηση $f(x)=x^4$ είναι κυρτή και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ενώ ισχύει $f'(x)=4x^3$ και $f''(x)=12x^2\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Κεφάλαιο 2: Επαναληπτικά Θέματα

1.

Η τιμή f (σε ευρώ) ενός προϊόντος, t μήνες μετά την εισαγωγή του στην αγορά, δίνεται από τον τύπο

$$f(t) = \frac{2t^2 + t + \frac{1}{2}}{t^2 + \frac{1}{4}}.$$

α) Ποια είναι η αρχική τιμή του προϊόντος και ποια ύστερα από 45 ημέρες;

β) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της τιμής του προϊόντος τρεις μήνες μετά την εισαγωγή του στην αγορά.

γ) Να βρεθούν τα χρονικά διαστήματα στα οποία η τιμή του προϊόντος συνεχώς **(i)** αυξάνεται και **(ii)** μειώνεται.
Ποια είναι η μέγιστη τιμή του προϊόντος;

δ) Να αποδειχθεί ότι η τιμή του προϊόντος, μετά από κάποια χρονική στιγμή, συνεχώς μειώνεται, αλλά είναι πάντα μεγαλύτερη από την αρχική τιμή του.

α) $f(0) = 2$ € και $f\left(\frac{3}{2}\right) = 2{,}6$ € **β)** $f'(3) \simeq -0{,}1$ €/μήνα

γ) **(i)** $f \uparrow \left[0, \frac{1}{2}\right]$, **(ii)** $f \downarrow \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ και μέγιστο $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$ €

δ) $f \downarrow \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ και $f(t) < \lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 2$ για κάθε $t \geq \frac{1}{2}$.

2.

Έστω συνεχής συνάρτηση $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$\int_0^4 f^2(x)\,dx = 2\left(\int_0^4 \sqrt{x}\cdot f(x)\,dx - 4\right).$$

α) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$

β) Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το σημείο $A(-1, 0)$.

γ) Να βρεθεί το σημείο της C_f που απέχει ελάχιστη απόσταση από το σημείο $B(0, 3)$.

δ) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία με εξίσωση $y = \frac{1}{2}(x+1)$.

ε) Ποια κατακόρυφη και ποια οριζόντια ευθεία διαιρεί το παραπάνω χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά μέρη;

Λύση

α) $\int_0^4 \left(f^2(x) - 2\sqrt{x}\, f(x) + x\right)dx = \int_0^4 x\, dx - 8 \Leftrightarrow$

$\int_0^4 \left(f(x) - \sqrt{x}\right)^2 dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x}$.

β) Η $\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ περνά από το $A(-1, 0)$ όταν

$0 - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (-1 - x_0) \ \dots\ x_0 = 1$ και $\varepsilon: y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

γ) Η απόσταση του $M(x, \sqrt{x})$ από το $B(0, 3)$ είναι $d(x) = \sqrt{x^2 + (\sqrt{x} - 3)^2}$ και γίνεται ελάχιστη για $x = 1$. Το ζητούμενο σημείο είναι το $M(1, 1)$.

δ) Αφού κάνουμε το σχήμα, έχουμε

$$E(\Omega) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(x+1)\, dx - \int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \frac{1}{3}.$$

ε) i) Έστω $x = \alpha$ η ζητούμενη ευθεία.

Επειδή $\int_{-1}^{0} \frac{1}{2}(x+1)\, dx = \frac{1}{4} > \frac{1}{2}E(\Omega)$, είναι $\alpha < 0$, οπότε αρκεί

$$\int_{-1}^{\alpha} \frac{1}{2}(x+1)\, dx = \frac{1}{6} \ \dots\ \alpha = -1 + \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

ii) Έστω $y = \beta$ η ζητούμενη ευθεία, η οποία τέμνει τις $y = \frac{1}{2}(x+1)$ και $y = \sqrt{x}$ στα σημεία με τετμημένες $x = 2\beta - 1$ και $x = \beta^2$ αντίστοιχα. Αρκεί να ισχύει (με βάση το σχήμα).

$$\int_{2\beta-1}^{\beta^2} \left(\frac{1}{2}(x+1) - \beta\right)dx + \int_{\beta^2}^{1} \left(\frac{1}{2}(x+1) - \sqrt{x}\right)dx = \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \beta^3 - 3\beta^3 + 3\beta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (\beta - 1)^3 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \beta = 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{2}}.$$

3.

Μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ με $\pi, 2\pi\in\Delta$, $f(\pi) = \ln\pi$, $f'(2\pi) = 0$ και $f''(x) + (f'(x))^2 = ημx\cdot e^{-f(x)}$ για κάθε $x\in\Delta$.

α) Να βρεθεί το διάστημα Δ, με την προϋπόθεση ότι είναι το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, στο οποίο ορίζεται η f. Επίσης, να αποδειχθεί ότι

$$f(x) = \ln(x - ημx),\ x>0.$$

β) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)\cdot(f^2(x) - 6f(x) + 12) = α$, $α\in\mathbb{R}$ έχει ακριβώς μια θετική ρίζα.

γ) Να αποδειχθεί ότι η f είναι κοίλη στο διάστημα $(0, \pi]$.

δ) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x_0>0$, ώστε για κάθε $x_1>x_0$ να ισχύει

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx > 0.$$

ε) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_{\pi/2}^{\pi} e^{f(x)-x}\,dx$.

Λύση

α) $e^{f(x)}\cdot f''(x) + e^{f(x)}\cdot(f'(x))^2 = ημx \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\cdot f'(x)\right)' = (-συνx)' \ldots e^{f(x)} = x - ημx$

Η εξίσωση αυτή έχει νόημα όταν $x-ημx>0$.

Η $g(x)=x-ημx$, $x\in\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και αφού $g(0) = 0$, ισχύει $g(x)>0$ για κάθε $x>0$.

Άρα, $\Delta = (0, +\infty)$ και $f(x) = \ln(x-ημx)$, $x>0$.

β) Η εξίσωση γράφεται: $(f(x)-2)^3 = α-8$ **(1)**

Η f είναι γνησίως αύξουσα με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, οπότε παίρνει κάθε πραγματική τιμή ακριβώς μία φορά.

Η **(1)** γράφεται $f(x)=\begin{cases} 2+\sqrt[3]{α-8}\ , & αν\ \ α\geq 8 \\ 2-\sqrt[3]{8-α}\ , & αν\ \ α<8 \end{cases}$ και έχει ακριβώς μία θετική ρίζα.

γ) $f''(x) = \dfrac{xημx - 2 + 2συνx}{(x-ημx)^2}$. Έστω $g(x) = xημx-2+2συνx$, $x\in[0, \pi]$.

Επειδή $g''(x) = -xημx < 0$ στο $(0, \pi)$, ισχύει $g'\downarrow[0, \pi]$,

οπότε για $x>0$ είναι $g'(x)<g'(0) = 0$, $g\downarrow[0, \pi]$,

και για $x>0$ ισχύει $g(x)<0$.

δ) $f\uparrow(0,+\infty)$ και $f((0,+\infty))=\mathbb{R}$, οπότε η f έχει μοναδική ρίζα x_0 και για κάθε $x>x_0$ ισχύει $f(x)>0$, οπότε

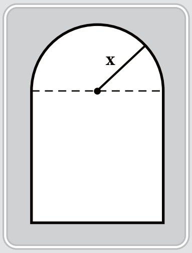
$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx>0 \quad \text{για} \quad x_1>x_0.$$

ε) $$I=\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{x-\eta\mu x}{e^x}dx=\int_{\pi/2}^{\pi}xe^{-x}dx-\int_{\pi/2}^{\pi}\eta\mu x\cdot e^{-x}dx=I_1-I_2$$

- $$I_1=-\int_{\pi/2}^{\pi}x(e^{-x})'\,dx=-\left[xe^{-x}\right]_{\pi/2}^{\pi}+\int_{\pi/2}^{\pi}e^{-x}dx=\frac{\pi+2}{2e^{\pi/2}}-\frac{\pi+1}{e^{\pi}}$$
- $$I_2=-\int_{\pi/2}^{\pi}\eta\mu x\cdot(e^{-x})'\,dx\ \dots\ I_2=\frac{1}{e^{\pi/2}}+\frac{1}{e^{\pi}} \quad \text{και} \quad I=\frac{\pi}{2e^{\pi/2}}-\frac{\pi+2}{e^{\pi}}.$$

4.

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα παράθυρο που αποτελείται από ένα ορθογώνιο και ένα ημικύκλιο πάνω απ' αυτό. Η περίμετρος του παραθύρου είναι $4\,m$, ενώ η ακτίνα του ημικυκλίου είναι $x\,m$.



α) Να αποδειχθεί ότι το εμβαδόν της επιφάνειας του παραθύρου είναι

$$E(x)=4x-\left(2+\frac{\pi}{2}\right)x^2, \quad x\in\left(0,\frac{4}{\pi+2}\right).$$

β) Να βρείτε τις διαστάσεις του παραθύρου, ώστε να δέχεται το μέγιστο δυνατό φωτισμό.

γ) Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν ακριβώς δύο τρόποι, ώστε το παράθυρο να έχει εμβαδόν $1\,m^2$.

Λύση

α) Το ορθογώνιο έχει βάση $2x$ και έστω y το ύψος του, οπότε έχουμε

$$2x+2y+\pi x=4, \quad \text{δηλαδή} \quad y=\frac{1}{2}(4-\pi x-2x).$$

Επειδή $x>0$ και $y>0$, έχουμε $x\in\left(0,\frac{4}{\pi+2}\right)$.

$$E(x)=2x\cdot y+\frac{1}{2}\pi x^2=x(4-\pi x-2x)+\frac{1}{2}\pi x^2=4x-\left(2+\frac{\pi}{2}\right)x^2.$$

β) Αρκεί η $E(x)$ να γίνεται μέγιστη και αυτό συμβαίνει για

$$x=\frac{4}{\pi+4} \quad \text{και} \quad y=\frac{4}{\pi+4}$$

γ)

x	0		$\frac{4}{\pi+4}$		$\frac{4}{\pi+2}$
$E(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{8}{\pi+4}>1$	$\searrow$	$\frac{8\pi}{(\pi+2)^2}<1$

5.

Ένας πυρηνικός αντιδραστήρας αποβάλλει ποσότητα $f(t)$ ραδιενεργών αποβλήτων σ' ένα ποτάμι με ρυθμό $\frac{\ln t}{(t+1)^2}$ κιλά ανά ημέρα, όπου t είναι οι μέρες λειτουργίας του εργοστασίου.

α) Αν το εργοστάσιο λειτουργήσει 30 ημέρες, να βρείτε την ποσότητα αποβλήτων που θα πέσει στο ποτάμι τις τελευταίες 10 ημέρες λειτουργίας του.

β) Αν την πρώτη ημέρα λειτουργίας του αποβάλλει στο ποτάμι $2-\ln 2$ κιλά απόβλητα, να αποδειχθεί ότι

$$f(t)=\frac{t\ln t}{t+1}-\ln(t+1)+2,\quad t>0$$

και να βρεθεί το σύνολο τιμών της $f(t)$.

γ) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(t)$ παρουσιάζει καμπή ακριβώς σ' ένα σημείο.

Λύση

α) $$f(30)-f(20)=\int_{20}^{30}f'(t)\,dt=\int_{20}^{30}\frac{\ln t}{(t+1)^2}\,dt=-\int_{20}^{30}\ln t\cdot\left(\frac{1}{t+1}\right)'dt$$

$$=-\left[\frac{\ln t}{t+1}\right]_{20}^{30}+\int_{20}^{30}\frac{1}{t(t+1)}\,dt=-\frac{\ln 30}{31}+\frac{\ln 20}{21}+\int_{20}^{30}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\ldots=\frac{30}{31}\ln 30-\frac{20}{21}\ln 20+\ln 21-\ln 31\ \ (\text{κιλά}).$$

β) ➧ Επειδή $\left(\frac{t\ln t}{t+1}-\ln(t+1)+2\right)'=\ldots\frac{\ln t}{(t+1)^2}=f'(t)$, υπάρχει σταθερά c με

$f(t)=\frac{t\ln t}{t+1}-\ln(t+1)+2+c$ και αφού $f(1)=2-\ln 2$, είναι $c=0$.

➧

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	2	$\searrow$	$2-\ln 2$	$\nearrow$	2

$f((0,+\infty))=[2-\ln 2,\,2)$

γ) $f''(t) = \dfrac{g(t)}{t(t+1)^3}$, $g(t) = t + 1 - 2t\ln t$

Η g(t) (άρα και η f″(t)) έχει μόνο μία ρίζα και αλλάζει πρόσημο σε αυτήν.

t	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	1	$\nearrow$	$1+\frac{2}{\sqrt{e}}$	$\searrow$	$-\infty$

6.

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(0) = -\frac{3}{2}\cdot\int_0^{\pi/2} \eta\mu^3 x\,dx \quad \text{και} \quad f'(x) + 2x + 2 = e^{e^x - f(x) - x^2 - x - 2}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = e^x - x^2 - 2x - 2$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Να μελετηθεί η f ως προς την κυρτότητα.

γ) Να αποδειχθεί ότι στο διάστημα $(1, +\infty)$ η καμπύλη $y = e^x$ βρίσκεται πάνω από την παραβολή $y = x^2 + (e-2)x + 1$.

δ) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μόνο μία πραγματική ρίζα.

Λύση

α) $f(0) = -1$

$e^{f(x)+x^2+2x}\cdot(f'(x) + 2x + 2) = e^{e^x+x-2} \Leftrightarrow (e^{f(x)+x^2+2x})' = (e^{e^x-2})' \ldots$

β) Κοίλη στο $(-\infty, \ln 2]$ και κυρτή στο $[\ln 2, +\infty)$.

γ) Η εφαπτομένη της C_f στο $(1, f(1))$ έχει εξίσωση $y = (e-4)x - 1$ και για κάθε $x > 1 > \ln 2$ ισχύει $f(x) > (e-4)x - 1$, οπότε $e^x > x^2 + (e-2)x + 1$.

δ)

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

Η f' έχει ακριβώς δύο ρίζες $x_1 < \ln 2$ και $x_2 > \ln 2$.

x	$-\infty$		x_1	$\ln 2$	x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-x_1^2<0$	$\searrow$	$-x_2^2<0$	$\nearrow$	$+\infty$

$f'(x_1) = e^{x_1} - 2x_1 - 2 = 0$

$f(x_1) = e^{x_1} - x_1^2 - 2x_1 - 2 = -x_1^2 \le 0$

Ισχύει $f(x_1) = 0$ για $x_1 = 0$, οπότε $f(0) = 0$, άτοπο. Άρα $f(x_1) < 0$.

Ομοίως $f(x_2) < 0$. Άρα, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μόνο μία ρίζα στο $\mathbb{R}$, η οποία ανήκει στο διάστημα $(x_2, +\infty)$.