Θανάσης Ξένος

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Για τους φοιτητές των Α.Ε.Ι & Τ.Ε.Ι

- Αλγεβρικές δομές
- Πίνακες
- Ορίζουσες
- Γραμμικά συστήματα
- Διανυσματικοί χώροι
- Γραμμικές συναρτήσεις
- Χαρακτηριστικά μεγέθη

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα

Για επικοινωνία με το συγγραφέα:
☎ / fax 2310 348 086
e-mail: stranger@internet.gr

ISBN 960-431-904-3

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση

www.ziti.gr

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσσαλονίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 23920-72.222 (5 γραμ.) - Fax: 23920-72.229
e-mail: info@ziti.gr

Βιβλιοπωλείο

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ. 2310-203.720, Fax 2310-211.305
e-mail: sales@ziti.gr

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται σε φοιτητές Α.Ε.Ι. - Τ.Ε.Ι. και περιέχει την ύλη του μαθήματος της Γραμμικής Άλγεβρας.

Στο πρώτο κεφάλαιο **(Αλγεβρικές Δομές)** παρουσιάζονται οι έννοιες της πράξης, της ομάδας, του δακτυλίου και του σώματος.

Στο δεύτερο κεφάλαιο **(Πίνακες)** αναφέρονται οι βασικές έννοιες στους πίνακες, τα είδη πινάκων, καθώς και οι πράξεις τους.

Στο τρίτο κεφάλαιο **(Ορίζουσες)** παρουσιάζονται η έννοια της ορίζουσας και του αντίστροφου πίνακα και γίνεται εκτενής αναφορά στους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς πινάκων.

Στο τέταρτο κεφάλαιο **(Γραμμικά Συστήματα)** δίνονται οι βασικές μέθοδοι επίλυσης γραμμικών συστημάτων με έμφαση στη μέθοδο απαλοιφής του Gauss.

Στο πέμπτο κεφάλαιο **(Διανυσματικοί χώροι)** δίνονται οι έννοιες του διανυσματικού χώρου και υπόχωρου, των γραμμικώς ανεξάρτητων και εξαρτημένων διανυσμάτων, καθώς και της βάσης και διάστασης διανυσματικού χώρου.

Στο έκτο κεφάλαιο **(Γραμμικές Συναρτήσεις)** παρουσιάζεται η έννοια της γραμμικής συνάρτησης και η παράστασή της με πίνακα, καθώς και η έννοια της γραμμικής μορφής και του δυϊκού χώρου.

Στο έβδομο κεφάλαιο **(Χαρακτηριστικά Μεγέθη)** παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά διανύσματα, οι χαρακτηριστικές τιμές και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός ενδομορφισμού ή ενός πίνακα, καθώς επίσης και οι ιδιότητές τους. Ακόμη, αναφέρονται οι έννοιες των πολυωνύμων και συναρτήσεων ενός πίνακα.

Σε κάθε κεφάλαιο λύνονται πολλά **παραδείγματα** για την κατανόηση όλων των εννοιών που αναπτύσσονται. Επίσης, περιέχονται αντιπροσωπευτικές **ασκήσεις**, οι οποίες λύνονται συνοπτικά στο τέλος του βιβλίου.

Τέλος, το βιβλίο περιέχει **ευρετήριο όρων** με όλες τις έννοιες της Γραμμικής Άλγεβρας.

Θανάσης Ξένος
Θεσσαλονίκη, Μάρτιος 2004.

Περιεχόμενα

ΜΕΡΟΣ 1ο

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ

ΜΕΡΟΣ 2ο

ΠΙΝΑΚΕΣ

ΜΕΡΟΣ 3ο

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

ΜΕΡΟΣ 4ο

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΜΕΡΟΣ 5ο

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

ΜΕΡΟΣ 6ο

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ 7ο

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

1 Αλγεβρικές δομές

1.1 Καρτεσιανό γινόμενο - Πράξεις

- Ένα ζεύγος (x, y) ονομάζεται **διατεταγμένο**, όταν ισχύει

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \quad \mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha} \ \ \textbf{και} \ \ \mathbf{y} = \boldsymbol{\beta}$$

- **Καρτεσιανό γινόμενο** δύο μη κενών συνόλων Α και Β ονομάζεται το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών (x, y) με x Α και y Β. Το σύνολο αυτό συμβολίζεται με Α Β. Επομένως, έχουμε

$$\mathbf{A} \ \mathbf{B} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y})/\mathbf{x} \ \ \mathbf{A} \ \ \textbf{και} \ \ \mathbf{y} \ \ \mathbf{B}\}$$

Στην περίπτωση που ένα τουλάχιστον από τα Α, Β είναι το κενό σύνολο (Δ), τότε ορίζουμε ως καρτεσιανό γινόμενο των Α και Β το Δ.

Στην ειδική περίπτωση Α=Β γράφουμε Α Α=A^2. Έτσι, π.χ. έχουμε

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y})/\mathbf{x}\in\mathbb{R} \ \ \textbf{και} \ \ \mathbf{y}\in\mathbb{R}\}$$

Αν στο επίπεδο θεωρήσουμε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Οxy, τότε σε κάθε σημείο του επιπέδου αντιστοιχεί ένα ζεύγος (x, y) πραγματικών αριθμών και αντιστρόφως. Γι' αυτό **το επίπεδο συμβολίζεται με** $\mathbb{R}^2$.

- Θεωρούμε τρία μη κενά σύνολα Α, Β και Γ. Κάθε συνάρτηση f: Α Β Γ ονομάζεται **νόμος σύνθεσης** ή **πράξη** από το Α Β στο Γ.

  Θα ασχοληθούμε με τις εξής περιπτώσεις πράξεων:

i) Αν Α=Β=Γ, τότε η f: Α Α Α ονομάζεται **εσωτερική πράξη** στο Α.

> Για παράδειγμα, η πρόσθεση πραγματικών αριθμών είναι μια εσωτερική πράξη στο $\mathbb{R}$, αφού σε κάθε ζεύγος (α, β) πραγματικών αριθμών αντιστοιχίζεται ο πραγματικός αριθμός α+β.

Για το συμβολισμό μιας εσωτερικής πράξης χρησιμοποιούμε ένα από τα σύμβολα $*$, $\circ$, $+$, $\cdot$, $\oplus$ κ.λπ.

Για παράδειγμα, αν σε κάθε ζευγάρι (α, β) πραγματικών αριθμών αντιστοιχίσουμε τον πραγματικό αριθμό $\alpha^2+\beta^2$, τότε ορίζεται στο $\mathbb{R}$ μια εσωτερική πράξη $*$ με $\alpha*\beta=\alpha^2+\beta^2$.

ii) Αν Β=Γ, τότε η f: A B B ονομάζεται **εξωτερική πράξη** στο Β.

Για παράδειγμα, ο πολλαπλασιασμός ενός πραγματικού αριθμού επί ένα διάνυσμα είναι διάνυσμα και γι' αυτό είναι εξωτερική πράξη στο σύνολο των διανυσμάτων.

Για το συμβολισμό μιας εξωτερικής πράξης στο Β χρησιμοποιούμε συνήθως το σύμβολο $\cdot$ (επί). Έτσι, το αποτέλεσμα της εξωτερικής πράξης μεταξύ του λ A και του x B συμβολίζεται με α·x.

Ακριβέστερα, η εξωτερική πράξη f: A B B ονομάζεται **εξωτερική πράξη στο Β με σύνολο τελεστών το Α.**

Σημείωση: Στο εξής, στο πρώτο κεφάλαιο, θα ασχοληθούμε μόνον με τις εσωτερικές πράξεις και γι' αυτό, χάριν απότητας, θα τις λέμε απλώς πράξεις. Με τις εξωτερικές πράξεις θα ασχοληθούμε στο δεύτερο κεφάλαιο.

- Θεωρούμε μια (εσωτερική) πράξη $*$ σ' ένα σύνολο Α και ένα υποσύνολο Μ του Α. Θα λέμε ότι το σύνολο Μ είναι **κλειστό ως προς την πράξη $*$**, όταν για κάθε α, β M το αποτέλεσμα $\alpha*\beta$ είναι πάλι στοιχείο του Μ.

Για παράδειγμα, θεωρούμε την πρόσθεση ακέραιων αριθμών, που είναι μια εσωτερική πράξη στο σύνολο $\mathbb{Z}$. Το σύνολο Μ={x $\mathbb{Z}$/x άρτιος} είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση στο $\mathbb{Z}$, αφού το άθροισμα δύο άρτιων ακέραιων είναι άρτιος ακέραιος. Αντίθετα, το σύνολο Μ ={x $\mathbb{Z}$/x περιττός} δεν είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση στο $\mathbb{Z}$, αφού το άθροισμα δύο περιττών αριθμών είναι άρτιος και όχι περιττός.

1.2 Ιδιότητες των εσωτερικών πράξεων

- Μια πράξη $*$ σ' ένα σύνολο Α ονομάζεται

  i) **αντιμεταθετική**, όταν για κάθε α, β A ισχύει

$$\alpha*\beta = \beta*\alpha$$

ii) **προσεταιριστική**, όταν για κάθε α, β, γ Α ισχύει

$$(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma)$$

Για παράδειγμα, η πρόσθεση πραγματικών αριθμών είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική πράξη στο $\mathbb{R}$, ενώ η αφαίρεση στο $\mathbb{R}$ δεν είναι αντιμεταθετική, ούτε προσεταιριστική.

- Θεωρούμε δύο πράξεις $*$ και $\circ$ σ' ένα σύνολο Α. Θα λέμε ότι **η $*$ είναι επιμεριστική ως προς την $\circ$**, όταν για κάθε α, β, γ Α ισχύουν

$$\alpha * (\beta \circ \gamma) = (\alpha * \beta) \circ (\alpha * \gamma) \qquad (1)$$

και

$$(\beta \circ \gamma) * \alpha = (\beta * \alpha) \circ (\gamma * \alpha) \qquad (2)$$

Αν η $*$ είναι αντιμεταθετική, τότε, προφανώς, αρκεί μια από τις ισότητες (1) και (2).

Αν ισχύει μόνον η (1) [αντίστ. (2)], τότε η $*$ λέμε ότι είναι **από αριστερά επιμεριστική** ως προς την $\circ$ (αντιστ. **από δεξιά επιμεριστική**).

Για παράδειγμα, ο πολλαπλασιασμός μιγαδικών αριθμών είναι επιμεριστική πράξη ως προς την πρόσθεση μιγαδικών, αφού για κάθε z_1, z_2, z_3 $\mathbb{C}$ ισχύει $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

Η πρόσθεση στο $\mathbb{C}$, όμως, δεν είναι επιμεριστική πράξη ως προς τον πολλαπλασιασμό στο $\mathbb{C}$, αφού υπάρχουν μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 με $z_1 + (z_2 \cdot z_3) \pi (z_1 + z_2) \cdot (z_1 + z_3)$.

- Έστω μια πράξη $*$ σ' ένα σύνολο Α. Ένα στοιχείο e του Α ονομάζεται **ουδέτερο στοιχείο ως προς την $*$**, όταν για κάθε α Α ισχύει $\boldsymbol{\alpha * e = e * \alpha = \alpha}$. (Αν η $*$ είναι αντιμεταθετική, τότε αρκεί η ισότητα $\alpha * e = \alpha$).

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι (βλ. πρδ. 1.5)
αν υπάρχει ουδέτερο στοιχείο ως προς μια πράξη, τότε αυτό είναι μοναδικό.

Για παράδειγμα, το ουδέτερο στοιχείο ως προς την πρόσθεση πραγματικών αριθμών είναι ο αριθμός 0, αφού για κάθε α $\mathbb{R}$ ισχύει $\alpha + 0 = \alpha$.

Στο σύνολο $\mathbb{N}^*$ των θετικών ακεραίων, όμως, δεν υπάρχει ουδέτερο στοιχείο ως προς την πρόσθεση.

- Έστω ότι μια πράξη $*$ στο σύνολο Α έχει ουδέτερο στοιχείο e. Δύο στοιχεία α και α του Α ονομάζονται **συμμετρικά ως προς την $*$**, όταν ισχύει

$$\boldsymbol{\alpha * \alpha = \alpha * \alpha = e.}$$

Το α λέγεται συμμετρικό του α ως προς την $*$ και αντιστρόφως.

Αποδεικνύεται ότι (βλ. πρδ. 1.6)

αν η πράξη $*$ στο σύνολο Α είναι προσεταιριστική και έχει ουδέτερο στοιχείο, τότε κάθε στοιχείο α Α έχει το πολύ ένα συμμετρικό στοιχείο.

Για παράδειγμα, στον πολλαπλασιασμό πραγματικών αριθμών, κάθε πραγματικός αριθμός $\alpha\pi 0$ έχει συμμετρικό ως προς τον πολλαπλασιασμό τον αριθμό $\frac{1}{\alpha}$, αφού $\alpha\cdot\frac{1}{\alpha} = 1$ (1 είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{R}$). Ο αριθμός 0 δεν έχει συμμετρικό στοιχείο ως προς τον πολλαπλασιασμό στο $\mathbb{R}$.

Σημείωση: Αν η πράξη είναι πρόσθεση, τότε το ουδέτερο στοιχείο το λέμε **μηδενικό**, ενώ το συμμετρικό του α το λέμε **αντίθετο** του α. Αν η πράξη είναι πολλαπλασιασμός, τότε το ουδέτερο στοιχείο το λέμε **μοναδιαίο**, ενώ το συμμετρικό του α το λέμε **αντίστροφο** του α.

◆ Έστω μια πράξη $*$ σ' ένα σύνολο Α. Ένα στοιχείο α του Α ονομάζεται **απλοποιήσιμο** ως προς την $*$, όταν για κάθε β, γ Α ισχύουν(*)

i) αν $\alpha*\beta = \alpha*\gamma$, τότε $\beta = \gamma$

και ii) αν $\beta*\alpha = \gamma*\alpha$, τότε $\beta = \gamma$

Αν τα παραπάνω ισχύουν για όλα τα στοιχεία α του Α, τότε λέμε ότι ισχύει ο **νόμος ή ιδιότητα της διαγραφής** για την πράξη $*$.

Για παράδειγμα, κάθε ρητός αριθμός α είναι απλοποιήσιμο στοιχείο ως προς την πρόσθεση στο $\mathbb{Q}$, αφού για κάθε β, γ $\mathbb{Q}$ με $\alpha+\beta=\alpha+\gamma$, ισχύει $\beta=\gamma$.

1.3 Ομάδες - Ημιομάδες - Υποομάδες

i) Σ' ένα μη κενό σύνολο Α μπορούν να οριστούν διάφορες πράξεις. Αν $*$ είναι μια εσωτερική πράξη στο Α, τότε το ζεύγος $(A, *)$ ονομάζεται **αλγεβρική δομή** ή απλώς δομή. Αν στο Α έχουν οριστεί δύο εσωτερικές πράξεις $*$ και $\circ$, τότε έχουμε την αλγεβρική δομή $(A, *, \circ)$.

* Τα αντίστροφα των προτάσεων (i) και (ii) ισχύουν πάντοτε.

ii) Μια δομή $(G, *)$ ονομάζεται **ομάδα**, όταν

α) Η πράξη $*$ είναι προσεταιριστική.

β) Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο $e \quad G$ ως προς την $*$.

γ) Κάθε στοιχείο $\alpha \quad G$ έχει συμμετρικό στοιχείο $\alpha \quad G$ ως προς την $*$.

Αν επιπλέον η πράξη $*$ είναι αντιμεταθετική, τότε η ομάδα G ονομάζεται **αντιμεταθετική** ή **αβελιανή ομάδα**(*).

Αν η πράξη στο G είναι πρόσθεση, τότε η ομάδα ονομάζεται **προσθετική**, ενώ αν η πράξη είναι πολλαπλασιασμός, τότε η ονάδα ονομάζεται **πολλαπλασιαστική**.

Για παράδειγμα, το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι μια προσθετική αντιμεταθετική ομάδα, ενώ το σύνολο $\mathbb{R}^*$ (των μη μηδενικών πραγματικών αριθμών) είναι μια πολλαπλασιαστική αντιμεταθετική ομάδα.
Το σύνολο $G_1=\{0\}$ είναι μια προσθετική ομάδα και λέγεται **μηδενική ομάδα**, ενώ το σύνολο $G_2=\{1\}$ είναι μια πολλαπλασιαστική ομάδα και λέγεται **μοναδιαία ομάδα**.

Σε μια ομάδα G ως προς την πράξη $*$ ισχύουν

1) $(\alpha\ ) \ = \alpha$, για κάθε $\alpha \quad G$.

2) $(\alpha*\beta) \ = \beta \ *\alpha$, για κάθε $\alpha, \beta \quad G$.

3) α) $\alpha*x = \beta \qquad x = \alpha \ *\beta$.

β) $x*\alpha = \beta \qquad x = \beta*\alpha$.

4) α) Αν $\alpha*\beta = \alpha*\gamma$, τότε $\beta = \gamma$.

β) Αν $\beta*\alpha = \gamma*\alpha$, τότε $\beta = \gamma$.

iii) Μια αλγεβρική δομή $(G, *)$ ονομάζεται **ημιομάδα**, όταν η πράξη $*$ είναι προσεταιριστική. Αν η πράξη $*$ είναι και αντιμεταθετική, τότε η $(G, *)$ ονομάζεται **αντιμεταθετική ημιομάδα**.

Για παράδειγμα, η δομή $(\mathbb{N}, +)$ είναι αντιμεταθετική ημιομάδα.

iv) Αν η αλγεβρική δομή $(G, *)$ είναι ομάδα και A ένα μη κενό υποσύνολο του G, τότε το A ονομάζεται **υποομάδα** της G, όταν και η δομή $(A, *)$ είναι ομάδα.

---

* Η ονομασία «αβελιανή ομάδα» προέρχεται από το όνομα του Νορβηγού μαθηματικού Niels Henrik Abel (1802-1829). Ο Abel, αν και πέθανε πολύ νέος, έκανε έρευνες στις υπερβατικές συναρτήσεις, τελειοποίησε τη θεωρία των αλγεβρικών εξισώσεων (όπως π.χ. απέδειξε το αδύνατο της λύσης των γενικών εξισώσεων ανωτέρου του τέταρτου βαθμού), δημιούργησε τη θεωρία των ελλειπτικών συναρτήσεων, κ.λπ.

◆ Για να αποδείξουμε ότι το Α είναι υποομάδα της ομάδας G, αρκεί:

α) Το Α να είναι κλειστό ως προς την πράξη ∗, δηλαδή για κάθε α, β Α ισχύει α∗β Α.

β) Το ουδέτερο στοιχείο e G ως προς την ∗ ανήκει και στο Α.

γ) Το συμμετρικό α κάθε στοιχείου α Α ανήκει στο Α.

◆ Κάθε ομάδα G είναι υποομάδα του εαυτού της. Επίσης, το σύνολο {e} είναι υποομάδα της G. Κάθε άλλη υποομάδα της G, δηλαδή διαφορετική των G και {e}, ονομάζεται **γνήσια υποομάδα** της G.

Για παράδειγμα, τα σύνολα $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$ είναι υποομάδες της προσθετικής ομάδας $\mathbb{R}$, ενώ το $\mathbb{N}$ δεν είναι υποομάδα αυτής.

Επίσης, το σύνολο $\mathbb{Q}^*$ των μη μηδενικών ρητών αριθμών είναι υποομάδα της πολλαπλασιαστικής ομάδας $\mathbb{R}^*$.

◆ Τέλος, ένα **κριτήριο για υποομάδες** είναι και το εξής (βλέπε απόδειξη στο παράδειγμα 1.9):

Ένα μη κενό υποσύνολο Α της ομάδας (G, ∗) είναι υποομάδα της G, όταν για κάθε α, β Α ισχύει α∗β Α.

1.4 Δακτύλιοι - Σώματα

Ορισμός δακτυλίου Ένα μη κενό σύνολο Α, εφοδιασμένο με πρόσθεση και πολλαπλασιασμό, ονομάζεται **δακτύλιος**, όταν

α) το Α είναι αντιμεταθετική προσθετική ομάδα και

β) ο πολλαπλασιασμός είναι προσεταιριστικός και επιμεριστικός ως προς την πρόσθεση.

Αν επιπλέον ο πολλαπλασιασμός είναι αντιμεταθετικός, τότε το Α λέγεται **αντιμεταθετικός δακτύλιος**.

Επίσης, αν υπάρχει μοναδιαίο στοιχείο, τότε το Α λέγεται **δακτύλιος με μονάδα**.

▶ Παραδείγματα δακτυλίων

1) Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακέραιων αριθμών είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος με μονάδα.
2) Το ίδιο συμβαίνει με τα σύνολα $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$ των ρητών και των πραγματικών αριθμών αντίστοιχα.

3) Το σύνολο F_A των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το σύνολο Α είναι ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος με μονάδα. Μηδενικό στοιχείο αυτού είναι η σταθερή συνάρτηση $f(x)=0$, ενώ μοναδιαίο στοιχείο είναι η σταθερή συνάρτηση $g(x)=1$.

4) Κάθε μονοσύνολο $A=\{\alpha\}$ με τις πράξεις $\alpha+\alpha=\alpha$ και $\alpha\cdot\alpha=\alpha$ είναι ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος με μονάδα και ονομάζεται **μηδενικός δακτύλιος**. Τα δύο ουδέτερα στοιχεία ταυτίζονται $(0=1=\alpha)$ και γι' αυτό γράφουμε $A=\{0\}$.

Αποδεικνύεται ότι (βλ. πρδ. 1.20)

> **κάθε μη μηδενικός δακτύλιος έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία**, αφού τα δύο ουδέτερα στοιχεία είναι διαφορετικά.

▶ Ιδιότητες δακτυλίου

1) $\alpha\cdot 0 = 0\cdot\alpha = 0$, για κάθε α Α.
2) $-(\alpha+\beta) = (-\alpha) + (-\beta)$, για κάθε α, β Α.
3) $(-\alpha)\cdot\beta = -\alpha\cdot\beta = \alpha\cdot(-\beta)$, για κάθε α, β Α.

Ορισμός ακέραιας περιοχής Μια αλγεβρική δομή (Α, +, ·) ονομάζεται **ακέραια περιοχή**, όταν είναι μη μηδενικός αντιμεταθετικός δακτύλιος με μονάδα και επιπλέον ισχύει: αν $\alpha\cdot\beta=0$, τότε $\alpha=0$ ή $\beta=0$.

Για παράδειγμα, η αλγεβρική δομή $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ είναι ακέραια περιοχή, ενώ η δομή $(F_A, +, \cdot)$, που αναφέραμε παραπάνω, δεν είναι ακέραια περιοχή, αφού υπάρχουν μη μηδενικές συναρτήσεις που έχουν γινόμενο τη μηδενική συνάρτηση. Τέτοιες συναρτήσεις, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι π.χ. οι $f(x)=\begin{cases} 3x, & \text{αν } x\geq 1 \\ 0, & \text{αν } x<1 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x\geq 1 \\ 5x-3, & \text{αν } x<1 \end{cases}$.

◆ Αν σ' ένα δακτύλιο Α υπάρχουν μη μηδενικά στοιχεία με γινόμενο το μηδενικό στοιχείο, τότε τα στοιχεία αυτά ονομάζονται **διαιρέτες του μηδενός**. Έτσι, ακέραια περιοχή είναι ένας μη μηδενικός αντιμεταθετικός δακτύλιος με μονάδα, χωρίς διαιρέτες του μηδενός.

◆ Ένας δακτύλιος με μονάδα, του οποίου κάθε μη μηδενικό στοιχείο έχει αντίστροφο, ονομάζεται **δακτύλιος με διαίρεση**.

Αποδεικνύεται ότι (βλ. πρδ. 1.21)

κάθε δακτύλιος με διαίρεση δεν περιέχει διαιρέτες του μηδενός.

◆ Σ' ένα οποιοδήποτε δακτύλιο ορίζουμε και την **αφαίρεση** ως εξής:

$$\boldsymbol{\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)}$$

◆ Σ' ένα δακτύλιο με διαίρεση ορίζουμε και τη **διαίρεση** ως εξής:

$$\alpha:\beta = \alpha\cdot\beta^{-1}, \quad \beta\pi 0$$

Ορισμός σώματος Ένας μη μηδενικός αντιμεταθετικός δακτύλιος με διαίρεση ονομάζεται **σώμα**.

Έτσι, μια αλγεβρική δομή (Α, +, ·) είναι σώμα, όταν

α) Είναι αντιμεταθετική προσθετική ομάδα.

β) Το $A^*=A-\{0\}$ είναι αντιμεταθετική πολλαπλασιαστική ομάδα.

γ) Ο πολλαπλασιασμός είναι επιμεριστικός ως προς την πρόσθεση.

Για παράδειγμα, τα σύνολα $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$ είναι σώματα. Επίσης, το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών είναι σώμα, ενώ το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακέραιων αριθμών δεν είναι σώμα, αφού ο αντίστροφος κάθε ακέραιου $\alpha\pi 0$ δεν ανήκει κατ' ανάγκη στο $\mathbb{Z}$ $\left(\text{π.χ. } 3 \quad \mathbb{Z} \text{ και } \frac{1}{3} \quad \mathbb{Z}\right)$.

◆ Είναι φανερό ότι **κάθε σώμα δεν περιέχει διαιρέτες του μηδενός**. Επίσης, **κάθε σώμα είναι ακέραια περιοχή**.

◆ Ένα υποσύνολο Β του δακτυλίου Α ονομάζεται **υποδακτύλιος** του Α, όταν το Β είναι κι αυτό δακτύλιος ως προς τις πράξεις του Α.
Ομοίως, ένα υποσύνολο Β του σώματος Α ονομάζεται **υπόσωμα** του Α, όταν και το Β είναι σώμα ως προς τις πράξεις Α.

Για παράδειγμα, το σώμα $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι υπόσωμα του σώματος $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών. Ένα κριτήριο υποδακτυλίου ή υποσώματος θα αποδείξουμε στο παράδειγμα 1.22.

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1.1

Να αποδείξετε ότι για τρία οποιαδήποτε σύνολα Α, Β και Γ ισχύει Α (Β Γ) = (Α Β) (Α Γ).

Απόδειξη

Αρκεί να αποδείξουμε ότι

(x, y) Α (Β Γ) (x, y) (Α Β) (Α Γ)

Πράγματι, έχουμε

(x, y) Α (Β Γ) x Α και y (Β Γ)

x Α και (y Β ή y Γ)

(x Α και y Β) ή (x Α και y Γ)

(x, y) (Α Β) ή (x, y) (Α Γ)

(x, y) (Α Β) (Α Γ)

Παράδειγμα 1.2

Να εξετάσετε αν το σύνολο $A = \left\{ \frac{1+2\kappa}{4-3\lambda} \,\middle/\, \kappa.\ \lambda\ \ \mathbb{Z} \right\}$ είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό ρητών αριθμών.

Λύση

Θεωρούμε δύο οποιαδήποτε στοιχεία του συνόλου Α, έστω τα

$$x = \frac{1+2\kappa}{4-3\lambda} \quad \text{και} \quad y = \frac{1+2\mu}{4-3\nu}, \quad \text{όπου } \kappa, \lambda, \mu, \nu\ \ \mathbb{Z}.$$

Θα εξετάσουμε αν το γινόμενο x·y ανήκει ή όχι στο Α. Έχουμε:

$$x\cdot y = \frac{1 + 2\kappa}{4 - 3\lambda}\cdot\frac{1 + 2\mu}{4 - 3\nu} = \frac{1 + 2\kappa + 2\mu + 4\kappa\mu}{16 - 12\lambda - 12\nu + 9\lambda\nu}$$

$$= \frac{1 + 2(\kappa+\mu+2\kappa\mu)}{4 + 12 - 12\lambda - 12\nu + 9\lambda\nu} = \frac{1 + 2\cdot(\kappa+\mu+2\kappa\mu)}{4 - 3\cdot(-4+4\lambda+4\nu-3\lambda\nu)} = \frac{1 = 2\alpha}{4 - 3\beta},$$

όπου $\alpha=\kappa+\mu+2\kappa\mu \;\; \mathbb{Z}$ και $\beta=-4+4\lambda+4\nu-3\lambda\nu \;\; \mathbb{Z}$, δηλαδή $x\cdot y \;\; A$. Άρα, το σύνολο A είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό στο $\mathbb{Q}$.

Παράδειγμα 1.3

Στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ορίζουμε την πράξη $\circ$ με $x\circ y=x+y-2x^2y^2$.

α) Είναι προσεταιριστική η πράξη αυτή;

β) Το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών είναι κλειστό ως προς την $\circ$;

γ) Να βρείτε το ουδέτερο στοιχείο της πράξης αυτής.

δ) Να εξετάσετε ποια στοιχεία του $\mathbb{R}$ είναι συμμετρικά ως προς την πράξη αυτή.

Λύση

α) Για κάθε $x, y, z \;\; \mathbb{R}$ έχουμε:

$$(x\circ y)\circ z = (x+y-2x^2y^2)\circ z = (x+y-2x^2y^2) + z - 2(x+y-2x^2y^2)\cdot z^2 \quad \text{και}$$

$$x\circ(y\circ z) = x\circ(y+z-2y^2z^2) = x + (y+z-2y^2z^2) - 2x^2\cdot(y+z-2y^2z^2)^2,$$

δηλαδή γενικά ισχύει $(x\circ y)\circ z \pi x\circ(y\circ z)$ και άρα η πράξη δεν είναι προσεταιριστική.

β) Αν $x, y \;\; \mathbb{N}$, τότε ο αριθμός $x+y-2x^2y^2$ δεν είναι απαραίτητα φυσικός, αφού για παράδειγμα, αν $x=2$ και $y=3$, τότε ο

$$x + y - 2x^2y^2 = 2 + 3 - 2\cdot4\cdot9 = -67$$

δεν είναι φυσικός αριθμός.

Άρα, το $\mathbb{N}$ δεν είναι κλειστό ως προς την πράξη $\circ$.

γ) Η πράξη $\circ$ είναι αντιμεταθετική, επειδή για κάθε $x, y \;\; \mathbb{R}$ ισχύει

$$x\circ y = x + y - 2x^2y^2 = y + x - 2y^2x^2 = y\circ x.$$

Αναζητούμε στοιχείο e ℝ τέτοιο, ώστε για κάθε x ℝ να ισχύει

$x \circ e = x$ ή $x + e - 2x^2e^2 = x$ ή $e(1-2x^2e) = 0$

Αυτό συμβαίνει προφανώς όταν $e = 0$. Άρα, ουδέτερο στοιχείο ως προς την $\circ$ είναι ο αριθμός 0.

δ) Αν τα στοιχεία x και x του ℝ είναι συμμετρικά ως προς την $\circ$, τότε έχουμε

$x \circ x = e$ ή $x + x - 2x^2x^2 = 0$ ή $2x^2x^2 - x - x = 0$ (1)

- Αν $x=0$, τότε η (1) δίνει $x=0$.
- Αν $x\pi 0$, η (1) είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς x με διακρίνουσα $\Delta=1+8x^3$ κι έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

  i) Αν $\Delta>0$, δηλαδή $x^3 > -\frac{1}{8}$ ή $x > -\frac{1}{2}$, τότε η (1) έχει δύο ρίζες $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8x^3}}{4x^2}$.
  Άρα, κάθε στοιχείο $x > -\frac{1}{2}$ με $x\pi 0$ έχει δύο συμμετρικά στοιχεία ως προς την $\circ$, τα $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8x^3}}{4x^2}$.

  ii) Αν $\Delta=0$, δηλαδή $x = -\frac{1}{2}$, τότε το x έχει ένα συμμετρικό στοιχείο ως προς την $\circ$, το $x = \frac{1}{4x^2} = \frac{1}{4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 1$.

  iii) Αν $\Delta<0$, δηλαδή $x < -\frac{1}{2}$,
  τότε η (1) δεν έχει λύση, δηλαδή κάθε στοιχείο $x < -\frac{1}{2}$ δεν έχει συμμετρικό στοιχείο ως προς την $\circ$.

Παράδειγμα 1.4

Μια εσωτερική πράξη $*$ σ' ένα σύνολο A έχει ουδέτερο στοιχείο e A και για κάθε α, β, γ A ισχύει

$$(\alpha*\beta)*\gamma = \alpha*(\gamma*\beta) \qquad (1)$$

Να αποδείξετε ότι η πράξη αυτή είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική.

Απόδειξη

- Επειδή η (1) αληθεύει για κάθε α, β, γ A, θα αληθεύει και για $\alpha=e$ A, οπότε έχουμε

$(e*\beta)*\gamma = e*(\gamma*\beta)$,   δηλαδή $\beta*\gamma = \gamma*\beta$ για κάθε   β, γ   A.

Αυτό σημαίνει ότι η πράξη $*$ είναι αντιμεταθετική.

- Επειδή $\gamma*\beta=\beta*\gamma$, η (1) γράφεται

  $(\alpha*\beta)*\gamma = \alpha*(\beta*\gamma)$

  και αυτό σημαίνει ότι η $*$ είναι προσεταιριστική.

Παράδειγμα 1.5

Αν υπάρχει ουδέτερο στοιχείο ως προς μια εσωτερική πράξη $*$ σ' ένα σύνολο A, τότε αυτό είναι μοναδικό.

Απόδειξη

Έστω ότι ως προς την πράξη $*$ υπάρχουν δύο ουδέτερα στοιχεία e_1, e_2 A. Τότε έχουμε:

$e_1*e_2 = e_2$ (αφού το e_1 είναι ουδέτερο στοιχείο)

$e_1*e_2 = e_1$ (αφού το e_2 είναι ουδέτερο στοιχείο).

Άρα, ισχύει $e_1=e_2$.

Παράδειγμα 1.6

Αν η εσωτερική πράξη $*$ σ' ένα σύνολο A είναι προσεταιριστική και έχει ουδέτερο στοιχείο e   A, τότε κάθε στοιχείο α   A έχει το πολύ ένα συμμετρικό στοιχείο.

Απόδειξη

Αν ένα στοιχείο α   A έχει ως συμμετικά στοιχεία ως προς την $*$ τα α   και α , τότε ισχύουν

$$\alpha*\alpha \; = \alpha \; *\alpha = e \quad \text{και} \quad \alpha*\alpha \; = \alpha \; *\alpha = e.$$

Επειδή η πράξη $*$ είναι προσεταιριστική, έχουμε

$$\alpha \; = \alpha \; *e = \alpha \; *(\alpha*\alpha \;) = (\alpha \; *\alpha)*\alpha \; = e*\alpha \; = \alpha \;.$$

Παράδειγμα 1.7

Στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ορίζουμε την πράξη $*$ ως εξής:

$$x*y = \frac{x+y}{1+xy}$$

Να αποδείξετε ότι

α) Το σύνολο $A=\{x \ \mathbb{R}/|x|<1\}$ είναι κλειστό ως προς την $*$.

β) Η αλγεβρική δομή $(A, *)$ είναι αβελιανή ομάδα.

Απόδειξη

α) Θεωρούμε δύο οποιαδήποτε στοιχεία $x, y \ A$, οπότε έχουμε $|x|<1$ και $|y|<1$.

- Ισχύει $|x|\cdot|y|<1$ ή $|xy|<1$ ή $-1<xy<1$ κι επομένως $1+xy>0$. Άρα, ο αριθμός $\frac{x+y}{1+xy}$ έχει νόημα.
- Για να αποδείξουμε ότι $x*y \ A$, αρκεί $|x*y|<1$ ή $\left|\frac{x+y}{1+xy}\right|<1$ ή $|x+y|<|1+xy|$.

Η ανισότητα αυτή ισοδύναμα γράφεται

$$(x+y)^2 < (1+xy)^2 \quad x^2+y^2+2xy < 1+x^2y^2+2xy$$

$$x^2+y^2-1-x^2y^2<0$$

$$x^2(1-y^2)-(1-y^2)<0$$

$$(1-y^2)\cdot(x^2-1)<0$$

που αληθεύει, επειδή $x^2<1$ και $y^2<1$.

β) Για κάθε $x, y, z \ A$ έχουμε

$$(x*y)*z = \left(\frac{x+y}{1+xy}\right)*z = \frac{\frac{x+y}{1+xy}+z}{1+\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)\cdot z} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz} \quad \text{και}$$

$$x*(y*z) = x*\left(\frac{y+z}{1+yz}\right) = \frac{x+\frac{y+z}{1+yz}}{1+x\cdot\left(\frac{y+z}{1+yz}\right)} = \frac{x+xyz+y+z}{1+yz+xy+xz},$$

δηλαδή $(x*y)*z=x*(y*z)$ κι επομένως η $*$ είναι προσεταιριστική.

Η $*$ είναι αντιμεταθετική, επειδή $x*y = \dfrac{x+y}{1+xy} = \dfrac{y+x}{1+yx} = y*x$.

Αν υπάρχει ουδέτερο στοιχείο e A ως προς την $*$, τότε για κάθε x A έχουμε

$$x*e = x \quad \frac{x+e}{1+xe} = x \quad x + e = x + x^2e \quad e(1-x^2) = 0 \quad e = 0.$$

Άρα, το 0 είναι το ουδέτερο στοιχείο ως προς την $*$.

Αν τα στοιχεία x, x A είναι συμμετρικά ως προς την $*$, τότε ισχύει

$$x*x = e \quad \frac{x+x}{1+xx} = 0 \quad x + x = 0 \quad x = -x,$$

Άρα, κάθε στοιχείο x A έχει συμμετρικό ως προς την $*$ το $x =-x$ A.

Έτσι, συμπεραίνουμε ότι η αλβεγρική δομή $(A, *)$ είναι αβελιανή ομάδα.

Παράδειγμα 1.8

Να αποδείξετε ότι το σύνολο $G=\{(\alpha^2+\beta^2)^{1/2}/\alpha, \beta$ $\mathbb{R}$ με $|\alpha|+|\beta|\pi 0\}$ είναι αντιμεταθετική ομάδα με πράξη το συνήθη πολλαπλασιασμό στο $\mathbb{R}$.

Απόδειξη

- Αν $x=(\alpha^2+\beta^2)^{1/2}$ και $y=(\gamma^2+\delta^2)^{1/2}$ είναι δύο στοιχεία του G, τότε

$$x \cdot y = \sqrt{(\alpha^2+\beta^2)\cdot(\gamma^2+\delta^2)} = \sqrt{\alpha^2\gamma^2 + \beta^2\delta^2 + \alpha^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2}$$

$$= \sqrt{(\alpha\gamma+\beta\delta)^2 + (\alpha\delta-\beta\gamma)^2} = (\kappa^2+\lambda^2)^{1/2},$$

όπου $\kappa=\alpha\gamma+\beta\delta$ $\mathbb{R}$ και $\lambda=\alpha\delta-\beta\gamma$ $\mathbb{R}$.

Αν $\kappa=\lambda=0$, τότε $x\cdot y=0$, που είναι άτοπο, αφού $x, y>0$.

Επομένως $|\kappa|+|\lambda|\pi 0$ και άρα $x\cdot y$ G, δηλαδή το G είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό.

- Ο πολλαπλασιασμός είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική πράξη.
- Μοναδιαίο στοιχείο είναι το 1 και ανήκει στο G, αφού $1=(1^2+0^2)^{1/2}$.
- Αντίστροφος του $x=(\alpha^2+\beta^2)^{1/2}$ G είναι το $\dfrac{1}{x}$ και ανήκει στο G, αφού ισχύει

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{(\alpha^2+\beta^2)^{1/2}} = \sqrt{\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)^2 + 0^2}\ .$$

Άρα, το σύνολο G είναι πολλαπλασιαστική αντιμεταθετική ομάδα.

Παράδειγμα 1.9 (Κριτήριο υποομάδας)

Να αποδείξετε ότι ένα μη κενό υποσύνολο A της ομάδας $(G, *)$ είναι υποομάδα της G, όταν για κάθε $\alpha, \beta \;\; A$ ισχύει $\alpha * \beta \;\; A$.

Απόδειξη

- Για $\beta=\alpha$ έχουμε $\alpha * \alpha \;\; A$, δηλαδή $e \;\; A$.
- Για $\alpha=e \;\; A$ και για κάθε $\beta \;\; A$ έχουμε $e * \beta \;\; A$, δηλαδή $\beta \;\; A$. Επομένως, το συμμετρικό κάθε στοιχείου του A ανήκει στο A.
- Για κάθε $\alpha, \beta \;\; A$ έχουμε $\alpha, \beta \;\; A$ κι επομένως $\alpha * (\beta\ ) \;\; A$, δηλαδή $\alpha * \beta \;\; A$. Αυτό σημαίνει ότι το A είναι κλειστό ως προς την $*$.

Άρα, το A είναι υποομάδα της G.

Παράδειγμα 1.10 (Κυκλική ομάδα)

Αν G είναι μια πολλαπλασιαστική ομάδα και $\alpha \;\; G$, να αποδείξετε ότι το σύνολο

$$A = \{\alpha^\nu / \nu \;\; \mathbb{Z}\}$$

είναι μια υποομάδα της G και λέγεται κυκλική ομάδα παραγόμενη από το στοιχείο α, ενώ το στοιχείο α λέγεται γεννήτορας της ομάδας A.

Απόδειξη

Το σύνολο A είναι μη κενό υποσύνολο του A (για $\nu=0$ είναι $\alpha^0=1 \;\; A$). Θεωρούμε δύο οποιαδήποτε στοιχεία $x=\alpha^\nu$ και $y=\alpha^\mu$ του A, όπου ν, μ ακέραιοι αριθμοί. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $x \cdot y^{-1} \;\; A$ (σύμφωνα με το κριτήριο για υποομάδες).
Πράγματι, έχουμε

$$x \cdot y^{-1} = \alpha^\nu \cdot (\alpha^\mu)^{-1} = \alpha^\nu \cdot \alpha^{-\mu} = \alpha^{\nu-\mu} \;\; A$$

▶ Σημείωση: Μία πολλαπλασιαστική ομάδα ονομάζεται **κυκλική**, όταν υπάρχει στοιχείο της τέτοιο, ώστε ολα τα στοιχεία της να είναι δυνάμεις του στοιχείου αυτού. Σε μια ομάδα $(G, \cdot)$ η δύναμη α^ν, όπου $\alpha \ \ G$ και $\nu \ \ \mathbb{Z}$, ορίζεται με το γνωστό τρόπο

$$\alpha^\nu = \begin{cases} \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \ldots \alpha \quad (\nu \text{ φορές}) & , \text{αν } \nu > 0 \\ 1 & , \text{αν } \nu = 0 \\ (\alpha^{-1})^{|\nu|} & , \text{αν } \nu < 0 \end{cases}$$

Παράδειγμα 1.11

Να αποδείξετε ότι η τομή πεπερασμένου πλήθους υποομάδων μιας ομάδας G είναι υποομάδα της G.

Απόδειξη

Θεωρούμε τις υποομάδες $G_1, G_2, \ldots, G_\kappa$ της G και το σύνολο

$$G \ \ = G_1 \ \ G_2 \ \ \ldots \ \ G_\kappa = \mathop{}\limits_{i=1}^{\kappa} G_i.$$

Καθεμιά από τις υποομάδες G_i περιέχει το ουδέτερο στοιχείο e της G, οπότε $e \ \ G$ και γι' αυτό $G \ \pi\Delta$.

Για κάθε $x, y \ \ G$ έχουμε $x, y \ \ G_i$ για κάθε $i=1, 2, \ldots \kappa$.

Επειδή οι G_i είναι υποομάδες της G, ισχύει $x*y \ \ G_i$ κι επομένως $x*y \ \ G$.

Άρα, το σύνολο G είναι υποομάδα της G.

Παράδειγμα 1.12

Αν η δομή $(G, *)$ είναι ομάδα και $\alpha \ \ G$, να αποδείξετε ότι το σύνολο

$$G \ \ = \{x \ \ G / x*\alpha = \alpha\}$$

είναι υποομάδα της G.

Απόδειξη

- Προφανώς, το σύνολο G είναι υποσύνολο του G. Επειδή $e*\alpha=\alpha$, ισχύει e G και γι' αυτό G πΔ .

- Για κάθε x, y G έχουμε $x*\alpha=\alpha$ και $y*\alpha=\alpha$. Για να αποδείξουμε ότι το G είναι υποομάδα της G, αρκεί να ισχύει x*y G , δηλαδή $(x*y)*\alpha=\alpha$. Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned}(x*y)*\alpha &= x*(y*\alpha) \quad [\text{αφού η } * \text{ είναι προσεταιριστική}]\\ &= x*\alpha \quad [\text{αφού } y*\alpha=y*(y*\alpha)=(y*y)*\alpha=e*\alpha=\alpha]\\ &= \alpha.\end{aligned}$$

Άρα, το G είναι υποομάδα της ομάδας G.

Παράδειγμα 1.13

Σε μια πολλαπλασιαστική ομάδα G, για κάθε α, β G η ισότητα $(\alpha\cdot\beta)^\nu=\alpha^\nu\cdot\beta^\nu$ ισχύει για τρεις διαδοχικές θετικές ακέραιες τιμές του ν. Να αποδείξετε ότι η ομάδα αυτή είναι αβελιανή.

Απόδειξη

Για κάποιον θετικό ακέραιο κ ισχύουν οι ισότητες

$$(\alpha\cdot\beta)^\kappa = \alpha^\kappa\cdot\beta^\kappa \tag{1}$$

$$(\alpha\cdot\beta)^{\kappa+1} = \alpha^{\kappa+1}\cdot\beta^{\kappa+1} \tag{2}$$

$$(\alpha\cdot\beta)^{\kappa+2} = \alpha^{\kappa+2}\cdot\beta^{\kappa+2} \tag{3}$$

για οποιαδήποτε στοιχεία α και β του G.

- Η (2) γράφεται

$$(\alpha\cdot\beta)^\kappa\cdot(\alpha\cdot\beta) = (\alpha^\kappa\cdot\alpha)\cdot(\beta^\kappa\cdot\beta)$$

και λόγω της (1) έχουμε

$$\alpha^\kappa\cdot\beta^\kappa\cdot\alpha\cdot\beta = \alpha^\kappa\cdot\alpha\cdot\beta^\kappa\cdot\beta$$

οπότε με διαγραφή των στοιχείων α^κ και β προκύπτει ότι

$$\beta^\kappa\cdot\alpha = \alpha\cdot\beta^\kappa \tag{4}$$

- Ομοίως, από την (3) και με τη βοήθεια της (2), προκύπτει ότι

$$\beta^{\kappa+1}\cdot\alpha = \alpha\cdot\beta^{\kappa+1}$$

ή $\quad\quad \beta\cdot\beta^{\kappa}\cdot\alpha = \alpha\cdot\beta^{\kappa+1}$

ή $\quad\quad \beta\cdot\alpha\cdot\beta^{\kappa} = \alpha\cdot\beta\cdot\beta^{\kappa}$ [λόγω της (4)]

ή $\quad\quad \beta\cdot\alpha = \alpha\cdot\beta$ [διαγραφή του β^{κ}]

Άρα, η ομάδα G είναι αβελιανή.

Παράδειγμα 1.14

Αν το σύνολο $A=\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu\}$ είναι αντιμεταθετική πολλαπλασιαστική ομάδα, τότε, για κάθε x A, να αποδείξετε ότι

α) $A = \{x\cdot\alpha_1, x\cdot\alpha_2, \ldots, x\cdot\alpha_\nu\}$ και

β) $x^\nu = 1$.

Απόδειξη

α) Το σύνολο A είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό, που σημαίνει ότι για κάθε x A τα $x\cdot\alpha_1, x\cdot\alpha_2, \ldots, x\cdot\alpha_\nu$ είναι στοιχεία του A. Τα στοιχεία αυτά είναι διαφορετικά ανά δύο, αφού αν $x\cdot\alpha_\nu=x\cdot\alpha_\lambda$ με $\kappa\pi\lambda$, τότε

$$\alpha_\nu=\alpha_\lambda, \text{ άτοπο.}$$

Έτσι, τα $x\cdot\alpha_1, x\cdot\alpha_2, \ldots, x\cdot\alpha_\nu$ είναι ν διαφορετικά στοιχεία του A και επομένως συμπίπτουν με τα $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ (όχι κατανάγκη με τη σειρά αυτή). Άρα, μπορούμε να γράψουμε $A=\{x\cdot\alpha_1, x\cdot\alpha_2, \ldots, x\cdot\alpha_\nu\}$.

β) Ισχύει $(x\cdot\alpha_1)\cdot(x\cdot\alpha_2)\ldots(x\cdot\alpha_\nu)=\alpha_1\cdot\alpha_2\ldots\alpha_\nu$ κι επειδή ο πολλαπλασιασμός είναι αντιμεταθετικός, έχουμε

$$(x\cdot x\ldots x)\cdot(\alpha_1\cdot\alpha_2\ldots\alpha_\nu) = \alpha_1\cdot\alpha_2\ldots\alpha_\nu$$

ή $\quad x^\nu\cdot(\alpha_1\cdot\alpha_2\ldots\alpha_\nu) = 1\cdot(\alpha_1\cdot\alpha_2\ldots\alpha_\nu)$

ή $\quad x^\nu = 1$ (ιδιότητα διαγραφής).

Παράδειγμα 1.15

Να κατασκευαστεί ομάδα με τρία στοιχεία.

Λύση

Έστω $(G, *)$ η ζητούμενη ομάδα. Ένα στοιχείο του συνόλου G θα είναι το ουδέτερο στοιχείο e ως προς την πράξη $*$. Ας ονομάσουμε α και β τα άλλα δύο στοιχεία του G, δηλαδή έχουμε

$$G = \{e, \alpha, \beta\}$$

Θα πρέπει να βρούμε όλα τα αποτελέσματα της πράξης μεταξύ στοιχείων του G.

- $e*e = e$, $e*\alpha = \alpha$ και $e*\beta = \beta$
- $\alpha*e = \alpha$

  Αν $\alpha*\beta=\alpha$, τότε $\alpha*\beta=\alpha*e$, δηλαδή $\beta=e$, άτοπο.
  Αν $\alpha*\beta=\beta$, τότε $\alpha*\beta=e*\beta$, δηλαδή $\alpha=e$, άτοπο.
  Επομένως $\alpha*\beta=e$.

  Αν $\alpha*\alpha=\alpha$, τότε $\alpha=e$, άτοπο.
  Αν $\alpha*\alpha=e$, τότε $\alpha*\alpha=\alpha*\beta$, δηλαδή $\alpha=\beta$, άτοπο.
  Επομένως $\alpha*\alpha=\beta$.

- Ομοίως, έχουμε $\beta*e=\beta$, $\beta*\alpha=e$ και $\beta*\beta=\alpha$.

Συγκεντρωτικά έχουμε το διπλανό πίνακα διπλής εισόδου με όλα τα αποτελέσματα.

*	e	α	β
e	e	α	β
α	α	β	e
β	β	e	α

Εύκολα, τώρα, διαπιστώνουμε ότι το σύνολο $G=\{e, \alpha, \beta\}$ είναι (αβελιανή) ομάδα.

Σημείωση: Αν η παραπάνω ομάδα είναι πολλαπλασιαστική, τότε $\beta=\alpha\cdot\alpha=\alpha^2$ δηλαδή παίρνει τη μορφή $G=\{1, \alpha, \alpha^2\}$.

Ανάλογα, μπορούμε να αποδείξουμε ότι κάθε πολλαπλασιαστική ομάδα με ν στοιχεία $(\nu\geq 1)$ έχει τη μορφή $G=\{1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{\nu-1}\}$.

Παράδειγμα 1.16

Αν Α, Β είναι δύο υποομάδες της ομάδας $(G, *)$, να αποδείξετε ότι το σύνολο Α Β είναι υποομάδα της G, αν και μόνον αν ισχύει Α Β ή Β Α.

Απόδειξη

Αν Α Β, τότε το σύνολο Α Β=Β είναι υποομάδα της G.
Αν Β Α, τότε το σύνολο Α Β=Α είναι υποομάδα της G.
Αντιστρόφως: ‘Εστω ότι το σύνολο Α Β είναι υποομάδα της G. Θα απο-

δείξουμε ότι Α Β ή Β Α. Υποθέτουμε το αντίθετο, δηλαδή κανένα από τα σύνολα Α, Β δεν είναι υποσύνολο του άλλου. Τότε υπάρχει α Α με α Β, καθώς επίσης υπάρχει β Β με β Α. Τα στοιχεία α, β ανήκουν στο σύνολο Α Β και επειδή το Α Β είναι υποομάδα της G, ισχύει

$$α*β \ \ Α \ \ Β,$$

δηλαδή $$α*β \ \ Α \text{ ή } α*β \ \ Β.$$

- Αν α∗β=γ Α, τότε β=α ∗γ Α (αφού α , γ Α) και αυτό είναι άτοπο, επειδή β Α.
- Αν α∗β=δ Β, τότε α=δ∗β   Β, άτοπο.

Αφού καταλήξαμε σε άτοπο, συμπεραίνουμε ότι Α Β ή Β Α.

▶ Σημείωση: Μια άμεση συνέπεια της πρότασης που αποδείξαμε παραπάνω είναι η εξής:

Μια ομάδα δε μπορεί να γραφεί ως ένωση δύο γνήσιων υποομάδων της.

Παράδειγμα 1.17

Αν μια αλγεβρική δομή (G, ∗) είναι ημιομάδα, υπάρχει e G με e∗α=α για κάθε α G και για κάθε α G υπάρχει α G με α ∗α=e, να αποδείξετε ότι η δομή αυτή είναι ομάδα.

Απόδειξη

Σύμφωνα με τον ορισμό της ομάδας, αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύουν και οι ισότητες α∗e=α και α∗α =e.

- α∗e = α∗(α ∗α) = (α∗α)∗α = e∗α = α.
- Για το στοιχείο α   G υπάρχει α   G με α ∗α =e.

Έχουμε

α   = α ∗e   (αφού α   G, σύμφωνα με τα προηγούμενα)
    = α ∗(α ∗α)   [αφού e=α ∗α]
    = (α ∗α)∗α   [η ∗ είναι προσεταιριστική]
    = e∗α = α.

Επομένως ισχύει α∗α =e. Άρα, η Α είναι ομάδα.

Παράδειγμα 1.18 (Μορφισμός ομάδων)

Θεωρούμε δύο ομάδες $(G, *)$, $(G\ , \circ)$ και μια συνάρτηση $f\colon G\quad G$ τέτοια, ώστε για κάθε $\alpha, \beta\quad G$ να ισχύει

$$f(\alpha * \beta) = f(\alpha) \circ f(\beta).$$

Να αποδείξετε ότι το σύνολο $f(G)$ είναι υποομάδα της G .

Απόδειξη

- Αν $\gamma = f(\alpha)$ και $\delta = f(\beta)$ είναι δύο στοιχεία του συνόλου $f(G)$, όπου $\alpha, \beta\quad G$, τότε

$$\gamma \circ \delta = f(\alpha) \circ f(\beta) = f(\alpha * \beta)\quad f(G), \quad \text{αφού} \quad \alpha * \beta\quad G.$$

Άρα, το σύνολο $f(G)$ είναι κλειστό ως προς την πράξη $\circ$ της G .

- Αν e_1 και e_2 είναι τα ουδέτερα στοιχεία των ομάδων G και G αντίστοιχα, τότε για κάθε $\alpha\quad G$ έχουμε

$$f(\alpha * e_1) = f(\alpha) \circ f(e_1) \quad ή \quad f(\alpha) = f(\alpha) \circ f(e_1) \quad ή \quad f(e_1) = e_2 \quad [\text{αφού } f(\alpha)\quad G\ ]$$

Επομένως, το ουδέτερο στοιχείο e_2 της πράξης $\circ$ ανήκει στο σύνολο $f(G)$, αφού $e_2 = f(e_1)$ και $e_1\quad G$.

- Αν α είναι το συμμετρικό του $\alpha\quad G$ ως προς την πράξη $*$, τότε από τη σχέση $\alpha\ * \alpha = e_1$ έχουμε

$$f(e_1) = f(\alpha\ * \alpha) = f(\alpha\ ) \circ f(\alpha) \quad ή \quad e_2 = f(\alpha\ ) \circ f(\alpha),$$

που σημαίνει ότι το συμμετρικό του στοιχείου $f(\alpha)$ του $f(G)$ είναι το $f(\alpha\ )$, το οποίο ανήκει στο $f(G)$, αφού $\alpha\quad G$.

Άρα, το σύνολο $f(G)$ είναι υποομάδα της ομάδας G .

Σημείωση: Η παραπάνω συνάρτηση $f\colon G\quad G$ ονομάζεται **μορφισμός** ή **ομομορφισμός ομάδων**. Αν η συνάρτηση f είναι «επί», δηλαδή ισχύει $f(G) = G$, τότε ονομάζεται **επιμορφισμός**. Αν $G\ = G$, τότε η f ονομάζεται **ενδομορφισμός της G**. Επίσης, αν η f είναι συνάρτηση «1 – 1», τότε ονομάζεται **ισομορφισμός** ή **μονομορφισμός ομάδων**.

Αν η f είναι ταυτόχρονα ισομορφισμός, ενδομορφισμός και επιμορφισμός, τότε λέγεται **αυτομορφισμός της ομάδας G**. Επομένως, αυτομορφισμός της ομάδας G ονομάζεται κάθε «1 – 1» και «επί» συνάρτηση $f\colon G\quad G$, που είναι μορφισμός ομάδων.

Παράδειγμα 1.19

Να αποδείξετε ότι το σύνολο

$$F = \{x+y\sqrt{\nu}/x,\ y\ \ \mathbb{Q},\ \nu\ \ \mathbb{N}^* \text{ και } \sqrt{\nu}\ \ \mathbb{Q}\},\quad \nu \text{ σταθερός},$$

με πράξεις την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό πραγματικών αριθμών, είναι σώμα.

Απόδειξη

- Αν $\alpha=x_1+y_1\sqrt{\nu}$ και $\beta=x_2+y_2\sqrt{\nu}$ είναι δύο στοιχεία του F, τότε

$$\alpha+\beta=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)\sqrt{\nu}\ \ F$$

και $$\alpha\cdot\beta=(x_1x_2+\nu y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)\sqrt{\nu}\ \ F.$$

Επομένως, το F είναι κλειστό ως προς τις πράξεις $+$ και $\cdot$ του $\mathbb{R}$.

- Οι πράξεις $+$ και $\cdot$ στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $F\ \ \mathbb{R}$, είναι αντιμεταθετικές και προσεταιριστικές. Επίσης, η πράξη $\cdot$ είναι επιμεριστική ως προς την $+$.
- Το μηδενικό στοιχείο $0=0+0\sqrt{\nu}$ ανήκει στο F, καθώς επίσης και το μοναδιαίο στοιχείο $1=1+0\sqrt{\nu}$.
- Αντίθετος του στοιχείου $x+y\sqrt{\nu}\ \ F$ είναι το $-x-y\sqrt{\nu}=(-x)+(-y)\sqrt{\nu}\ \ F$.
- Αντίστροφος του στοιχείου $x+y\sqrt{\nu}\ \ F^*$ είναι το στοιχείο

$$\frac{1}{x+y\sqrt{\nu}}=\frac{x-y\sqrt{\nu}}{x^2-\nu y^2}=\left(\frac{x}{x^2-\nu y^2}\right)+\left(\frac{-y}{x^2-\nu y^2}\right)\sqrt{\nu}\ \ F^*.$$

Άρα, η αλγεβρική δομή $(F, +, \cdot)$ είναι σώμα.

Παράδειγμα 1.20

Να αποδείξετε ότι κάθε μη μηδενικός δακτύλιος $(A, +, \cdot)$ έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία.

Απόδειξη

Αν τα δύο ουδέτερα στοιχεία 0 και 1 του δακτυλίου ήταν ίσα, τότε για κάθε στοιχείο α του A θα είχαμε $\alpha=\alpha\cdot 1=\alpha\cdot 0=0$, δηλαδή ο δακτύλιος θα ήταν μηδενικός, που είναι άτοπο. Άρα $0\pi 1$ και γι' αυτό το σύνολο A έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία.

Ασκήσεις

Απαντήσεις: σελ. 241

Άσκηση 1.1

Για τρία οποιαδήποτε σύνολα Α, Β και Γ να αποδείξετε ότι:

α) Αν Α Β, τότε Α Γ Β Γ.

β) Α (Β Γ) = (Α Β) (Α Γ).

γ) Α (Β–Γ) = (Α Β) – (Α Γ).

Άσκηση 1.2

Να εξετάσετε αν τα σύνολα

$$A = \{2\nu+1 \ / \ \nu \ \ \mathbb{N}\} \quad \text{και} \quad B = \{x+y\sqrt{3} \ / \ x, y \ \ \mathbb{Q}^*\}$$

είναι κλειστά ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό πραγματικών αριθμών.

Άσκηση 1.3

Στο σύνολο $\mathbb{R}$ ορίζουμε την πράξη $*$ με $x*y=x+y-xy$.

α) Να εξετάσετε αν τα σύνολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$ είναι κλειστά ως προς την $*$.

β) Να αποδείξετε ότι η πράξη $*$ είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική.

γ) Να βρείτε το ουδέτερο στοιχείο ως προς την $*$.

δ) Ποια στοιχεία του $\mathbb{R}$ έχουν συμμετρικό ως προς την $*$;

ε) Ποιο είναι το ευρύτερο υποσύνολο Α του $\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε η δομή $(A, *)$ να είναι αβελιανή ομάδα;

Άσκηση 1.4

Να αποδείξετε ότι το σύνολο $A = \left\{\dfrac{4\alpha+1}{5-4\beta} \Big/ \ \alpha, \beta \ \ \mathbb{Z}\right\}$ είναι αβελιανή πολλαπλασιαστική ομάδα.

Άσκηση 1.5

Στο ℝ ορίζουμε την πράξη ∘ με $x \circ y = \log_{\alpha}(\alpha^x + \alpha^y)$, όπου α σταθερός θετικός αριθμός με απ1. Να αποδείξετε ότι η δομή (ℝ, ∘) είναι ημιομάδα, αλλά όχι ομάδα.

Άσκηση 1.6

Αν σε μια πολλαπλασιαστική ομάδα G ισχύει μια από τις παρακάτω συνθήκες, να αποδείξετε ότι η ομάδα αυτή είναι αντιμεταθετική.

α) $(\alpha \cdot \beta)^2 = \alpha^2 \cdot \beta^2$, για κάθε α, β G.

β) $(\alpha \cdot \beta)^3 = \alpha^3 \cdot \beta^3$, $(\alpha \cdot \beta)^4 = \alpha^4 \cdot \beta^4$ και $(\alpha \cdot \beta)^5 = \alpha^5 \cdot \beta^5$, για κάθε α, β G.

γ) $\alpha^{-1} = \alpha$, για κάθε α G.

δ) $\beta^{-1} \cdot \alpha^{-1} \cdot \beta \cdot \alpha = 1$, για κάθε α, β G.

Άσκηση 1.7

Να αποδείξετε ότι το σύνολο των αντιστρέψιμων συναρτήσεων

f: A A, με A ℝ

είναι ομάδα με πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων.

Άσκηση 1.8

Σ' ένα σύνολο ΑπΔ θεωρούμε δύο εσωτερικές πράξεις ∗ και ∘ με ουδέτερα στοιχεία e_1 και e_2 αντίστοιχα.

Αν για κάθε x, y, z, ω A ισχύει

$$(x * y) \circ (z * \omega) = (x \circ z) * (y \circ \omega),$$

να αποδείξετε ότι

α) $e_1 = e_2$,

β) $x * y = x \circ y$, για κάθε x, y A και

γ) οι δύο πράξεις είναι αντιμεταθετικές και προσεταιριστικές.

Άσκηση 1.9

Για κάθε πολλαπλασιαστική ομάδα G με 4 στοιχεία να αποδείξετε ότι για κάθε x G ισχύει **α)** $x^4 = 1$

και **β)** $G = \{1, x, x^2, x^3\}$.

Άσκηση 1.10

Έστω μια ομάδα $(G, *)$ και η συνάρτηση $f: G \quad G$ με $f(x)=x$ (x το συμμετρικό του x ως προς την $*$).

Αν για κάθε x, y G ισχύει $f(x*y)=f(x)*f(y)$, να αποδείξετε ότι η ομάδα είναι αντιμεταθετική.

Άσκηση 1.11

Αν α, β είναι στοιχεία μιας πολλαπλασιαστικής ομάδας G με $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$, να αποδείξετε ότι

α) $\alpha^{-1}\cdot\beta = \beta\cdot\alpha^{-1}$.

β) $\alpha^{\nu}\cdot\beta = \beta\cdot\alpha^{\nu}$ για κάθε θετικό ακέραιο ν.

γ) $\alpha^{\nu}\cdot\beta^{\nu} = \beta^{\nu}\cdot\alpha^{\nu}$ για κάθε ν $\mathbb{N}^*$.

δ) $\alpha^{\nu}\cdot\beta^{\mu} = \beta^{\mu}\cdot\alpha^{\nu}$ για κάθε μ, ν $\mathbb{N}$.

Άσκηση 1.12

Αν α, β είναι στοιχεία μιας πολλαπλασιαστικής ομάδας G, να αποδείξετε ότι:

α) $(\alpha^{-1}\cdot\beta\cdot\alpha)^{\nu}=\alpha^{-1}\cdot\beta^{\nu}\cdot\alpha$, για κάθε θετικό ακέραιο ν.

β) Αν $\alpha\cdot\beta=\beta^4\cdot\alpha$ και $\beta^6=1$, τότε $\beta^3=1$ και $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$.

Άσκηση 1.13

Αν α, β G και η δομή $(G, \cdot)$ είναι ομάδα, να αποδείξετε την ισοδυναμία:

$$(\alpha\beta)^3=1 \qquad (\beta\cdot\alpha)^3=1.$$