Θανάσης Π. Ξένος

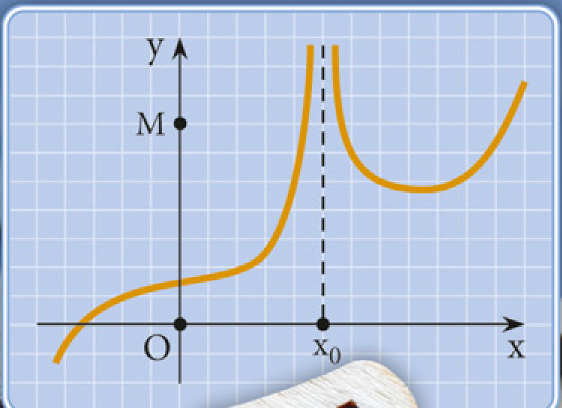
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΟΜΟΣ 1

- *Όριο και συνέχεια συνάρτησης*
- *Παράγωγος συνάρτησης*

Για τις ομάδες προσανατολισμού:

- **Θετικών σπουδών**
- **Οικονομίας και Πληροφορικής**



ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα

Με το συγγραφέα επικοινωνείτε:
Τηλ. 2310.348.086, e-mail: thanasisxenos@yahoo.gr

ISBN 978-960-456-458-3

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση
Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ:
Αρμενοπούλου 27, 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ.: 2310.203.720, Fax: 2310.211.305 • e-mail: sales@ziti.gr

ΑΠΟΘΗΚΗ ΑΘΗΝΩΝ - ΠΩΛΗΣΗ ΧΟΝΔΡΙΚΗ:
Ασκληπιού 60, 114 71 Αθήνα
Τηλ.-Fax: 210.3816.650 • e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό αποτελεί τον πρώτο τόμο των Μαθηματικών Γ′ Λυκείου για τις ομάδες προσανατολισμού:

- Θετικών σπουδών
- Οικονομίας και Πληροφορικής

Αναπτύσσονται διεξοδικά τα κεφάλαια:

- Όριο και Συνέχεια συνάρτησης
- Παράγωγος συνάρτησης

Η δομή του βιβλίου, σε γενικές γραμμές, είναι η εξής:

✓ Σε κάθε ενότητα παρουσιάζεται η θεωρία σύντομα και ελκυστικά. Ακολουθούν παρατηρήσεις και σχόλια για να αποσαφηνιστούν όλες οι έννοιες.

✓ Στη συνέχεια, παρουσιάζονται χαρακτηριστικές εφαρμογές με τις απαραίτητες μεθοδολογικές οδηγίες.

✓ Κάθε παράγραφος κλείνει με ένα μεγάλο αριθμό ασκήσεων, που καλύπτουν την ύλη με κάθε λεπτομέρεια.

Για τις εύκολες ασκήσεις ή για αυτές που υπάρχουν αντίστοιχες εφαρμογές, δίνονται οι απαντήσεις στο τέλος του βιβλίου. Για τις ασκήσεις μέτριας δυσκολίας, δίνονται ικανοποιητικές υποδείξεις, ενώ για τις δύσκολες ασκήσεις, που σημειώνονται με αστερίσκο (*), δίνονται σύντομες λύσεις.

✓ Το βιβλίο περιέχει διάσπαρτα πέντε διαγωνίσματα των τεσσάρων θεμάτων, που είναι ανάλογα με τις απαιτήσεις των πανελλαδικών εξετάσεων.

✓ Κάθε κεφάλαιο κλείνει με επαναληπτικές ασκήσεις. Επίσης, στο τέλος δίνεται ένας μεγάλος αριθμών γενικών επαναληπτικών θεμάτων και η ενασχόληση του μαθητή με αυτά, θα τον βοηθήσει σημαντικά στην εμβάθυνση της ύλης της Μαθηματικής Ανάλυσης.

Με ευχαρίστηση θα δεχθώ οποιαδήποτε υπόδειξη που θα μπορούσε να συμβάλλει στη βελτίωση αυτού του βιβλίου.

Ιούλιος 2015
Θανάσης Ξένος

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Όριο και συνέχεια συνάρτησης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Παράγωγος συνάρτησης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Όριο και συνέχεια συνάρτησης

1.1 Επανάληψη βασικών εννοιών

1.1.1 Το σύνολο των πραγματικών αριθμών και τα υποσύνολά του

α) Το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι το $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\ldots,\}$, ενώ το σύνολο των ακέραιων αριθμών είναι το $\mathbb{Z}=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots,\}$.

β) Ρητός αριθμός ονομάζεται κάθε αριθμός που γράφεται ως πηλίκο ακέραιων αριθμών. Το σύνολο των ρητών αριθμών είναι το

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{\alpha}{\beta}\,|\,\alpha,\beta\in\mathbb{Z}\text{ και } \beta\neq 0\right\}.$$

Οι αριθμοί που δεν είναι ρητοί, όπως π.χ. οι $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, π, e, και $1+\sqrt{2}$, ονομάζονται άρρητοι. Η ένωση των συνόλων ρητών και άρρητων αριθμών μας δίνει το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

γ) Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$, τότε ορίζουμε τα παρακάτω φραγμένα διαστήματα.

ανοικτό διάστημα: $(\alpha,\beta)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,\alpha<x<\beta\}$

κλειστό διάστημα: $[\alpha,\beta]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,\alpha\le x\le\beta\}$

ανοικτό – κλειστό διάστημα: $(\alpha,\beta]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,\alpha<x\le\beta\}$

κλειστό – ανοικτό διάστημα: $[\alpha,\beta)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,\alpha\le x<\beta\}$.

δ) Αν $\alpha\in\mathbb{R}$, ορίζουμε τα παρακάτω μη φραγμένα διαστήματα

$$(\alpha,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>\alpha\},\qquad [\alpha,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\ge\alpha\}$$

$$(-\infty,\alpha)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<\alpha\},\qquad (-\infty,\alpha]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\le\alpha\}.$$

Επίσης, έχουμε $(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

ε) Οι πραγματικοί αριθμοί παριστάνονται με σημεία μιας ευθείας, η οποία ονομάζεται **άξονας των πραγματικών αριθμών**. Τα διαστήματα είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και περιέχουν άπειρα σημεία. Τα σημεία ενός διαστήματος Δ, που είναι διαφορετικά από τα άκρα του, ονομάζονται **εσωτερικά σημεία** του Δ. Αν από ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ εξαιρέσουμε τον αριθμό 0, τότε το σύνολο $A-\{0\}$ συμβολίζεται συνήθως με A^*.

Για παράδειγμα, $\mathbb{N}^*$ είναι το σύνολο των θετικών ακέραιων αριθμών.

1.3 Μονότονες συναρτήσεις - Αντίστροφη συνάρτηση

1.3.1 Μονοτονία συνάρτησης

Ορισμός

Μια συνάρτηση f ονομάζεται

i) **Γνησίως αύξουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν

$$\text{για κάθε } x_1, x_2 \in \Delta \text{ με } x_1 < x_2 \text{ ισχύει } f(x_1) < f(x_2).$$

ii) **Γνησίως φθίνουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν

$$\text{για κάθε } x_1, x_2 \in \Delta \text{ με } x_1 < x_2 \text{ ισχύει } f(x_1) > f(x_2).$$

iii) **Αύξουσα** στο Δ, όταν

$$\text{για κάθε } x_1, x_2 \in \Delta \text{ με } x_1 < x_2 \text{ ισχύει } f(x_1) \le f(x_2).$$

iv) **Φθίνουσα** στο Δ, όταν

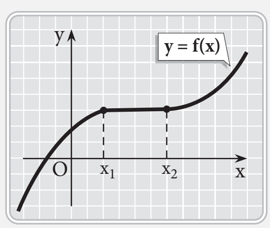
$$\text{για κάθε } x_1, x_2 \in \Delta \text{ με } x_1 < x_2 \text{ ισχύει } f(x_1) \ge f(x_2).$$

Αντίστοιχα συμβολίζουμε $f\uparrow\Delta$, $f\downarrow\Delta$, $f\uparrow\Delta$, $f\downarrow\Delta$.

- Αν η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο Δ, τότε λέμε ότι είναι **γνησίως μονότονη** στο Δ.
- Αν η f είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της, τότε λέμε απλώς ότι είναι γνησίως μονότονη.

Παρατηρήσεις - Σχόλια

1) Για την αύξουσα συνάρτηση του διπλανού σχήματος, μπορούμε να πούμε ότι είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, x_1]$, $[x_2, +\infty)$ και σταθερή στο διάστημα $[x_1, x_2]$.



Για το λόγο αυτό δεν θα ασχοληθούμε με αύξουσες ή φθίνουσες συναρτήσεις.

2) Η μονοτονία των βασικών συναρτήσεων θεωρείται γνωστή. Για παράδειγμα,

i) η εκθετική συνάρτηση $f(x)=e^x$ και η λογαριθμική συνάρτηση $g(x)=\ln x$ είναι γνησίως αύξουσες στο $\mathbb{R}$ και $(0, +\infty)$ αντίστοιχα.

ii) η $f(x)=x^2$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

iii) η $f(x)=\frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0,+\infty)$.

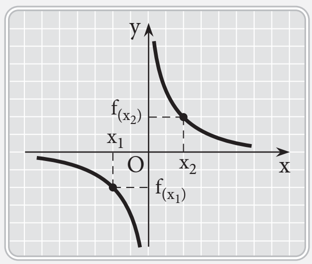
iv) η $f(x)=\varepsilon\varphi x$ είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε διάστημα του πεδίου ορισμού της, δηλαδή σε κάθε διάστημα $\left(\kappa\pi-\frac{\pi}{2},\ \kappa\pi+\frac{\pi}{2}\right)$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

3) Οι συναρτήσεις f και $-f$ έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας.

4) Είναι δυνατόν μια συνάρτηση f να είναι γνησίως μονότονη στα διαστήματα Δ_1 και Δ_2 του πεδίου ορισμού της, χωρίς όμως να συμβαίνει το ίδιο στο σύνολο $\Delta_1\cup\Delta_2$.

Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$, για την οποία έχουμε

$f\downarrow(-\infty,0)$ και $f\downarrow(0,+\infty)$



Όμως, δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο

$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)=\mathbb{R}^*$,

αφού για

$x_1<0<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

Άρα, **η μονοτονία μιας συνάρτησης εξετάζεται στα διαστήματα του πεδίου ορισμού της.**

Σημαντική ιδιότητα:

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σ' ένα διάστημα $\Delta\subseteq D_f$, τότε η εξίσωση $f(x)=0$ δεν μπορεί να έχει δύο ή και περισσότερες ρίζες στο Δ, αφού τότε για $x_1\neq x_2$ θα ίσχυε $f(x_1)=f(x_2)=0$, που είναι άτοπο. Άρα, **μια γνησίως μονότονη συνάρτηση έχει το πολύ μια ρίζα.**

Εφαρμογή 1 ***(Εύρεση της μονοτονίας μιας συνάρτησης)***

Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι συναρτήσεις

α) $f(x)=e^x+x^3$ και **β)** $f(x)=\frac{1}{x}-\ln x$.

Λύση:

Μεθοδολογία

Για να βρούμε τη μονοτονία μιας συνάρτησης $f:A\to\mathbb{R}$, θεωρούμε δύο τυχαία σημεία $x_1,x_2\in A$ με $x_1<x_2$ και χρησιμοποιώντας ιδιότητες ανισοτήτων, καταλήγουμε στην ανισότητα $f(x_1)<f(x_2)$ ή $f(x_1)>f(x_2)$.

Επίσης, με $x_1<x_2$, μπορούμε να βρούμε το πρόσημο της διαφοράς $f(x_1)-f(x_2)$.

Ακόμη, με $x_1\neq x_2$, μπορούμε να βρούμε το πρόσημο του λόγου $\lambda=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$.

Αν ο $\lambda>0$ η f είναι γνησίως αύξουσα και αν $\lambda<0$ η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Στο 2ο κεφάλαιο θα μάθουμε κι άλλο κριτήριο για τη μονοτονία συνάρτησης.

α) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ ισχύει $e^{x_1}<e^{x_2}$ και $x_1^3<x_2^3$, οπότε

$$e^{x_1}+x_1^3<e^{x_2}+x_2^3,\quad \text{δηλαδή}\quad f(x_1)<f(x_2).$$

Άρα, $f\uparrow\mathbb{R}$.

β) Για κάθε $x_1,x_2(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ ισχύει $\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}$ και $-\ln x_1>-\ln x_2$, οπότε

$$\frac{1}{x_1}-\ln x_1>\frac{1}{x_2}-\ln x_2,\ \text{δηλαδή}\ \ f(x_1)>f(x_2).$$

Άρα, $f\downarrow(0,+\infty)$.

Εφαρμογή 2 ***(Μονοτονία μιας πράξης συναρτήσεων)***

α) Αν μια συνάρτηση $f:A\to(0,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα και μια άλλη συνάρτηση $g:A\to(0,+\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα, να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι γνησίως αύξουσα στο A.

β) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση

$$h(x)=\frac{\varepsilon\varphi x}{\sigma\upsilon\nu x},\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

Λύση:

α) Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$ και $g(x_1) > g(x_2)$.

Επειδή οι τιμές $g(x_1)$ και $g(x_2)$ είναι ομόσημες, ισχύει $\dfrac{1}{g(x_1)} < \dfrac{1}{g(x_2)}$.

Τα μέλη των ανισοτήτων $f(x_1) < f(x_2)$ και $\dfrac{1}{g(x_1)} < \dfrac{1}{g(x_2)}$

είναι όλα θετικά, οπότε, αν τις πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη, έχουμε

$$\frac{f(x_1)}{g(x_1)} < \frac{f(x_2)}{g(x_2)} \quad ή \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x_1) < \left(\frac{f}{g}\right)(x_2).$$

Άρα, η συνάρτηση

$\dfrac{f}{g}$ είναι γνησίως αύξουσα στο A.

β) Γνωρίζουμε ότι:

- η συνάρτηση $f(x) = εφx,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει $f(x) > 0$,
- η συνάρτηση $g(x) = συνx,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι γνησίως φθίνουσα και ισχύει $g(x) > 0$.

Άρα, σύμφωνα με τα παραπάνω, η συνάρτηση

$$h(x) = \frac{εφx}{συνx} \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Εφαρμογή 3 *(Μονοτονία της σύνθεσης συναρτήσεων)*

α) Αν η συνάρτηση $f: A \to B$ είναι γνησίως αύξουσα και η $g: B \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα, να αποδειχθεί ότι η $g \circ f$ είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Αν $f(x) = 2^{-x} - x,\ x \in \mathbb{R}$ να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $(f \circ f) \circ f$.

Λύση:

α) Αρκεί να αποδειχθεί ότι για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$(g \circ f)(x_1) > (g \circ f)(x_2).$$

Πράγματι, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο A, για $x_1 < x_2$ ισχύει

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Επίσης, επειδή $f(x_1), f(x_2) \in B$ και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο B, ισχύει.

$$g\big(f(x_1)\big) > g\big(f(x_2)\big), \quad \text{δηλαδή} \quad (g \circ f)(x_1) > (g \circ f)(x_2).$$

β) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $-x_1 > -x_2$ και $2^{-x_1} > 2^{-x_2}$.

Επομένως, $2^{-x_1} - x_1 > 2^{-x_2} - x_2$, δηλαδή $f(x_1) > f(x_2)$, που σημαίνει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Έτσι, έχουμε ακόμη

$$f\big(f(x_1)\big) < f\big(f(x_2)\big) \quad \text{και} \quad f\Big(f\big(f(x_1)\big)\Big) > f\Big(f\big(f(x_2)\big)\Big),$$

δηλαδή $$\big((f \circ f) \circ f\big)(x_1) > \big((f \circ f) \circ f\big)(x_2).$$

Άρα, η συνάρτηση $(f \circ f) \circ f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Εφαρμογή 4 *(Μονοτονία άρτιας συνάρτησης)*

Αν μια άρτια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα (α, β) θετικών αριθμών, να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (–β, –α).

Λύση:

Θεωρούμε δύο τυχαία σημεία $x_1, x_2 \in (-\beta, -\alpha)$ με $x_1 < x_2$ και αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(x_1) > f(x_2)$. Επειδή $-x_1, -x_2 \in (\alpha, \beta)$, $-x_1 > -x_2$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β), συμπεραίνουμε ότι $f(-x_1) > f(-x_2)$, δηλαδή $f(x_1) > f(x_2)$, αφού η f είναι άρτια συνάρτηση.

Εφαρμογή 5 *(Μονοτονία και επίλυση εξίσωσης)*

Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση $e^x = 1 - x^3$.

Λύση:

Μεθοδολογία

Μια μέθοδος για να λύσουμε εξίσωση της μορφής $f(x) = 0$ είναι η εξής:

- Αποδεικνύουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη, οπότε έχει το πολύ μια ρίζα.
- Βρίσκουμε προφανή ρίζα.

Η εξίσωση γράφεται $e^x + x^3 - 1 = 0$.

Η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3 - 1$, $x \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα (βλέπε και την εφαρμογή 1 παραπάνω) και επειδή $f(0) = 1 + 0 - 1 = 0$, μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι η $x = 0$.

Ασκήσεις

1. *Χαρακτηρίστε με «Σωστό» ή «Λάθος» καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις. Να αιτιολογηθούν οι απαντήσεις.*

α) Η συνάρτηση $f(x)=x^{2\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$ είναι γνησίως αύξουσα.

β) Αν για μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $f(1)<f(2)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Αν η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία A(1, 3) και B(0, 4), τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα.

δ) Η συνάρτηση $f(x)=-\frac{1}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}^*$.

ε) Αν μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα, τότε η $f\circ f$ είναι γνησίως αύξουσα.

στ) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε διάστημα Δ, τότε για κάθε $x_1, x_2\in\Delta$ με $x_1\neq x_2$ ισχύει $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$.

ζ) Η συνάρτηση $f(x)=2(x-1)^2+3$ έχει ελάχιστο το 3.

η) Η συνάρτηση $f(x)=2-5|x-2|$ έχει μέγιστο το 2.

θ) Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)\leq f(1)$, τότε η f έχει μέγιστο το $f(1)$.

ι) Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)\geq 3$, τότε η f έχει ελάχιστο το 3.

ια) Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ είναι αντιστρέψιμη.

ιβ) Αντίστροφη της συνάρτησης $f(x)=e^x$ είναι η $g(x)=e^{-x}$.

ιγ) Αν $f(x)=2^x$, $x\in\mathbb{R}$, τότε $f^{-1}(x)=\log_2 x$, $x>0$.

ιδ) Αν η f είναι γνησίως μονότονη, τότε και η f^2 είναι γνησίως μονότονη.

ιε) Κάθε αντιστρέψιμη συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη.

2. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x)=2-4x^3$, **β)** $f(x)=2-3e^{\frac{1}{x}}$, $x<0$, **γ)** $f(x)=\frac{1}{x^3}-\ln x$.

3. Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $e^x + \ln(x+1) = 1$, **β)** $x^9 + 3x^5 = 4$ και **γ)** $x^3 + 2x = 3 + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

4. Θεωρούμε δύο συναρτήσεις $f: A \to \mathbb{R}$ και $g: A \to \mathbb{R}$.

α) Αν οι f και g είναι γνησίως αύξουσες, να αποδειχθεί ότι και η f+g είναι γνησίως αύξουσα.

β) Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα και η g είναι γνησίως αύξουσα, να αποδειχθεί ότι η f–g είναι γνησίως φθίνουσα.

γ) Αν οι f, g είναι γνησίως μονότονες με διαφορετικό είδος μονοτονίας και παίρνουν θετικές τιμές, να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $\frac{f}{g}$.

δ) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $h(x) = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

5. **α)** Αν $0 \le \alpha < \beta \le \frac{\pi}{2}$, να αποδειχθεί ότι $\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu\beta > \alpha^2 - \beta^2$.

β) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με α<β, να αποδειχθεί ότι $\left(\frac{3}{4}\right)^\alpha - \left(\frac{3}{4}\right)^\beta > \alpha^3 - \beta^3$.

6. **α)** Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x - 3x$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ η ανίσωση $e^{1-2x} - e^{-3x} > -3(x+1)$.

γ) Να βρεθεί το διάστημα, στο οποίο η γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y = 1$.

7. Αν οι συναρτήσεις $f: A \to B$ και $g: B \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονες, να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $g \circ f$.

8. Αν μια περιττή συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα (α, β) θετικών αριθμών, να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και στο διάστημα (–β, –α).

9. Να βρεθούν τα ακρότατα (αν υπάρχουν) των παρακάτω συναρτήσεων.

α) $f(x) = 2x^2 + 3$, **β)** $f(x) = x^2 - 4x + 3$, **γ)** $f(x) = 6x - x^2$,

δ) $f(x) = 3 - 2|x-3|$, **ε)** $f(x) = 2 - 3\eta\mu x$, **στ)** $f(x) = x^5 + 2x^3 - 1$.

1ο Διαγώνισμα

Διδακτική ενότητα **Γενικό μέρος συναρτήσεων**

Θέμα Α

Α1. Να αποδειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις δύο αντίστροφων συναρτήσεων είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$.

Α2. Τι ονομάζουμε σύνολο τιμών μιας συνάρτησης $f:A\to\mathbb{R}$, όπου $A\subseteq\mathbb{R}$;

Α3. Να δοθεί ο ορισμός της σύνθεσης δύο συναρτήσεων;

Α4. *Χαρακτηρίστε με «Σωστό» ή «Λάθος» καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις.*

α) Η συνάρτηση $f(x)=e^{x^2}$ είναι αντιστρέψιμη.

β) Αν για μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\Leftrightarrow\mathbb{R}$, τότε η f δεν έχει ελάχιστο.

γ) Αν οι συναρτήσεις f, g, h ορίζονται στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f\circ h=f\circ g$, τότε $h=g$.

δ) Αν μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι 1–1, τότε η συνάρτηση $f\circ f^{-1}$ είναι ταυτοτική.

ε) Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων δύο αντίστροφων συναρτήσεων ανήκουν στην ευθεία $y=x$.

Θέμα Β

Β1. Να βρεθεί η αντίστροφη της συνάρτησης $f(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$, $x<0$.

Β2. Αν $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$ και $g(x)=\sqrt{x-2}$, να βρεθούν οι συναρτήσεις $g\circ f$ και $f\circ g$.

Β3. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $2f(x)+f(-x)=\dfrac{2e^x+1}{e^x+1}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Να βρεθεί η αντίστροφη της f.

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^3+x$.

Γ1. Να συγκριθούν οι αριθμοί f(ημ2) και f(συν2).

Γ2. Να αποδειχθεί ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}\big(2+f(x)\big)<1$.

Γ3. Να βρεθεί το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=x^2(x^4+1)$ βρίσκεται κάτω από την C_f.

Γ4. Αν μια συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι «1–1», να αποδειχθεί ότι και η συνάρτηση $\varphi(x)=h(x)+h^3(x)$ είναι «1–1».

Θέμα Δ

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ με $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδειχθεί ότι

α) $f(0)=1$, **β)** $f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$, **γ)** $f(x-y)=\dfrac{f(x)}{f(y)}$.

Δ2. Να αποδειχθεί ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ3. Αν η C_f τέμνει την ευθεία $y=1$ μόνο σ' ένα σημείο, να αποδειχθεί ότι

α) η f είναι αντιστρέψιμη και

β) $f^{-1}(y_1\cdot y_2)=f^{-1}(y_1)+f^{-1}(y_2)$ για κάθε $y_1,y_2\in f(\mathbb{R})$.

Απαντήσεις - υποδείξεις ή σύντομες λύσεις των ασκήσεων

Κεφάλαιο 1 Όριο και συνέχεια συνάρτησης

§ 1.2 Συναρτήσεις

1) **α)** Λ, **β)** Σ, **γ)** Σ, **δ)** Λ, **ε)** Λ, **στ)** Λ (για $\alpha=0$, $D_f=\mathbb{R}^*$), **ζ)** Λ, $D_f=(-\infty,0)$, **η)** Λ, **θ)** Σ, **i)** Λ, **ια)** Σ, **ιβ)** Σ (η μηδενική συνάρτηση).

2) Οι β) και ε).

3)

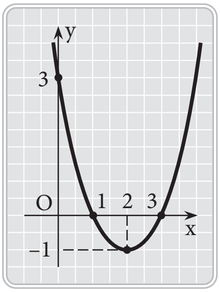
α	β	γ	δ	ε	στ	ζ
vii	i	v	ii	iv	vi	iii

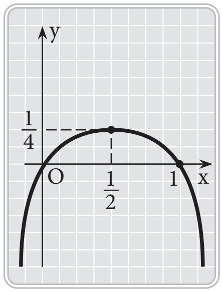
4) **α)** $\mathbb{R}-\{-1,1\}$, **β)** $(-\infty,-2]\cup[0,2]$, **γ)** $(-\infty,0)$, **δ)** $(0,+\infty)$, **ε)** $\mathbb{R}-\{1\}$,
στ) $(-\infty,-1)\cup(0,1)$, **ζ)** $(0,\pi)\cup(2\pi,3\pi)\cup(4\pi,5\pi)\cup\ldots$
η) $(0,1)\cup(1,\pi)\cup(2\pi,3\pi)\cup(4\pi,5\pi)\cup\ldots$
θ) Αν $\alpha>1$, τότε $D_f=(0,+\infty)$. Αν $\alpha=1$, τότε $D_f=(0,1)\cup(1,+\infty)$.
Αν $0<\alpha<1$, τότε $D_f=(0,+\infty)-\{1\pm\sqrt{1-\alpha}\}$.
Αν $\alpha=0$, τότε $D_f=(0,2)\cup(2,+\infty)$.
Αν $\alpha<0$, τότε $D_f=(0,+\infty)-\{1+\sqrt{1-\alpha}\}$.

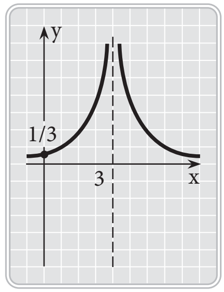
5) **α)** $\mathbb{R}-\{1\}$, **β)** $\left[-\frac{5}{4},+\infty\right]$, **γ)** $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, **δ)** $(-\infty,1)$, **ε)** $\left[-5,-\frac{3}{2}\right)$,
στ) $(-\infty,2)$, **ζ)** $y=(x+1)^3+4$, $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, **η)** $\left(-\frac{1}{2},2\right)$, **η)** $(0, 8]$.

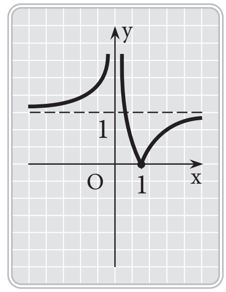
6) **α)** $e^x+e^{-x}\geq 2$ και $2συνx\leq 2$. Λύση η $x=0$.
β) $x^2+1\geq 1$ και $ημx\leq 1$. Η εξίσωση είναι αδύνατη.
γ) Η εξίσωση γράφεται $2συνπx+3=\dfrac{2x}{x^2+1}$.
Το α′ μέλος έχει σύνολο τιμών [1, 5] και το β′ μέλος το [−1, 1].
Η εξίσωση αληθεύει μόνο για $x=1$.

7) **α)** $f(x) = (x-2)^2 - 1$ **β)** $f(x) = \frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2$ **γ)** $f(x) = \left|\frac{1}{x-3}\right|$ **δ)** $f(x) = \left|1 - \frac{1}{x}\right|$

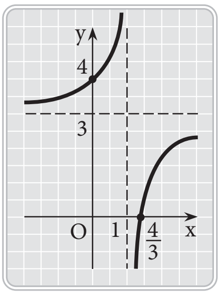


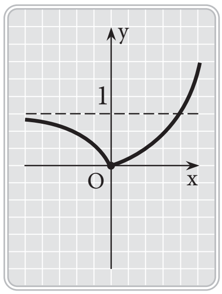


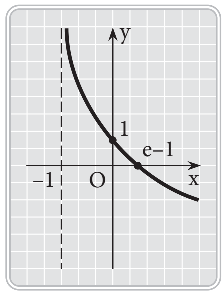


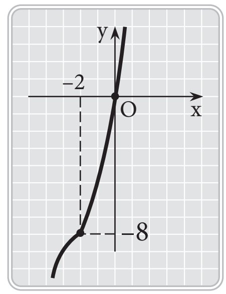


ε) $f(x) = 3 - \frac{1}{x-1}$ **στ)** $f(x) = |e^x - 1|$ **ζ)** $f(x) = 1 - \ln(x+1)$ **η)** $f(x) = (x+2)^3 - 8$

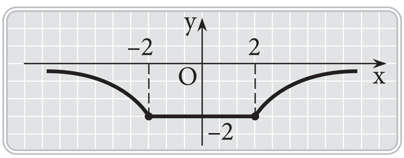








8) $\alpha = 1$ και $\beta = -1$



9) **α)** (2, 1) και (0, 1), **β)** $f(x) = g(x) \Leftrightarrow (x-1)^3 = 8 \Leftrightarrow x = 3$. Το σημείο $(3, 36)$.

γ) Η f έχει σύνολο τιμών το $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$, ενώ η g το $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$.

Ισχύει $f(x) = g(x)$ μόνο για $x = 1$ και το κοινό σημείο είναι το $(1, 1)$.

10) Από τις ισότητες $f(0) = g(0)$ και $f(1) = g(1)$ βρίσκουμε

$$\left(\alpha = 2\, ,\ \beta = \frac{-11 \pm \sqrt{57}}{4}\right) \text{ ή } \left(\alpha = -2\, ,\ \beta = \frac{-7 \pm \sqrt{73}}{4}\right).$$

11) **β)** $D_f = (0,1) \cup (1, +\infty)$ και $D_g = \mathbb{R}^*$.

γ) $5(x-1) + 3\ln x = 0 \quad (1)$

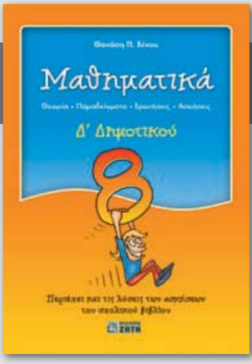
Για $x > 1$ το α′ μέλος της (1) είναι θετικό.

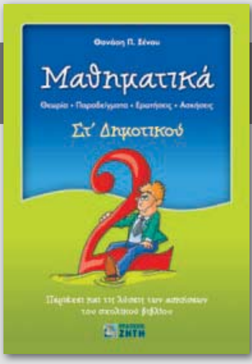
Για $x \in (0,1)$ το α′ μέλος της (1) είναι αρνητικό.

Μοναδική λύση είναι η $x = 1$.

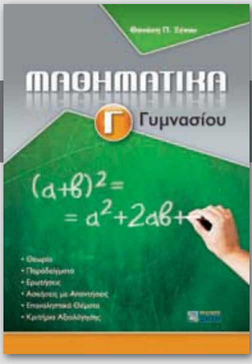
Βιβλία Μαθηματικών του Θανάση Ξένου

Μαθηματικά
ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

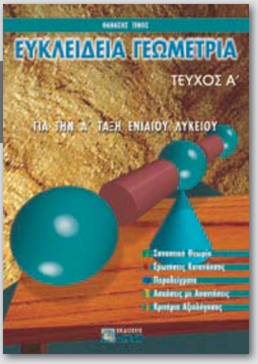


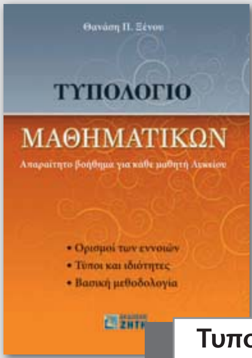


Μαθηματικά
ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

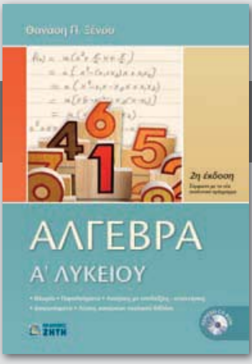


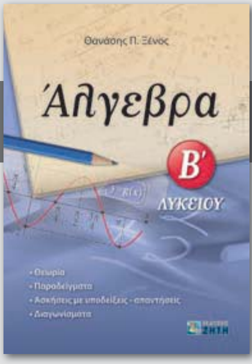
Ευκλείδεια Γεωμετρία
Α' & Β' Λυκείου





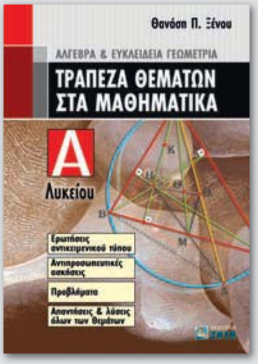
Τυπολόγιο
για όλες τις τάξεις



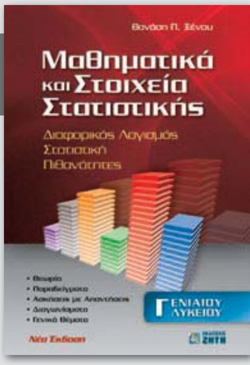


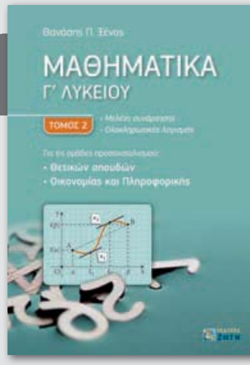
Μαθηματικά
Α' & Β' Λυκείου

Προβλήματα & Κριτήρια Α' & Β' Λυκείου



Μαθηματικά Γ' Λυκείου

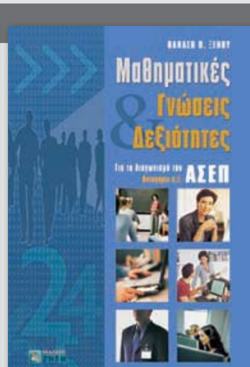


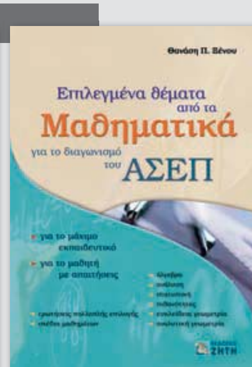


Ομάδα προσανατολισμού
- Θετικών Σπουδών,
- Οικονομίας και Πληροφορικής

Προβλήματα & Κριτήρια Γ' Λυκείου

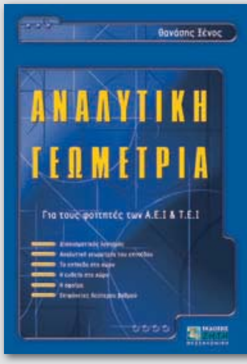
ΕΠΑΛ & ΑΣΕΠ

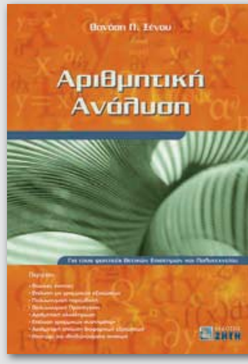


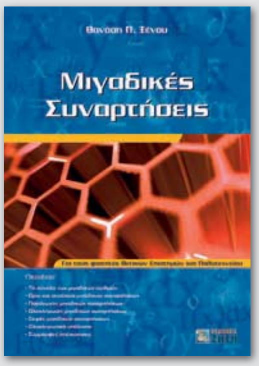


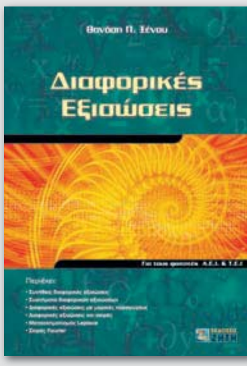
Μαθηματικά

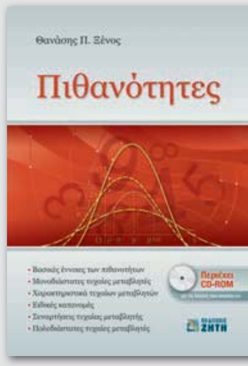
ΑΕΙ-ΤΕΙ

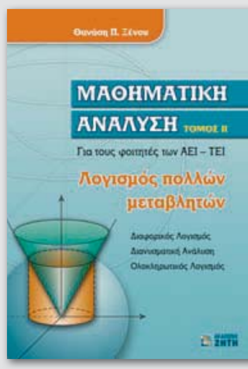












ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ:

Αρμενοπούλου 27, 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ.: 2310-203720 • Fax: 2310-211305
e-mail: sales@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ:

www.ziti.gr