Θανάσης Π. Ξένος

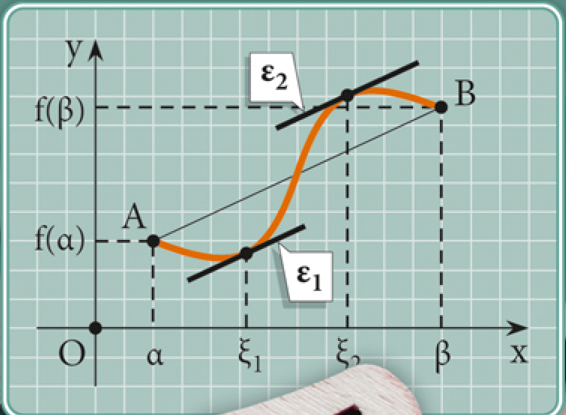
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΟΜΟΣ 2

- *Μελέτη συνάρτησης*
- *Ολοκληρωτικός λογισμός*

Για τις ομάδες προσανατολισμού:

- **Θετικών σπουδών**
- **Οικονομίας και Πληροφορικής**



ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα

Με το συγγραφέα επικοινωνείτε:
Τηλ. 2310.348.086, e-mail: thanasisxenos@yahoo.gr

ISBN 978-960-456-459-0

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση
Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ:
Αρμενοπούλου 27, 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ.: 2310.203.720, Fax: 2310.211.305 • e-mail: sales@ziti.gr

ΑΠΟΘΗΚΗ ΑΘΗΝΩΝ - ΠΩΛΗΣΗ ΧΟΝΔΡΙΚΗ:
Χαριλάου Τρικούπη 22, 106 79 Αθήνα
Τηλ.-Fax: 210.3816.650 • e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό αποτελεί τον δεύτερο τόμο των Μαθηματικών Γ΄ Λυκείου για τις ομάδες προσανατολισμού:

- Θετικών σπουδών
- Οικονομίας και Πληροφορικής

Αναπτύσσονται διεξοδικά τα κεφάλαια:

- Μελέτη συνάρτησης
- Ολοκληρωτικός λογισμός

Η δομή του βιβλίου, σε γενικές γραμμές, είναι η εξής:

- Σε κάθε ενότητα παρουσιάζεται η θεωρία σύντομα και ελκυστικά. Ακολουθούν παρατηρήσεις και σχόλια για να αποσαφηνιστούν όλες οι έννοιες.
- Στη συνέχεια, παρουσιάζονται χαρακτηριστικές εφαρμογές με τις απαραίτητες μεθοδολογικές οδηγίες.
- Κάθε παράγραφος κλείνει με ένα μεγάλο αριθμό ασκήσεων, που καλύπτουν την ύλη με κάθε λεπτομέρεια.

  Για τις εύκολες ασκήσεις ή για αυτές που υπάρχουν αντίστοιχες εφαρμογές, δίνονται οι απαντήσεις στο τέλος του βιβλίου. Για τις ασκήσεις μέτριας δυσκολίας, δίνονται ικανοποιητικές υποδείξεις, ενώ για τις δύσκολες ασκήσεις, που σημειώνονται με αστερίσκο (*), δίνονται σύντομες λύσεις.
- Το βιβλίο περιέχει διάσπαρτα πέντε διαγωνίσματα των τεσσάρων θεμάτων, που είναι ανάλογα με τις απαιτήσεις των πανελλαδικών εξετάσεων.
- Κάθε κεφάλαιο κλείνει με επαναληπτικές ασκήσεις. Επίσης, στο τέλος δίνεται ένας μεγάλος αριθμών γενικών επαναληπτικών θεμάτων και η ενασχόληση του μαθητή με αυτά, θα τον βοηθήσει σημαντικά στην εμβάθυνση της ύλης της Μαθηματικής Ανάλυσης.

Με ευχαρίστηση θα δεχθώ οποιαδήποτε υπόδειξη που θα μπορούσε να συμβάλλει στη βελτίωση αυτού του βιβλίου.

Δεκέμβριος 2015
Θανάσης Ξένος

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Παράγωγος συνάρτησης (Μελέτη Συνάρτησης)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Παράγωγος συνάρτησης

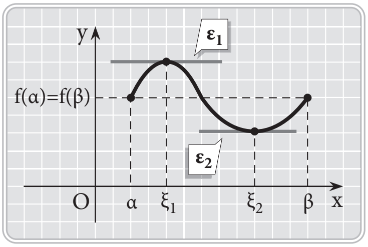
(Μελέτη συνάρτησης)

2.5 Το θεώρημα μέσης τιμής

2.5.1 Το θεώρημα Rolle

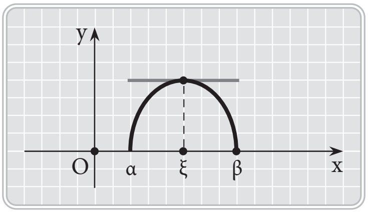
Αν για μια συνάρτηση f γνωρίζουμε ότι
α) είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$
β) είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) και
γ) $f(\alpha)=f(\beta)$,
τότε υπάρχει σημείο $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $f'(\xi)=0$.

Το θεώρημα αυτό γεωμετρικά σημαίνει ότι σε ένα τουλάχιστον σημείο $M(\xi, f(\xi))$ η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.



Στην ειδική περίπτωση $f(\alpha)=f(\beta)=0$ έχουμε το συμπέρασμα:

Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της f'.



Εφαρμογή 1 *(Έλεγχος των υποθέσεων του θεωρήματος Rolle)*

Να εξετασθεί αν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση $f(x)=1-\sqrt[3]{(x-1)^2}$ στο διάστημα $[0,2]$.

Λύση:

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x)=1-\sqrt[3]{|x-1|^2}=1-|x-1|^{\frac{2}{3}}=\begin{cases} 1-(x-1)^{\frac{2}{3}}, & x \geq 1 \\ 1-(1-x)^{\frac{2}{3}}, & x<1 \end{cases}$.

- Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο διάστημα $[0,2]$.
- Για $x>1$ και για $x<1$ η f είναι παραγωγίσιμη. Δεν είναι όμως παραγωγίσιμη στο $x_0=1\in(0,2)$, επειδή

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{1-(x-1)^{\frac{2}{3}}-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\left[-(x-1)^{-\frac{1}{3}}\right]=\lim_{x\to1^+}\frac{-1}{\sqrt[3]{x-1}}=-\infty.$$

- Ισχύει $f(0)=f(2)=0$.

  Άρα, δεν ικανοποιούνται όλες οι υποθέσεις του Θεωρήματος Rolle για την f στο διάστημα $[0,2]$.

Εφαρμογή 2 *(Εύρεση παραμέτρων ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle)*

Να βρεθούν οι αριθμοί α, β, γ ώστε να ικανοποιούνται όλες οι υποθέσεις του Θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}x^2+\alpha x+1 & , \quad -1\le x\le 0\\ x^3+\beta x^2+2x+\gamma, & \quad 0<x\le 1\end{cases}.$$

Στη συνέχεια, να βρεθεί σημείο $\xi\in(-1,1)$ με $f'(\xi)=0$.

Λύση:

- Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[-1,0)$ και $(0,1]$, ως πολυωνυμική σε καθένα από αυτά. Για να είναι συνεχής και στο 0, αρκεί να ισχύει

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0),\ \text{δηλαδή}\ \gamma=1.$$

- Η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(-1,0)$ και $(0,1)$. Θα πρέπει να είναι παραγωγίσιμη και στο σημείο $x_0=0$.

  Έχουμε:

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+\alpha x+1-1}{x}=\lim_{x\to0}(x+\alpha)=\alpha \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{x^3+\beta x^2+2x+1-1}{x}=\lim_{x\to0}\left(x^2+\beta x+2\right)=2\ \ (\text{αφού}\ \gamma=1).$$

  Επομένως, η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, όταν ισχύει $\alpha=2$.

- Τέλος, πρέπει να ικανοποιείται η ισότητα $f(-1)=f(1)$, δηλαδή να ισχύει

$$1-\alpha+1=1+\beta+2+1\ \ \text{ή}\ \ 2-\alpha=4+\beta\ \ \text{ή}\ \ \beta=-4.$$

  Άρα, έχουμε $\alpha=2$, $\beta=-4$ και $\gamma=1$.

Για τις τιμές αυτές των α, β, γ ισχύει

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+2 & , \quad -1<x\le 0 \\ 3x^2-8x+2, & \quad 0<x<1 \end{cases}.$$

- Αν $\xi\in(-1,0]$, η ισότητα $f'(\xi)=0$ γράφεται $2\xi+2=0$, οπότε $\xi=-1$ που δεν ανήκει στο διάστημα $(-1,0]$.
- Αν $\xi\in(0,1)$, η ισότητα $f'(\xi)=0$ γράφεται $3\xi^2-8\xi+2=0$ και βρίσκουμε το σημείο $\xi=\dfrac{4-\sqrt{10}}{3}$.

Εφαρμογή 3 ***(Συμπεράσματα από την υπόθεση $f'(x)\neq 0$)***

Έστω μια συνάρτηση $f:\Delta\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ με $f'(x)\neq 0$.
Να αποδειχθεί ότι:

α) Αν $\Delta=[\alpha,\beta]$, τότε $f(\alpha)\neq f(\beta)$.

β) Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο Δ.

γ) Η f είναι αντιστρέψιμη και η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη με
$\left(f^{-1}\right)'(f(x))=\dfrac{1}{f'(x)}$ για κάθε $x\in\Delta$.

Λύση:

α) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $\Delta=[\alpha,\beta]$.
Αν ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)$, σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ με $f'(\xi)=0$, που είναι άτοπο, αφού $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Delta$.

β) Αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$, τότε $f(x_1)=f(x_2)=0$ και σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ με $f'(x_0)=0$, που είναι άτοπο.
Άρα, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο Δ.

Μεθοδολογία

Για να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση $f(x)=0$ έχει **το πολύ μία ρίζα,** συνήθως εργαζόμαστε με έναν από τους παρακάτω τρόπους.

1ος τρόπος: Αποδεικνύουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

2ος τρόπος: Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες $x_1<x_2$ και με το θεώρημα Rolle καταλήγουμε σε άτοπο.

γ) ç Αν η f δεν είναι 1–1, τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ και $f(x_1) = f(x_2)$. Σύμφωνα πάλι με το θεώρημα Rolle, υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ με $f'(x_0) = 0$, που είναι άτοπο.

Άρα, η f είναι 1–1 και επομένως είναι αντιστρέψιμη.

ç Για κάθε $y_0 \in f(\Delta)$ υπάρχει $x_0 \in \Delta$ με $f(x_0) = y_0$.

Για $y = f(x) \neq y_0$ και $x \in \Delta$ έχουμε

$$x \neq x_0 \quad \text{και} \quad \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}.$$

Επομένως, $$\lim_{y + y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)},$$

που σημαίνει ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $y_0 = f(x_0)$ με

$(f^{-1})'(f(x_0)) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$, που αποδεικνύει το ζητούμενο.

Σχόλιο

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x και η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο f(x), τότε από την ισότητα $f^{-1}(f(x)) = x$, με παραγώγιση των μελών της, προκύπτει ότι

$$(f^{-1})(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \qquad (1)$$

Έχοντας $f'(x) \neq 0$, προκύπτει η ισότητα

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)},$$

που αποδείξαμε παραπάνω.

Προσοχή

Αυτή η απόδειξη που αναφέρουμε στο σχόλιο, γίνεται με την υπόθεση ότι οι f και f^{-1} είναι παραγωγίσιμες.

Αν για ένα σημείο $x_0 \in \Delta$ ισχύει $f'(x_0) = 0$, τότε η f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0) = y_0$, διότι, αν συνέβαινε αυτό, από την (1) θα είχαμε

$$(f^{-1})'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = 1,$$

δηλαδή $$(f^{-1})'(f(x_0)) \cdot 0 = 1, \text{ άτοπο.}$$

11. **α)** Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ με $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Delta$, να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ δεν μπορεί να έχει περισσότερες από δύο ρίζες στο Δ.

β) Να αποδειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)=e^{x}+e^{-x}$ και $h(x)=\frac{1}{2}x^{2}+3x-2$ έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

12. **α)** Αν η εξίσωση $\alpha x^{3}+\beta x^{2}+\gamma x+\delta=0$ έχει τρεις άνισες πραγματικές, ρίζες, να αποδειχθεί ότι $\beta^{2}>3\alpha\gamma$.

β) Αν η εξίσωση $\alpha x^{5}+\beta x^{3}+\gamma x+\delta=0$ έχει πέντε άνισες πραγματικές ρίζες, να αποδειχθεί ότι $\alpha\cdot\beta<0,\ \alpha\cdot\gamma>0$ και $\beta^{2}>\frac{20}{9}\alpha\gamma$.

13. Δύο συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμες στο (α,β) με $g(x)\neq 0,\ g'(x)\neq 0$ και $\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}=\frac{f(\beta)}{g(\beta)}$.

Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ με $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$.

14. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Να αποδειχθεί ότι:

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\frac{f(x)}{x-c}$, όπου $c\notin[\alpha,\beta]$, έχει τουλάχιστον μία οριζόντια εφαπτομένη.

β) Υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ για το οποίο η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M\big((x_0, f(x_0)\big)$ διέρχεται από το σημείο $A(c,0)$.

15. Αν $g(x)=(x-\alpha)(x-\beta)\cdot e^{f(x)}$, όπου η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β), να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ με $f'(x_0)=\frac{1}{\alpha-x_0}+\frac{1}{\beta-x_0}$.

16. Αν $g(x)=\frac{f(\alpha)+f(\beta)-f(x)}{\alpha+\beta-x}$, όπου η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και ισχύει $\frac{f(\alpha)}{\alpha}=\frac{f(\beta)}{\beta}$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^{*}$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ με $f'(\xi)=\frac{f(\alpha)+f(\beta)-f(\xi)}{\alpha+\beta-\xi}$.

8ο Διαγώνισμα

Διδακτική ενότητα | **Κεφάλαιο 2**

Θέμα Α

Α1. Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο $x_0 \in (\alpha,\beta)$, στο οποίο η f είναι συνεχής.
Αν $f'(x)>0$ στο (α, x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), να αποδειχθεί ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Α2. Τι ονομάζουμε κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης;

Α3. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Α4. *Χαρακτηρίστε με «Σωστό» ή «Λάθος» καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:*

α) Μια γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ δεν έχει τοπικά ακρότατα.

β) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης δεν έχει καμία ασύμπτωτη.

γ) Η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$, $x\in[0,+\infty)$, $\alpha>0$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

δ) Αν για κάθε x σε ένα σύνολο Δ ισχύει $f'(x)=g'(x)$, τότε $f(x)=g(x)+c$ για κάθε $x\in\Delta$.

ε) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε αλλάζει η μονοτονία της f εκατέρωθεν του x_0.

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$, $x>0$

Β1. Να αποδειχθεί ότι $f(x)+xf'(x)+x^2f''(x)=\dfrac{5\ln x-4}{x^2}$ για κάθε $x>0$.

Β2. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

B3. Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

B4. Να γίνει η γραφική παράσταση της f.

Θέμα Γ

Έστω συνεχής συνάρτηση $f:[0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = (e^x - 1)\cdot \ln x$ για κάθε $x > 0$.

Γ1. Να αποδειχθεί ότι $f(0) = 0$.

Γ2. Να εξετασθεί αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Γ3. Να μελετηθεί η f ως προς την κυρτότητα στο διάστημα $[1, +\infty)$.

Γ4. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x > 1$ ισχύει $\dfrac{e^x - 1}{e - 1} > \dfrac{x - 1}{\ln x}$.

* **Γ5.** Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $g(x) = f^2(x)$ έχει ακριβώς ένα τοπικό ελάχιστο και ένα τοπικό μέγιστο.

Θέμα Δ

Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(0) = f'(0) = e$, $f(x) > 0$ και $f(x)\cdot f'(x) = f''(x)\cdot f(x) - (f'(x))^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδειχθεί ότι $f'(x) = e^x \cdot f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ2. Να αποδειχθεί ότι $f(x) = e^{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ3. Να βρεθούν **i)** το σύνολο τιμών της f και

ii) οι ασύμπτωτες της C_f.

* **Δ4.** Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας με γενικό όρο

$$\alpha_\nu = \ln f\left(\sqrt{\nu^2 + 1}\right) - \ln f(\nu).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ολοκληρωτικός λογισμός

3.2 Ορισμένο ολοκλήρωμα

Ορισμός

Θεωρούμε μια συνάρτηση f, συνεχή στο διάστημα [α, β].
Με τα σημεία

$$\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{\nu-1} < x_\nu = \beta$$

χωρίζουμε το [α, β] σε ν ισομήκη υποδιαστήματα με μήκος $\Delta x = \dfrac{\beta-\alpha}{\nu}$.

Παίρνουμε ένα οποιοδήποτε σημείο ξ_κ του διαστήματος

$$[x_{\kappa-1}, x_\kappa],\ \kappa = 1, 2, \ldots, \nu$$

και σχηματίζουμε το άθροισμα.

$$S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \ldots + f(\xi_\nu)\Delta x = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x,$$

που είναι γνωστό ως **άθροισμα Riemann.**

Αποδεικνύεται ότι υπάρχει το $\lim\limits_{\nu\to+\infty} S_\nu$, είναι πραγματικός αριθμός και ανεξάρτητος από την επιλογή των σημείων ξ_κ.

Το όριο αυτό ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της f από το α έως το β και συμβολίζεται με

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

Οι αριθμοί α και β ονομάζονται **όρια ολοκλήρωσης.**

Τονίζουμε ότι το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ είναι ένας πραγματικός αριθμός, που εξαρτάται μόνο από τη συνάρτηση f και το διάστημα [α, β]. Έτσι μπορούμε να γράφουμε

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(u)du = \ldots$$

Τα παραπάνω ισχύουν με την προϋπόθεση ότι $\alpha < \beta$. Ο ορισμός επεκτείνεται και στις περιπτώσεις $\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$ ως εξής:

$$\int_\alpha^\alpha f(x)dx = 0 \quad \text{και} \quad \int_\alpha^\beta f(x)dx = -\int_\beta^\alpha f(x)dx$$

Κάθε συνάρτηση f, για την οποία υπάρχει το

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\,,\ \text{ονομάζεται } \textbf{ολοκληρώσιμη} \text{ στο διάστημα } [\alpha,\,\beta].$$

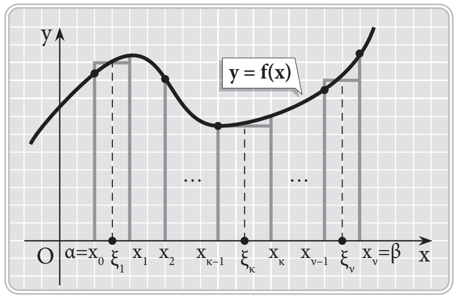
Κάθε συνεχής συνάρτηση στο [α, β] είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα αυτό. (Στα Ανώτερα Μαθηματικά θα δούμε ότι υπάρχουν ολοκληρώσιμες συναρτήσεις που δεν είναι συνεχείς).

Γεωμετρική σημασία του ορισμένου ολοκληρώματος

- Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση

  $$f:[\alpha,\,\beta]\to\mathbb{R} \ \text{ με } \ f(x)\geq 0$$

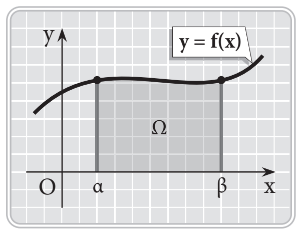
  για κάθε $x\in[\alpha,\,\beta]$.



Το άθροισμα Riemann

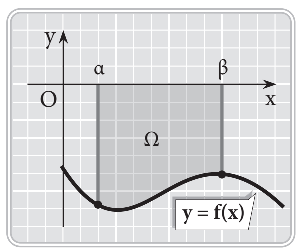
$$S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \ldots + f(\xi_\nu)\Delta x$$

παριστάνει το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων με βάση Δx και ύψη τις τιμές $f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots, f(\xi_\nu)$.



Το $\lim\limits_{\nu\to+\infty} S_\nu$, δηλαδή το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ παριστάνει το **εμβαδόν** του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$.

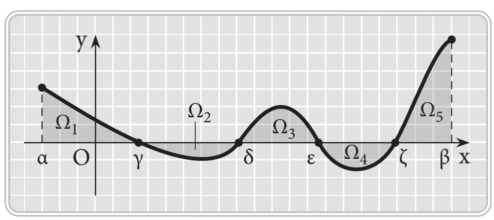
Ισχύει λοιπόν $\boxed{E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx}$.



Στην περίπτωση που είναι $f(x)\leq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε ισχύει

$$E(\Omega) = -\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\,.$$

Αν η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, όπως στην περίπτωση του παρακάτω σχήματος, τότε έχουμε



$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx =$$

$$= E(\Omega_1) - E(\Omega_2) + E(\Omega_3) - E(\Omega_4) + E(\Omega_5).$$

Απαντήσεις - υποδείξεις ή σύντομες λύσεις των ασκήσεων

Κεφάλαιο 2 Παράγωγος συνάρτησης (Μελέτη συνάρτησης)

§ 2.5 Το θεώρημα μέσης τιμής

1) **α)** Σ, **β)** Λ, **γ)** Σ, **δ)** Λ, **ε)** Σ. **2)** **α)** $\xi=\frac{\pi}{3}$, **γ)** $\xi=0$, **δ)** $\xi=2$.

3) $\alpha=\frac{1}{1+e}$, $\beta=\gamma=0$ και $\xi=0$. **4)** **α)** 4, **β)** 5.

6) Παρατηρήστε ότι η 1η εξίσωση έχει ρίζα το 0.

10) **β)** Η $f'(x)=2(x-\eta\mu x)$ δε μηδενίζεται στο $(0,\pi)$.

11) **β)** Για την $f(x)=g(x)-h(x)$ ισχύει $f''(x)=e^{x}+e^{-x}-1\neq 0$, αφού $e^{x}+e^{-x}\geq 2$.

12) **α)** Η $f'(x)$ έχει δύο ρίζες και άρα $\Delta>0$.

β) Η $f'(x)=5\alpha x^4+3\beta x^2+\gamma$ έχει 4 ρίζες, δηλαδή η $5\alpha y^2+3\beta y+\gamma=0$ έχει δύο θετικές άνισες ρίζες. Άρα, ισχύει $\Delta>0$, $S>0$ και $P>0$.

13) Θεώρημα Rolle για την $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$.

14) **α)** Θεώρημα Rolle για τη g. **β)** Από την $g'(x_0)=0$ προκύπτει $f(x_0)=x_0f'(x_0)$ κ.λπ.

15) Θεώρημα Rolle για την g. **16)** Θεώρημα Rolle για την g.

17) Θεώρημα Rolle για την g. **18)** Θεώρημα Rolle για την $h(x)=f(x)\cdot g(x)$.

19) Θεώρημα Rolle για την $g(x)=f(x)-x+x^2$.

20) Θεώρημα Rolle για την $g(x)=f(x)-\left(\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta^2-\alpha^2}\right)x^2$.

21) Αν $f(\alpha)=f(\beta)=0$ με $\alpha<\beta$, εφαρμόστε το θεώρημα Rolle για την h.

22) Θεώρημα Rolle για την $h(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$.

23) Αρκεί να υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε να ισχύει $f(x_0)=x_0f'(x_0)$. Εφαρμόστε το θεώρημα Rolle για την $g(x)=\frac{f(x)}{x}$.

24) Θεώρημα Bolzano για την $f(x)=e^{x}-2x^2-4x-2$ σε τρία διαστήματα. Αν η f έχει 4

ρίζες, η f' έχει τουλάχιστον 3 ρίζες και η $f''(x)=e^x-4$ έχει τουλάχιστον 2 ρίζες, που είναι άτοπο.

25) Θεώρημα Rolle για την
$\Phi(x)=[g(\alpha)h(\beta)-g(\beta)h(\alpha)]f(x)-[f(\alpha)h(\beta)-f(\beta)h(\alpha)]g(x)+[f(\alpha)g(\beta)-f(\beta)g(\alpha)]h(x)$.

26) Αν $f(x_1)=x_1$, $f(x_2)=x_2$ και $f(x_3)=x_3$, όπου $0<x_1<x_2<x_3$,
εφαρμόστε το θεώρημα Rolle για την $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ στα $[x_1, x_2]$ και $[x_2, x_3]$·

27) Θεώρημα Rolle για την g.

28) Θ.Μ.Τ για την α) $f(x)=\ln x$, β) $f(x)=x^\nu$.

29) Θ.Μ.Τ για την $f(x)=\sigma\varphi x$.

30) **β)** 0.

31) Θεώρημα μέσης τιμής για την f στα διαστήματα $\left[\alpha, \dfrac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\left[\dfrac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$.

Γεωμετρική ερμηνεία: Δύο εφαπτόμενες της C_f σχηματίζουν με τον $x'x$ ισοσκελές τρίγωνο ή τέμνονται στο ίδιο σημείο του $x'x$ και σχηματίζουν μ' αυτόν παραπληρωματικές γωνίες.

32) Θ.Μ.Τ για την f στα διαστήματα $[\alpha, \gamma]$, $[\gamma, \beta]$ και στη συνέχεια θεώρημα Bolzano για την f'.

33) **α)** Θεώρημα Bolzano για την $g(x)=f(x)-\alpha-\beta+x$.
β) ΘΜΤ για την f στα διαστήματα $[\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta]$·

34) Θ.Μ.Τ για την f στα διαστήματα $[\alpha, \kappa]$, $[\kappa, \lambda]$ και $[\lambda, \beta]$, όπου κ, λ είναι τα σημεία που διαιρούν το $[\alpha, \beta]$ σε τρία ισομήκη διαστήματα.

35) Θ.Μ.Τ για την f στα διαστήματα $\left[0, \dfrac{1}{\nu}\right], \left[\dfrac{1}{\nu}, \dfrac{2}{\nu}\right], \ldots, \left[\dfrac{\nu-1}{\nu}, 1\right]$.

36) Θ.Μ.Τ για την f στα $[\alpha, \gamma]$, $[\gamma, \beta]$ και στη συνέχεια Θ.Μ.Τ για την f'.

37) Θ.Μ.Τ για την f στο διάστημα $[0, 2]$.

38) **α)** Θ.Μ.Τ για την $f(x)=x^\rho$ στο διάστημα $[\alpha, \alpha+1]$.
β) Η εξίσωση γράφεται $3^x-2^x=6^x-5^x$ και αν ρ είναι μια λύση της, σύμφωνα με το (α), υπάρχουν $x_1\in(2, 3)$ και $x_2\in(5, 6)$ με $\rho x_1^{\rho-1}=\rho x_2^{\rho-1}$
ή $\rho(x_1^{\rho-1}-x_2^{\rho-1})=0$, οπότε $\rho=0$ ή $\rho=1$.

39) Θ.Μ.Τ για την f στα διαστήματα $\left[\alpha, \dfrac{\alpha+\beta}{2}\right], \left[\dfrac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$ και στη συνέχεια σύγκριση των $f'(\xi_1)$ και $f'(\xi_2)$.

40) Θ.Μ.Τ. για την f στα $\left[\alpha, \dfrac{\alpha+\beta}{2}\right], \left[\dfrac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$ και θεώρημα Rolle για την f'.

41) Θ.Μ.Τ. για την f στα $[\alpha, \beta]$, $[\beta, \gamma]$ και αφού $\beta-\alpha=\gamma-\beta$ και
$f(\beta)-f(\alpha)=f(\gamma)-f(\beta)$, εφαρμόστε το θεώρημα Rolle για την f'.

§ 2.6 Συνέπειες του θεωρήματος μέσης τιμής

1) **α)** Λ, **β)** Λ, **γ)** Λ, **δ)** Σ, **ε)** Λ, **στ)** Λ, **ζ)** Σ, **η)** Σ, **θ)** Λ, **ι)** Σ.

2) **β)** $h(x)=2$. **5)** $f(x)=e^{x}$.

6) **β)** Μοναδικό κοινό σημείο είναι το $\big(0,\ f(0)\big)$ και ισχύει $f'(0)=g'(0)$.

7) Εργαστείτε όπως στην εφαρμογή 5.

8) **α)** $h(x)=0$, **β)** $\big(f(x)-g(x)\big)\cdot\big(f(x)+g(x)\big)=0$ και για την $\varphi(x)=f(x)-g(x)$ ισχύει

$\varphi'(x)=-\varphi(x)\ldots\varphi(x)=2e^{-x}\neq 0$.

Άρα $f(x)+g(x)=0$ και τελικά $f(x)=e^{-x}$ και $g(x)=-e^{-x}$.

9) **β)** Αν $h''(x)=-h(x)$, $h(0)=c_1$ και $h'(0)=c_2$, θεωρήστε την $\varphi(x)=f(x)-h(x)$ και αποδείξτε ότι είναι σταθερή με τιμή 0.

10) $P'(t)=\alpha P(t)$, όπου α θετική σταθερά.

$(\ln P(t))'=(\alpha t)'$, $P(t)=e^{\alpha t+c}, \ldots P(10)=14.400$ κάτοικοι.

11) **α)** $f(0)=1$ και $f(x)\cdot f(-x)=f(0)\neq 0$, **β)** $f'(x_0)=2f(x_0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) $f'(x)=2f(x)\Leftrightarrow\ldots f(x)=ce^{2x}$ και τελικά $f(x)=e^{2x}$.

12) **α)** γν. φθίν. στα $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{5}{2}}\right]$, $\left[0,\ \sqrt{\frac{5}{2}}\right]$ και γν. αύξ. στα $\left[-\sqrt{\frac{5}{2}},0\right]$ και $\left[\sqrt{\frac{5}{2}},+\infty\right)$,

β) γ.φ. στο $(-\infty,\ 0]$ και γ. α. στο $[0,\ +\infty)$,

γ) γ.α. $(-\infty,\ -\sqrt{3}]$, $[\sqrt{3},\ +\infty)$, γ. φ. $[-\sqrt{3},\ -1)$, $(-1,\ 1)$, $(1,\ \sqrt{3}]$,

δ) γ.φ. $(-\infty,\ -2]$, $(0,\ +\infty)$ και γ. α. $[-2,\ 0)$,

ε) γ α. $[0,\ 1]$, γ. φ. $[1,\ 2]$,

στ) γ.φ. $(-\infty,\ -1]$, γ. α. $[1,\ +\infty)$,

ζ) αν $\alpha\delta-\beta\gamma>0$, είναι γ.α. στα $\left(-\infty,-\frac{\delta}{\gamma}\right)$ και $\left(-\frac{\delta}{\gamma},\ +\infty\right)$,

αν $\alpha\delta-\beta\gamma<0$, είναι γ.φ. στα $\left(-\infty,\ -\frac{\delta}{\gamma}\right)$ και $\left(-\frac{\delta}{\gamma},+\infty\right)$,

αν $\alpha\delta-\beta\gamma=0$, είναι σταθερή,

η) γ.φ. $(-\infty,\ -1]$, $[0,\ 1]$ και γ. α. $[-1,0]$, $[1,+\infty)$,

θ) γ.φ. $(0,\ e^{-\frac{1}{\nu}}]$, γ.α. $[e^{-\frac{1}{\nu}},\ +\infty)$, **ι)** γ. α. $(-\infty,\ -1]$, $(0,\ +\infty)$ και γ.φ. $[-1,\ 0)$,

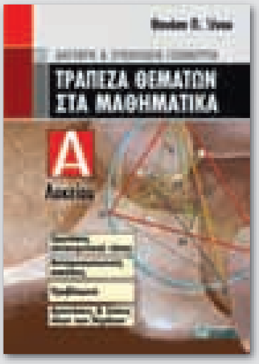
ια) γ.α. στο $\mathbb{R}$, **ιβ)** γ.α. $\left[2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}, 2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\right)$, γ.φ. $\left(2\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ 2\kappa\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$, $\kappa\in\mathbb{Z}$,

ιγ) γ.α. στο $\mathbb{R}$, **ιδ)** γ.φ. $\left(0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$, γ. α. $\left[\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)$, **ιε)** γ.α. $[0,\ 3]$, γ.φ $[3,\ 6]$.

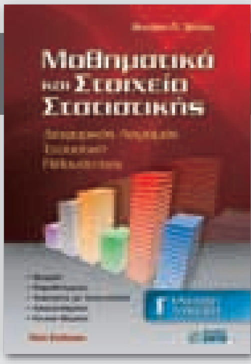
13) **α)** γ. α. στο $\mathbb{R}$ **β)** γ.φ. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$, $[2,+\infty)$ και γ. α. $\left[-\frac{1}{2},2\right]$

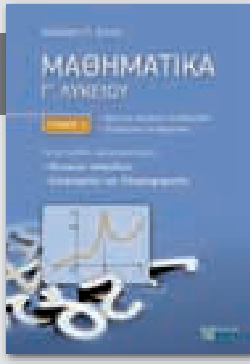
γ) γ. φ. $(-\infty,-1]$, $[0,1]$, $[3,+\infty)$ και γ. α. $[-1,0]$, $[1,3]$.

Προβλήματα & Κριτήρια Α΄ & Β΄ Λυκείου



Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου





Ομάδα προσανατολισμού
- Θετικών Σπουδών,
- Οικονομίας και Πληροφορικής

Προβλήματα & Κριτήρια Γ΄ Λυκείου

ΕΠΑΛ & ΑΣΕΠ