Θανάσης Π. Ξένος

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

Αναλυτική Γεωμετρία

Θεωρία
Παραδείγματα με μεθοδολογικές οδηγίες
Ασκήσεις με τις απαντήσεις τους
Κριτήρια αξιολόγησης
Επαναληπτικά θέματα

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα

Με τον συγγραφέα επικοινωνείτε:
Τηλ. 2310.348.086, e-mail: thanasisxenos@yahoo.gr

ISBN 978-960-456-470-5

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση
Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ:
Αρμενοπούλου 27, 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ.: 2310.203.720, Fax: 2310.211.305 • e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΠΩΛΗΣΗ ΛΙΑΝΙΚΗ-ΧΟΝΔΡΙΚΗ:
Χαριλάου Τρικούπη 22, 106 79 Αθήνα
Τηλ.-Fax: 210.3816.650 • e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται στους μαθητές της Β′ τάξης Γενικού Λυκείου, Θετικών Σπουδών. Αναπτύσσονται διεξοδικά τα κεφάλαια:

1. **Διανύσματα**
   Η έννοια του διανύσματος, πράξεις διανυσμάτων, συντεταγμένες στο επίπεδο, εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων.
2. **Η ευθεία στο επίπεδο**
   Εξίσωση ευθείας, απόσταση σημείου από ευθεία, εμβαδόν τριγώνου.
3. **Κωνικές τομές**
   Κύκλος, παραβολή, έλλειψη, υπερβολή.

Η δομή του βιβλίου, σε γενικές γραμμές, είναι η εξής:

✓ Σε κάθε ενότητα παρουσιάζεται η θεωρία σύντομα και ελκυστικά, με τις κατάλληλες παρατηρήσεις ή σχόλια, ώστε να αποσαφηνιστούν όλες οι έννοιες.

✓ Στη συνέχεια, παρουσιάζονται αντιπροσωπευτικά παραδείγματα, με τις απαραίτητες μεθοδολογικές οδηγίες.

✓ Κάθε παράγραφος κλείνει με ένα μεγάλο αριθμό ασκήσεων, που καλύπτουν την ύλη με κάθε λεπτομέρεια.

Για τις εύκολες ασκήσεις ή για αυτές που υπάρχουν αντίστοιχα παραδείγματα, δίνονται οι απαντήσεις στο τέλος του βιβλίου. Για τις ασκήσεις μέτριας δυσκολίας, δίνονται ικανοποιητικές υποδείξεις, ενώ για τις δύσκολες ασκήσεις, δίνονται σύντομες λύσεις.

✓ Το βιβλίο περιέχει διάσπαρτα 10 κριτήρια αξιολόγησης των τεσσάρων θεμάτων.

✓ Κάθε κεφάλαιο κλείνει με επαναληπτικές ασκήσεις, όπως και στο τέλος του βιβλίου υπάρχουν επαναληπτικά θέματα.

Με ευχαρίστηση θα δεχθώ οποιαδήποτε υπόδειξη που θα μπορούσε να συμβάλλει στη βελτίωση αυτού του βιβλίου.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Διανύσματα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Η ευθεία στο επίπεδο

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Κωνικές τομές

Επανάληψη

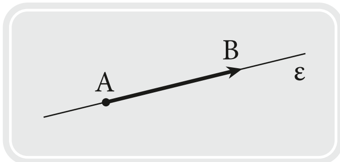
Κεφάλαιο 1: Διανύσματα

1.1 Η έννοια του διανύσματος

- **Διάνυσμα** ονομάζεται ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή ένα ευθύγραμμο τμήμα με διατεταγμένα άκρα. Το διάνυσμα με αρχή το Α και πέρας (τέλος) το Β συμβολίζεται με $\overrightarrow{AB}$.

Αν τα άκρα Α και Β συμπίπτουν, τότε το $\overrightarrow{AB}$ λέγεται **μηδενικό διάνυσμα** και συμβολίζεται με $\vec{0}$. Η απόσταση των άκρων Α και Β ονομάζεται **μέτρο** του $\overrightarrow{AB}$ και συμβολίζεται με $|\overrightarrow{AB}|$.

Η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται ένα μη μηδενικό διάνυσμα ονομάζεται **φορέας** του διανύσματος. Αν τα Α, Β συμπίπτουν, τότε ως φορέα του μηδενικού διανύσματος $\overrightarrow{AA}$ θεωρούμε οποιαδήποτε ευθεία που περνά από το σημείο Α.

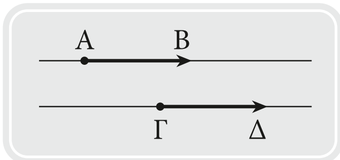


- Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέμε ότι είναι **παράλληλα** ή **συγγραμμικά** ή **έχουν την ίδια διεύθυνση**, όταν έχουν τον ίδιο φορέα ή παράλληλους φορείς.

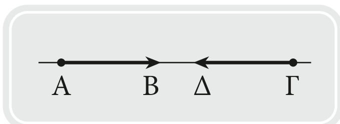
  Συμβολικά γράφουμε $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

  - Αν έχουν την ίδια φορά, τότε ονομάζονται **ομόρροπα** και γράφουμε $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

    Λέμε, επίσης ότι τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ έχουν την **ίδια κατεύθυνση**.



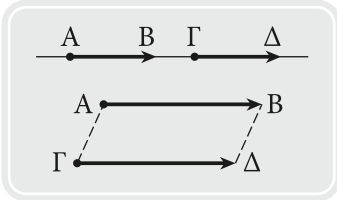
  - Αν έχουν αντίθετη φορά, τότε ονομάζονται **αντίρροπα** ή λέμε ότι έχουν **αντίθετη κατεύθυνση** και γράφουμε $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.



- Το μηδενικό διάνυσμα θεωρείται παράλληλο προς οποιοδήποτε διάνυσμα.

- Δύο ομόρροπα διανύσματα με ίσα μέτρα ονομάζονται **ίσα**. Αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τότε ισχύουν και οι ισότητες

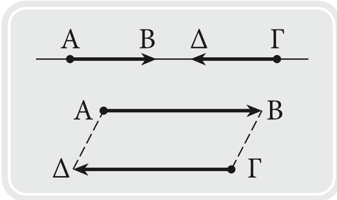
$$\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta}, \quad \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{\Delta\Gamma} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{\Gamma A} = \overrightarrow{\Delta B}$$



- Δύο αντίρροπα διανύσματα με ίσα μέτρα ονομάζονται **αντίθετα**.

Αν είναι αντίθετα τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τότε γράφουμε $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ή ακόμη $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

Είναι προφανές ότι



$$\boxed{\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}}$$

- Θεωρούμε δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και με αρχή ένα σημείο Ο παίρνουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$.

Η κυρτή γωνία $A\widehat{O}B$, που σχηματίζουν οι ημιευθείες ΟΑ και ΟΒ, ονομάζεται **γωνία των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$** και συμβολίζεται με

$$\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} \ \text{ή} \ \widehat{(\vec{\beta}, \vec{\alpha})}.$$

Αν $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \theta \,\text{rad}$, είναι φανερό ότι $0 \le \theta \le \pi$.

Επίσης, ισχύουν οι ισοδυναμίες

α) $\vec{\alpha} \upuparrows \vec{\beta} \Leftrightarrow \theta = 0$.

β) $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \theta = \pi$.

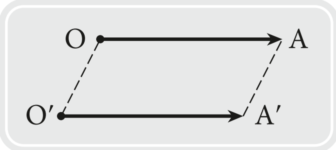
γ) $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ (**ορθογώνια** ή **κάθετα** διανύσματα).

Παραδείγματα

1.

Αν $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O'A'}$ και $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O'B'}$, να εξηγήσετε ότι $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{B'B'}$ και $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.

Λύση:

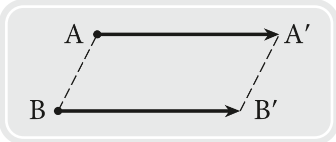


Η ισότητα $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O'A'}$ συνεπάγεται και την

$$\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AA'} \qquad (1)$$

Ομοίως από την $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O'B'}$ έχουμε και την ισότητα

$$\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{BB'} \qquad (2)$$

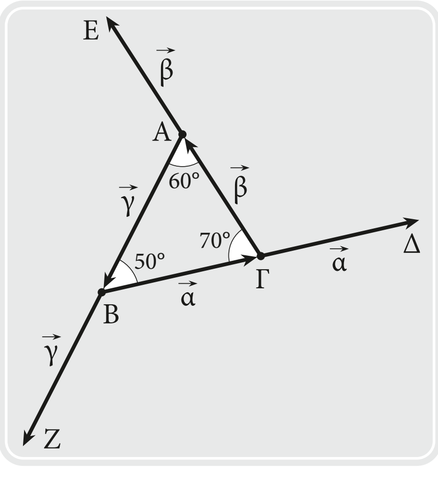


Από τις **(1)** και **(2)** προκύπτει ότι $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$, οπότε και $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.

2.

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 60°$ και $\hat{B} = 50°$.
Αν θέσουμε $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{\Gamma A} = \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{AB} = \vec{\gamma}$, να βρεθούν οι γωνίες $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$, $(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\gamma}})$ και $(\widehat{\vec{\gamma}, \vec{\alpha}})$.

Λύση:



Για να σχηματισθεί η γωνία δύο διανυσμάτων, πρέπει τα διανύσματα να έχουν κοινή αρχή.

Θεωρούμε τα διανύσματα

$$\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \vec{\alpha}, \quad \overrightarrow{AE} = \vec{\beta} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{BZ} = \vec{\gamma},$$

οπότε έχουμε

- $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = A\hat{\Gamma}\Delta = 180° - 70° = 110°$,
- $(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\gamma}}) = E\hat{A}B = 180° - 60° = 120°$ και
- $(\widehat{\vec{\gamma}, \vec{\alpha}}) = Z\hat{B}\Gamma = 180° - 50° = 130°$.

Ασκήσεις

1. Σε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ κέντρου Ο, να γράψετε όλα τα ζεύγη ίσων και αντίθετων διανυσμάτων.

2. Θεωρούμε ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και δύο σημεία Ο και Κ. Αν A_1, A_2 είναι τα συμμετρικά του Α ως προς τα Ο και Κ αντίστοιχα και B_1, B_2 τα συμμετρικά του Β, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2}$.

3. Αν $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{A\Gamma}$, όπου τα σημεία Α, Β, Γ δεν είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι το Γ είναι το μέσο του ΔΕ.

4. Ποιο συμπέρασμα μπορεί να προκύψει από την ισότητα $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$;

5. Θεωρούμε ένα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και δύο οποιαδήποτε σημεία Ε και Ζ των πλευρών ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Αν $\overrightarrow{\Gamma K} = \overrightarrow{EA}$ και $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{Z\Gamma}$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{EZ} = \overrightarrow{MK}$.

6. Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τις διαμέσους ΒΔ και ΓΕ κατά ευθύγραμμα τμήματα $\Delta H = B\Delta$ και $EZ = \Gamma E$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B\Gamma} = -\overrightarrow{AZ}$.

7. **α.** Αν $\vec{\alpha} \# \vec{\beta}$, να εξηγήσετε γιατί $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{\beta} \neq \vec{0}$.

β. Να εξετάσετε αν υπάρχει περίπτωση να ισχύει $\vec{\alpha} \# \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} \# \vec{\gamma}$, ενώ $\vec{\beta} \# \vec{\gamma}$.

8. Για οποιαδήποτε μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, να αποδείξετε ότι

α. $\widehat{(\vec{\alpha},\vec{\beta})} + \widehat{(-\vec{\alpha},\vec{\beta})} = \pi$ και **β.** $\widehat{(-\vec{\alpha},-\vec{\beta})} = \widehat{(\vec{\alpha},\vec{\beta})}$.

1° κριτήριο αξιολόγησης

Διδακτική ενότητα: Πράξεις διανυσμάτων

ΘΕΜΑ 1ο

α. Πώς ορίζεται το γινόμενο ενός πραγματικού αριθμού με διάνυσμα;

β. Αν Μ είναι το μέσο ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ και Ο σημείο αναφοράς στο χώρο, να αποδείξετε ότι

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

γ. Χαρακτήρισε με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις.

i) Αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\Gamma}$, τότε τα σημεία Β, Γ συμπίπτουν.

ii) Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{BA}$ δεν είναι ίσα σε καμία περίπτωση.

iii) Αν $\vec{\beta} = -3\vec{\alpha}$, τότε $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\beta}| - |\vec{\alpha}|$.

ΘΕΜΑ 2ο

α. Για ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και ένα σημείο Ο του χώρου, να αποδειχθεί ότι $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Delta}$.

β. Αν Ε και Ζ είναι τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, να αποδειχθεί ότι $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} - \overrightarrow{\Delta A} = 4\overrightarrow{EZ}$

γ. Να βρεθεί σημείο Μ του επιπέδου τριγώνου ΑΒΓ με $3\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{M\Gamma} = \vec{0}$.

ΘΕΜΑ 3ο

α. Δίνονται τρία διαφορετικά σημεία Α, Β και Γ με $\overrightarrow{A\Gamma} = \lambda\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \mu\overrightarrow{AB}$, όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι $\lambda = \mu + 1$.

β. Αν ΑΒΓΔ είναι ένα κυρτό τετράπλευρο και Ο σημείο αναφοράς στο χώρο, να αποδειχθεί ότι ο φορέας του διανύσματος $\vec{\delta} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma} + \overrightarrow{O\Delta}$ διέρχεται από το μέσο Κ του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα μέσα των διαγωνίων του τετραπλεύρου.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Αν Ε και Ζ είναι τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ και ισχύει $\overrightarrow{EZ} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{B\Gamma})$, να αποδειχθεί ότι το τετράπλευρο αυτό είναι παραλληλόγραμμο.

β. Αν $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + 3\vec{\gamma} = \vec{0}$ και $\frac{|\vec{\alpha}|}{3} = \frac{|\vec{\beta}|}{2} = \frac{3|\vec{\gamma}|}{7}$, να αποδειχθεί ότι $\vec{\alpha} \upuparrows \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \uparrow\downarrow \vec{\gamma}$.

γ. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και το σημείο Ε με $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{A\Delta}$.

Αν οι ευθείες ΕΓ και ΑΒ τέμνονται στο σημείο Μ, να εκφραστεί το $\overrightarrow{AM}$ συναρτήσει του $\overrightarrow{AB}$.

Ασκήσεις επανάληψης

1. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y = x - 1$ και $\varepsilon_2: y = x - 3$.

α. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, της οποίας κάθε σημείο ισαπέχει από τις ε_1 και ε_2.

β. Να βρεθούν οι εξισώσεις όλων των κύκλων που έχουν κοινές εξωτερικές εφαπτόμενες τις ε_1 και ε_2.

γ. Να βρεθεί η εξίσωση εκείνου από τους παραπάνω κύκλους που διέρχεται από την εστία της παραβολής $y^2 = 4x$.

2. Δίνονται οι κωνικές τομές

$$C_1: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \text{ και } C_2: \frac{x^2}{\alpha} - \frac{y^2}{\beta} = \alpha - \beta, \text{ όπου } \alpha > \beta > 0.$$

α. Να αποδειχθεί ότι οι C_1, C_2 έχουν ίδιες εστίες.

β. Αν ε_1, ε_2 είναι οι εκκεντρότητες των C_1, C_2 αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι **i)** $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 \cdot (2 - \varepsilon_2^2)$ και **ii)** $1 < \varepsilon_2 < \sqrt{2}$.

γ. Να βρεθούν τα κοινά σημεία των C_1, C_2.

δ. Να αποδειχθεί ότι οι εφαπτόμενες των C_1, C_2 σε κάθε κοινό τους σημείο είναι κάθετες.

3. **α.** Να αποδειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(2\text{συν}\lambda, 2\text{ημ}\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = 4$.

β. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του C που σχηματίζει με τους θετικούς ημιάξονες τρίγωνο με ελάχιστο εμβαδόν.

γ. Αν $M(\alpha, \beta)$ είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του C, να αποδειχθεί ότι $-10 \le 3\alpha - 4\beta \le 10$.

4. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 1)x^2 - \lambda y^2 = 1, \lambda \in \mathbb{R}$ **(1)**

α. Να βρεθούν οι τιμές του λ, για τις οποίες η **(1)** παριστάνει έλλειψη. Υπάρχει σταθερό σημείο, από το οποίο διέρχεται η έλλειψη;

β. Στην περίπτωση που η **(1)** παριστάνει κύκλο, τότε:

i) Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου, που διέρχονται από το σημείο $M(2, 4)$.

Υποδείξεις και Απαντήσεις των Ασκήσεων

Κεφάλαιο 1: Διανύσματα

1.1 Η έννοια του διανύσματος σελ 12

1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}$, $\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{O\Gamma}$ κ.λπ.

2) $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{BA}$ και $\overrightarrow{A_2B_2}=\overrightarrow{BA}$, επειδή τα ABA_1B_1 και ABA_2B_2 είναι παραλληλόγραμμα.

3) ΑΒΓΔ και ΑΒΕΓ παραλληλόγραμμα.

4) Ο μέσο του ΑΒ.

5) ΑΜΓΖ και ΑΕΓΚ παραλληλόγραμμα, οπότε τα τμήματα ΑΓ, ΜΖ και ΕΚ έχουν κοινό μέσο. Έτσι, το ΕΖΚΜ είναι παραλληλόγραμμο.

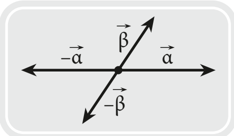
6) ΑΒΓΗ και ΑΓΒΖ παραλληλόγραμμα.

7) **α)** Αν $\vec{\alpha}=\vec{0}$ ή $\vec{\beta}=\vec{0}$, τότε $\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}$, άτοπο

β) Ναι, όταν $\vec{\alpha}=\vec{0}$.

8) **α)** Παραπληρωματικές γωνίες

β) Κατακορυφήν γωνίες.



10) **α)** Κατασκευάστε τα παραλληλόγραμμα ΑΔΜΓ και ΒΓΝΔ.

β) $\Delta N \,/\!/\!= \Gamma M \Rightarrow MN \,/\!/\!= \Gamma\Delta$ κ.λπ.

11) $(\overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{AE})+(\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BZ})+(\overrightarrow{\Gamma Z}-\overrightarrow{\Gamma\Delta})=\ldots=\vec{0}$ κ.λπ.

12) ΜΑΔΒ παραλληλόγραμμο και $\overrightarrow{M\Delta}\parallel\overrightarrow{M\Gamma}$, άρα ο γ.τ. του Μ είναι η ευθεία που περνά από το Γ και το μέσο του ΑΒ.

13) Όπως στο παράδειγμα της §1.2, αποδείξτε ότι $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$ και $\vec{\beta}\uparrow\downarrow\vec{\gamma}$.

1.2 Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων σελ 15

1) **α)** $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$ και $|\vec{\alpha}|\geq|\vec{\beta}|$

β) $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ομόρροπα μη μηδενικά

γ) $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ ομόρροπα **δ)** $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ αντίρροπα

2) Εφαρμόστε δύο φορές τον κανόνα παραλληλογράμμου.

3) Η σχέση γράφεται $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{O\Delta}-\overrightarrow{O\Gamma}$ κ.λπ.

4) Αποδείξτε ότι το ΒΜΓΝ είναι παραλληλόγραμμο.

5) $\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{Z\Theta}=\overrightarrow{Z\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Theta}$,

$\overrightarrow{K\Delta}=\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{B\Delta}$, $\overrightarrow{EA}=-\overrightarrow{B\Delta}$ κ.λπ.

6) 90° (βλέπε παράδειγμα 2, § 1.1).

7) $\overrightarrow{\Delta E}-\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Delta B}$, δηλαδή $\overrightarrow{\Gamma E}=\overrightarrow{AB}$ κ.λπ.

8) $\overrightarrow{BA}\parallel\overrightarrow{M\Gamma}$, άρα ο γ.τ. του Μ είναι η ευθεία $\varepsilon\parallel AB$, που περνά από το Γ.

9) Η τριγωνική ανισότητα ισχύει και για περισσότερα από δύο διανύσματα.

1.3 Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα σελ 26

1) **α)** $\vec{\alpha}=2\vec{\beta}$, **β)** $\vec{\alpha}=-\frac{2}{3}\vec{\beta}$, **γ)** $\vec{\alpha}=-\frac{1}{3}\vec{\beta}$.

2) **α)** *Λ* (αφού μπορεί να είναι $\lambda=\mu=0$ και $\vec{\alpha}\nparallel\vec{\beta}$).

β) *Σ* (αφού $\lambda\neq 0$ ή $\mu\neq 0$, οπότε

$\vec{\alpha}=\frac{\mu}{\lambda}\vec{\beta}$ ή $\vec{\beta}=\frac{\lambda}{\mu}\vec{\alpha}$).

γ) *Σ* (αφού $\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AB}=5\overrightarrow{A\Gamma}$,

δηλ. $\overrightarrow{A\Gamma}=-\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$).

δ) *Σ* (αφού $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$ και $|\vec{\alpha}|\geq|\vec{\beta}|$).

ε) *Λ* $\left(|\overrightarrow{AM}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}|<\frac{|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{A\Gamma}|}{2}\right)$.

3) **α)** $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{B\Gamma}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AB})\ldots$

$\ldots\vec{x}=\frac{2}{3}\vec{\alpha}+\frac{1}{3}\vec{\beta}$ (ή $\vec{x}=\vec{\alpha}+\frac{1}{3}\overrightarrow{B\Gamma}=\ldots$)

β) $\vec{x}=\vec{\alpha}+\frac{5}{3}\overrightarrow{B\Gamma}=\ldots=-\frac{2}{3}\vec{\alpha}+\frac{5}{3}\vec{\beta}$.

4) $\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, $\overrightarrow{B\Delta}=\vec{\beta}-\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{AZ}=\vec{\alpha}+\frac{1}{2}\vec{\beta}$,

$\overrightarrow{\Delta E}=-\vec{\beta}+\frac{1}{2}\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{EZ}=\frac{1}{2}\vec{\alpha}+\frac{1}{2}\vec{\beta}$.

5) $\overrightarrow{EA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{A\Delta}=-\frac{1}{4}\vec{\alpha}-\frac{1}{4}\vec{\beta}$,

$\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{EA}+\vec{\alpha}=\frac{3}{4}\vec{\alpha}-\frac{1}{4}\vec{\beta}$ και

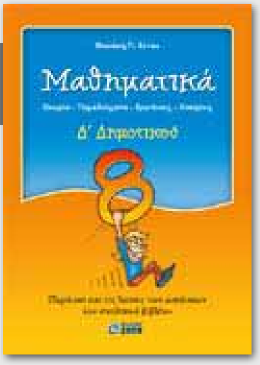
$\overrightarrow{E\Gamma}=-\frac{1}{4}\vec{\alpha}+\frac{3}{4}\vec{\beta}$.

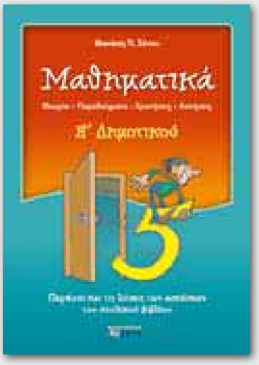
6) **α)** $\overrightarrow{A\Delta}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma})$, $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{B\Gamma})$,

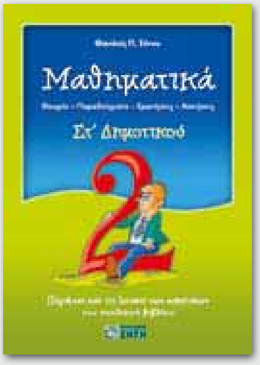
$\overrightarrow{\Gamma Z}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\Gamma A}+\overrightarrow{\Gamma B})$ κ.λπ.

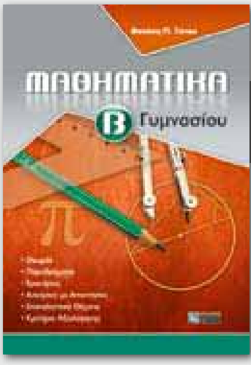
Βιβλία Μαθηματικών του Θανάση Ξένου

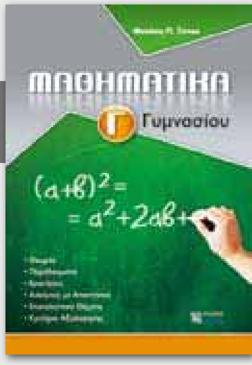
Μαθηματικά
ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ





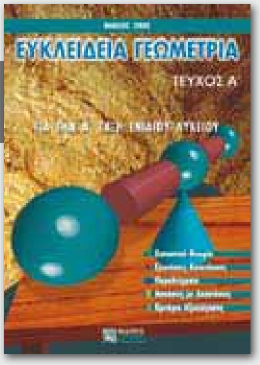


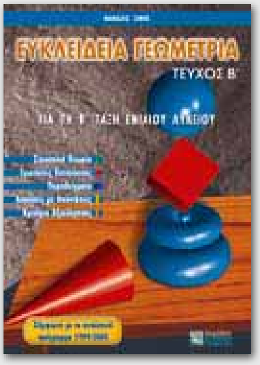


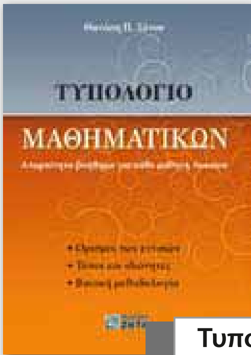


Μαθηματικά
ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

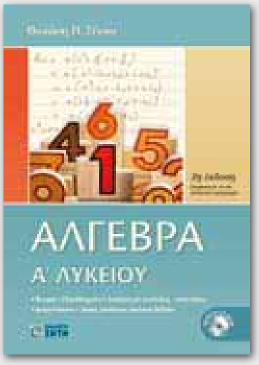
Ευκλείδεια
Γεωμετρία
Α' & Β' Λυκείου

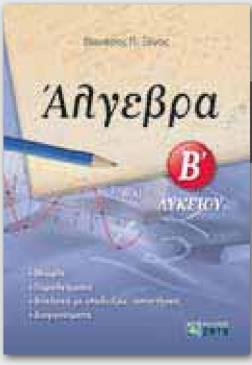


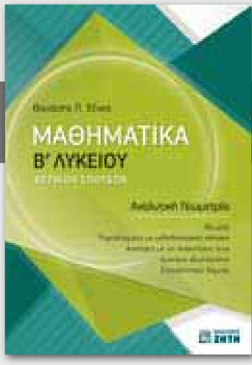




Τυπολόγιο
για όλες τις τάξεις

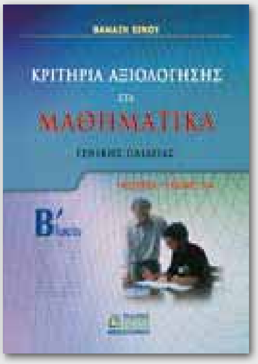


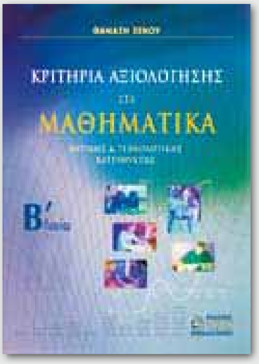


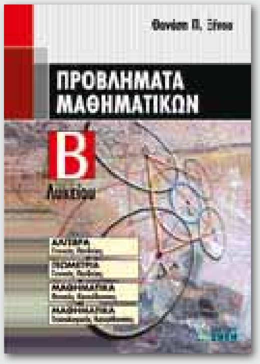


Μαθηματικά
Α' & Β' Λυκείου

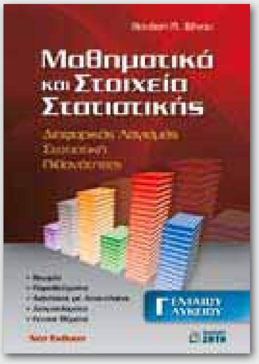
Προβλήματα & Κριτήρια Α΄ & Β΄ Λυκείου

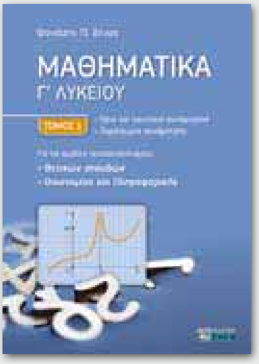


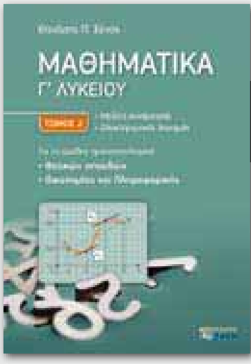




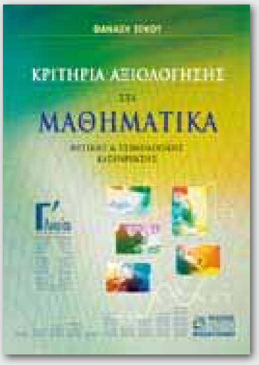
Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου

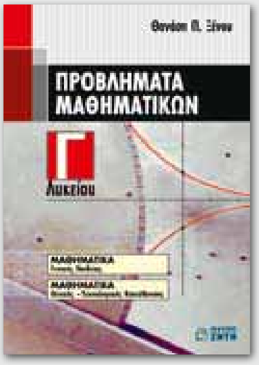






Προβλήματα & Κριτήρια Γ΄ Λυκείου





ΕΠΑΛ & ΑΣΕΠ