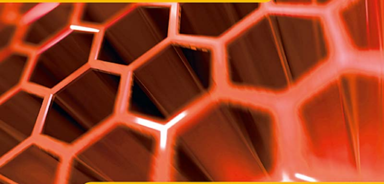
Θανάση Π. Ξένου

# Μιγαδικές Συναρτήσεις



Για τους φοιτητές Θετικών Επιστημών και Πολυτεχνείου

Περιέχει:

- Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών
- Όριο και συνέχεια μιγαδικών συναρτήσεων
- Παράγωγος μιγαδικών συναρτήσεων
- Ολοκλήρωση μιγαδικών συναρτήσεων
- Σειρές μιγαδικών συναρτήσεων
- Ολοκληρωτικά υπόλοιπα
- Σύμμορφες απεικονίσεις

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

*Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα*

*Με το συγγραφέα επικοινωνείτε:*
*Τηλ. 2310.348.086, e-mail: thanasisxenos@yahoo.gr*

ISBN 978-960-456-092-9



***Φωτοστοιχειοθεσία Εκτύπωση***

**Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ**
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 23920 72.222 (10 γραμ.) - Fax: 23920 72.229
*e-mail: info@ziti.gr*

***Βιβλιοπωλείο***

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ. 2310 203.720, Fax 2310 211.305
*e-mail: sales@ziti.gr*

**www.ziti.gr**

# Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται σε φοιτητές Θετικών Επιστημών και Πολυτεχνείου και περιέχει την ύλη του μαθήματος των Μιγαδικών Συναρτήσεων (ή της Μιγαδικής Ανάλυσης).

Οι μέθοδοι της Μιγαδικής Ανάλυσης χρησιμοποιούνται για την *επίλυση προβλημάτων της επιστήμης και της τεχνολογίας*.

Η Μιγαδική Ανάλυση θεμελιώθηκε αυστηρά το 19ο αιώνα από τους Cauchy, Riemann, Weierstrass, Gauss, κ.ά.

Τα κεφάλαια που αναπτύσσονται στο βιβλίο αυτό είναι:

1. Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών
2. Όριο και συνέχεια μιγαδικών συναρτήσεων
3. Παράγωγος μιγαδικών συναρτήσεων
4. Ολοκλήρωση μιγαδικών συναρτήσεων
5. Σειρές μιγαδικών συναρτήσεων
6. Ολοκληρωτικά υπόλοιπα
7. Σύμμορφες απεικονίσεις.

Η *θεωρία* παρουσιάζεται συνοπτικά και λύνονται *αντιπροσωπευτικά παραδείγματα* για κάθε περίπτωση. Σε κάθε κεφάλαιο προτείνονται *ασκήσεις για λύση*, για τις οποίες δίνονται *υποδείξεις* και *απαντήσεις* στο τέλος του βιβλίου.

*Μάρτιος 2008* — *Θ. Ξένος*

# Περιεχόμενα

**Κεφάλαιο 3**

## Παράγωγος μιγαδικών συναρτήσεων



**Κεφάλαιο 4**

## Ολοκλήρωση μιγαδικών συναρτήσεων



**Κεφάλαιο 5**

## Σειρές Μιγαδικών Συναρτήσεων

## Κεφάλαιο 6
## Ολοκληρωτικά Υπόλοιπα



## Κεφάλαιο 7
## Σύμμορφες Απεικονίσεις

1ο

Κεφάλαιο

# Το Σύνολο των Μιγαδικών Αριθμών



## 1.1 Πράξεις και μέτρο μιγαδικών αριθμών

Θ. Ξένος

### 1.1.1 Ορισμός του συνόλου $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών

Το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών είναι ένα υπερσύνολο του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, στο οποίο:

**α)** Υπάρχει στοιχείο i με $i^2=-1$.

**β)** Κάθε στοιχείο $z\in\mathbb{C}$ γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή
$z=\alpha+\beta i,\ \alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$.

**γ)** Η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός επεκτείνονται στο $\mathbb{C}$ ως εξής:

$$(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$$

$$(\alpha+\beta i)\cdot(\gamma+\delta i)=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i$$

και έχουν τους ίδιους κανόνες λογισμού όπως στο $\mathbb{R}$.
Μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{C}$ είναι το $0=0+0i$, ενώ μοναδιαίο στοιχείο είναι το $1=1+0i$. Αντίθετος του μιγαδικού αριθμού $z=\alpha+\beta i$ είναι ο $-z=-\alpha-\beta i$, ενώ αντίστροφος του $z=\alpha+\beta i\neq 0$ είναι ο

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{\alpha+\beta i}=\frac{\alpha-\beta i}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}-\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}i.$$

Το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών, με την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό, είναι ένα **σώμα**.

Για το μιγαδικό αριθμό $z=\alpha+\beta i$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ο $\alpha$ ονομάζεται **πραγματικό μέρος** και γράφουμε

$$\alpha=\mathrm{Re}(z),$$

ενώ ο $\beta$ ονομάζεται **φανταστικό μέρος** και γράφουμε

$$\beta=\mathrm{Im}(z),$$

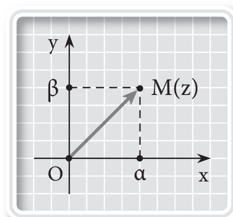
Ένας μιγαδικός αριθμός της μορφής $z=\beta i$, με $\beta\in\mathbb{R}$, ονομάζεται **φανταστικός αριθμός.** Το σύνολο των φανταστικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{I}$. Οι πραγματικοί και οι φανταστικοί αριθμοί είναι μιγαδικοί και ισχύουν

**α)** $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$, $\mathbb{I}\cap\mathbb{C}$, $\mathbb{R}\cap\mathbb{I}=\{0\}$,

**β)** $z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z)=0$,

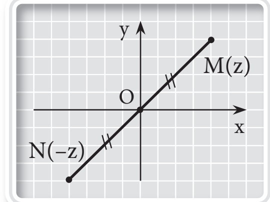
**γ)** $z\in\mathbb{I} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=0$.

## 1.1.2 Γεωμετρική παράσταση των μιγαδικών αριθμών




Σε κάθε μιγαδικό αριθμό $z=\alpha+\beta i$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, αντιστοιχίζουμε το σημείο $M(\alpha,\ \beta)$ ενός καρτεσιανού επιπέδου και αντιστρόφως. Το σημείο $M$ ονομάζεται **εικόνα** του $z$ στο επίπεδο και το συμβολίζουμε με $M(z)$ ή ακόμα λέμε ότι είναι το σημείο $\alpha+\beta i$.

Το επίπεδο που περιέχει τις εικόνες των μιγαδικών αριθμών ονομάζεται **μιγαδικό επίπεδο** ή **επίπεδο Gauss**. Οι εικόνες των πραγματικών αριθμών βρίσκονται στον άξονα των **x** (**πραγματικός άξονας**), ενώ οι εικόνες των φανταστικών αριθμών βρίσκονται στον άξονα των **y** (**φανταστικός άξονας**).

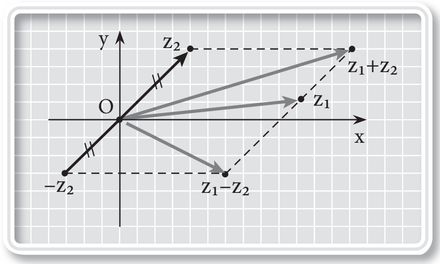



Ο μιγαδικός αριθμός $z=\alpha+\beta i$ παριστάνεται, εκτός από το σημείο $M(\alpha,\ \beta)$, και με τη διανυσματική ακτίνα (διάνυσμα θέσης) $\overrightarrow{OM}$ του $M$.

Στο εξής οι όροι «ο μιγαδικός $z$», «το σημείο $z$» και «το διάνυσμα $z$» χρησιμοποιούνται χωρίς διάκριση.

Οι εικόνες δύο αντίθετων μιγαδικών αριθμών είναι δύο σημεία συμμετρικά ως προς την αρχή $O$ των αξόνων.

Η γεωμετρική παράσταση του αθροίσματος $z_1+z_2$ και της διαφοράς $z_1-z_2=$ $=z_1+(-z_2)$ δύο μιγαδικών $z_1$ και $z_2$, γίνεται με τη βοήθεια του κανόνα του παραλληλογράμμου, όπως ακριβώς και στα διανύσματα.

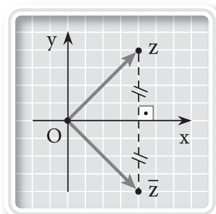



## 1.1.3 Ισότητα και πράξεις μιγαδικών αριθμών

Δύο μιγαδικοί αριθμοί $z_1=\alpha+\beta i$ και $z_2=\gamma+\delta i$, με $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$, είναι ίσοι, όταν έχουν την ίδια εικόνα στο επίπεδο Gauss, δηλαδή

$$\alpha+\beta i=\gamma+\delta i\Leftrightarrow\alpha=\gamma \quad \text{και} \quad \beta=\delta$$

**Συζυγής** του μιγαδικού αριθμού $z=\alpha+\beta i$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ονομάζεται ο μιγαδικός $\overline{z}=\alpha-\beta i$. Τα σημεία $z$ και $\overline{z}$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$.




Το πηλίκο δύο μιγαδικών αριθμών βρίσκεται ως εξής:

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)}=\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\beta\gamma-\alpha\delta)i}{\gamma^2+\delta^2}=$$

$$=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i.$$

Αν $z\in\mathbb{C}$ και $\nu\in\mathbb{N}^*$, τότε $z^\nu=z\cdot z\cdot z\ldots z$ ($\nu$ παράγοντες).

Αν $z\neq0$, τότε $z^0=1$.

Αν $z\neq0$ και $k=-\nu$, $\nu\in\mathbb{N}^*$, τότε $z^k=z^{-\nu}=\dfrac{1}{z^\nu}$.

Για τις **δυνάμεις του i** με ακέραιο εκθέτη ισχύει

$$i^\nu=\begin{cases}1, & \text{αν} \quad \nu=4k\\ i & \text{αν} \quad \nu=4k+1\\ -1, & \text{αν} \quad \nu=4k+2\\ -i & \text{αν} \quad \nu=4k+3\end{cases} \qquad (\nu,\ k \text{ ακέραιοι})$$

Για παράδειγμα, έχουμε

$$i^{42}=i^{10\cdot4+2}=-1,\quad i^{-1}=i^{4\cdot(-1)+3}=-i \quad \text{και} \quad i^{-27}=i^{4\cdot(-7)+1}=i$$

Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z$ ισχύει

**α)** $z+\overline{z}=2\mathrm{Re}(z)$

**β)** $z-\overline{z}=2i\,\mathrm{Im}(z)$

**γ)** $z\cdot\overline{z}=\mathrm{Re}^2(z)+\mathrm{Im}^2(z)$

**δ)** $z=\overline{z} \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$

**ε)** $z=-\overline{z} \Leftrightarrow z\in\mathbb{I}$.

Επίσης, για οποιουσδήποτε μιγαδικούς $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ ισχύει

**1)** $\overline{z_1+z_2+\ldots z_\nu}=\overline{z}_1+\overline{z}_2+\ldots\overline{z}_\nu$

**2)** $\overline{z_1-z_2}=\overline{z}_\nu-\overline{z}_2$

**3)** $\overline{z_1\cdot z_2\ldots z_\nu}=\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2\ldots\overline{z}_\nu$, οπότε $\overline{z^\nu}=\overline{z}^\nu$

**4)** $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$.

## 1.1.4 Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{C}$

Το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών με πράξεις την πρόσθεση μιγαδικών και τον πολλαπλασιασμό πραγματικού αριθμού με μιγαδικό αριθμό, είναι ένας (γραμμικός ή πραγματικός) **διανυσματικός χώρος**. Επειδή

$$\mathbb{C}=\{\alpha\cdot 1+\beta\cdot i\,/\,\alpha,\,\beta\in\mathbb{R}\},$$

οι μιγαδικοί $1$ και $i$ παράγουν το διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}$.

Τα στοιχεία $1$ και $i$ του $\mathbb{C}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, επειδή ισχύει η ισοδυναμία

$$\lambda_1\cdot 1+\lambda_2\cdot i=0+0i \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2=0.$$

Άρα, μια βάση του $\mathbb{C}$ είναι το σύνολο $B=\{1,i\}$ και **η διάσταση του** $\mathbb{C}$ **είναι $2$.**

## 1.1.5 Μέτρο μιγαδικών αριθμών

**Μέτρο** του μιγαδικού αριθμού $z=\alpha+\beta i$, με $\alpha,\,\beta\in\mathbb{R}$, ονομάζεται η απόσταση της εικόνας του από την αρχή των αξόνων και συμβολίζεται με $|z|$. Επομένως, ορίζουμε:

$$|z|=|\alpha+\beta i|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}.$$

Για παράδειγμα, έχουμε

$$|3-4i| = \sqrt{9+16} = 5, \quad |2i| = \sqrt{4} = 2 \quad \text{και} \quad |\alpha i| = \sqrt{\alpha^2} = |\alpha|,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z$ ισχύει

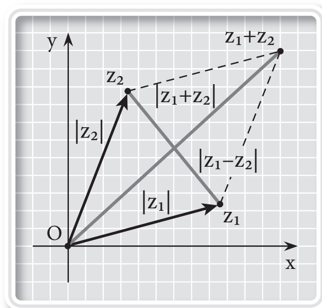
**α)** $|z| = |-z| = |\overline{z}|$ και **β)** $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.

Επίσης, για κάθε $z_1, z_2, \ldots, z_\nu \in \mathbb{C}$ έχουμε

**i)** $|z_1 z_2 \ldots z_\nu| = |z_1||z_2|\ldots|z_\nu|$, οπότε $|z^\nu| = |z|^\nu$, $\nu \in \mathbb{Z}$

**ii)** $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$,

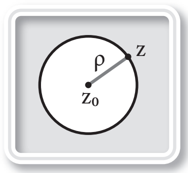
**iii)** $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$




Η απόσταση των εικόνων $M_1$ και $M_2$ των μιγαδικών $z_1$ και $z_2$ ισούται με το μέτρο της διαφοράς τους, δηλαδή

$$(M_1 M_2) = |z_1 - z_2|$$

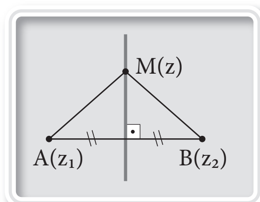
Άμεσες συνέπειες της ιδιότητας αυτής είναι οι εξής:



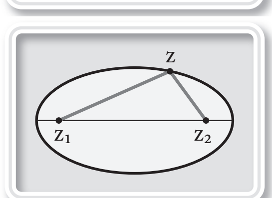

**1)** Το σημείο $z$ ανήκει στον κύκλο κέντρου $z_0$ και ακτίνας $\rho$, αν και μόνον αν ισχύει $|z - z_0| = \rho$.

Για παράδειγμα, η εξίσωση $|z - 2i| = 1$ παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο K(0, 2), δηλαδή την εικόνα του $z_0 = 2i$, και ακτίνα $\rho = 1$.

**2)** Η ανίσωση $|z - z_0| \le \rho$ παριστάνει τον κυκλικό δίσκο κέντρου $z_0$ και ακτίνας ρ.



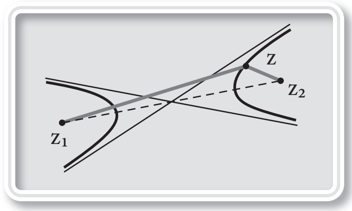

**3)** Η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$ παριστάνει τη μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα σημεία $z_1$ και $z_2$.




**4)** Η εξίσωση $|z - z_1| + |z - z_2| = 2\alpha$, με $|z_1 - z_2| < 2\alpha$, παριστάνει την έλλειψη με εστίες τα σημεία $z_1, z_2$ και μεγάλο άξονα 2α.

**5)** Η εξίσωση $\big||z-z_1|-|z-z_2|\big|=2\alpha$, με $|z_1-z_2|>2\alpha$,

παριστάνει την υπερβολή με εστίες τα σημεία $z_1, z_2$ και απόσταση κορυφών $2\alpha$.




**Παράδειγμα 1.1.1**

Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $z_1$ και $z_2$ του μιγαδικού επιπέδου.

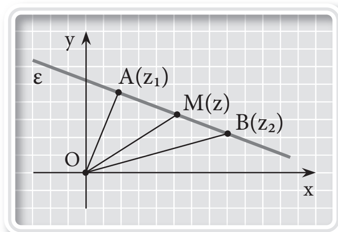
***Λύση***

Το σημείο $M(z)$ ανήκει στην ευθεία που περνά από τα σημεία $A(z_1)$ και $B(z_2)$, αν και μόνον αν ισχύει

$$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}) \Leftrightarrow$$

$$z-z_1=\lambda(z_2-z_1) \Leftrightarrow z=(1-\lambda)z_1+\lambda z_2,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

Η τελευταία είναι η ζητούμενη εξίσωση.




**Παράδειγμα 1.1.2**

Να βρεθεί το κέντρο βάρους του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $z_1, z_2$ και $z_3$ του μιγαδικού επιπέδου.

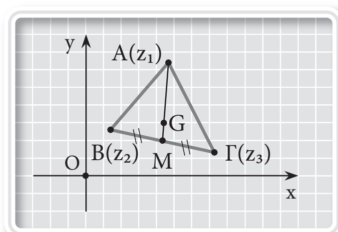
***Λύση***

Το διάνυσμα θέσης του μέσου $M$ του ευθύγραμμου τμήματος $B\Gamma$ είναι

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma})$$

και για το κέντρο βάρους $G$ του τριγώνου $AB\Gamma$ ισχύει

$$\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{GM} \quad ή \quad \overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OA}=2(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OG})$$




ή $3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OM}$ ή $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma})$ ή $z=\frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)$.

Άρα, το κέντρο βάρους του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι το σημείο $z=\dfrac{z_1+z_2+z_3}{3}$.

### Παράδειγμα 1.1.3

Οι διαφορετικοί ανά δύο μιγαδικοί $z_1, z_2, z_3, z_4$ έχουν εικόνες τα σημεία Α, Β, Γ, Δ στο μιγαδικό επίπεδο. Να αποδεχθεί ότι οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ είναι κάθετες, αν και μόνον αν ο αριθμός $z = \dfrac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}$ είναι φανταστικός.

***Λύση***

Θέτοντας $z_k = x_k + iy_k$, με $i = 1,2,3,4$ έχουμε:

$$z \in \mathbb{I} \Leftrightarrow \overline{z} = -z \Leftrightarrow \frac{\overline{z}_1 - \overline{z}_2}{\overline{z}_3 - \overline{z}_4} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_4}$$

$$\Leftrightarrow (\overline{z}_1 z_3 + z_1 \overline{z}_3) + (\overline{z}_2 z_4 + z_2 \overline{z}_4) = (z_2 \overline{z}_3 + \overline{z}_2 z_3) + (z_1 \overline{z}_4 + \overline{z}_1 z_4)$$

$$\Leftrightarrow (x_1 x_3 + y_1 y_3) + (x_2 x_4 + y_2 y_4) = (x_2 x_3 + y_2 y_3) + (x_1 x_4 + y_1 y_4)$$

$$\Leftrightarrow (x_2 - x_1)(x_4 - x_3) + (y_2 - y_1)(y_4 - y_3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \cdot (x_4 - x_3, y_4 - y_3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{\Gamma\Delta}.$$

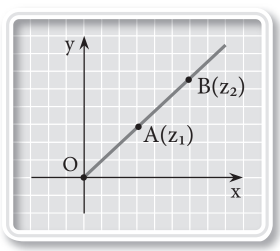
### Παράδειγμα 1.1.4

Να βρεθεί η συνθήκη μεταξύ των μιγαδικών $z_1$ και $z_2$ ώστε να ισχύει

**α)** $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$, **β)** $|z_1 - z_2| = |z_1| + |z_2|$, **γ)** $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$

***Λύση***

**α)** Αν Α, Β είναι οι εικόνες των $z_1$, $z_2$ στο μιγαδικό επίπεδο, έχουμε




$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OA}| + |\overrightarrow{OB}|$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \nearrow\nearrow \overrightarrow{OB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = \lambda \overrightarrow{OB}, \quad \lambda \geq 0 \quad ή \quad \overrightarrow{OB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow z_1 = \lambda z_2, \quad \lambda \geq 0 \quad ή \quad z_2 = 0$$

Άρα, η ισότητα $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ αληθεύει όταν

$$z_2 = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{z_1}{z_2} \geq 0$$

**β)** Ομοίως βρίσκουμε

$$z_2 = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{z_1}{z_2} \leq 0 \,.$$

**γ)** $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2| \Leftrightarrow |z_1 + z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) = (z_1 - z_2)(\overline{z}_1 - \overline{z}_2)$

$$\Leftrightarrow z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow z_1\overline{z}_2 + \overline{z_1\overline{z}_2} = 0 \Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2) = 0 \Leftrightarrow z_1\overline{z}_2 \in \mathbb{I} \,.$$

Άρα, $z_2 = 0$ ή $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\overline{z}_2}{|z_2|^2} \in \mathbb{I}$.

**Παράδειγμα 1.1.5**

Αν το σημείο $w = \dfrac{z}{z^2 + 1}$, με $z \in \mathbb{C}$ και $z \neq \pm i$, κινείται στον άξονα των $y$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου $z$.

***Λύση***

Επειδή ο αριθμός $w$ είναι φανταστικός, έχουμε

$$\overline{w} = -w \Leftrightarrow \frac{\overline{z}}{\overline{z}^2 + 1} = -\frac{z}{z^2 + 1} \Leftrightarrow z^2\overline{z} + \overline{z} + z\overline{z}^2 + z = 0$$

$$\Leftrightarrow (z\overline{z} + 1)\cdot(z + \overline{z}) = 0 \Leftrightarrow (|z|^2 + 1)\cdot(z + \overline{z}) = 0 \Leftrightarrow \overline{z} = -z \Leftrightarrow z \in \mathbb{I} \,.$$

Άρα, ο γεωμετρικός τόπος του $z$ είναι ο άξονας $y'y$, εκτός από τα σημεία $i$ και $-i$.

**Παράδειγμα 1.1.6**

Να βρεθεί η εξίσωση της γραμμής του καρτεσιανού επιπέδου $Oxy$ που παριστάνει καθεμιά από τις εξισώσεις

**α)** $|z - 8| = 2|z - 2|$, **β)** $|z + i| + |z - i| = 6$, **γ)** $||z - 2| - |z + 2|| = 2$.

***Λύση***

**α)** Θέτουμε $z = x + yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$, οπότε η εξίσωση γράφεται

$$|(x-8)+yi|=2|(x-2)+yi|$$

ή $(x-8)^2+y^2=4[(x-2)^2+y^2]$

ή $x^2-16x+64+y^2=4x^2-16x+16+4y^2$

ή $x^2+y^2=16$ (κύκλος με κέντρο την αρχή $O$ και ακτίνα 4).

**β)** Αν $M$ είναι η εικόνα του $z$, η εξίσωση γράφεται $(MA)+(MB)=6$, όπου $A$, $B$ είναι οι εικόνες των $-i, i$ αντίστοιχα. Η εξίσωση αυτή παριστάνει την έλλειψη με εστίες τα σημεία $A(0,-1)$, $B(0,1)$ και μεγάλο άξονα $2\alpha=6$. Επειδή $\alpha=3$ και $\gamma=1$, είναι $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2=8$ και η εξίσωση της έλλειψης είναι

$$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{8}=1$$ (οι εστίες ανήκουν στον άξονα $y'y$).

**γ)** Η εξίσωση αυτή παριστάνει την υπερβολή με εστίες τα σημεία $A(2, 0)$, $B(-2, 0)$ και απόσταση κορυφών $2\alpha=2$.

Είναι $\alpha=1$, $\gamma=2$ και $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2=3$.

Έτσι, η εξίσωση της υπερβολής είναι $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{3}=1$.

**Παράδειγμα 1.1.7**

Αν $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ με $|z_1|=|z_2|=|z_3|$ και $z_1+z_2+z_3=0$, να αποδειχθεί ότι τα διαφορετικά σημεία $z_1, z_2, z_3$ είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.

***Λύση***

Αρκεί να αποδειχθεί η ισότητα $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$.

- Η ισότητα $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|$, επειδή $z_2=-z_1-z_3$, γράφεται

$$|2z_1+z_3|=|-z_1-2z_3| \quad \text{ή} \quad |2z_1+z_3|^2=|z_1+2z_3|^2$$

ή $(2z_1+z_3)(2\overline{z}_1+\overline{z}_3)=(z_1+2z_3)(\overline{z}_1+2\overline{z}_3)$

ή $4z_1\overline{z}_1+2z_1\overline{z}_3+2\overline{z}_1z_3+z_3\overline{z}_3=z_1\overline{z}_1+2z_1\overline{z}_3+2\overline{z}_1z_3+4z_3\overline{z}_3$

ή $3z_1\overline{z}_1=3z_3\overline{z}_3$ ή $|z_1|=|z_3|$, που αληθεύει.

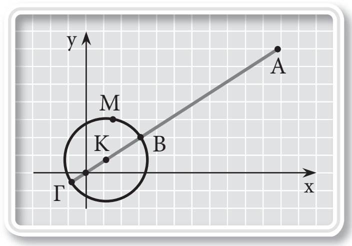
- Ομοίως διαπιστώνουμε ότι αληθεύει και η ισότητα $|z_1-z_2|=|z_3-z_1|$.

**Παράδειγμα 1.1.8**

Αν για το μιγαδικό $z$ ισχύει $|z-2-i|=5$, να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή του $|z-14-6i|$, καθώς και οι μιγαδικοί $z$ για τους οποίους συμβαίνει καθεμιά από τις τιμές αυτές.

***Λύση***

Επειδή $|z-(2+i)|=5$, το σημείο $M(z)$ ανήκει στον κύκλο κέντρου $K(2,1)$ και ακτίνας $\rho=5$. Η ευθεία $AK$ τέμνει τον κύκλο στα σημεία $B$ και $\Gamma$.

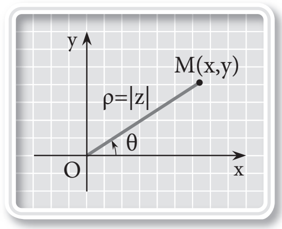



- $|z-14-6i|=|z-(14+6i)|=(MA)$,
  όπου $A(14,\ 6)$ είναι η εικόνα του $14+6i$. Η ελάχιστη τιμή της απόστασης $(MA)$ είναι η
  $$(AB)=(AK)-(KB)=\sqrt{(14-2)^2+(6-1)^2}-\rho=$$
  $$=13-5=8,$$
  ενώ μέγιστη τιμή είναι η
  $$(A\Gamma)=(AK)+\rho=13+5=18.$$
- Τα σημεία $B$ και $\Gamma$ είναι οι εικόνες των μιγαδικών $z_1$ και $z_2$ αντίστοιχα, για τους οποίους το $|z-14-6i|$ γίνεται ελάχιστο ή μέγιστο. Η ευθεία $AK$ έχει εξίσωση $y-1=\frac{6-1}{14-2}(x-2)$, δηλαδή $y=\frac{5}{12}x+\frac{1}{6}$, ενώ ο κύκλος έχει εξίσωση
  $$(x-2)^2+(y-1)^2=25.$$
  Λύνουμε το σύστημα αυτών των δύο εξισώσεων και βρίσκουμε τις λύσεις
  $$(x,y)=\left(\frac{76}{13},\ \frac{203}{78}\right) \quad \text{και} \quad (x,y)=\left(-\frac{34}{13},\ -\frac{12}{13}\right).$$
  Άρα, $z_1=\frac{76}{13}+\frac{203}{78}i$ και $z_2=-\frac{34}{13}-\frac{12}{13}i$.

# 1.2 Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού

Θ. Ξένος

## 1.2.1 Ορισμός της τριγωνομετρικής μορφής μιγαδικού αριθμού




Κάθε γωνία $\theta$ που ικανοποιεί τις ισότητες

$$x=\rho\sigma\upsilon\nu\theta,\ y=\rho\eta\mu\theta$$

ονομάζεται **όρισμα** του μιγαδικού αριθμού

$$z=x+yi\neq 0,$$

ενώ το μοναδικό όρισμα του $z$ που ανήκει στο διάστημα $(-\pi,\ \pi]$ ονομάζεται **πρωτεύον όρισμα** του $z$ και συμβολίζεται με $\mathrm{Arg}\,z$.

Οι αριθμοί

$$\rho=|z|=\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{και} \quad \theta=\mathrm{Arg}z=\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{y}{x}\right), \quad \mu\varepsilon \quad -\pi<\theta\leq\pi$$

ονομάζονται **πολικές συντεταγμένες** του μιγαδικού $z=x+yi$.

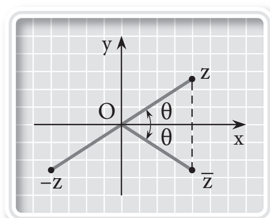
Η μορφή $z=\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)$ ονομάζεται **τριγωνομετρική μορφή**[1] του $z\neq 0$.

Για τον $z=0$ δεν ορίζεται όρισμα, άρα ούτε τριγωνομετρική μορφή.

Το σύνολο των ορισμάτων του $z$ συμβολίζεται με $\mathbf{arg}\,\mathbf{z}$, δηλαδή ισχύει

$$\arg z=\mathrm{Arg}\,z+2k\pi\ ,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Άμεσες συνέπειες των παραπάνω είναι οι εξής ιδιότητες:




**α)** $\mathrm{Arg}\,\overline{z}=-\mathrm{Arg}\,z$, εκτός αν $z<0$.

**β)** $|\mathrm{Arg}\,z-\mathrm{Arg}(-z)|=\pi$.

**γ)** Αν $z=\alpha>0$, τότε $z=\alpha(\sigma\upsilon\nu 0+i\eta\mu 0)$.

**δ)** Αν $z=-\alpha<0$, τότε $z=\alpha(\sigma\upsilon\nu\pi+i\eta\mu\pi)$.

**ε)** Αν $z=\alpha i,\ \alpha>0$, τότε $z=\alpha\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}+i\eta\mu\frac{\pi}{2}\right)$.

**στ)** Αν $z=-\alpha i,\ \alpha>0$, τότε $z=\alpha\left[\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2}\right)i\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$.

**ζ)** $z_1=z_2\Leftrightarrow |z_1|=|z_2|$ και $\mathrm{Arg}\,z_1=\mathrm{Arg}\,z_2$.

---

1 Στην τριγωνομετρική μορφή $z=\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)$ η γωνία $\theta$ είναι ένα οποιοδήποτε όρισμα.

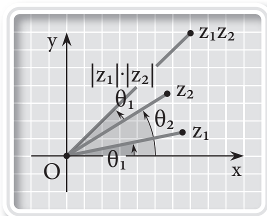
**η)** $\rho_1(\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1) = \rho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\eta\mu\theta_2) \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2$ και $\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

## 1.2.2 Τριγωνομετρική μορφή γινομένου και πηλίκου μιγαδικών αριθμών

**α)** Ισχύει

$$\rho_1(\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)\cdot\rho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\eta\mu\theta_2) = \rho_1\rho_2[\sigma\upsilon\nu(\theta_1+\theta_2) + i\eta\mu\theta_1+\theta_2)]$$

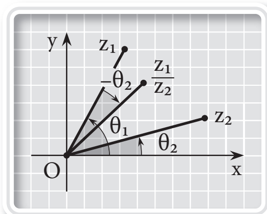
και η ιδιότητα αυτή γενικεύεται για περισσότερους από δύο μη μηδενικούς μιγαδικούς αριθμούς.
Η γεωμετρική παράσταση του σημείου $z_1z_2$ δίνεται στο διπλανό σχήμα. Έτσι, για παράδειγμα, το σημείο $iz$ προκύπτει με στροφή του σημείου $z$ γύρω από το O κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$.




**β)** Ισχύει

$$\frac{\rho_1(\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)}{\rho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\sigma\upsilon\nu(\theta_1-\theta_2) + i\eta\mu(\theta_1-\theta_2)]\ .$$

Η γεωμετρική παράσταση του σημείου $\frac{z_1}{z_2}$ δίνεται στο διπλανό σχήμα.




**γ) Τύπος De Moirre**

$$[\rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)]^\nu = \rho^\nu[\sigma\upsilon\nu(\nu\theta) + i\eta\mu(\nu\theta)],\quad \nu \in \mathbb{Z}.$$

**δ)** Ο μιγαδικός $\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta$ συμβολίζεται με $e^{i\theta}$, οπότε έχουμε τον **τύπο Euler**

$$e^{i\theta} = \sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta,\quad \theta \in \mathbb{R}\ .$$

Για $\theta = \pi$ προκύπτει ότι $e^{i\pi} = \sigma\upsilon\nu\pi + i\eta\mu\pi = -1$, δηλαδή έχουμε την ισότητα

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

που συνδέει τους αριθμούς 0, 1, π, e και $i$.
Προφανώς, ισχύουν οι ιδιότητες:

**i)** $e^{i\theta} = e^{i\varphi} \Leftrightarrow \theta - \varphi = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, **ii)** $e^{i\theta}\cdot e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$,

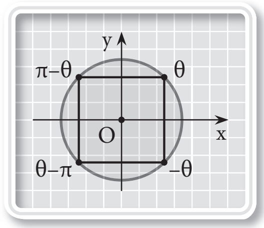
**iii)** $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\varphi}} = e^{i(\theta-\varphi)}$ και **iv)** $(e^{i\theta})^\nu = e^{i\nu\theta},\ \nu \in \mathbb{Z}$.

**ε)** Αν $z=\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)$, $\rho>0$, τότε

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{\rho}[\sigma\upsilon\nu(-\theta)+i\eta\mu(-\theta)]$$

$$\overline{z}=\rho[\sigma\upsilon\nu(-\theta)+i\eta\mu(-\theta)]$$

$$-z=\rho[\sigma\upsilon\nu(\theta-\pi)+i\eta\mu(\theta-\pi)].$$




**Παράδειγμα 1.2.1**

Να γραφούν με τριγωνομετρική μορφή οι μιγαδικοί αριθμοί

**α)** $-1+i\sqrt{3}$, **β)** $2-2i$, **γ)** $\sigma\upsilon\nu\theta-i\eta\mu\theta$, **δ)** $\eta\mu\theta+i\sigma\upsilon\nu\theta$, **ε)** $-2(\eta\mu\theta-i\sigma\upsilon\nu\theta)$.

***Λύση***

**α)** Επειδή $|-1+i\sqrt{3}|=2$, έχουμε

$$-1+i\sqrt{3}=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}+i\eta\mu\frac{2\pi}{3}\right).$$

**β)** $|2-2i|=2\sqrt{2}$ και $2-2i=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}\left[\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

**γ)** $\sigma\upsilon\nu\theta-i\eta\mu\theta=\sigma\upsilon\nu(-\theta)+i\eta\mu(-\theta)$

**δ)** $\eta\mu\theta+i\sigma\upsilon\nu\theta=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

**ε)** $-2(\eta\mu\theta-i\sigma\upsilon\nu\theta)=2(-\eta\mu\theta+i\sigma\upsilon\nu\theta)=2[\eta\mu(-\theta)+i\sigma\upsilon\nu(-\theta)$

$$=2\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+i\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right].$$

**Παράδειγμα 1.2.2**

Να γραφούν με τριγωνομετρική μορφή οι μιγαδικοί αριθμοί

**α)** $\frac{(\sqrt{3}-i)^7}{(1+i)^{10}}$, **β)** $\frac{(-\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)^5}{(\eta\mu\theta+i\sigma\upsilon\nu\theta)^4}$ και **γ)** $1+\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta$, $-\pi<\theta<\pi$.

***Λύση***

**α)** Γράφουμε πρώτα τους μιγαδικούς $z_1=\sqrt{3}-i$ και $z_2=1+i$ με τριγωνομετρική μορφή.

Επειδή $|z_1|=2$ και $|z_2|=\sqrt{2}$, έχουμε

$$z_1 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\left[\text{συν}\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{ημ}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] \quad \text{και}$$

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{\pi}{4} + i\,\text{ημ}\frac{\pi}{4}\right)$$

Άρα,

$$\frac{z_1^7}{z_2^{10}} = \frac{2^7\left[\text{συν}\left(-\frac{7\pi}{6}\right) + i\,\text{ημ}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right]}{(\sqrt{2})^{10}\left[\text{συν}\left(\frac{10\pi}{4}\right) + i\,\text{ημ}\left(\frac{10\pi}{4}\right)\right]} = 4\left[\text{συν}\left(-\frac{7\pi}{6} - \frac{5\pi}{2}\right) + i\,\text{ημ}\left(-\frac{7\pi}{6} - \frac{5\pi}{2}\right)\right]$$

$$= 4\left[\text{συν}\left(-\frac{11\pi}{3}\right) + i\,\text{ημ}\left(-\frac{11\pi}{3}\right)\right] = 4\left[\text{συν}\left(4\pi - \frac{11\pi}{3}\right) + i\,\text{ημ}\left(4\pi - \frac{11\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 4\left(\text{συν}\frac{\pi}{3} + i\,\text{ημ}\frac{\pi}{3}\right).$$

**β)** $$\frac{(-\text{συν}\theta + i\,\text{ημ}\theta)^5}{(\text{ημ}\theta + i\,\text{συν}\theta)^4} = \frac{[\text{συν}(\pi-\theta) + i\,\text{ημ}(\pi-\theta)]^5}{\left[\text{συν}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + i\,\text{ημ}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]^4} = \frac{\text{συν}(5\pi-5\theta) + i\,\text{ημ}(5\pi-5\theta)}{\text{συν}(2\pi-4\theta) + i\,\text{ημ}(2\pi-4\theta)}$$

$$= \text{συν}(5\pi-5\theta-2\pi+4\theta) + i\,\text{ημ}(5\pi-5\theta-2\pi+4\theta)$$

$$= \text{συν}(3\pi-\theta) + i\,\text{ημ}(3\pi-\theta) = \text{συν}(\pi-\theta) + i\,\text{ημ}(\pi-\theta)\,.$$

**γ)** Σύμφωνα με τους τύπους $1+\text{συν}2\alpha = 2\text{συν}^2\alpha$ και $\text{ημ}2\alpha = 2\text{ημ}\alpha\,\text{συν}\alpha$ έχουμε

$$z = 1 + \text{συν}\theta + i\,\text{ημ}\theta = 2\text{συν}^2\frac{\theta}{2} + 2i\,\text{ημ}\frac{\theta}{2}\text{συν}\frac{\theta}{2} = 2\text{συν}\frac{\theta}{2}\left(\text{συν}\frac{\theta}{2} + i\,\text{ημ}\frac{\theta}{2}\right),$$

όπου $\frac{\theta}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

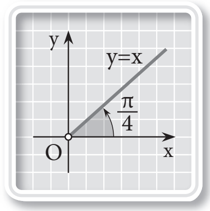
### Παράδειγμα 1.2.3

Να βρεθεί το σύνολο των σημείων $z$ στο μιγαδικό επίπεδο, σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:

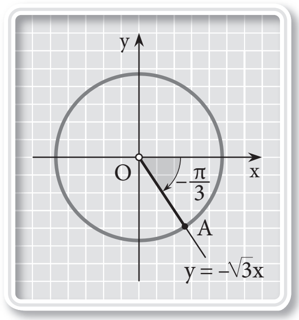
**α)** $\text{Arg}\,z = \frac{\pi}{4}$, **β)** $\text{Arg}\,z = -\frac{\pi}{3}$ και $|z| \le 1$, **γ)** $\frac{\pi}{4} \le \text{Arg}\,z \le \frac{3\pi}{4}$,

**δ)** $\text{Arg}(2z+i) = \frac{\pi}{2}$, **ε)** $\text{Arg}\left(\frac{z-2}{z+2}\right) = \pi$, **στ)** $\text{Arg}\left(\frac{z-i}{z+i}\right) = \frac{\pi}{4}$.

***Λύση***




**α)** Το σημείο z ανήκει στην ημιευθεία $y=x$, $x>0$.

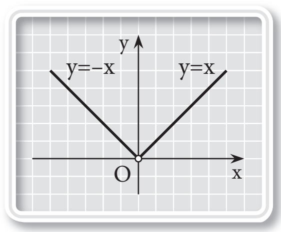



**β)** Επειδή $\operatorname{Arg}z=-\frac{\pi}{3}$, το σημείο z ανήκει στην ημιευθεία $y=-\sqrt{3}x$, $x>0$.

Επειδή, όμως, $|z|\le 1$, το σημείο z ανήκει και στον μοναδιαίο κυκλικό δίσκο.

Άρα, το ζητούμενο σύνολο είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ, χωρίς το Ο, όπου το Α έχει συντεταγμένες

$$\left(\text{συν}\left(-\frac{\pi}{3}\right),\ \text{ημ}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$




**γ)** Το σημείο z ανήκει στο εσωτερικό ή τις πλευρές της γωνίας που σχηματίζουν οι ημιευθείες $y=x$, $x>0$ και $y=-x$, $x<0$.

**δ)** Αν $z=x+yi$, με $x,y\in\mathbb{R}$, τότε $2z+i=2x+(2y+1)i$ και επειδή

$$\operatorname{Arg}(2z+i)=\frac{\pi}{2},\ \text{έχουμε}\ \ 2x=0\ \ \text{και}\ \ 2y+1>0,$$

δηλαδή $x=0$ και $y>-\frac{1}{2}$.

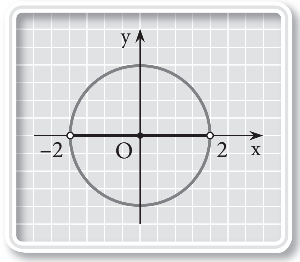
Άρα, το σημείο z ανήκει στον άξονα $y'y$ και έχει τεταγμένη $y>-\frac{1}{2}$.

**ε)** Θέτουμε $z=x+yi$ και έχουμε

$$\frac{z-2}{z+2}=\frac{(x-2)+yi}{(x+2)+yi}=\frac{[(x-2)+yi]\cdot[(x+2)-yi]}{[(x+2)+yi]\cdot[(x+2)-yi]}=\frac{x^2+y^2-4}{(x+2)^2+y^2}+\frac{4y}{(x+2)^2+y^2}i.$$

Επειδή $\operatorname{Arg}\left(\frac{z-2}{z+2}\right)=\pi$, έχουμε

$$\frac{x^2+y^2-4}{(x+2)^2+y^2}<0 \quad \text{και} \quad \frac{4y}{(x+2)^2+y^2}=0,$$




δηλαδή $x^2+y^2<4$ και $y=0$

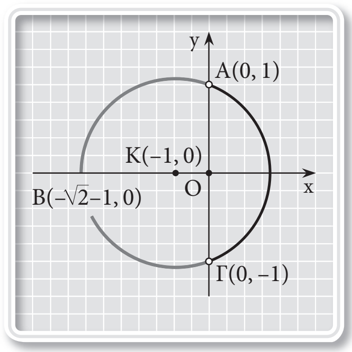
ή $-2<x<2$ και $y=0$.

Άρα, το σημείο $z$ είναι εσωτερικό του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα σημεία $(-2, 0)$ και $(2, 0)$.

**στ)** Ομοίως, βρίσκουμε $\dfrac{z-i}{z+i}=\dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}=\dfrac{2x}{x^2+(y+1)^2}i$

και είναι $\text{Arg}\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)=\dfrac{\pi}{4}$ όταν το σημείο $\left(\dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}, \dfrac{2x}{x^2+(y+1)^2}\right)$

ανήκει στην ημιευθεία $y=x$, $x>0$ δηλαδή όταν ισχύει




$$\frac{x^2+y^2}{x^2+(y+1)^2}=\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}>0$$

ή $x^2+y^2+2x-1=0$ και $x<0$

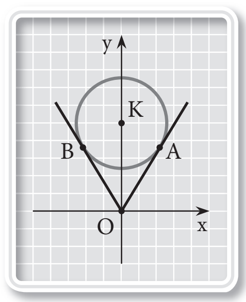
ή $(x+1)^2+y^2=2$ και $x<0$

Άρα, το σημείο $z$ ανήκει στο τόξο $\overset{\frown}{AB\Gamma}$ του κύκλου κέντρου $K(-1,0)$ και ακτίνας $\sqrt{2}$, χωρίς τα άκρα του A και B.

**Παράδειγμα 1.2.4**

Αν $z\in\mathbb{C}$ με $|z-i|=\dfrac{1}{2}$, να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή του $\text{Arg}z$.

***Λύση***




Το σημείο $z$ ανήκει στον κύκλο κέντρου $K(0, 1)$ και ακτίνας $\rho=\dfrac{1}{2}$. Αν φέρουμε τις εφαπτόμενες OA και OB του κύκλου αυτού, η ελάχιστη τιμή του $\text{Arg}z$ είναι η γωνία $\widehat{xOA}$, ενώ μέγιστη τιμή είναι η $\widehat{xOB}$. Οι δύο εφαπτόμενες έχουν εξίσωση της μορφής $y=\lambda x$ και επειδή η απόσταση

του $K$ απ' αυτές ισούται με την ακτίνα, έχουμε

$$\frac{|\lambda\cdot 0-1|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=\frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \sqrt{\lambda^2+1}=2 \quad \text{ή} \quad \lambda^2=3 \quad \text{ή} \quad \lambda=\pm\sqrt{3}\,.$$

Επομένως $\quad OA:\ y=\sqrt{3}x$ και $OB:\ y=-\sqrt{3}x$,

οπότε: $\quad \widehat{xOA}=\text{τοξεφ}\sqrt{3}=\dfrac{\pi}{3}$ και $\widehat{xOB}=\text{τοξεφ}(-\sqrt{3})=\dfrac{2\pi}{3}$.

**Παράδειγμα 1.2.5**

Να βρεθεί ο μιγαδικός αριθμός $z$ για τον οποίο ισχύει

$$|z|=|z+2i| \quad \text{και} \quad \text{Arg}(z+2)=-\frac{\pi}{4}\,.$$

***Λύση***

Αν θέσουμε $z=x+yi$, με $x,y\in\mathbb{R}$, η ισότητα $|z|=|z+2i|$ γράφεται

$$x^2+y^2=x^2+(y+2)^2, \quad \text{οπότε} \quad y=-1\,.$$

Ο μιγαδικός $z+2=(x-i)+2=(x+2)-i$ έχει πρωτεύον όρισμα $-\dfrac{\pi}{4}$, όταν το σημείο $(x+2,\,-1)$ ανήκει στην ημιευθεία $y=-x$, $x>0$, δηλαδή όταν $x+2=1$.

Άρα $z=-1-i$.

**Παράδειγμα 1.2.6**

Αν $z\in\mathbb{C}$ με $z\neq-1$ και $|z|=1$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\alpha\in\mathbb{R}$ με $z=\dfrac{1+\alpha i}{1-\alpha i}$.

***Λύση***

Αν $\theta$ είναι ένα όρισμα του $z$, τότε ισχύει

$$z=\text{συν}\theta+i\,\text{ημ}\theta=\frac{\text{συν}\dfrac{\theta}{2}+i\,\text{ημ}\dfrac{\theta}{2}}{\text{συν}\left(-\dfrac{\theta}{2}\right)+i\,\text{ημ}\left(-\dfrac{\theta}{2}\right)}=\frac{\text{συν}\dfrac{\theta}{2}+i\,\text{ημ}\dfrac{\theta}{2}}{\text{συν}\dfrac{\theta}{2}-i\,\text{ημ}\dfrac{\theta}{2}}=\frac{1+i\,\text{εφ}\dfrac{\theta}{2}}{1-i\,\text{εφ}\dfrac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{1+\alpha i}{1-\alpha i}, \quad \text{όπου} \quad \alpha=\text{εφ}\frac{\theta}{2}\,.$$

**Παράδειγμα 1.2.7**

**α)** Να βρεθεί το σημείο $ze^{i\theta}$ του μιγαδικού επιπέδου, αν είναι γνωστά το σημείο $z$ και ο πραγματικός αριθμός $\theta$.

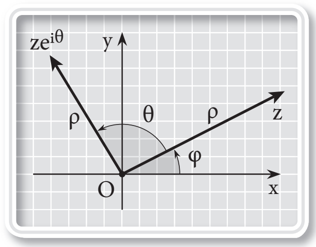
**β)** Κατά ποια γωνία πρέπει να στραφεί το διάνυσμα $2+2i$ για να προκύψει το διάνυσμα $-\sqrt{2}+3i\sqrt{2}$;

***Λύση***

**α)** Αν $z=\rho(\sigma\upsilon\nu\varphi+i\eta\mu\varphi)$, τότε ισχύει

$$ze^{i\theta}=\rho e^{i\varphi}\cdot e^{i\theta}=\rho e^{i(\theta+\varphi)}$$
$$=\rho[\sigma\upsilon\nu(\theta+\varphi)+i\eta\mu(\theta+\varphi)],$$

που σημαίνει ότι το σημείο $ze^{i\theta}$ προκύπτει με στροφή του σημείου $z$ κατά γωνία $\theta$.




**β)** Αν $\theta$ είναι η ζητούμενη γωνία, σύμφωνα με τα παραπάνω, ισχύει

$$(2+2i)e^{i\theta}=-\sqrt{2}+3i\sqrt{2}$$

ή $$\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta=\frac{-\sqrt{2}+3i\sqrt{2}}{2+2i}=\frac{(-\sqrt{2}+3i\sqrt{2})(2-2i)}{2^2+2^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

κι επομένως $\theta=\dfrac{\pi}{4}$.

**Παράδειγμα 1.2.8**

Να αποδειχθεί ότι κάθε σημείο του κύκλου με κέντρο το σημείο $z_0$ και ακτίνα $\rho$ γράφεται με τη μορφή $z=z_0+\rho e^{i\theta}$, $\theta\in\mathbb{R}$.

***Λύση***

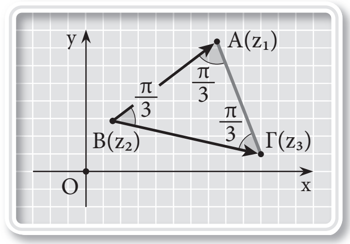
Για οποιοδήποτε σημείο $z$ του κύκλου κέντρου $z_0$ και ακτίνας $\rho$ ισχύει $|z-z_0|=\rho$, οπότε υπάρχει $\theta\in\mathbb{R}$ με

$$z-z_0=\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)=\rho e^{i\theta} \quad \text{ή} \quad z=z_0+\rho e^{i\theta}.$$

**Παράδειγμα 1.2.9**

Αν τα σημεία $z_1,z_2,z_3$ του μιγαδικού επιπέδου είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου, να αποδειχθεί ότι $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$.

***Λύση***




Με στροφή του $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}=z_3-z_2$ κατά γωνία $\frac{\pi}{3}$ προκύπτει το $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=z_1-z_2$, οπότε ισχύει

$$z_1-z_2=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_3-z_2) \quad (1)$$

Ομοίως, με στροφή του $\overrightarrow{\mathrm{\Gamma A}}=z_1-z_3$ κατά γωνία $\frac{\pi}{3}$ προκύπτει το $\overrightarrow{\mathrm{\Gamma B}}=z_2-z_3$ οπότε ισχύει

$$z_2-z_3=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_1-z_3) \quad (2)$$

Με διαίρεση των (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει ότι $\dfrac{z_1-z_2}{z_2-z_3}=\dfrac{z_3-z_2}{z_1-z_3}$ και μετά από πράξεις έχουμε τη ζητούμενη σχέση.

**Παράδειγμα 1.2.10**

Να εκφραστούν τα ημ5θ και συν5θ συναρτήσει των ημθ και συνθ.

***Λύση***

Σύμφωνα με την ταυτότητα

$$(\alpha+\beta)^\nu=\alpha^\nu+\binom{\nu}{1}\alpha^{\nu-1}\beta+\binom{\nu}{2}\alpha^{\nu-2}\beta+\ldots+\binom{\nu}{\nu-1}\alpha\beta^{\nu-1}+\beta^\nu$$

και το θεώρημα De Moivre, έχουμε

$$\begin{aligned}
\text{συν}5\theta+i\,\text{ημ}5\theta &=(\text{συν}\theta+i\,\text{ημ}\theta)^5\\
&=\text{συν}^5\theta+\binom{5}{1}\text{συν}^4\theta\cdot i\,\text{ημ}\theta+\binom{5}{2}\text{συν}^3\theta\cdot i^2\text{ημ}^2\theta+\binom{5}{3}\text{συν}^2\theta\cdot i^3\text{ημ}^3\theta\\
&\quad+\binom{5}{4}\text{συν}\theta\cdot i^4\text{ημ}^4\theta+i^5\text{ημ}^5\theta\\
&=(\text{συν}^5\theta-10\text{συν}^3\theta\,\text{ημ}^2\theta+5\text{συν}\theta\,\text{ημ}^4\theta)+i(5\text{συν}^4\theta\,\text{ημ}\theta-10\text{συν}^2\theta\,\text{ημ}^3\theta+\text{ημ}^5\theta)
\end{aligned}$$

κι επομένως

$$\text{συν}5\theta=\text{συν}^5\theta-10\text{συν}^3\theta\,\text{ημ}^2\theta+5\text{συν}\theta\,\text{ημ}^4\theta \quad \text{και}$$

$$\text{ημ}5\theta=5\text{συν}^4\theta\,\text{ημ}\theta-10\text{συν}^2\theta\,\text{ημ}^3\theta+\text{ημ}^5\theta\,.$$

## 1.3 Πολυωνυμικές εξισώσεις στο σύνολο $\mathbb{C}$

Θ. Ξένος

Μια πολυωνυμική εξίσωση νιοστού βαθμού, με άγνωστο τον $z$ και με μιγαδικούς συντελεστές, έχει τη μορφή

$$\alpha_\nu z^\nu + \alpha_{\nu-1} z^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0 \quad \text{με} \quad \alpha_\nu \neq 0 \qquad (1)$$

Ένας μιγαδικός $z_0$ ονομάζεται **ρίζα** ή **λύση** της (1), όταν την επαληθεύει.

**Θεώρημα D' Alembert** (ή **θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας**):
Κάθε πολυωνυμική εξίσωση έχει μία τουλάχιστον μιγαδική ρίζα.

Συνέπεια αυτού είναι η **πρόταση**:

**Κάθε πολυωνυμική εξίσωση βαθμού $\nu$ έχει ακριβώς $\nu$ μιγαδικές ρίζες.**

Αν το πολυώνυμο $P(z) = \alpha_\nu z^\nu + \alpha_{\nu-1} z^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0$, $\alpha_\nu \neq 0$ έχει ρίζες τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$, τότε ισχύει

$$P(z) = \alpha_\nu (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_\nu).$$

Στην περίπτωση που $k$ από τις ρίζες αυτές ισούνται με $z_0$, τότε ο $z_0$ λέγεται **ρίζα με πολλαπλότητα $k$.**

Ένα σημαντικό θεώρημα για την επίλυση των πολυωνυμικών εξισώσεων είναι το εξής:

Αν μια πολυωνυμική εξίσωση με πραγματικούς συντελεστές έχει ρίζα το μιγαδικό $\alpha + \beta i$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\beta \neq 0$, τότε έχει ρίζα και τον $\alpha - \beta i$.

Αυτό σημαίνει ότι μια πολυωνυμική εξίσωση με πραγματικούς συντελεστές έχει όλες τις ρίζες της πραγματικές ή έχει άρτιο πλήθος μη πραγματικών ριζών.
Στην ειδική περίπτωση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0, \quad \alpha \neq 0$$

ισχύει ο τύπος των ριζών $z_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm w}{2\alpha}$ όπου $w$ μια τετραγωνική ρίζα της διακρίνουσας $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ (δηλαδή $w^2 = \Delta$). Ο τύπος αυτός ισχύει και στην περίπτωση των μιγαδικών συντελεστών.

**Παράδειγμα 1.3.1**

Να λυθεί η εξίσωση $z^4 + z^2 + 1 = 0$ στο σύνολο των μιγαδικών.

***Λύση***

Θέτοντας $z^2 = w$, έχουμε τη δευτεροβάθμια εξίσωση

$$w^2 + w + 1 = 0$$

με διακρίνουσα $\Delta = -3$ και ρίζες

$$w_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad w_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Έτσι, ρίζες της εξίσωσης είναι οι ρίζες των εξισώσεων

$$z^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1) \quad \text{και} \quad z^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2).$$

Η επίλυση της (1) μπορεί να γίνει θέτοντας $z = x + yi$ ή χρησιμοποιώντας τριγωνομετρική μορφή ως εξής:

$$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \text{συν}\frac{2\pi}{3} + i\text{ημ}\frac{2\pi}{3} = \left(\text{συν}\frac{\pi}{3} + i\text{ημ}\frac{\pi}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

Άρα, ρίζες της (1) είναι οι μιγαδικοί

$$z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ομοίως, η (2) γράφεται $z^2 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ και έχει ρίζες

$$z_3 = \overline{z_1} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_4 = \overline{z_2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**Παράδειγμα 1.3.2**

Να λυθεί η εξίσωση $(z^2 + 2z + 2)^2 + (3z^2 + z + 1)^2 = 0$.

***Λύση***

Σύμφωνα με την ταυτότητα $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i)$, η εξίσωση γράφεται

$$[z^2 + 2z + 2 + i(3z^2 + z + 1)] \cdot [z^2 + 2z + 2 - i(3z^2 + z + 1)] = 0,$$

δηλαδή

$$(1 + 3i)z^2 + (2 + i)z + (2 + i) = 0 \quad (1)$$

ή $(1 - 3i)z^2 + (2 - i)z + (2 - i) = 0 \quad (2)$

- Η (1) έχει διακρίνουσα $\Delta_1 = (2+i)^2 - 4(1+3i)(2+i) = 7 - 24i = (4-3i)^2$ και ρίζες

  $z_{1,2} = \dfrac{-2(+i) \pm (4-3i)}{2(1+3i)}$, δηλαδή $z_1 = i$ και $z_2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$.

- Ομοίως, η (2) έχει διακρίνουσα $\Delta_2 = 7 + 24i = (4+3i)^2$ και ρίζες

  $z_3 = -i$ και $z_4 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$.

Άρα, οι ρίζες της δοσμένης εξίσωσης είναι $i, -i, -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$, $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$.

**Παράδειγμα 1.3.3**

Αν $z_1, z_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $z + \dfrac{1}{z} = 2\text{συν}\theta$, όπου $\theta \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι $z_1^\nu + z_2^\nu = 2\text{συν}(\nu\theta)$ για κάθε ακέραιο $\nu$.

***Λύση***

Η εξίσωση γράφεται $z^2 - (2\text{συν}\theta)z + 1 = 0$ και έχει διακρίνουσα

$$\Delta = 4(\text{συν}^2\theta - 1) = -4\text{ημ}^2\theta = (2i\text{ημ}\theta)^2.$$

Επομένως, οι ρίζες της είναι

$$z_1 = \frac{2\text{συν}\theta + 2i\text{ημ}\theta}{2} = \text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta \quad \text{και} \quad z_2 = \text{συν}\theta - i\text{ημ}\theta.$$

Για κάθε ακέραιο $\nu$ ισχύει

$$\begin{aligned} z_1^\nu + z_2^\nu &= (\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta)^\nu + [\text{συν}(-\theta) + i\text{ημ}(-\theta)]^\nu \\ &= \text{συν}(\nu\theta) + i\text{ημ}(\nu\theta) + \text{συν}(-\nu\theta) + i\text{ημ}(-\nu\theta) = 2\text{συν}(\nu\theta). \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 1.3.4**

Να λυθεί η εξίσωση $z^4 - (\lambda+1)z^3 + (\lambda+\mu)z^2 + (2\lambda+3\mu+2)z - 5\mu - 1 = 0$, όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ αν είναι γνωστό ότι μια ρίζα της είναι ο μιγαδικός $2+3i$.

***Λύση***

Ο $2+3i$ πρέπει να επαληθεύει την εξίσωση, δηλαδή

$$(2+3i)^4 - (\lambda+1)(2+3i)^3 + (\lambda+\mu)(2+3i)^2 + (2\lambda+3\mu+2)(2+3i) - 5\mu - 1 = 0 \qquad (1)$$

Είναι:

$$(2+3i)^2 = 4+9i^2+12i = -5+12i\,,$$

$$(2+3i)^3 = (-5+12i)(2+3i) = -46+9i \quad \text{και} \quad (2+3i)^4 = (-5+12i)^2 = -119-120i$$

κι επομένως η (1) γράφεται τελικά

$$(45\lambda-4\mu-70)+i(9\lambda+21\mu-123)=0\,.$$

Άρα, $45\lambda-4\mu-70=0$ και $9\lambda+21\mu-123=0$, δηλαδή $\lambda=2$ και $\mu=5$.

Η εξίσωση, τώρα, γράφεται $z^4-3z^3+7z^2+21z-26=0$ και οι δύο από τις ρίζες της είναι $z_1=2+3i$, $z_2=\overline{z_1}=2-3i$. Διαιρώντας το πολυώνυμο

$$P(z)=z^4-3z^3+7z^2+21z-26 \quad \text{με το}$$

$$(z-2-3i)(z-2+3i)=(z-2)^2+9=z^2-4z+13$$

βρίσκουμε πηλίκο $z^2+z-2$, του οποίου οι ρίζες είναι $1$ και $-2$.
Έτσι, η δοσμένη εξίσωση έχει ρίζες $2+3i$, $2-3i$, $1$, $-2$.

## 1.4 Ρίζες μιγαδικών αριθμών

Θ. Ξένος

**Νιοστή ρίζα** ή ρίζα με τάξη $\nu$ ενός μιγαδικού αριθμού $z$ ονομάζεται κάθε μιγαδικός $w$ με $w^\nu=z$, όπου $\nu$ θετικός ακέραιος.

Αν $z=0$, τότε η εξίσωση $w^\nu=z$ έχει ρίζα μόνον την $w=0$.

Αν $z\neq 0$ και $z=\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)$, $\rho>0$, **τότε η εξίσωση** $w^\nu=z$ **έχει ν διαφορετικές ρίζες**, που δίνονται από τον τύπο

$$w_k=\sqrt[\nu]{\rho}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\theta+2k\pi}{\nu}+i\,\eta\mu\frac{\theta+2k\pi}{\nu}\right),\quad k=0,1,2,\ldots,\nu-1\,.$$

Οι εικόνες των μιγαδικών αυτών είναι κορυφές κανονικού πολυγώνου, που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας $\sqrt[\nu]{\rho}$.

**Εφαρμογή:**

Οι νιοστές ρίζες της μονάδας, δηλαδή οι ρίζες της εξίσωσης $z^\nu=1$, $\nu\in\mathbb{N}^*$, είναι οι μιγαδικοί αριθμοί

$$z_k=\sigma\upsilon\nu\frac{2k\pi}{\nu}+i\eta\mu\frac{2k\pi}{\nu},\quad k=0,1,2,\ldots,\nu-1\,.$$

Οι εικόνες αυτών των μιγαδικών στο επίπεδο Gauss είναι σημεία του μοναδιαίου κύκλου και μάλιστα είναι κορυφές κανονικού ν-γώνου.

Αν θέσουμε $w = \text{συν}\dfrac{2\pi}{\nu} + i\,\text{ημ}\dfrac{2\pi}{\nu}$, τότε $z_k = w^k$ και έτσι οι νιοστές ρίζες της μονάδας γράφονται $1, w, w^2, \ldots, w^{\nu-1}$.

**Παράδειγμα 1.4.1**

Να λυθούν οι εξισώσεις

**α)** $z^3 = -i$, **β)** $z^4 + 1 = 0$ και **γ)** $z^6 - (1+i)z^3 + i = 0$.

***Λύση***

**α)** Επειδή $|-i| = 1$ και $\text{Arg}(-i) = -\dfrac{\pi}{2}$, η εξίσωση γράφεται

$$z^3 = \text{συν}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\,\text{ημ}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

και έχει ρίζες τους μιγαδικούς $z_k = \text{συν}\left(\dfrac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right) + i\,\text{ημ}\left(\dfrac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)$,

με $k = 0,1,2$, δηλαδή τους

$$z_0 = \text{συν}\left(-\frac{\pi}{6}\right) i\,\text{ημ}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i,$$

$$z_1 = \text{συν}\frac{\pi}{2} + i\,\text{ημ}\frac{\pi}{2} = i \quad \text{και} \quad z_2 = \text{συν}\frac{7\pi}{6} + i\,\text{ημ}\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

**β)** Η εξίσωση γράφεται $z^4 = -1 = \text{συν}\pi + i\,\text{ημ}\pi$ και οι ρίζες της είναι

$$z_k = \text{συν}\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) + i\,\text{ημ}\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right), \quad k = 0,1,2,3,$$

δηλαδή

$$z_0 = \text{συν}\frac{\pi}{4} + i\,\text{ημ}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad z_1 = \text{συν}\frac{3\pi}{4} + i\,\text{ημ}\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$z_2 = \text{συν}\frac{5\pi}{4} + i\,\text{ημ}\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{και} \quad z_3 = \text{συν}\frac{7\pi}{4} + i\,\text{ημ}\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**γ)** Θέτουμε $z^3 = w$ και έχουμε την εξίσωση $w^2 - (1+i)w + i = 0$, η οποία έχει διακρίνουσα $\Delta = (1+i)^2 - 4i = (1-i)^2$ και ρίζες

$$w_1 = \frac{(1+i)+(1-i)}{2} = 1, \quad w_2 = \frac{(1+i)-(1-i)}{2} = i$$

Η εξίσωση $z^3 = 1 = \text{συν}0 + i\text{ημ}0$ έχει ρίζες τις

$$z_k = \text{συν}\frac{2k\pi}{3} + i\text{ημ}\frac{2k\pi}{3}, \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

δηλαδή

$$z_0 = \text{συν}0 + i\text{ημ}0 = 1, \quad z_1 = \text{συν}\frac{2\pi}{3} + i\text{ημ}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$z_2 = \text{συν}\frac{4\pi}{3} + i\text{ημ}\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Η εξίσωση $z^3 = i = \text{συν}\frac{\pi}{2} + i\text{ημ}\frac{\pi}{2}$ έχει ρίζες τις

$$z_0' = \text{συν}\frac{\pi}{6} + i\text{ημ}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad z_1' = \text{συν}\frac{5\pi}{6} + i\text{ημ}\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad \text{και}$$

$$z_2' = \text{συν}\frac{3\pi}{2} + i\text{ημ}\frac{3\pi}{2} = -i.$$

**Παράδειγμα 1.4.2**

**α)** Να υπολογιστεί το άθροισμα και το γινόμενο των νιοστών ριζών της μονάδας.

**β)** Να αποδειχθούν οι ισότητες

$$\text{ημ}\frac{2\pi}{\nu} + \text{ημ}\frac{4\pi}{\nu} + \text{ημ}\frac{6\pi}{\nu} + \ldots + \text{ημ}\frac{2(\nu-1)\pi}{\nu} = 0 \quad \text{και}$$

$$\text{συν}\frac{2\pi}{\nu} + \text{συν}\frac{4\pi}{\nu} + \text{συν}\frac{6\pi}{\nu} + \ldots + \text{συν}\frac{2(\nu-1)\pi}{\nu} = -1.$$

***Λύση***

**α)** Οι νιοστές ρίζες της μονάδας είναι οι ρίζες της εξίσωσης $z^\nu = 1$, δηλαδή οι μιγαδικοί $1, w, w^2, \ldots, w^{\nu-1}$, όπου $w = \text{συν}\frac{2\pi}{\nu} + i\text{ημ}\frac{2\pi}{\nu} \neq 1$.

Έτσι, έχουμε:

- $1+w+w^2+\ldots+w^{\nu-1}=\dfrac{w^\nu-1}{w-1}=0$, αφού $w^\nu=1$.

- $1\cdot w\cdot w^2+\ldots w^{\nu-1}=w^{1+2+\ldots+(\nu-1)}=w^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}=\left(\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi}{\nu}+i\,\eta\mu\dfrac{2\pi}{\nu}\right)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}=$

$$=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\nu(\nu-1)}{2}\cdot\frac{2\pi}{\nu}\right)+i\,\eta\mu\left(\frac{\nu(\nu-1)}{2}\cdot\frac{2\pi}{\nu}\right)$$

$$=\sigma\upsilon\nu(\nu-1)\pi+i\,\eta\mu(\nu-1)\pi=(\sigma\upsilon\nu\,\pi+i\,\eta\mu\,\pi)^{\nu-1}=(-1)^{\nu-1}$$

$$=\begin{cases}1, & \text{αν } \nu \text{ περιττός}\\ -1, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος}\end{cases}.$$

**β)** Η ισότητα $1+w+w^2+\ldots+w^{\nu-1}=0$ γράφεται

$$1+\left(\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{\nu}+i\,\eta\mu\frac{2\pi}{\nu}\right)+\left(\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{\nu}+i\,\eta\mu\frac{4\pi}{\nu}\right)+\ldots+\left(\sigma\upsilon\nu\frac{2(\nu-1)\pi}{\nu}+i\,\eta\mu\frac{2(\nu-1)\pi}{\nu}\right)=0$$

και απ' αυτήν προκύπτουν οι ζητούμενες ισότητες.

## Παράδειγμα 1.4.3

Να αναλυθεί το πολυώνυμο $P(z)=z^4-z^3+z^2-z+1$ σε γινόμενο δύο δευτεροβάθμιων τριωνύμων με πραγματικούς συντελεστές.

***Λύση***

Επειδή $z^5+1=(z+1)(z^4-z^3+z^2-z+1)=(z+1)\cdot P(z)$ και $P(-1)=5\neq 0$, οι ρίζες του $P(z)$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $z^5=1$, εκτός από την $z=-1$. Οι ρίζες της $z^5=-1=\sigma\upsilon\nu\,\pi+i\,\eta\mu\,\pi$ είναι οι μιγαδικοί

$$z_k=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi+2k\pi}{5}+i\,\eta\mu\frac{\pi+2k\pi}{5},\quad k=0,1,2,3,4$$

δηλαδή οι

$$z_0=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{5}+i\,\eta\mu\frac{\pi}{5},\qquad z_1=\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{5}+i\,\eta\mu\frac{3\pi}{5},\qquad z_2=\sigma\upsilon\nu\,\pi+i\,\eta\mu\,\pi=-1$$

$$z_3=\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{5}+i\,\eta\mu\frac{7\pi}{5}\quad \text{και}\quad z_4=\sigma\upsilon\nu\frac{9\pi}{5}+i\,\eta\mu\frac{9\pi}{5}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$z_3 = \sigma\upsilon\nu\left(2\pi - \frac{3\pi}{5}\right) + i\,\eta\mu\left(2\pi - \frac{3\pi}{5}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{5} - i\,\eta\mu\frac{3\pi}{5} = \overline{z}_1 \quad \text{και ομοίως} \quad z_4 = \overline{z}_0 .$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
P(z) &= (z-z_0)(z-z_1)(z-z_3)(z-z_4)\\
&= [(z-z_0)(z-\overline{z}_0)]\cdot[(z-z_1)\cdot(z-\overline{z}_1)]\\
&= [z^2-(z_0+\overline{z}_0)z+z_0\overline{z}_0]\cdot[z^2-(z_1+\overline{z}_1)z+z_1\overline{z}_1]\\
&= [z^2-2\mathrm{Re}(z_0)\cdot z+|z_0|^2]\cdot[z^2-2\mathrm{Re}(z_1)\cdot z+|z_1|^2]\\
&= \left[z^2-\left(2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{5}\right)z+1\right]\cdot\left[z^2-\left(2\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{5}\right)z+1\right].
\end{aligned}$$

**Παράδειγμα 1.4.4**

Αν ο αριθμός $\nu$ είναι θετικός ακέραιος, να λυθεί η εξίσωση $(1+z)^\nu + (1-z)^\nu = 0$ .

***Λύση***

Προφανώς, ισχύει $z \neq 1$. Έτσι, η εξίσωση γράφεται

$$(1+z)^\nu = -(1-z)^\nu \quad \text{ή} \quad \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\nu = -1 \quad \text{ή} \quad w^\nu = -1, \quad \text{όπου} \quad w = \frac{1+z}{1-z}.$$

Οι ρίζες της τελευταίας είναι $w_k = \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi+2k\pi}{\nu} + i\,\eta\mu\dfrac{\pi+2k\pi}{\nu}, \quad k = 0,1,2,\ldots,\nu-1$.

Θέτοντας, για συντομία $\dfrac{\pi+2k\pi}{\nu} = \theta$, έχουμε

$$\frac{1+z}{1-z} = \sigma\upsilon\nu\theta + i\,\eta\mu\theta \quad \text{ή} \quad 1+z = \sigma\upsilon\nu\theta + i\,\eta\mu\theta - z(\sigma\upsilon\nu\theta + i\,\eta\mu\theta) \quad \text{ή}$$

$$z = \frac{-1+\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta} = \frac{-2\eta\mu^2\frac{\theta}{2}+2i\eta\mu\frac{\theta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}}{2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\theta}{2}+2i\eta\mu\frac{\theta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}} = \frac{2\eta\mu\frac{\theta}{2}\left(-\eta\mu\frac{\theta}{2}+i\,\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}\right)}{2\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}+i\,\eta\mu\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\text{ή} \quad z = \varepsilon\varphi\frac{\theta}{2}\cdot\frac{i\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}+i\,\eta\mu\frac{\theta}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}+i\,\eta\mu\frac{\theta}{2}} = i\,\varepsilon\varphi\frac{\theta}{2}.$$

Άρα, η δοσμένη εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς

$$z_k = i\varepsilon\varphi\frac{\pi+2k\pi}{2\nu}, \quad k=0,1,2,\ldots,\nu-1,$$

δηλαδή τους

$$i\varepsilon\varphi\frac{\pi}{2\nu},\ i\varepsilon\varphi\frac{3\pi}{2\nu},\ldots,i\varepsilon\varphi\frac{(2\nu-1)\pi}{2\nu}$$

από τους οποίους πρέπει να εξαιρεθεί εκείνος για τον οποίο ισχύει

$$\frac{(2k+1)\pi}{2\nu}=\frac{\pi}{2} \quad ή \quad \nu=2k+1 \quad ή \quad k=\frac{\nu-1}{2}.$$

Έτσι,

- για $\nu$ άρτιο, η εξίσωση έχει τις παραπάνω $\nu$ ρίζες
- για $\nu$ περιττό, η εξίσωση έχει $\nu-1$ ρίζες, που είναι οι παραπάνω αριθμοί, εκτός από τον $\frac{z_{\nu-1}}{2}$.

**Παράδειγμα 1.4.5**

Αν ένα κανονικό πολύγωνο με $\nu$ κορυφές είναι εγγεγραμμένο στο μοναδιαίο κύκλο, να αποδειχθεί ότι το γινόμενο των αποστάσεων κάθε κορυφής από τις υπόλοιπες κορυφές ισούται με $\nu$.

***Λύση***

Όλα τα εγγεγραμμένα στο μοναδιαίο κύκλο κανονικά $\nu$-γωνα είναι μεταξύ τους ίσα. Έτσι, θεωρούμε εκείνο το πολύγωνο $A_0A_1A_2\ldots A_{\nu-1}$, του οποίου οι κορυφές είναι οι εικόνες των νιοστών ριζών $z_0=1, z_1, z_2, \ldots, z_{\nu-1}$ της μονάδας.

Επειδή

$$z^\nu-1=(z-1)(z^{\nu-1}+z^{\nu-2}+\ldots+z+1) \quad και \quad z^\nu-1=(z-z_0)(z-z_1)\ldots(z-z_{\nu-1}),$$

έχουμε $(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_{\nu-1})=z^{\nu-1}+z^{\nu-2}+\ldots+z+1$ για κάθε $z\in\mathbb{C}$.

Έτσι, για $z=1$ έχουμε $(1-z_1)(1-z_2)\ldots(1-z_{\nu-1})=\nu$ κι επομένως

$$(A_0A_1)\cdot(A_0A_2)\ldots(A_0A_{\nu-1})=$$

$$=|1-z_1|\cdot|1-z_2|\ldots|1-z_{\nu-1}|=|(1-z_1)(1-z_2)\ldots(1-z_{\nu-1})\nu|=\nu.$$

# Προτεινόμενες ασκήσεις στο 1ο Κεφάλαιο

**Άσκηση 1.1**

Να βρεθεί η συνθήκη μεταξύ των πραγματικών αριθμών $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ και $\delta$ έτσι, ώστε οι μιγαδικοί $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$ να αποτελούν βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{C}$.

**Άσκηση 1.2**

Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για ποιους ακέραιους αριθμούς $\nu$ ισχύει

$$(\alpha + \beta i)^\nu + (\beta - \alpha i)^\nu = 0.$$

**Άσκηση 1.3**

Να αποδειχθεί ότι τα σημεία $z_1, z_2, z_3$ του μιγαδικού επιπέδου είναι συνευθειακά, αν και μόνον αν ο αριθμός $w = \dfrac{z_1 - z_3}{z_3 - z_2}$ είναι πραγματικός.

**Άσκηση 1.4**

Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι οι $z_1 + z_2$ και $z_1 \cdot z_2$ είναι πραγματικοί, αν και μόνον αν οι $z_1, z_2$ είναι συζυγείς μιγαδικοί.

**Άσκηση 1.5**

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου $z$ για καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις.

**α)** $\operatorname{Im}\left(\dfrac{z^2}{z-1}\right) = 0$, **β)** $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right) = 0$, **γ)** $\left|\dfrac{z-9}{z-1}\right| > 3$,

**δ)** $|z-2| + |z+2| = 8$, **ε)** $|z+5| - |z-5| = 6$ και **στ)** $|z-2| = 1$ και $|z-1| \le 1$.

**Άσκηση 1.6**

Αν το σημείο $z$ διαγράφει τον κύκλο $|z| = 2$, να αποδειχθεί ότι το σημείο $w = z + \dfrac{1}{z}$ διαγράφει έλλειψη.

**Άσκηση 1.7**

Αν $|z-2-3i|=5$, να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή του $|z-11-15i|$.

**Άσκηση 1.8**

Για ποιους πραγματικούς αριθμούς $\alpha$ και $\beta$ οι ρίζες της εξίσωσης $z^2+\alpha z+\beta=0$ έχουν μέτρο 1;

**Άσκηση 1.9**

Να βρεθεί ο μιγαδικός αριθμός $z$ για τον οποίο ισχύει

$$2|z-3|=|z-1-6i| \quad \text{και} \quad \mathrm{Arg}\left(\frac{z-3}{z-1-6i}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

**Άσκηση 1.10**

Αν για το μιγαδικό $z$ ισχύει $\mathrm{Arg}z=\frac{\pi}{4}$, να αποδειχθεί ότι η εικόνα του $w=z+\frac{\alpha}{z}$, όπου $\alpha$ θετικός πραγματικός αριθμός, κινείται σε μια ισοσκελή υπερβολή.

**Άσκηση 1.11**

**α)** Για κάθε $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ να αποδειχθεί ότι

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$$

και να ερμηνευθεί γεωμετρικά η ισότητα αυτή.

**β)** Αν τα σημεία $z_1,z_2$ ανήκουν στον κυκλικό δίσκο $|z|\leq 1$, να αποδειχθεί ότι ένα τουλάχιστον από τα σημεία $z_1+z_2$ και $z_1-z_2$ ανήκει στον κυκλικό δίσκο $|z|\leq\sqrt{2}$.

**Άσκηση 1.12**

Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης

$$(z+i)^\nu=(z-i)^\nu, \quad \nu\in\mathbb{N}^*$$

είναι συνευθειακά σημεία.

**Άσκηση 1.13**

**α)** Αν $z_1+z_2+z_3=0$ και $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$, να αποδειχθεί ότι $|z_1|=|z_2|=|z_3|$.

**β)** Αν τα σημεία $z_1, z_2, z_3$ σχηματίζουν τρίγωνο και ισχύει

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1,$$

να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο αυτό είναι ισόπλευρο.

**Άσκηση 1.14**

Να λυθεί η εξίσωση $z^{\nu} = \overline{z}^{\mu}$, όπου $\nu, \mu$ θετικοί ακέραιοι, αφού αποδειχθεί ότι κάθε μη μηδενική ρίζα της έχει μέτρο $1$.