ΘΑΝΑΣΗ Π. ΞΕΝΟΥ

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

Μέθοδοι και Προβλήματα

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα

Για επικοινωνία με το συγγραφέα:
☎ / fax 031-0-348 086
e-mail: stranger@internet.gr

ISBN 960-431-720-2

www.ziti.gr

Φωτοστοιχειοθεσία Εκτύπωση

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 171 • Νέοι Επιβάτες Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 0392-0-72.222 (3 γραμ.) - Fax: 0392-0-72.229
e-mail: info@ziti.gr

Βιβλιοπωλείο

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ. 031-0-203.720, Fax 031-0-211.305
e-mail: sales@ziti.gr

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται σε αναγνώστες που κατέχουν τις βασικές γνώσεις της Πρακτικής Αριθμητικής και επομένως δεν μπορεί να χαρακτηρισθεί ως βοήθημα για τους μαθητές του Δημοτικού. Γράφτηκε, κυρίως, για να βοηθήσει τους υποψηφίους για πρόσληψη στο Δημόσιο, μέσω των διαγωνισμών του Ανωτάτου Συμβουλίου Επιλογής Προσωπικού (Α.Σ.Ε.Π.). Πιστεύουμε, επίσης, ότι είναι απαραίτητο στους συναδέλφους εκπαιδευτικούς του Δημοτικού και του Γυμνασίου, τους μαθητές του Γυμνασίου, αλλά και τους καλούς μαθητές της Ε΄ και ΣΤ΄ τάξης του Δημοτικού. Τέλος, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και από τους γονείς εκείνους που ασχολούνται με τα μαθηματικά και ενδιαφέρονται για την πρόοδο των παιδιών τους.

Το βιβλίο αποτελείται από επτά κεφάλαια.

- Στο πρώτο κεφάλαιο είναι συγκεντρωμένες ορισμένες **βασικές θεωρητικές γνώσεις**, που, κατά τη γνώμη μας, είναι προαπαιτούμενες για την αντιμετώπιση των προβλημάτων που θα ακολουθήσουν.

  Τέτοια θέματα, για παράδειγμα, είναι η απλή μέθοδος των τριών, η μέθοδος αναγωγής στη μονάδα, οι πράξεις κλασμάτων και δεκαδικών κ.λπ.

- Στο δεύτερο κεφάλαιο αντιμετωπίζονται **προβλήματα των τεσσάρων πράξεων**, απ' όλο το φάσμα των δραστηριοτήτων της καθημερινής ζωής, τα οποία είναι λυμένα με αναλυτικό τρόπο. Σε πολλές περιπτώσεις ακολουθούν σχόλια - γενικεύσεις, ώστε να μπορεί ο αναγνώστης να αντιμετωπίσει επιτυχώς ανάλογα προβλήματα.

- Το τρίτο κεφάλαιο αναφέρεται στα **προβλήματα ποσοστών και τόκου.** Απαραίτητη προϋπόθεση για την αντιμετώπιση αυτών των προβλημάτων, είναι η κατανόηση των ανάλογων και των αντιστρόφως ανάλογων ποσών.

  Στα προβλήματα τόκου, ο ανατοκισμός γίνεται κάθε εξάμηνο, κάτι που συμβαίνει και στην πράξη, αλλά σε ορισμένα προβλήματα, χάριν απλότητας, θεωρούμε ότι γίνεται κάθε χρόνο.

- Το τέταρτο κεφάλαιο αναφέρεται στα **προβλήματα μερισμού και εταιρειών**, όπου πάλι κυριαρχεί η έννοια των ανάλογων και αντιστρόφως ανάλογων ποσών.

- Στο πέμπτο κεφάλαιο αντιμετωπίζονται χαρακτηριστικά και πρωτότυπα **προβλήματα κίνησης**, όπου κυρίως αναφέρεται η περίπτωση κίνησης με σταθερή ταχύτητα.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

- Επειδή στους διαγωνισμούς του Α.Σ.Ε.Π. είναι αποδεκτή οποιαδήποτε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη, στο έκτο κεφάλαιο αναφέρουμε την **επίλυση προβλημάτων με τη βοήθεια εξισώσεων**, που σε πολλές περιπτώσεις είναι ευκολότερη από οποιαδήποτε άλλη μέθοδο.
- Το έβδομο και τελευταίο κεφάλαιο περιλαμβάνει ορισμένα **ιδιόμορφα προβλήματα**, που συνήθως είναι προβλήματα λογικής ή, όπως λέμε, σπαζοκεφαλιές.

Στο τέλος κάθε κεφαλαίου υπάρχουν **προτεινόμενα προβλήματα** για λύση, για τα οποία δίνονται οι λύσεις με σχετικά σύντομο τρόπο.

Σε πολλά από τα λυμένα προβλήματα υπάρχει κάποιος χαρακτηρισμός, όπως π.χ. πρόβλημα μίξης προϊόντων. Τα προβλήματα αυτά θεωρούνται βασικά και θα πρέπει να δοθεί σ’ αυτά ιδιαίτερη προσοχή.

Σ’ όλα τα κεφάλαια περιλαμβάνονται προβλήματα που δόθηκαν κατά καιρούς σε διάφορους διαγωνισμούς. Σε ορισμένα απ’ αυτά έχουν τροποποιηθεί κάποια οικονομικά στοιχεία, ώστε να συμφωνούν με τα σημερινά οικονομικά δεδομένα.

Με ευχαρίστηση θα δεχτώ οποιαδήποτε υπόδειξη που θα μπορούσε να συμβάλλει στη βελτίωση αυτού του βιβλίου.

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2001

Θανάσης Ξένος

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ 1ο

ΜΕΡΟΣ 2ο

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1ο Μέρος

Βασικές Θεωρητικές Γνώσεις

1 Βασικές Θεωρητικές Γνώσεις

1.1 *Ειδικές περιπτώσεις πολλαπλασιασμού & διαίρεσης*

- Για να πολλαπλασιάσουμε ένα φυσικό αριθμό(*) με 10 ή 100 ή 1000 κ.λπ., αρκεί να γράψουμε δεξιά από τον αριθμό 1 ή 2 ή 3 κ.λπ. μηδενικά αντίστοιχα.

  Για παράδειγμα,

  $$35 \cdot 10 = 350\ , \quad 671 \cdot 100 = 67100 \quad \text{και} \quad 42 \cdot 1000 = 42000\ .$$

- Για να πολλαπλασιάσουμε ένα δεκαδικό αριθμό με 10 ή 100 ή 1000 κ.λπ., αρκεί να μεταφέρουμε την υποδιαστολή προς τα δεξιά μία ή δύο ή τρεις κ.λπ. θέσεις αντίστοιχα.

  Για παράδειγμα,

  $$3{,}21 \cdot 10 = 32{,}1\ , \quad 0{,}014 \cdot 100 = 1{,}4 \quad \text{και} \quad 0{,}321 \cdot 1000 = 321\ .$$

- Για να πολλαπλασιάσουμε έναν αριθμό (φυσικό ή δεκαδικό) με 0,1 (ένα δέκατο) ή 0,01 (ένα εκατοστό) ή 0,001 (ένα χιλιοστό) κ.λπ., αρκεί να μεταφέρουμε την υποδιαστολή προς τα αριστερά μία ή δύο ή τρεις κ.λπ. θέσεις αντίστοιχα.

  Για παράδειγμα,

  $$32{,}7 \cdot 0{,}1 = 3{,}27\ , \quad 630 \cdot 0{,}01 = 6{,}3 \quad \text{και} \quad 6{,}2 \cdot 0{,}001 = 0{,}0062\ .$$

- Η διαίρεση ενός αριθμού 10 ή 100 ή 1000 κ.λπ., γίνεται όπως ο πολλαπλασιασμός με 0,1 ή 0,01 ή 0,001 κ.λπ. αντίστοιχα. Αυτό συμβαίνει, επειδή π.χ. ισχύει

  $$35 : 10 = \frac{35}{10} = 35 \cdot \frac{1}{10} = 35 \cdot 0{,}1 = 3{,}5\ .$$

(*) Φυσικοί αριθμοί είναι οι 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...

Έτσι, για παράδειγμα, έχουμε

$$35{,}2 : 10 = 3{,}52\ ,\quad 67 : 100 = 0{,}67 \quad \text{και} \quad 3 : 1000 = 0{,}003\ .$$

- Η διαίρεση ενός αριθμού με $0{,}1$ ή $0{,}01$ ή $0{,}001$ κ.λπ., γίνεται όπως ο πολλαπλασιασμός με 10 ή 100 ή 1000 κ.λπ. αντίστοιχα.

  Για παράδειγμα,

$$6{,}23 : 0{,}1 = 62{,}3\ ,\quad 38 : 0{,}01 = 3800 \quad \text{και} \quad 0{,}0028 : 0{,}001 = 2{,}8\ .$$

1.2 Πράξεις κλασμάτων

- Για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε δύο ομώνυμα κλάσματα, προσθέτουμε ή αφαιρούμε αντίστοιχα τους αριθμητές τους και αφήνουμε τον ίδιο παρονομαστή.

  Για παράδειγμα,

$$\frac{3}{7} + \frac{15}{7} = \frac{3+15}{7} = \frac{18}{7} \quad \text{και} \quad \frac{23}{5} - \frac{8}{5} = \frac{23-8}{5} = \frac{15}{5} = 3\ .$$

  Αν έχουμε ετερώνυμα κλάσματα, τότε τα μετατρέπουμε πρώτα σε ομώνυμα βρίσκοντας το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) των παρονομαστών.

  Έτσι, για παράδειγμα, έχουμε

$$\frac{4}{3} + \frac{5}{7} = \overset{7}{\frac{4}{3}} + \overset{3}{\frac{5}{7}} = \frac{28}{21} + \frac{15}{21} = \frac{28+15}{21} = \frac{43}{21}$$

και

$$3 - \frac{1}{4} = \overset{4}{\frac{3}{1}} - \overset{1}{\frac{1}{4}} = \frac{12}{4} - \frac{1}{4} = \frac{12-1}{4} = \frac{11}{4}\ .$$

- Για να πολλαπλασιάσουμε δύο κλάσματα (ομώνυμα ή ετερώνυμα), πολλαπλασιάζουμε τους αριθμητές και το γινόμενό τους το γράφουμε ως αριθμητή του νέου κλάσματος, όπως επίσης πολλαπλασιάζουμε τους παρονομαστές και γράφουμε το γινόμενό τους ως παρονομαστή.

  Για παράδειγμα,

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 7} = \frac{12}{35} \quad \text{και} \quad 6 \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{1} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6 \cdot 3}{1 \cdot 5} = \frac{18}{5}\ .$$

◆ Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα, πολλαπλασιάζουμε στο διαιρετέο (πρώτο κλάσμα) τον αντίστροφο(*) του διαιρέτη (δεύτερο κλάσμα).

Για παράδειγμα,

$$\frac{2}{3}:\frac{4}{5}=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6} \quad \text{και} \quad 6:\frac{3}{5}=6\cdot\frac{5}{3}=\frac{30}{3}=10\,.$$

Συχνά, η διαίρεση κλασμάτων εμφανίζεται και ως **σύνθετο κλάσμα.** Ένα τέτοιο κλάσμα γράφεται ως απλό κλάσμα, αρκεί ως αριθμητή να γράφουμε το γινόμενο των άκρων όρων του, ενώ ως παρονομαστή να γράψουμε το γινόμενο των μέσων όρων του.

Για παράδειγμα,

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{5}}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 7}=\frac{10}{21}\,,\quad \frac{\frac{7}{3}}{5}=\frac{\frac{7}{3}}{\frac{5}{1}}=\frac{7}{15} \quad \text{και} \quad \frac{6}{\frac{2}{3}}=\frac{\frac{6}{1}}{\frac{2}{3}}=\frac{18}{2}=9\,.$$

Φυσικά, οι πράξεις κλασμάτων μπορούν να γίνουν και με περισσότερα από δύο κλάσματα.

Για παράδειγμα,

α. $$\frac{3}{7}+\frac{6}{14}-\frac{1}{21}=\frac{\overset{3}{\smile}\!\!3}{7}+\frac{\overset{3}{\smile}\!\!3}{7}-\frac{\overset{1}{\smile}\!\!1}{21}= \qquad \text{(Ε.Κ.Π. = 21)}$$

$$=\frac{9}{21}+\frac{9}{21}-\frac{1}{21}=\frac{9+9-1}{21}=\frac{17}{21}\,.$$

β. $$\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{5}\right):\frac{6}{5}=\frac{14}{15}:\frac{6}{5}=\frac{14}{15}\cdot\frac{5}{6}=\frac{14\cdot 5}{15\cdot 6}=$$

$$=\frac{14\cdot 1}{3\cdot 6} \qquad \text{(απλοποίηση με το 5)}$$

$$=\frac{14}{18}=\frac{7}{9} \qquad \text{(απλοποίηση με το 2)}$$

(*) Αντίστροφοι ονομάζονται δύο αριθμοί, όταν έχουν γινόμενο τη μονάδα. Ο αντίστροφος του αριθμού α είναι ο $\frac{1}{\alpha}$, ενώ ο αντίστροφος του κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι το κλάσμα $\frac{\beta}{\alpha}$.

◆ Το άθροισμα ενός φυσικού αριθμού και ενός γνήσιου κλάσματος $\left(\text{δηλαδή κλάσματος μικρότερου της μονάδας, όπως το } \frac{2}{5}\right)$, ονομάζεται **μεικτός αριθμός** και έχει ιδιαίτερο τρόπο γραφής.

Για παράδειγμα, το άθροισμα $7+\frac{2}{3}$ το γράφουμε $7\,\frac{2}{3}$.

Η μετατροπή του μεικτού σε απλό κλάσμα γίνεται όπως η πρόσθεση κλασμάτων, αλλά για συντομία έχουμε τον κανόνα:

Πολλαπλασιάζουμε το φυσικό αριθμό με τον παρονομαστή του κλάσματος και το γινόμενο που βρίσκουμε το προσθέτουμε στον αριθμητή του κλάσματος. Ως παρονομαστή αφήνουμε τον ίδιο.

Για παράδειγμα,

$$7\,\frac{1}{3} = \frac{7\cdot 3 + 1}{3} = \frac{22}{3} \quad \text{και} \quad 3\,\frac{2}{5} = \frac{3\cdot 5 + 2}{5} = \frac{17}{5} \,.$$

1.3 Εύρεση του ελάχιστου κοινού πολλαπλασίου

Η εύρεση του μικρότερου μη μηδενικού κοινού πολλαπλασίου δύο ή περισσοτέρων φυσικών αριθμών (δηλαδή του Ε.Κ.Π.) μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας μια από τις παρακάτω οδηγίες.

α. Το Ε.Κ.Π. δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών είναι το γινόμενό τους.

Για παράδειγμα, είναι

$$\text{Ε.Κ.Π. } (5,\ 6) = 5\cdot 6 = 30$$

και Ε.Κ.Π. $(25,\ 26) = 25\cdot 26 = 650$.

β. Αν μεταξύ δύο φυσικών αριθμών ο ένας είναι πολλαπλάσιο του άλλου, τότε ο μεγαλύτερος είναι το Ε.Κ.Π. αυτών. Φυσικά, αυτό συμβαίνει και για περισσότερους από δύο φυσικούςαριθμούς.

Για παράδειγμα, έχουμε

$$\text{Ε.Κ.Π. } (4,\ 8) = 8\ , \quad \text{Ε.Κ.Π. } (9,\ 27) = 27$$

και Ε.Κ.Π. $(16,\ 32,\ 96) = 96$.

γ. Ένας γενικός και απλός τρόπος εύρεσης του Ε.Κ.Π. είναι ο εξής:

- Ελέγχουμε αν ο μεγαλύτερος από τους αριθμούς είναι πολλαπλάσιο των άλλων. Αν ναι, τότε αυτός είναι το Ε.Κ.Π.

Αν όχι, τότε συνεχίζουμε ως εξής.

- Διπλασιάζουμε το μεγαλύτερο και ελέγχουμε αν είναι πολλαπλάσιο των άλλων αριθμών. Αν ναι, τότε αυτό το διπλάσιο είναι το Ε.Κ.Π. Αν όχι, συνεχίζουμε τριπλασιάζοντας το μεγαλύτερο αριθμό κ.ο.κ.

Ας βρούμε, για παράδειγμα, το Ε.Κ.Π. των αριθμών 14, 21 και 28. Ο μεγαλύτερος απ' αυτούς, το 28, είναι πολλαπλάσιο του 14, αλλά όχι του 21. Το $2{\cdot}28=56$ δεν είναι πολλαπλάσιο του 21, αλλά το $3{\cdot}28=84$ είναι πολλαπλάσιο του 14 και του 21. Επομένως, ισχύει Ε.Κ.Π. (14, 21, 28)=84.

δ. Αν οι αριθμοί είναι σχετικά μεγάλοι, τότε διευκολύνει την εύρεση του Ε.Κ.Π. ο εξής τρόπος:

Αναλύουμε κάθε αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και ως Ε.Κ.Π. αυτών παίρνουμε το γινόμενο κοινών και μη κοινών παραγόντων με το μεγαλύτερο εκθέτη. Για παράδειγμα, θα βρούμε το Ε.Κ.Π. των αριθμών 110, 120 και 132.

$$\begin{array}{r|l} 110 & 2 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 132 & 2 \\ 66 & 2 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$110 = 2{\cdot}5{\cdot}11 \qquad 120 = 2^3{\cdot}3{\cdot}5 \qquad 132 = 2^2{\cdot}3{\cdot}11$$

Άρα, το Ε.Κ.Π. των αριθμών 110, 120 και 132 είναι ο αριθμός $2^3{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}11=8{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}11=24{\cdot}55=1320$.

1.4 Μετατροπή δεκαδικών σε κλάσματα & αντιστρόφως

- Τα κλάσματα με παρονομαστές 10, 100, 1000 κ.λπ. (δεκαδικά κλάσματα) γράφονται ως δεκαδικοί αριθμοί με τόσα δεκαδικά ψηφία, όσα μηδενικά έχουν οι παρονομαστές τους.

  Για παράδειγμα, έχουμε

$$\frac{75}{10}=7{,}5\ ,\quad \frac{3}{100}=0{,}03,\quad \frac{125}{1000}=0{,}125 \quad \text{και} \quad \frac{32503}{10000}=3{,}2503\ .$$

- Κάθε δεκαδικός αριθμός γράφεται ως κλάσμα, όπως π.χ.

$$2{,}3=\frac{23}{10}\ ,\quad 1{,}02=\frac{102}{100}=\frac{51}{50} \quad \text{και} \quad 0{,}007=\frac{7}{1000}\ .$$

- Κάθε κλάσμα γράφεται ως δεκαδικός αριθμός, αρκεί να διαιρέσουμε τον αριθμητή με τον παρονομαστή του κλάσματος.

  Π.χ. έχουμε $\frac{8}{5} = 8:5 = 1{,}6$ και $\frac{33}{50} = 33:50 = 0{,}66$.

1.5 Ποσοστά & συμμιγείς αριθμοί

- Το σύμβολο **α%** σημαίνει $\frac{\alpha}{100}$ και διαβάζεται **«α τοις εκατό»**. Επίσης, το σύμβολο αυτό ονομάζεται «ποσοστό επί τοις εκατό» ή πιο απλά **ποσοστό.**

  Για παράδειγμα, το 28% του 1200 είναι το $\frac{28}{100} \cdot 1200 = 28 \cdot 12 = 336$.

  Ακόμη, το σύμβολο **α‰** σημαίνει $\frac{\alpha}{1000}$ και διαβάζεται **«α τοις χιλίοις»**.

- Συχνά οι τιμές διαφόρων μεγεθών είναι **συμμιγείς αριθμοί**, όπως π.χ.

  3 m 2 cm (δηλαδή 3,02 m)

  και 4 min 10 sec $\left(\text{δηλαδή } 4\frac{1}{6} \text{ min}\right)$.

  Σε διάφορα προβλήματα συναντάμε πρόσθεση ή αφαίρεση συμμιγών αριθμών. Για παράδειγμα, έχουμε

  α. (3 m 2 dm 7 cm) + (9 dm 4 cm) =

  = 3 m 11 dm 11 cm = 4 m 1 dm 11 cm = 4 m 2 dm 1 cm (= 4,21 m).

  β. (3 h 32 min 45 sec) – (2h 45 min 10 sec) =

  = (2h 92 min 45 sec) – (2h 45 min 10 sec) = 47 min 35 sec.

1.6 Μονάδες μέτρησης

Μήκος

- Βασική μονάδα μήκους είναι το **μέτρο** (m) με πολλαπλάσιο το **χιλιόμετρο** (1 km = 1000 m) και υποδιαιρέσεις:

  - το δεκατόμετρο ή παλάμη $1 \text{ dm} = \frac{1}{10} \text{ m} = 0{,}1 \text{ m}$

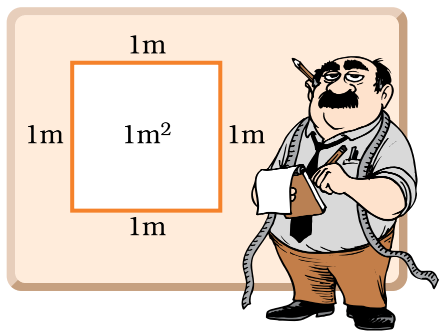
- το εκατοστόμετρο ή πόντος $1\ \text{cm} = \dfrac{1}{100}\ \text{m} = 0{,}01\ \text{m}$
- το χιλιοστόμετρο ή χιλιοστό $1\ \text{mm} = \dfrac{1}{1000}\ \text{m} = 0{,}001\ \text{m}$

Επομένως, ισχύει

$$\mathbf{1\ m = 10\ dm = 100\ cm = 1000\ mm}$$

Εμβαδό

- Βασική μονάδα μέτρησης εμβαδού είναι το **τετραγωνικό μέτρο** (m^2) με πολλαπλάσια το τετραγωνικό χιλιόμετρο ($1\ \text{km}^2 = 1000000\ \text{m}^2$) και το **στρέμμα** ($1000\ \text{m}^2$).



Οι υποδιαιρέσεις του τετραγωνικού μέτρου είναι

$$1\ \text{dm}^2 = \left(\frac{1}{10}\ \text{m}\right)^2 = \frac{1}{100}\ \text{m}^2$$

$$1\ \text{cm}^2 = \left(\frac{1}{100}\ \text{m}\right)^2 = \frac{1}{10000}\ \text{m}^2$$

$$1\ \text{mm}^2 = \left(\frac{1}{1000}\ \text{m}\right)^2 = \frac{1}{1000000}\ \text{m}^2$$

Όγκος

- Βασική μονάδα μέτρησης όγκου είναι το **κυβικό μέτρο** (m^3) με υποδιαιρέσεις

$$1\ \text{L} = 1\ \text{λίτρο} = 1\ \text{dm}^3 = \left(\frac{1}{10}\ \text{m}\right)^3 = \frac{1}{1000}\ \text{m}^3$$

$$1\ \text{mL} = 1\ \text{cm}^3 = \left(\frac{1}{100}\ \text{m}\right)^2 = \frac{1}{1000000}\ \text{m}^3$$

$$1\ \text{mm}^3 = \left(\frac{1}{1000}\ \text{m}\right)^3 = 0{,}000000001\ \text{m}^3\ .$$

Χρόνος

- Μονάδες μέτρησης χρόνου είναι

α. το δευτερόλεπτο (1 sec ή 1 s)

β. το λεπτό (min), 1 min=60 sec

γ. η ώρα (1 h), 1 h=60 min=3600 sec

δ. η ημέρα (24 ώρες)

ε. ο μήνας (30 ημέρες)

στ. το έτος (360 ημέρες ή 12 μήνες)

Μάζα

- Μονάδες μέτρησης μάζας (ή βάρους) είναι

α. το χιλιόγραμμο ή κιλό (1 kg)

β. ο τόνος (t), 1 t=1000 kg

γ. το γραμμάριο (g), 1 g = $\frac{1}{1000}$ kg

δ. το χιλιοστόγραμμο (mg), 1 mg = $\frac{1}{1000}$ g

1.7 Ανάλογα ποσά

Δύο ποσά ονομάζονται **ανάλογα**, όταν οι αντίστοιχες τιμές των δύο ποσών έχουν τον ίδιο λόγο. Στην περίπτωση αυτή λέμε, επίσης, ότι οι τιμές του ενός ποσού είναι ανάλογες προς τις τιμές του άλλου ποσού.

Για παράδειγμα, τα ποσά «βάρος» και «αξία» του παρακάτω πίνακα είναι ανάλογα, επειδή ισχύει $\frac{1{,}2}{1} = \frac{2{,}4}{2} = \frac{3{,}6}{3} = \frac{4{,}8}{4} = \frac{6}{5} = 1{,}2$.

Βάρος σε κιλά	1	2	3	4	5
Αξία σε ευρώ	1,2	2,4	3,6	4,8	6

Προσοχή! Είναι λανθασμένη η εντύπωση που επικρατεί ότι δύο ποσά είναι ανάλογα, όταν μεγαλώνοντας το ένα ποσό, μεγαλώνει και το άλλο. Για παράδειγμα, τα ποσά α και β του διπλανού πίνακα δεν είναι ανάλογα.

Ποσό α	2	5	6	9
Ποσό β	3	7	15	20

Στα ανάλογα ποσά, αν πολλαπλασιάσουμε τις τιμές ενός ποσού με έναν

αριθμό, τότε πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου ποσού.

Για παράδειγμα, στον πρώτο από τους παραπάνω πίνακες, αν διπλασιάσουμε το βάρος, τότε διπλασιάζεται και η αξία. Αν τριπλασιάσουμε το βάρος, τότε τριπλασιάζεται και η αξία κ.ο.κ.

1.8 Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

Δύο ποσά ονομάζονται **αντιστρόφως ανάλογα**, όταν οι αντίστοιχες τιμές των δύο ποσών έχουν το ίδιο γινόμενο. Αυτό σημαίνει ότι, όταν πολλαπλασιάζουμε τις τιμές του ενός ποσού με έναν αριθμό, τότε οι αντίστοιχες τιμές του άλλου ποσού διαιρούνται με τον ίδιο αριθμό.

Για παράδειγμα, τα ποσά «αριθμός εργατών» και «χρόνος εκτέλεσης έργου» του παρακάτω πίνακα είναι αντιστρόφως ανάλογα, επειδή ισχύει

$$10 \cdot 3 = 8 \cdot 3{,}75 = 6 \cdot 5 = 5 \cdot 6 = 3 \cdot 10 = 2 \cdot 15 = 30$$

Αριθμός εργατών	10	8	6	5	3	2
Χρόνος εκτέλεσης έργου (σε ώρες)	3	3,75	5	6	10	15

Παρατηρούμε ότι οι 10 εργάτες χρειάζονται 3 ώρες για να εκτελέσουν ένα συγκεκριμένο έργο. Αν οι εργάτες μείνουν οι μισοί (δηλαδή 5), τότε χρειάζονται διπλάσιο χρόνο (δηλαδή 6 ώρες) για να εκτελέσουν το ίδιο έργο. Αν μείνει το $\frac{1}{5}$ των εργατών (δηλαδή 2), τότε χρειάζονται πενταπλάσιο χρόνο (δηλαδή 15 ώρες) κ.ο.κ.

1.9 Απλή μέθοδος των τριών & μέθοδος αναγωγής στη μονάδα

Ας ξεκινήσουμε να λύσουμε το εξής πρόβλημα:

Τα 3 μέτρα ενός υφάσματος κοστίζουν $6{,}27$ ευρώ. Πόσο κοστίζουν τα 8 μέτρα από το ίδιο ύφασμα;

Λύση

α΄ τρόπος: Με την απλή μέθοδο των τριών

Κάνουμε την εξής **κατάταξη:**

Τα 3 m υφάσματος κοστίζουν 6,27 €
Τα 8 m υφάσματος κοστίζουν x €

Τα ποσά «μήκος υφάσματος» και «αξία υφάσματος» είναι ανάλογα, που σημαίνει ότι ισχύει η αναλογία $\frac{3}{8} = \frac{6,27}{x}$.
Επομένως(*), έχουμε

$$3 \cdot x = 8 \cdot 6,27 \quad ή \quad 3 \cdot x = 50,16 \quad ή \quad x = 50,16:3 \quad ή \quad x = 16,72 .$$

Άρα, τα 8 m υφάσματος κοστίζουν 16,72 €.

Αντί για την κατάταξη, μπορούμε να κάνουμε τον πίνακα

Μέτρα υφάσματος	3	8
Αξία υφάσματος σε ευρώ	6,27	x

και από την αναλογία $\frac{3}{6,27} = \frac{8}{x}$ να βρούμε το x, όπως παραπάνω.

β΄ τρόπος: Με τη μέθοδο αναγωγής στη μονάδα

Αρχικά βρίσκουμε πόσο κοστίζει το 1 m υφάσματος. Αφού τα 3 m υφάσματος κοστίζουν 6,27 €, προκύπτει ότι το 1 m κοστίζει $6,27:3=2,09$ €. Επομένως, τα 8 m υφάσματος κοστίζουν $8 \cdot 2,09=16,72$ €.

1.10 Θεμελιώδη προβλήματα πολλαπλασιασμού & διαίρεσης

- Ας θεωρήσουμε ότι 1 kg (κιλό) μήλων στοιχίζει 0,80 €. Τότε:
  - τα 2 kg μήλων στοιχίζουν $2 \cdot 0,8=1,6$ €
  - τα 7,1 kg μήλων στοιχίζουν $7,1 \cdot 0,8=5,68$ €
  - τα 500 g (δηλαδή 0,5 kg) στοιχίζουν $0,5 \cdot 0,8=0,4$ €
  - τα $\frac{2}{3}$ του κιλού στοιχίζουν $\frac{2}{3} \cdot 0,8 = \frac{1,6}{3} = 0,53$ € περίπου.

(*) Δύο κλάσματα $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$ είναι ίσα, όταν ισχύει $α \cdot δ=β \cdot γ$ («χιαστή» ιδιότητα).

Γενικά,

αν η τιμή ενός ποσού είναι α, τότε τα $\frac{\kappa}{\lambda}$ του ποσού είναι $\frac{\kappa}{\lambda} \cdot \alpha$.

- Αν, για παράδειγμα, γνωρίζουμε ότι τα 3 kg μήλων στοιχίζουν 2,25 €, τότε το 1 kg στοιχίζει 2,25:3=0,75 €. Επίσης, αν τα $\frac{2}{3}$ του κιλού των μήλων στοιχίζουν 0,5 €, τότε το $\frac{1}{3}$ του κιλού στοιχίζει 0,5:2=0,25 €, ενώ το 1 kg στοιχείζει 3·0,25=0,75 €. Σ' αυτή τη δεύτερη περίπτωση θα μπορούσαμε να γράψουμε απευθείας

$$0,5 : \frac{2}{3} = 0,5 \cdot \frac{3}{2} = \frac{1,5}{2} = 0,75 \text{ €}$$

Γενικά,

αν τα $\frac{\kappa}{\lambda}$ της τιμής ενός ποσού είναι α, τότε η τιμή του ποσού είναι $\alpha : \frac{\kappa}{\lambda}$.

1.11 Σύνθετη μέθοδος των τριών

Θεωρούμε το εξής πρόβλημα:

Οι 35 στρατιώτες ενός συνοριακού φυλακίου χρειάζονται τη βδομάδα 61,25 λίτρα γάλατος. Αν απολυθούν 2 στρατιώτες, αλλά συγχρόνως μετατεθούν στο φυλάκιο αυτό 5 άλλοι στρατιώτες, πόσα λίτρα γάλατος θα χρειάζονται το μήνα;

Λύση

α' τρόπος: **Με τη μέθοδο αναγωγής στη μονάδα**

Κάθε ημέρα οι 35 στρατιώτες χρειάζονται

61,25:7 = 8,75 λίτρα γάλατος .

Επομένως, κάθε στρατιώτης χρειάζεται την ημέρα

8,75:35 = 0,25 λίτρα γάλατος .

Αν οι στρατιώτες γίνουν 38(35−2+5=38), τότε την ημέρα χρειάζονται

$$38 \cdot 0{,}25 = 9{,}5 \text{ λίτρα γάλατος .}$$

Άρα, οι 38 στρατιώτες για το μήνα (30 ημέρες) χρειάζονται

$$30 \cdot 9{,}5 = 285 \text{ λίτρα γάλατος .}$$

β′ τρόπος: Με την απλή μέθοδο των τριών

Οι	35	στρατιώτες	χρειάζονται	τη	μία	ημέρα	61,25:7=8,75	λίτρα	γάλατος
»	38	»	»	»	»	»	x;	»	»

Τα ποσά «στρατιώτες» και «λίτρα γάλατος» προφανώς είναι ανάλογα. Επομένως(*), ισχύει

$$\frac{35}{38} = \frac{8{,}75}{x} \quad \text{ή} \quad 35 \cdot x = 38 \cdot 8{,}75 \quad \text{ή} \quad 35 \cdot x = 232{,}5$$

$$\text{ή} \quad x = 232{,}5 : 35 \quad \text{ή} \quad x = 9{,}5 \text{ λίτρα γάλατος .}$$

Άρα, για ένα μήνα οι 38 στρατιώτες χρειάζονται

$$30 \cdot 9{,}5 = 285 \text{ λίτρα γάλατος .}$$

γ′ τρόπος: Με τη σύνθετη μέθοδο των τριών

Κάνουμε την εξής κατάταξη:

Οι	35	στρατιώτες	για	7	ημέρες	χρειάζονται	61,25	λίτρα	γάλατος
»	38	»	»	30	»	»	x;	»	»

Τα ποσά «στρατιώτες» και «λίτρα γάλατος» είναι ανάλογα, όπως επίσης και τα ποσά «ημέρες» και «λίτρα γάλατος». Έτσι, από την κατάταξη αυτή συμπεραίνουμε ότι

$$x = 61{,}25 \cdot \frac{30}{7} \cdot \frac{38}{35} = \frac{61{,}25 \cdot 30 \cdot 38}{7 \cdot 35} = \frac{69825}{245} = 285 \text{ λίτρα γάλατος.}$$

1.12 Τόκος

◆ Όταν καταθέτουμε ένα χρηματικό ποσό (κεφάλαιο) σε μία Τράπεζα ή στο Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο, τότε σ’ ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα (συνήθως εξάμηνο) παίρνουμε επιπλέον χρήματα, το γνωστό μας **τόκο**. Ο

(*) Μετά την κατάταξη για τα ανάλογα ποσά, μπορούμε να γράψουμε απευθείας $x=8{,}75 \cdot \frac{38}{35}$.

τόκος των 100 χρηματικών μονάδων (π.χ. €), σ' αυτό το χρονικό διάστημα, ονομάζεται **επιτόκιο**,

Αφού περάσει αυτό το χρονικό διάστημα (που απλά το λέμε **χρόνο**), ο τόκος προστίθεται στο αρχικό κεφάλαιο και για το δεύτερο χρονικό διάστημα το άθροισμα αυτό αποτελεί πλέον το κεφάλαιο. Γίνεται, όπως, λέμε, **ανατοκισμός.** Αυτό μπορεί να συνεχισθεί όσες χρονικές περιόδους επιθυμούμε.

Για συντομία, συμβολίζουμε

Κ = κεφάλαιο, Τ = τόκος, Ε = επιτόκιο και Χ = χρόνος

- Συνήθως ένα πρόβλημα τόκου είναι πρόβλημα ποσοστών και μπορεί να λυθεί με κατάταξη (απλή ή σύνθετη μέθοδο των τριών).

Για διευκόλυνση των αναγνωστών παραθέτουμε και τους σχετικούς τύπους.

1. $Τ = \frac{Κ \cdot Ε \cdot Χ}{100}$, **Χ σε έτη** $\quad Τ = \frac{Κ \cdot Ε \cdot Χ}{1200}$, **Χ σε μήνες** $\quad Τ = \frac{Κ \cdot Ε \cdot Χ}{36000}$ **Χ σε ημέρες**

2. Εφόσον ισχύει $100 \cdot Τ = Κ \cdot Ε \cdot Χ$ (όταν ο χρόνος είναι σε έτη), συμπεραίνουμε ότι

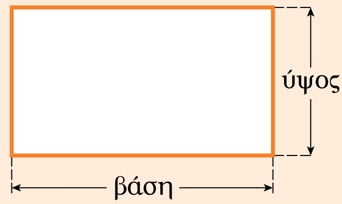
(α) $\mathbf{Κ = \frac{100 \cdot Τ}{Ε \cdot Χ}}$, (β) $\mathbf{Ε = \frac{100 \cdot Τ}{Κ \cdot Χ}}$ και (γ) $\mathbf{Χ = \frac{100 \cdot Τ}{Κ \cdot Ε}}$

Ανάλογους τύπους μπορούμε να γράψουμε και στην περίπτωση που ο χρόνος είναι σε μήνες ή σε ημέρες.

1.13 Εμβαδά βασικών σχημάτων

1

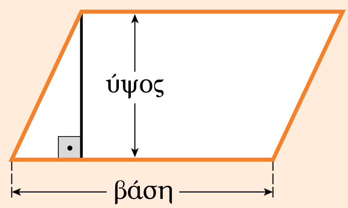
Σ’ ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (που μπορεί να είναι τετράγωνο) το εμβαδόν ισούται με το γινόμενο των διαστάσεών του.



$$E = (\text{Βάση})\cdot(\text{ύψος})$$

2

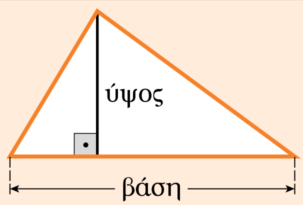
Το εμβαδόν ενός πλάγιου παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο της μίας βάσης επί το αντίστοιχο ύψος.



$$E = (\text{Βάση})\cdot(\text{ύψος})$$

3

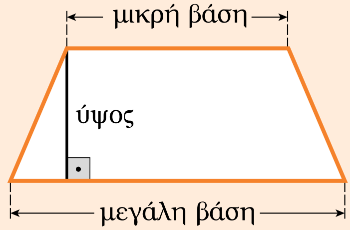
Το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται με το μισό του γινομένου της μιας βάσης του επί το αντίστοιχο ύψος.



$$E = \frac{1}{2}(\text{Βάση})\cdot(\text{ύψος})$$

4

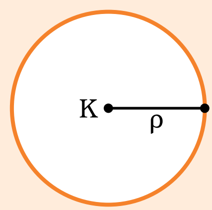
Το εμβαδόν ενός τραπεζίου ισούται με το μισό του αθροίσματος των δύο βάσεων επί το ύψος του τραπεζίου.



$$E = \frac{1}{2}(\text{μικρή βάση} + \text{μεγάλη βάση})\cdot(\text{ύψος})$$

5

Το εμβαδόν κύκλου ισούται με το γινόμενο του αριθμού 3,14 επί το τετράγωνο της ακτίνας. Επίσης, το μήκος (περίμετρος) ενός κύκλου ισούται με το γινόμενο του 3,14 επί τη διάμετρο του κύκλου.



$$E = 3{,}14\cdot(\text{ακτίνα})\cdot(\text{ακτίνα})$$

$$\text{Μήκος} = 3{,}14\cdot(\text{διάμετρος})$$