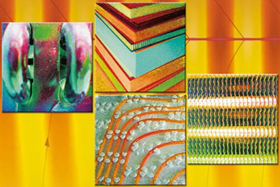
Μιχάλης Ι. Κτενιαδάκης

Εφαρμογές Μετάδοσης Θερμότητας



- Συνοπτική Θεωρία - Τυπολόγιο
- Λυμένες Ασκήσεις
- Πίνακες - Διαγράμματα
- Οδηγός Αναζήτησης Ασκήσεων

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα

Με το συγγραφέα επικοινωνείτε:
e-mail: mkten@staff.teicrete.gr

ISBN 978-960-456-214-5

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση
Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18^{o} χλμ Θεσσαλονίκης - Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392 072.222 - Fax: 2392 072.229 • e-mail: info@ziti.gr

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ:
Αρμενοπούλου 27 - 546 35 Θεσσαλονίκη • Τηλ.: 2310 203.720 • Fax 2310 211.305
e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΕΝΩΣΗ ΕΚΔΟΤΩΝ ΒΙΒΛΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ:
Στοά του Βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5) - 105 64 ΑΘΗΝΑ • Τηλ.-Fax: 210 3211.097

ΑΠΟΘΗΚΗ ΑΘΗΝΩΝ - ΠΩΛΗΣΗ ΧΟΝΔΡΙΚΗ:
Ασκληπιού 60 - Εξάρχεια 114 71, Αθήνα • Τηλ.-Fax: 210 3816.650 • e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

Πρόλογος

Δομή και περιεχόμενο

Ο κύριος στόχος αυτού του βιβλίου είναι να παρουσιάσει με απλό, κατανοητό αλλά και επιστημονικά θεμελιωμένο τρόπο, ένα μεγάλο μέρος του γνωστικού αντικειμένου της «ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ» και συγκεκριμένα αυτό που αποτελεί τον βασικό «κορμό» των σχετικών σπουδών στα Πανεπιστήμια και τα ΤΕΙ, ενώ ταυτόχρονα συνδέεται περισσότερο με συνήθη τεχνικά προβλήματα και εφαρμογές του Μηχανικού.

Τα περισσότερα από αυτά τα προβλήματα, στα οποία με οποιοδήποτε τρόπο εμπλέκεται η μεταφορά θερμότητας, μπορούν να αντιμετωπιστούν, με καλή προσέγγιση, ως μονοδιάστατα και μόνιμα. Σ' αυτές τις περιπτώσεις δεν απαιτείται η χρήση προχωρημένων μαθηματικών (που, βέβαια, είναι απαραίτητα για την εμβάθυνση σε μεταπτυχιακό επίπεδο ή στη μελέτη των χρονικά μεταβαλλόμενων φαινομένων).

Έτσι, για να υπάρχει άμεση πρόσβαση στο απαραίτητο θεωρητικό υπόβαθρο αλλά και αξιοποίησή του στην επίλυση των προβλημάτων, επιλέχθηκε να καλυφθεί η ύλη αφενός με μορφή συνοπτικής θεωρίας – Τυπολογίου και αφετέρου με μια επιλογή από αναλυτικά λυμένες ασκήσεις.

Τόσο στη συνοπτική θεωρία – Τυπολόγιο όσο και στην επεξεργασία των ασκήσεων αποφεύχθηκαν (όσο ήταν επιτρεπτό) τα πολύπλοκα μαθηματικά και οι προαπαιτούμενες εξειδικευμένες γνώσεις από άλλα μαθήματα. Έτσι, αρκετοί φοιτητές δεν θα αποθαρρύνονται κατά τη μελέτη τους αλλά και πολλοί επαγγελματίες Μηχανικοί θα μπορούν να προσεγγίσουν ευκολότερα τη λύση καθημερινών τεχνικών προβλημάτων.

Ωστόσο, και οι μεν και οι δε, πολλές φορές βρίσκονται μπροστά στην ανάγκη να έχουν μια άμεση γνώση για:

– την επίπτωση που έχει στο σχεδιασμό ή στη λειτουργία ενός συστήματος η μεταβολή μιας παραμέτρου.
– την επιλογή του καταλληλότερου υλικού ή συσκευής προκειμένου να επιτευχθούν ορισμένες απαιτήσεις.
– την πιθανότητα ανάπτυξης θερμοκρασιών, που θα θέσουν σε κίνδυνο την αντοχή κάποιων υλικών ή την ομαλή εκτέλεση κάποιων διεργασιών κλπ.

– Τα εμφανή – αλλά και τα ενδεχομένως μη προφανή – αποτελέσματα από μια επέμβαση/ενέργεια σε ένα τεχνικό σύστημα.

Για να καλυφθεί καλύτερα αυτή η ανάγκη, καταβλήθηκε προσπάθεια να περιοριστούν στις εντελώς απαραίτητες οι καθαρά θεωρητικές ασκήσεις (που βοηθούν στην αρχική κατανόηση των διαφόρων φαινομένων) και να περιληφθούν κυρίως ασκήσεις που αναφέρονται σε πρακτικά προβλήματα και εφαρμογές που σχετίζονται με τη μετάδοση της θερμότητας.

Για τον ίδιο λόγο προτιμήθηκε, αντί να παρουσιαστούν περισσότερες απλές ασκήσεις, να περιληφθούν λιγότερες, αλλά με διεξοδικότερη ανάλυση/εξέταση η καθεμία (διαφορετικά ζητούμενα, αλλαγή συνθηκών και δεδομένων, κ.λπ).

Οι ασκήσεις χαρακτηρίζονται, ανάλογα με το βαθμό δυσκολίας τους, με 1 έως 4 «αστεράκια» (★), για να μπορεί ο αναγνώστης να προγραμματίσει ή να προσαρμόσει κατάλληλα τη μελέτη του. Η επεξεργασία των ασκήσεων γίνεται με τρόπο που βοηθά τον αναγνώστη να αξιοποιήσει τις αντίστοιχες γνώσεις από τη θεωρία και να χρησιμοποιήσει μεθοδικά τις κατάλληλες κάθε φορά σχέσεις, ανάλογα με τα διαθέσιμα δεδομένα και τις ιδιαιτερότητες της άσκησης.

Μετά το υπολογιστικό μέρος, παρατίθεται, στο τέλος κάθε άσκησης, ένα σύντομο σχόλιο – συμπέρασμα – τεχνικός κανόνας, δίνοντας έτσι μια «ποιοτική» προσέγγιση, που προκύπτει από την επεξεργασία και τη λύση της. Αυτή η συνοπτική διατύπωση είναι, συχνά, πολύ χρήσιμη για τον μηχανικό στην καθημερινή πράξη.

Τα σχήματα μπορεί να υπολείπονται μιας πιο άρτιας και επεξεργασμένης εμφάνισης, αλλά σκόπιμα επιλέχθηκε να είναι απλώς ευπαρουσίαστα, ώστε να πλησιάζουν τον τρόπο κατασκευής και σχεδίασής τους από ένα φοιτητή ή επαγγελματία μηχανικό κατά τη μελέτη ενός προβλήματος.

Επίσης, για τον γρήγορο εντοπισμό των ασκήσεων που πλησιάζουν περισσότερο στο συγκεκριμένο κάθε φορά πρόβλημα που έχει να αντιμετωπίσει ο αναγνώστης, έχει συμπεριληφθεί στο βιβλίο και ο «Οδηγός Αναζήτησης Ασκήσεων». Σ' αυτόν δίδονται, με μορφή πίνακα: ο αριθμός της άσκησης, μια σύντομη περιγραφή του περιεχομένου της, η επικρατούσα γεωμετρία αυτής καθώς και τυχόν πρόσθετα χαρακτηριστικά στοιχεία.

Στο Παράρτημα δίδονται οι απαραίτητοι Πίνακες και Διαγράμματα, τα περισσότερα από τα οποία είναι πρωτότυπα, με μορφή που βοηθά στην ευχερή χρήση και ανάγνωσή τους.

Ειδικές επισημάνσεις

- Σε όλες τις ασκήσεις χρησιμοποιούνται μονάδες του συστήματος SI. Οι τυχόν απαιτούμενες μετατροπές μονάδων γίνονται εξ αρχής, έτσι ώστε κατά τις αντικαταστάσεις τιμών στις διάφορες χρησιμοποιούμενες σχέσεις δεν αναγράφονται και οι αντίστοιχες μονάδες. Μόνο στο τελικό αποτέλεσμα γράφεται η μονάδα του μεγέθους στο SI.
- Σε ορισμένες ασκήσεις προτιμήθηκε να ξαναγίνει το σχήμα, συμπληρωμένο με όλα τα απαραίτητα για τη λύση, δεδομένα ή ζητούμενα, μεγέθη (παρά το ότι δίδεται στην εκφώνηση). Έτσι ο αναγνώστης θα μπορεί να κατανοήσει πληρέστερα και να εξασκηθεί καλύτερα στη διαδικασία αντιμετώπισης του προβλήματος.
- Ακρίβεια 4 σημαντικών ψηφίων είναι αρκετή για προβλήματα της καθημερινής πράξης του μηχανικού – εκτός πολύ λίγων εξαιρέσεων.
- Πολλές εξισώσεις λύνονται στις ασκήσεις με τη μέθοδο δοκιμής – σφάλματος ή διαδοχικών προσεγγίσεων. Είναι προφανές ότι μπορούν ευκολότερα, γρηγορότερα και ακριβέστερα να λυθούν μέσω Η/Υ με τη βοήθεια λογιστικών φύλλων (π.χ. excel) ή μαθηματικών προγραμμάτων (π.χ. mathcad, matlab κλπ).

Ευχαριστίες

Θεωρώ επιβεβλημένο να εκφράσω τις ευχαριστίες μου σε όλους τους συναδέλφους (εκπαιδευτικούς και επαγγελματίες), φοιτητές, φίλους και συνεργάτες, που με οποιοδήποτε τρόπο, άμεσα ή έμμεσα, βοήθησαν στην ολοκλήρωση και την καλύτερη παρουσίαση του βιβλίου, με την ενθάρρυνση, τη βοήθεια, τις προτροπές ή τις υποδείξεις τους.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες, αλλά και ευγνωμοσύνη, οφείλω στα μέλη της οικογένειάς μου, για την ανοχή και υπομονή που έδειξαν για όσο καιρό κράτησε η όλη προσπάθεια συγγραφής του βιβλίου.

Αυτονόητο είναι ότι θα θεωρήσω ιδιαίτερα ευπρόσδεκτο οποιοδήποτε εποικοδομητικό σχόλιο από τους φοιτητές και από κάθε αναγνώστη για λάθη ή παραλείψεις ή τυχόν υποδείξεις για βελτίωση του βιβλίου (mkten@staff.teicrete.gr).

Ηράκλειο, Μάιος 2010 *Μιχ. Ι. Κτενιαδάκης*

Περιεχόμενα

Οδηγός Αναζήτησης Ασκήσεων

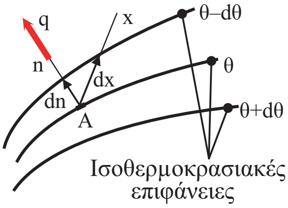
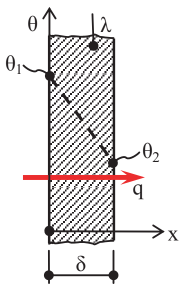
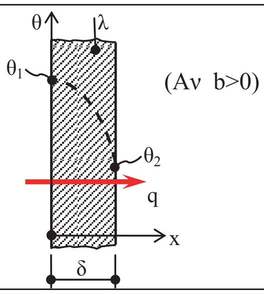
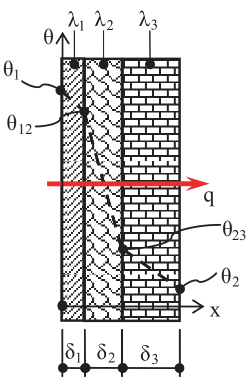
Παράρτημα

Κεφ. 1 ΑΓΩΓΗ

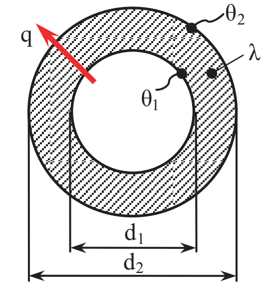
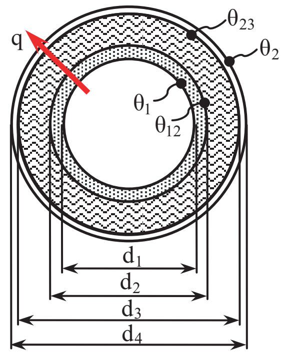
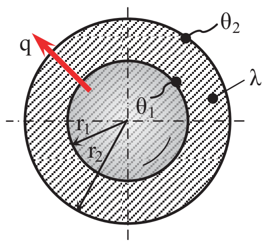
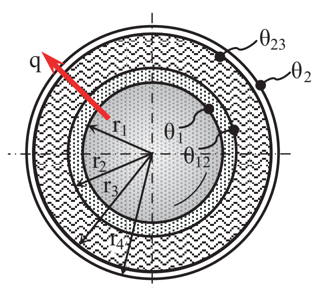
1.1 ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗ ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΑΓΩΓΗ

	Τύπος / Σχέση	*Αρ.σχ.*
Νόμος αγωγιμότητας του Fourier	– Θερμορροή κατά την κατεύθυνση n, κάθετη σε μια ισοθερμοκρασιακή επιφάνεια A: $q = -\lambda \cdot A \cdot \frac{\partial\theta}{\partial n}$ – Αν η θερμοκρασία μεταβάλλεται μόνο κατά μία διεύθυνση x (οπότε $dx \perp A$): $q = -\lambda \cdot A \cdot \frac{d\theta}{dx}$	{1-01} {1-02}
Αγωγή δια μέσου απλού επίπεδου τοιχώματος (πλάκας), με <u>λ=σταθ.</u>	$q = \frac{\lambda}{\delta} \cdot A \cdot (\theta_1 - \theta_2)$ $\frac{q}{A} = \frac{\lambda}{\delta} \cdot (\theta_1 - \theta_2)$ ή $\frac{q}{A} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\delta/\lambda}$ δ/λ = R: Συντελ. θερμικής αντίστασης στρώσης (m^2K/W) λ/δ = Λ: Συντ. θερμοδιαφυγής επίπεδης στρώσης (W/m^2K) $\delta/\lambda A$ =R_θ: Θερμική αντίσταση επίπεδης στρώσης (K/W)	{1-03} {1-04}
Αγωγή δια μέσου απλού επίπεδου τοιχώματος (πλάκας), με <u>λ = λ$_o$(1+bθ)</u>	$q = \frac{\lambda_o}{\delta} \cdot A \cdot \left[(\theta_1 - \theta_2) + \frac{b}{2} \cdot (\theta_1^2 - \theta_2^2) \right]$ Επίσης: $q = \frac{\lambda_m}{\delta} \cdot A \cdot (\theta_1 - \theta_2)$ όπου λ_m η μέση τιμή του λ (δηλ. στην $\theta_m = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$)	{1-05} {1-06}
Αγωγή δια μέσου σύνθετου επίπεδου τοιχώματος, με n στρώσεις διαφορετικών υλικών, με σταθερούς $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$.	$\frac{q}{A} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \ldots + \frac{\delta_n}{\lambda_n}}$ Οι θερμοκρασίες διεπαφής θ_{12}, θ_{23} κλπ. βρίσκονται από σχέσεις της μορφής: π.χ. $\frac{q}{A} = \frac{\theta_{12} - \theta_{23}}{\frac{\delta_2}{\lambda_2}}$ π.χ. $\frac{q}{A} = \frac{\theta_1 - \theta_{23}}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2}}$ π.χ. $\frac{q}{A} = \frac{\theta_{23} - \theta_n}{\frac{\delta_3}{\lambda_3} + \ldots + \frac{\delta_n}{\lambda_n}}$ κ.ο.κ.	{1-07} {1-08} {1-09} {1-10}

(ΧΩΡΙΣ ΘΕΡΜΙΚΕΣ ΠΗΓΕΣ)

Σχήμα	*Χρήση / Συνθήκες εφαρμογής / Παρατηρήσεις*
	– Το υλικό είναι ομογενές. – λ: Ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας του υλικού (W/mK). Μπορεί να είναι σταθερός ή εξαρτώμενος από τη θερμοκρασία.
	– Τοίχωμα αρκετά μεγάλο, εμβαδού Α. – Η θερμορροή μεταδίδεται ομοιόμορφα μόνο κατά την κατεύθυνση x, (κάθετα στο τοίχωμα). – Η διακεκομμένη γραμμή παριστά την μεταβολή της θερμοκρασίας μέσα στο τοίχωμα (γραμμική). $\frac{q}{A}$: Πυκνότητα θερμορροής (W/m^2)
	– Τοίχωμα αρκετά μεγάλο, εμβαδού Α. – Η θερμορροή μεταδίδεται ομοιόμορφα κατά την κατεύθυνση x, (κάθετα στο τοίχωμα). – Η διακεκομμένη γραμμή παριστά την μεταβολή της θερμοκρασίας μέσα στο τοίχωμα (παραβολή).
	– Τοίχωμα αρκετά μεγάλο, εμβαδού Α. – Η θερμορροή μεταδίδεται ομοιόμορφα κατά την κατεύθυνση x, (κάθετα στο τοίχωμα). – Οι στρώσεις βρίσκονται σε πολύ καλή επαφή μεταξύ τους. Διαφορετικά, παρεμβάλλεται και πρόσθετος “συντελεστής θερμικής αντίστασης επαφής”, R (m^{2}K/W) που προστίθεται στον παρονομαστή. – Η διακεκομμένη γραμμή παριστά την μεταβολή της θερμοκρασίας μέσα στο τοίχωμα (γραμμική, αλλά με διαφορετική κλίση σε κάθε στρώση).

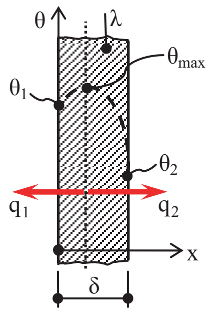
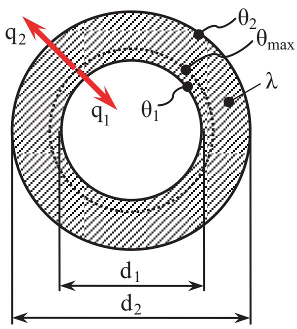
	Τύπος / Σχέση	*Αρ.σχ.*
Αγωγή δια μέσου απλού κυλινδρικού τοιχώματος (σωλήνα), με λ=σταθ.	$q=\frac{2\lambda\pi\ell}{\ln\frac{d_2}{d_1}}\cdot(\theta_1-\theta_2)$ ή $\frac{q}{\ell}=\frac{\theta_1-\theta_2}{\frac{1}{2\lambda\pi}\ln\frac{d_2}{d_1}}$ $\frac{1}{2\lambda\pi}\ln\frac{d_2}{d_1}=R$: Συντελεστής θερμικής αντίστασης κυλινδρικής στρώσης (mK/W) $\frac{1}{2\lambda\pi\ell}\ln\frac{d_2}{d_1}=R_\theta$: Θερμική αντίσταση κυλινδρικής στρώσης (K/W)	{1-11}
Αγωγή δια μέσου σύνθετου κυλινδρικού τοιχώματος, με n στρώσεις διαφορετικών υλικών, με σταθερούς $\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n$.	$\frac{q}{\ell}=\frac{\theta_1-\theta_2}{\frac{1}{2\lambda_1\pi}\ln\frac{d_2}{d_1}+\frac{1}{2\lambda_2\pi}\ln\frac{d_3}{d_2}+\ldots+\frac{1}{2\lambda_n\pi}\ln\frac{d_{n+1}}{d_n}}$ Οι θερμοκρασίες διεπαφής θ_{12}, θ_{23} κλπ. βρίσκονται από σχέσεις της μορφής: π.χ. $\frac{q}{\ell}=\frac{\theta_{12}-\theta_{23}}{\frac{1}{2\lambda_2\pi}\ln\frac{d_3}{d_2}}$ π.χ. $\frac{q}{\ell}=\frac{\theta_{12}-\theta_{34}}{\frac{1}{2\lambda_2\pi}\ln\frac{d_3}{d_2}+\frac{1}{2\lambda_3\pi}\ln\frac{d_4}{d_3}}$	{1-12} {1-13} {1-14}
Αγωγή δια μέσου απλού σφαιρικού τοιχώματος, με λ = σταθ.	$q=\frac{4\lambda\pi}{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}\cdot(\theta_1-\theta_2)$ Επίσης: $q=\frac{\theta_1-\theta_2}{\frac{1}{4\lambda\pi}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}$	{1-15} {1-16}
Αγωγή δια μέσου σύνθετου σφαιρικού τοιχώματος, με n στρώσεις διαφορετικών υλικών, με σταθερούς $\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n$.	$q=\frac{\theta_1-\theta_2}{\frac{1}{4\lambda_1\pi}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)+\ldots+\frac{1}{4\lambda_n\pi}\left(\frac{1}{r_n}-\frac{1}{r_{n+1}}\right)}$ Οι θερμοκρασίες διεπαφής θ_{12}, θ_{23} κλπ. βρίσκονται από σχέσεις της μορφής: π.χ. $q=\frac{\theta_1-\theta_{12}}{\frac{1}{4\lambda_1\pi}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}$ $q=\frac{\theta_1-\theta_{23}}{\frac{1}{4\lambda_1\pi}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)+\frac{1}{4\lambda_2\pi}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}\right)}$	{1-17} {1-18} {1-19}

Σχήμα	*Χρήση / Συνθήκες εφαρμογής / Παρατηρήσεις*
	– Τοίχωμα αρκετά μεγάλου μήκους ℓ. – Η θερμορροή μεταδίδεται ομοιόμορφα, μόνο ακτινικά.
	– Τοίχωμα αρκετά μεγάλου μήκους ℓ. – Η θερμορροή μεταδίδεται ομοιόμορφα, μόνο ακτινικά. – Οι στρώσεις βρίσκονται σε πολύ καλή επαφή μεταξύ τους. Διαφορετικά, παρεμβάλλεται και πρόσθετος “συντελεστής θερμικής αντίστασης επαφής”, R (m^2K/W). Τότε προστίθεται στον παρονομαστή ο όρος $\frac{R}{\pi d_R}$, όπου d_R η διάμετρος στην οποία υπάρχει μη τέλεια επαφή των στρώσεων.
	– Η θερμορροή μεταδίδεται ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις (ακτινικά).
	– Η θερμορροή μεταδίδεται ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις (ακτινικά). – Οι στρώσεις βρίσκονται σε πολύ καλή επαφή μεταξύ τους.

1.2 ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗ ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΑΓΩΓΗ

	Τύπος / Σχέση	*Αρ.σχ.*
Χαρακτηριστικά θερμικών πηγών	– Θερμική ισχύς ανά μονάδα όγκου (= ειδική θερμοϊσχύς: $q''' = \dfrac{q}{V}$ (W/m^3) όπου q η θερμική ισχύς που παράγεται μέσα στον όγκο V ενός υλικού. *ΣΗΜΕΙΩΣΗ*: Σε κάθε ισοθερμοκρασιακή επιφάνεια, ισχύει ο νόμος του Fourier: $q = -\lambda \cdot A \cdot \dfrac{d\theta}{dn}$	{1-20}
Αγωγή σε επίπεδο τοίχωμα με πηγές (λ = σταθ.)	Γενική λύση για την κατανομή της θερμοκρασίας: $\theta(x) = -\dfrac{q'''}{2\lambda} \cdot x^2 + C_1 x + C_2$ {1-21} Οι σταθερές C_1 και C_2 προσδιορίζονται από τις οριακές συνθήκες. Επιπλέον, σε οποιαδήποτε θέση x, θα προκύψει: $\dfrac{q}{A} = q''' \cdot x - C_1 \lambda$ {1-22} – Αν π.χ. είναι γνωστές οι θ_1 και θ_2, τότε: $\theta(0) = \theta_1$ και $\theta(\delta) = \theta_2$ – Αν υπάρχει μετάδοση θερμότητας από μια πλευρά, π.χ. στη θέση δ, του τοιχώματος προς/από ρευστό, θερμοκρασίας θ_o, με αντίστοιχο συντελ. μεταφοράς θερμότητας h, τότε: $\left.\dfrac{q}{A}\right\|_{x=\delta} = h(\theta_2 - \theta_o)$	{1-21} {1-22} {1-23}
Αγωγή σε κυλινδρικό τοίχωμα με πηγές (λ = σταθ.)	Γενική λύση για την κατανομή της θερμοκρασίας : $\theta(r) = -\dfrac{q'''}{4\lambda} \cdot r^2 + C_1 \cdot \ln r + C_2$ Οι σταθερές C_1 και C_2 προσδιορίζονται από τις οριακές συνθήκες. Επιπλέον, σε οποιαδήποτε θέση r, θα προκύψει: $\dfrac{q}{A} = \dfrac{q''' \cdot r}{2} - \dfrac{C_1 \lambda}{r}$ – Αν π.χ. είναι γνωστές οι θ_1 και θ_2, τότε : $\theta(r_1) = \theta_1$ και $\theta(r_2) = \theta_2$ – Αν υπάρχει μετάδοση θερμότητας από μια επιφάνεια, π.χ. την εξωτερική (r_2), του τοιχώματος προς/από ρευστό, θερμοκρασίας θ_o, με συντελ. μεταφοράς θερμότητας h, τότε: $\left.\dfrac{q}{A}\right\|_{r=r_2} = h(\theta_2 - \theta_o)$	{1-24} {1-25} {1-26}

(ΜΕ ΘΕΡΜΙΚΕΣ ΠΗΓΕΣ)

Σχήμα	*Χρήση / Συνθήκες εφαρμογής/Παρατηρήσεις*
	– Η θερμική ισχύς που παράγεται (από θερμικές πηγές) είναι θετική. Μπορεί όμως και να απορροφάται (σε θερμικές καταβόθρες) οπότε είναι αρνητική. – Οι θερμικές πηγές (ή καταβόθρες) θεωρούνται ομοιόμορφα κατανεμημένες μέσα στη μάζα του υλικού.
	– Τοίχωμα αρκετά μεγάλο, εμβαδού A. – Η θερμορροή μεταδίδεται ομοιόμορφα μόνο κατά την κατεύθυνση x, (κάθετα στο τοίχωμα).
	– Σωλήνας αρκετά μεγάλου μήκους ℓ. – Η θερμορροή μεταδίδεται ομοιόμορφα, μόνο ακτινικά.

	Τύπος / Σχέση	*Αρ.σχ.*
Συμπαγής κύλινδρος ακτίνας r_c: **(ράβδος με πηγές ή αγωγός, διαρρεόμενος από ρεύμα)**	Γενική λύση για την κατανομή της θερμοκρασίας: $$\theta(r) = -\frac{q'''}{4\lambda}\cdot r^2 + C$$	{1-27}
	Η σταθερά C ορίζεται από μία οριακή συνθήκη. – Αν π.χ. είναι γνωστή η θ_2, τότε $\theta(r_c) = \theta_2$, οπότε προκύπτει: $\theta(r) = \theta_2 + \frac{q'''}{4\lambda}\cdot(r_c^2 - r^2)$	{1-28}
	– Η μέγιστη θερμοκρασία θ_{max} στο κέντρο της ράβδου (r=0): $\theta_{max} = \theta_0 = \theta_2 + \frac{q''' r_c^2}{4\lambda}$	{1-29}
	– Για ηλεκτρικό αγωγό $q = RI^2$, όπου: I = Η ένταση του ρεύματος (σε A) R = Η ηλεκτρική αντίσταση R του αγωγού (σε Ω) (Για την αντίσταση R βλ. απέναντι ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ)	{1-30}
Αγωγή σε σφαιρικό τοίχωμα με πηγές (λ = σταθ.)	Γενική λύση για την κατανομή της θερμοκρασίας: $$\theta(r) = -\frac{q'''}{6\lambda}\cdot r^2 - \frac{C_1}{r} + C_2$$	{1-31}
	Οι σταθερές C_1 και C_2 προσδιορίζονται από τις οριακές συνθήκες. – Αν π.χ. είναι γνωστές οι θ_1 και θ_2, τότε : $\theta(r_1) = \theta_1$ και $\theta(r_2) = \theta_2$ – Αν υπάρχει μετάδοση θερμότητας από μια επιφάνεια, π.χ. την εξωτερική (r_2), της σφαίρας προς/από ρευστό, θερμοκρασίας θ_o, με συντελ. μεταφοράς θερμότητας h, τότε: $\left.\frac{q}{A}\right\|_{r=r_s} = h(\theta_2 - \theta_o)$	{1-32}
Συμπαγής σφαίρα ακτίνας r_s: **με πηγές**	Γενική λύση για την κατανομή της θερμοκρασίας: $$\theta(r) = -\frac{q'''}{6\lambda}\cdot r^2 + C$$	{1-33}
	Η σταθερά C ορίζεται από μία οριακή συνθήκη. – Αν π.χ. είναι γνωστή η θ_2, τότε $\theta(r_s) = \theta_2$, οπότε προκύπτει: $\theta(r) = \theta_2 + \frac{q'''}{6\lambda}\cdot(r_s^2 - r^2)$	{1-34}
	Η μέγιστη θερμοκρασία θ_{max} στο κέντρο της σφαίρας (r=0): $\theta_{max} = \theta_0 = \theta_2 + \frac{q''' r_s^2}{6\lambda}$	{1-35}

ΑΣΚΗΣΗ 1-1 ★

Μια επίπεδη μεταλλική επιφάνεια πρέπει να μονωθεί έτσι ώστε η πυκνότητα θερμορροής να μην ξεπερνά τα 210 W/m^2. Η θερμοκρασία στην επιφάνεια της πλάκας (κάτω από το στρώμα της μόνωσης) είναι 320°C και η θερμοκρασία της εξωτερικής επιφάνειας του μονωτικού στρώματος πρέπει να είναι 40°C.

Να προσδιορισθεί το απαιτούμενο πάχος της μόνωσης αν:

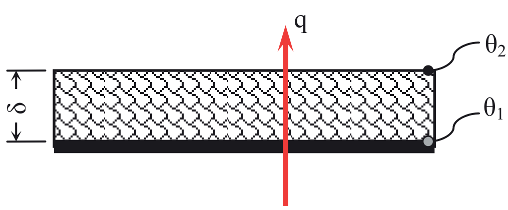
Α. Το μονωτικό έχει σταθερό συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας $\lambda = 0{,}075$ W/mK.

Β. Το μονωτικό έχει συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας που επηρεάζεται από τη θερμοκρασία σύμφωνα με τη σχέση $\lambda = 0{,}075{+}0{,}0002{\cdot}\theta$, όπου λ σε W/mK και θ σε °C.

ΛΥΣΗ

Τα δεδομένα είναι (και για τις δύο περιπτώσεις):

- $\theta_1 = 320$ºC
- $\theta_2 = 40$ºC
- q/A = 210 W/m^2



Κατευθύνσεις λύσης: Και για τα δύο μονωτικά, με δεδομένες σταθερές θερμοκρασίες στις δύο πλευρές τους και καθορισμένη την πυκνότητα θερμορροής, το απαιτούμενο πάχος (δ) θα προκύψει αμέσως από τις αντίστοιχες σχέσεις αγωγής.

Α. Για σταθερό $\lambda_\alpha = 0{,}075$ W/mK, έχουμε τη σχέση {1-04}:

$$\frac{q}{A} = \frac{\lambda_\alpha}{\delta_\alpha}\cdot(\theta_1 - \theta_2) \qquad \text{και επομένως}$$

$$210 = \frac{320-40}{\dfrac{\delta_\alpha}{0{,}075}} \quad\Rightarrow\quad \delta_\alpha = \frac{(320-40)\cdot 0{,}075}{210} = 0{,}1\ \text{m} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{\delta_\alpha = 10\ \text{cm}}$$ ♦

Β. Σε αυτή την περίπτωση $\lambda = 0{,}075{+}0{,}0002{\cdot}\theta$. Εφόσον είναι γνωστές οι θερμοκρασίες στις δύο πλευρές του μονωτικού, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η παραπάνω σχέση, αλλά παίρνοντας την τιμή λ_m στη μέση θερμοκρασία θ_m. (Βλέπε και σχέση {1-06}).

Είναι: $\theta_m = \dfrac{320+40}{2} = 180$ºC και έτσι $\lambda_m = 0{,}075{+}0{,}0002{\cdot}180 = 0{,}111$ W/mK

και έχουμε: $\dfrac{q}{A} = \dfrac{\lambda_m}{\delta_\beta}\cdot(\theta_1 - \theta_2)$ και επομένως

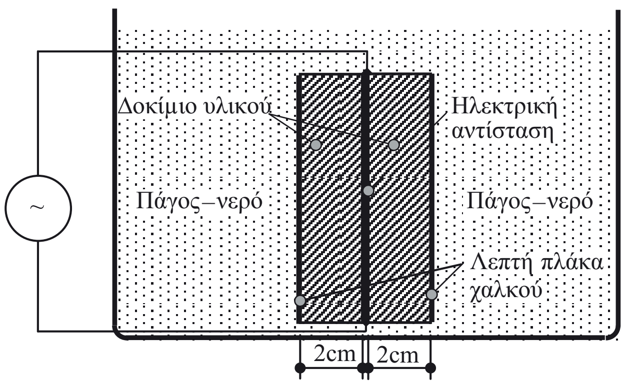
$$210 = \frac{320-40}{\frac{\delta_\beta}{0{,}111}} \Rightarrow \delta_\beta = \frac{(320-40)\cdot 0{,}111}{210} = 0{,}148\ \text{m} \Rightarrow \boldsymbol{\delta_\beta = 14{,}8\ \text{cm}}$$ ♦

➲ **Το απαιτούμενο πάχος μονωτικού υλικού για να επιτευχθεί ορισμένη πυκνότητα θερμορροής θα είναι μεγαλύτερο στην περίπτωση που ο συντελεστής θερμ. αγωγιμότητας του υλικού μεταβάλλεται αυξητικά με τη θερμοκρασία $k= k_o(1+bT)$, σε σύγκριση με το υλικό που θα είχε σταθερό $k= k_o$.**

ΑΣΚΗΣΗ 1-2 ★★

Μια συσκευή για τη μέτρηση του συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας (k ή λ) διαφόρων υλικών αποτελείται από μια λεπτή επίπεδη ηλεκτρική αντίσταση, πάνω στην οποία στερεώνονται (με πολύ καλή επαφή), και από τις δύο πλευρές της, δύο επίπεδα δοκίμια από το υλικό, πάχους 2 cm (βλέπε σχήμα).

Τα δοκίμια επικαλύπτονται από λεπτά φύλλα χαλκού, ενώ οι υπόλοιπες επιφάνειες της όλης κατασκευής (πάνω, κάτω, εμπρός και πίσω) στεγανοποιούνται. Το παραπάνω σύνολο βυθίζεται σε δοχείο που περιέχει μίγμα πάγου–νερού, έτσι ώστε τα φύλλα χαλκού να αποκτούν θερμοκρασία 0°C. Η ισχύς που απορροφά η ηλεκτρική αντίσταση μπορεί να μεταβάλλεται, ενώ με σύστημα θερμοστοιχείων, μπορεί να μετρείται η θερμοκρασία πάνω στην ηλεκτρική αντίσταση.



Σε μια μέτρηση όπως παραπάνω, για τον προσδιορισμό του λ ενός μονωτικού υλικού, έγιναν μετρήσεις και συμπληρώθηκε ο παρακάτω πίνακας :

	Μέτρηση (α)	Μέτρηση (β)
Απορροφούμενη ισχύς στην αντίσταση (W/m^2)	400	800
Θερμοκρασία πάνω στην αντίσταση (°C)	80	148

Α. Χρησιμοποιώντας τα στοιχεία της μέτρησης (α), υπολογίσετε το (μέσο) συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας του υλικού.

Β. Χρησιμοποιώντας τα στοιχεία της μέτρησης (β), υπολογίσετε το (μέσο) συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας του υλικού.

Γ. Δικαιολογήσετε ότι ο λ του υλικού δεν είναι ανεξάρτητος της θερμοκρασίας και προσδιορίστε τον ως γραμμική συνάρτηση της μορφής: $\lambda = \lambda_o(1+b\cdot\theta)$ (σε W/mK όταν θ σε °C).

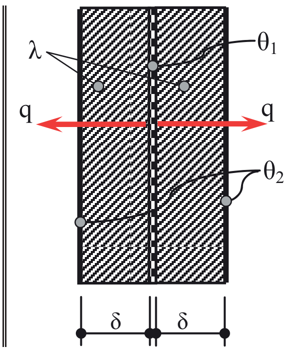
ΛΥΣΗ

Α. και Β. Κατευθύνσεις λύσης: Σε κάθε μέτρηση, η απορροφούμενη ηλεκτρική ισχύς $P_{\eta\lambda}$ στην αντίσταση μεταβιβάζεται με αγωγή μέσα από τις πλάκες – δοκίμια του υλικού. Λόγω της καλής θερμομόνωσης από τις άλλες πλευρές, μπορούμε να θεωρήσουμε μονοδιάστατη αγωγή θερμότητας, κατά το πάχος του κάθε δοκιμίου. Λόγω της προφανούς συμμετρίας (ίσα πάχη και 0°C πάνω σε κάθε πλευρά) έπεται ότι από κάθε πλάκα θα διέρχεται η μισή ισχύς.

Επομένως, χρησιμοποιώντας την απλή σχέση της αγωγής, για σταθερή τιμή λ θα υπολογιστούν οι μέσοι συντελεστές θερμικής αγωγιμότητας λ_m, από τις τιμές της κάθε μέτρησης.

Τα δεδομένα, με τα σύμβολα του διπλανού σχήματος (για όλα τα ερωτήματα) είναι:

- $\delta = 2$ cm $= 0{,}02$ m
- $\theta_2 = 0°C =$ σταθ.
- $\theta_{1\alpha} = 80°C$
- $\theta_{1\beta} = 148°C$
- $P_{\eta\lambda\alpha} = 400$ W/m^2 $\Rightarrow$ $q_\alpha/A = 200$ W/m^2
- $P_{\eta\lambda\beta} = 800$ W/m^2 $\Rightarrow$ $q_\beta/A = 400$ W/m^2



Έχουμε, λοιπόν, τη σχέση {1-06}: $\dfrac{q}{A} = \dfrac{\lambda_m}{\delta}(\theta_1 - \theta_2)$

Α. Στη μέτρηση (α), έχουμε:

$$200 = \frac{\lambda_{m\alpha}}{0{,}02}(80-0) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\lambda_{m\alpha} = 0{,}05\ \mathbf{W/mK}}$$ ♦

Β. Στη μέτρηση (β), έχουμε:

$$400 = \frac{\lambda_{m\beta}}{0{,}02}(148-0) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\lambda_{m\beta} = 0{,}054\ \mathbf{W/mK}}$$ ♦

Γ. Κατευθύνσεις λύσης: Αν ο λ του υλικού ήταν ανεξάρτητος της θερμοκρασίας, οι δύο μετρήσεις θα έδιναν τον ίδιο $\lambda_m = \lambda$. Αφού αυτό δεν ισχύει, σημαίνει ότι ο λ μεταβάλλεται με τη θερμοκρασία στην οποία βρίσκεται το υλικό.

Αν ο λ εξαρτάται γραμμικά από τη θερμοκρασία, θα είναι: $\lambda = \lambda_o(1+b\cdot\theta)$.

Γνωρίζουμε ότι ο λ_m είναι εκείνος που αντιστοιχεί, κάθε φορά, στη μέση θερμοκρασία: $\theta_m = \dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}$.

– Στην (α) μέτρηση είχαμε $\theta_{m\alpha} = \dfrac{80+0}{2} = 40°C$ και βρήκαμε $\lambda_{m\alpha} = 0{,}05$ W/mK

Επομένως: $0{,}05 = \lambda_o(1+b\cdot 40)$ (1)

– Στην (β) μέτρηση είχαμε $\theta_{m\beta} = \dfrac{148+0}{2} = 74°C$ και βρήκαμε $\lambda_{m\beta}=0{,}054$ W/mK

Επομένως: $0{,}054 = \lambda_o(1+b\cdot 74)$ (2)

Από τη λύση του συστήματος των (1) και (2) προκύπτουν οι τιμές των:

$\lambda_o = 0{,}0453$ και $b = 0{,}0026$

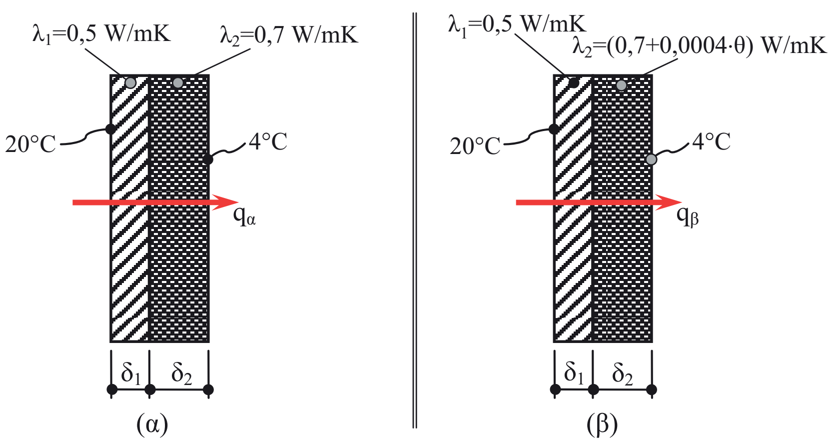
Άρα ο λ του υλικού είναι: $\boldsymbol{\lambda = 0{,}0453\cdot(1+0{,}0026\cdot\theta)}$ ♦

➲ Για υπολογισμούς θερμορροής με αγωγή σε υλικά που ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητάς τους μεταβάλλεται με τη θερμοκρασία, πρέπει να λαμβάνεται η τιμή του στη μέση θερμοκρασία λειτουργίας.

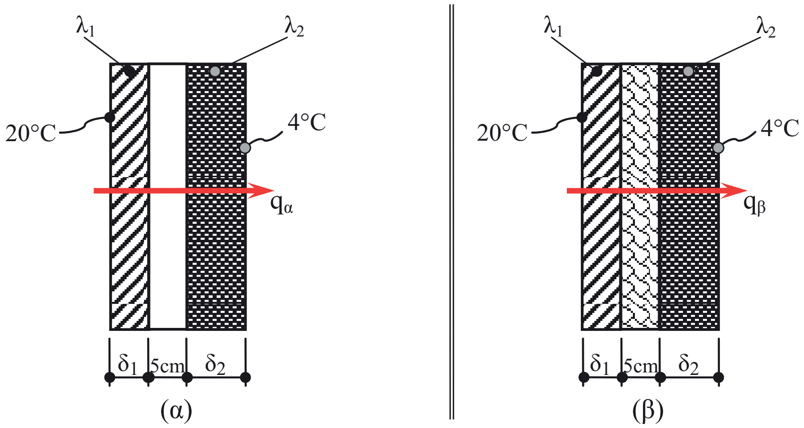
ΑΣΚΗΣΗ 1-3 ★

Απαντήστε στα παρακάτω, δικαιολογώντας με σαφήνεια την απάντησή σας:

Α. Σε ποιό από τα δύο τοιχώματα μεταδίδεται μεγαλύτερη πυκνότητα θερμορροής;



Β. Αν, στον τοίχο κατοικίας του παρακάτω σχήματος, το διάκενο αέρα γεμίσει με συνθετικό μονωτικό υλικό, θα αυξηθεί ή θα μειωθεί η πυκνότητα θερμορροής;



ΛΥΣΗ

Α. Κατευθύνσεις λύσης: Με ίδιες θερμοκρασίες τοιχωμάτων και ίδια πάχη στρώσεων, η θερμορροή καθορίζεται από τους συντελ. θερμικής αγωγιμότητας.

Έτσι στο (α) τοίχωμα, με σταθερούς λ_1 και λ_2 ισχύει η σχέση {1-07}:

$$\frac{q_\alpha}{A}=\frac{\theta_1-\theta_2}{\dfrac{\delta_1}{\lambda_1}+\dfrac{\delta_2}{\lambda_2}} \quad\Rightarrow\quad \frac{q_\alpha}{A}=\frac{\theta_1-\theta_2}{\dfrac{\delta_1}{0{,}5}+\dfrac{\delta_2}{0{,}7}} \tag{1}$$

Ενώ, στο τοίχωμα (β), στη δεύτερη στρώση θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί κάποια τιμή k_{2m}. Οπότε θα είναι:

$$\frac{q_\beta}{A}=\frac{\theta_1-\theta_2}{\dfrac{\delta_1}{\lambda_1}+\dfrac{\delta_2}{\lambda_m}} \quad\Rightarrow\quad \frac{q_\beta}{A}=\frac{\theta_1-\theta_2}{\dfrac{\delta_1}{0{,}5}+\dfrac{\delta_2}{\lambda_{2m}}} \tag{2}$$

Εδώ, προφανώς, αφού έχουμε $\theta > 0°C$, θα είναι οπωσδήποτε $k_{2m} > 0{,}7$. Άρα από την σύγκριση των (1) και (2) προκύπτει ότι: $\boldsymbol{\dfrac{q_\beta}{A} > \dfrac{q_\alpha}{A}}$ ♦

Β. Κατευθύνσεις λύσης: Προφανώς θα ακολουθηθεί όμοια με πριν διαδικασία, αλλά θα ληφθεί υπόψη η ιδιαίτερη θερμική συμπεριφορά του διακένου αέρα.

Σύμφωνα με τον ΠΙΝ. 1-2, έχουμε για κατακόρυφο (κλειστό) διάκενο αέρα, πάχους 5 cm = 50 mm, συντελεστή θερμικής αντίστασης $\delta/\lambda = 0{,}18\ m^2K/W$.

Έτσι στο (α) τοίχωμα, ισχύει αντίστοιχα η σχέση {1-07}:

$$\frac{q_\alpha}{A}=\frac{\theta_1-\theta_2}{\dfrac{\delta_1}{\lambda_1}+\dfrac{\delta_\alpha}{\lambda_\alpha}+\dfrac{\delta_2}{\lambda_2}} \quad\Rightarrow\quad \frac{q_\alpha}{A}=\frac{\theta_1-\theta_2}{\dfrac{\delta_1}{\lambda_1}+0{,}18+\dfrac{\delta_2}{\lambda_2}} \tag{3}$$

Για το συνθετικό μονωτικό υλικό στο τοίχωμα (β), βρίσκουμε από τον ΠΙΝ. 1-1, $\lambda_\mu = 0{,}041$ W/mK. Οπότε θα έχουμε:

$$\frac{q_\beta}{A} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\dfrac{\delta_1}{\lambda_1} + \dfrac{\delta_\mu}{\lambda_\mu} + \dfrac{\delta_2}{\lambda_2}} \Rightarrow \frac{q_\beta}{A} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\dfrac{\delta_1}{\lambda_1} + \dfrac{0{,}05}{0{,}041} + \dfrac{\delta_2}{\lambda_2}} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\dfrac{\delta_1}{\lambda_1} + 1{,}22 + \dfrac{\delta_2}{\lambda_2}} \quad (4)$$

Λόγω της μεγαλύτερης θερμικής αντίστασης του μονωτικού, από την σύγκριση των (3) και (4) προκύπτει ότι: $\mathbf{\dfrac{q_\beta}{A} < \dfrac{q_\alpha}{A}}$ ♦

> ➲ **Αν γίνει πλήρωση διάκενου ήρεμου αέρα (σε τοίχους ή σε δάπεδα, οροφές κλπ) με σύνηθες θερμομονωτικό υλικό (έστω και με κάπως μεγάλο συντελεστή θερμ. αγωγιμότητας), τότε βελτιώνεται η θερμομονωτική ικανότητα του αντίστοιχου δομικού στοιχείου.**

ΑΣΚΗΣΗ 1-4 ★★

Στις δύο πλευρές μιας χάλκινης πλάκας, πάχους 1 cm, υπάρχουν δύο στρώσεις εποξειδικής κόλλας ($\lambda = 0{,}25$ W/mK), πάχους 4 mm η καθεμία. Λόγω μικρών ανωμαλιών στην επιφάνεια του χαλκού, η επαφή χαλκού–κόλλας δεν είναι τέλεια, οπότε δημιουργείται μία "αντίσταση επαφής", με συντελεστή θερμικής αντίστασης ίσο με $3{,}6.10^{-4}$ m^{2}K/W.

Οι θερμοκρασίες πάνω στις δύο πλευρές της κόλλας, εξωτερικά, διατηρούνται σταθερές, έτσι ώστε η θερμοκρασιακή διαφορά να είναι 100°C.

Α. Να υπολογιστεί το σφάλμα που κάνουμε στον υπολογισμό της θερμικής ισχύος διαμέσου της πλάκας, αν αγνοήσουμε την "αντίσταση επαφής". Επίσης, να βρεθεί η θερμοκρασιακή πτώση που δημιουργείται λόγω της "αντίστασης επαφής".

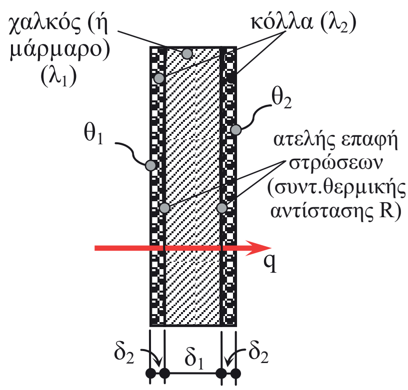
Β. Να υπολογισθεί πόσο θα γίνει το σφάλμα, αν αντί της χάλκινης πλάκας έχουμε μάρμαρο, ίδιου πάχους. Πόση είναι σ' αυτή την περίπτωση η θερμοκρασιακή πτώση λόγω της "αντίστασης επαφής".

Σχολιάσετε τα αποτελέσματα.

ΛΥΣΗ

Α. Έχουμε τα εξής δεδομένα:

- $\delta_1 = 10$ mm $= 0{,}01$ m
- $\delta_2 = 4$ mm $= 0{,}004$ m
- $\lambda_{1\chi} = 383$ W/mK (από ΠΙΝ. 1-1 για χαλκό)
- $\lambda_{1\mu} = 3{,}49$ W/mK (από ΠΙΝ. 1-1 για μάρμαρο)
- $\lambda_2 = 0{,}25$ W/mK
- $R = 3{,}6.10^{-4}$ m^{2}K/W
- $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2 = 100$°C



Κατευθύνσεις λύσης (για Α και Β ερωτήματα): Με γνωστά όλα τα θερμοτεχνικά χαρακτηριστικά του τοιχώματος και σταθερές τις θερμοκρασίες στις δύο πλευρές του, υπολογίζεται από γνωστές σχέσεις η πυκνότητα θερμορροής στις περιπτώσεις: απλοποιημένου υπολογισμού $(q/A)_\alpha$, (δηλ. αγνοώντας τις θερμικές αντιστάσεις επαφής) και ακριβούς υπολογισμού $(q/A)_\varepsilon$. Στη δεύτερη περίπτωση, χρησιμοποιώντας σχέση αγωγής βρίσκουμε τη θερμοκρασιακή πτώση λόγω μη καλής επαφής.

Α. ***Για την περίπτωση χάλκινης πλάκας***: Εφαρμόζοντας τη σχέση {1-07} έχουμε:

$$\left(\frac{q}{A}\right)_\alpha = \frac{\theta_1-\theta_2}{\dfrac{\delta_1}{\lambda_{1\chi}}+2\cdot\dfrac{\delta_2}{\lambda_2}} \Rightarrow \left(\frac{q}{A}\right)_\alpha = \frac{\theta_1-\theta_2}{\dfrac{0{,}01}{383}+2\cdot\dfrac{0{,}004}{0{,}25}} \Rightarrow \left(\frac{q}{A}\right)_\alpha = 31{,}225\cdot\Delta\theta \quad (1)$$

Αντίστοιχα, βάζοντας και τις (δύο ίδιες) θερμικές αντιστάσεις επαφής:

$$\left(\frac{q}{A}\right)_\varepsilon = \frac{\theta_1-\theta_2}{\dfrac{\delta_1}{\lambda_{1\chi}}+2\cdot\dfrac{\delta_2}{\lambda_2}+2\cdot R} \Rightarrow \left(\frac{q}{A}\right)_\varepsilon = \frac{\theta_1-\theta_2}{0{,}032026+2\cdot 3{,}6\cdot 10^{-4}} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{q}{A}\right)_\varepsilon = \frac{\theta_1-\theta_2}{0{,}032746} \Rightarrow \left(\frac{q}{A}\right)_\varepsilon = 30{,}538\cdot\Delta\theta \quad (2)$$

Οπότε, το σφάλμα που κάνουμε είναι:

$$p = \frac{31{,}225 - 30{,}538}{30{,}538} \Rightarrow \mathbf{p = 0{,}0225 = 2{,}25\%} \quad \blacklozenge$$

Η θερμοκρασιακή πτώση $\Delta\theta_R$ λόγω της θερμικής αντίστασης επαφής, είναι (βλέπε σχέση {1-08}):

$$\left(\frac{q}{A}\right)_\varepsilon = \frac{\Delta\theta_R}{R} \Rightarrow 30{,}538\cdot 100 = \frac{\Delta\theta_R}{3{,}6\cdot 10^{-4}} \Rightarrow \mathbf{\Delta\theta_R = 1{,}1°C} \quad \blacklozenge$$

Β. ***Για την περίπτωση μαρμάρινης πλάκας***: Εργαζόμενοι παρόμοια, έχουμε:

$$\left(\frac{q}{A}\right)_\alpha = \frac{\theta_1-\theta_2}{\dfrac{\delta_1}{\lambda_{1\mu}}+2\cdot\dfrac{\delta_2}{\lambda_2}} \Rightarrow \left(\frac{q}{A}\right)_\alpha = \frac{\theta_1-\theta_2}{\dfrac{0{,}01}{3{,}49}+2\cdot\dfrac{0{,}004}{0{,}25}} \Rightarrow \left(\frac{q}{A}\right)_\alpha = 28{,}682\cdot\Delta\theta \quad (3)$$

και αντίστοιχα, με τις (δύο ίδιες) θερμικές αντιστάσεις επαφής:

$$\left(\frac{q}{A}\right)_\varepsilon = \frac{\theta_1-\theta_2}{\dfrac{\delta_1}{\lambda_{1\mu}}+2\cdot\dfrac{\delta_2}{\lambda_2}+2\cdot R} \Rightarrow \left(\frac{q}{A}\right)_\varepsilon = \frac{\theta_1-\theta_2}{0{,}034865+2\cdot 3{,}6\cdot 10^{-4}} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{q}{A}\right)_\varepsilon = \frac{\theta_1 - \theta_2}{0{,}035585} \Rightarrow \left(\frac{q}{A}\right)_\varepsilon = 28{,}101 \cdot \Delta\theta \qquad (4)$$

Οπότε, το σφάλμα που κάνουμε είναι:

$$p = \frac{28{,}682 - 28{,}101}{28{,}101} \Rightarrow \mathbf{p = 0{,}0207 = 2{,}07\%} \qquad ♦$$

Η θερμοκρασιακή πτώση $\Delta\theta_R$ λόγω της θερμικής αντίστασης επαφής, είναι:

$$\left(\frac{q}{A}\right)_\varepsilon = \frac{\Delta\theta_R}{R} \Rightarrow 28{,}101 \cdot 100 = \frac{\Delta\theta_R}{3{,}6 \cdot 10^{-4}} \Rightarrow \mathbf{\Delta\theta_R \approx 1°C} \qquad ♦$$

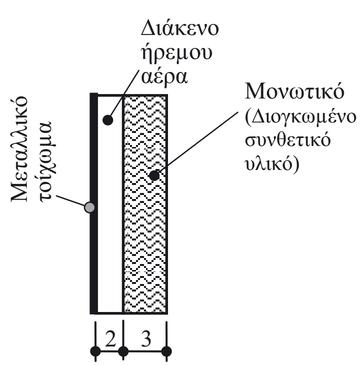
ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ: Το σφάλμα που γίνεται, και στις δύο περιπτώσεις (χαλκού και μαρμάρου), είναι πολύ μικρό και σχεδόν ίδιο. Ως προς την προκαλούμενη από τις αντιστάσεις θερμοκρασιακή πτώση, παρατηρούμε ότι είναι επίσης πολύ μικρή και σχεδόν ίδια για τις δύο περιπτώσεις.

Αυτό οφείλεται, κυρίως, στο ότι ο συντελεστής θερμικής αντίστασης επαφής είναι μικρός στο παράδειγμα αυτό. Αν αυξάνεται ο συντελεστής θερμικής αντίστασης, τότε αυξάνεται αρκετά και το σφάλμα και η θερμοκρασιακή πτώση (στην περίπτωση του μαρμάρου είναι μικρότερα).

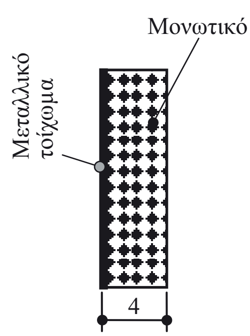
➲ **Η θερμική αντίσταση που δημιουργείται λόγω μη καλής επαφής δύο στρώσεων υλικών, πρέπει να λαμβάνεται υπόψη σε υπολογισμούς μετάδοσης θερμότητας με αγωγή. Διαφορετικά, προκύπτει μεγαλύτερη θερμορροή και το σφάλμα είναι τόσο μεγαλύτερο όσο μεγαλύτερη είναι αυτή η θερμική αντίσταση επαφής.**

ΑΣΚΗΣΗ 1-5 ★★

Προκειμένου να θερμομονωθούν τα μεταλλικά επίπεδα τοιχώματα μιας δεξαμενής, προσφέρονται με το ίδιο κόστος, δύο εναλλακτικές λύσεις (a) και (b) όπως δείχνονται στα αντίστοιχα σχήματα (τομές-οι διαστάσεις σε cm).



Σχ. a



Σχ. b

Στη λύση (a) οι συντελ. θερμικής αγωγιμότητας των υλικών μπορούν να θεωρηθούν ανεξάρτητοι της θερμοκρασίας, ενώ στη λύση (b) ο συντελ. θερμικής αγωγιμότητας του μονωτικού μεταβάλλεται με τη θερμοκρασία σύμφωνα με τη σχέση $\lambda = 0{,}038 + 0{,}0004 \cdot \theta$ [σε W/mK όταν θ σε °C].

Α. Να εξετασθεί ποιά από τις δύο λύσεις είναι συμφερότερη, αν η θερμοκρασία πάνω στα μεταλλικά τοιχώματα είναι 50°C, και η θερμοκρασία πάνω στην εξωτερική επιφάνεια του μονωτικού είναι 10°C (και στις δύο περιπτώσεις).

Β. Ποιά η θερμοκρασία στο κέντρο του μονωτικού της λύσης (a);

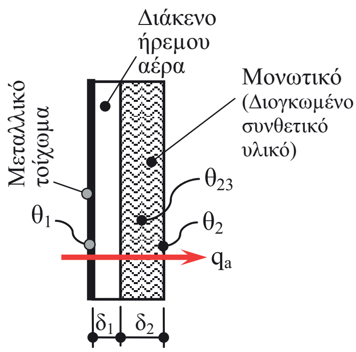
Γ. Για ποιά θερμοκρασία των μεταλλικών τοιχωμάτων της δεξαμενής οι δύο λύσεις θα ήταν ισοδύναμες; (Υποτίθεται ότι η θερμοκρασία πάνω στην άλλη πλευρά διατηρείται στους 10°C).

ΛΥΣΗ

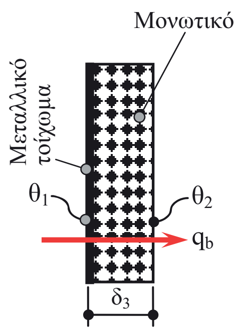
Α. Κατευθύνσεις λύσης: Συμφερότερη θα είναι η λύση που έχει τις μικρότερες απώλειες. Θα υπολογιστεί, επομένως η πυκνότητα θερμορροής (q/A) στις δύο περιπτώσεις, εφόσον έχουμε γνωστές θερμοκρασίες, συντελεστές θερμικής αγωγιμότητας και πάχη. Η ιδιαιτερότητα στην (a) λύση είναι ότι για το διάκενο ήρεμου αέρα θα χρησιμοποιήσουμε έτοιμο τον συντ. θερμικής αντίστασης δ/λ και στη (b) λύση ότι ο λ δεν είναι σταθερός.

Έχουμε τα δεδομένα:

- $\theta_1 = 50°C$
- $\theta_2 = 10°C$
- $\delta_1 = 2$ cm $= 0{,}02$ m στη λύση (a)
- $\delta_2 = 3$ cm $= 0{,}03$ m στη λύση (a)
- $\delta_1/\lambda_1 = 0{,}175\ m^2K/W$ (με παρεμβολή, από τον ΠΙΝ.1-2)
- $\lambda_2 = 0{,}041$ W/mK (από τον ΠΙΝ.1-1)
- $\delta_3 = 4$ cm $= 0{,}04$ m στη λύση (b)
- $\lambda = 0{,}038 + 0{,}0004 \cdot \theta$ στη λύση (b)



Σχ. a



Σχ. b

– ***Στη λύση (a)*** έχουμε (σχέση {1-07}): $\dfrac{q_a}{A} = \dfrac{\theta_1 - \theta_2}{\dfrac{\delta_1}{\lambda_1} + \dfrac{\delta_2}{\lambda_2}}$ και αντικαθιστώντας:

$$\frac{q_a}{A} = \frac{50 - 10}{0{,}175 + \dfrac{0{,}03}{0{,}041}} \Rightarrow \mathbf{\frac{q_a}{A} = 44{,}1\ W/m^2} \qquad \blacklozenge$$

– ***Στη λύση (b)***, εφόσον είναι γνωστές οι θερμοκρασίες στις δύο πλευρές του μονωτικού, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η παραπάνω σχέση, αλλά παίρνοντας την τιμή λ_m στη μέση θερμοκρασία θ_m. (Βλέπε και σχέση {1-06}).

Είναι: $\theta_m = \dfrac{50 + 10}{2} = 30^oC$ και έτσι λ_m= 0,038+0,0004·30 = 0,05 W/mK.

Οπότε: $\dfrac{q_b}{A} = \dfrac{\lambda_m}{\delta_3}(\theta_1 - \theta_2)$ και αντικαθιστώντας:

$$\frac{q_b}{A} = \frac{0{,}05}{0{,}04} \cdot (50 - 10) \Rightarrow \mathbf{\frac{q_b}{A} = 50 W/m^2} \qquad \blacklozenge$$

Επομένως, **η λύση που συμφέρει είναι η (a), αφού $q_a/A < q_b/A$**.

Β. Κατευθύνσεις λύσης: Εφόσον έχει βρεθεί η q_a/A, εύκολα υπολογίζεται η ζητούμενη θερμοκρασία στο κέντρο του μονωτικού, έστω θ_{23}, από απλή σχέση αγωγής από θ_{23} έως θ_2, για πάχος $0{,}5 \cdot \delta_2$ (Βλέπε σχέση {1-08}).

$$\frac{q_a}{A} = \frac{\theta_{23} - \theta_2}{\dfrac{0{,}5 \cdot \delta_2}{\lambda_2}} \quad \text{και αντικαθιστώντας:} \quad 44{,}1 = \frac{\theta_{23} - 10}{\dfrac{0{,}015}{0{,}041}} \Rightarrow \mathbf{\theta_{23} = 26{,}1^oC} \qquad \blacklozenge$$

Γ. Κατευθύνσεις λύσης: Οι δυο λύσεις θα είναι ισοδύναμες όταν $q_a/A = q_b/A$. Έστω θ_1' η θερμοκρασία πάνω στα μεταλλικά τοιχώματα, για να συμβεί αυτό. Για την q_a/A μπορεί να χρησιμοποιηθεί η προηγούμενη σχέση όπως στο Α. ερώτημα, αλλά για την q_b/A πρέπει να χρησιμοποιηθεί η αναλυτική σχέση {1-05}, επειδή τώρα δεν είναι γνωστές και οι δύο θερμοκρασίες στις επιφάνειες του μονωτικού.

Έτσι :

– ***Στη λύση (a)*** έχουμε:

$$\frac{q_a'}{A} = \frac{\theta_1' - \theta_2}{\dfrac{\delta_1}{\lambda_1} + \dfrac{\delta_2}{\lambda_2}} \Rightarrow \frac{q_a'}{A} = \frac{\theta_1' - 10}{0{,}175 + \dfrac{0{,}03}{0{,}041}} \qquad (1)$$

– ***Στη λύση (b)*** έχουμε:

$$\frac{q_b'}{A} = \frac{\lambda_o}{\delta_3} \cdot \left[(\theta_1' - \theta_2) + \frac{b}{2} \cdot (\theta_1'^2 - \theta_2^2) \right]$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει όταν η μορφή του λ είναι: $\lambda = \lambda_o(1+b\theta)$, δηλαδή εδώ πρέπει να γραφεί: $\lambda = 0{,}038 \cdot (1 + \frac{0{,}0004}{0{,}038} \cdot \theta) \approx 0{,}038 \cdot (1 + 0{,}01053 \cdot \theta)$

Οπότε, για την $\frac{q'_b}{A}$ θα είναι:

$$\frac{q'_b}{A} = \frac{0{,}038}{0{,}04} \cdot \left[(\theta'_1 - 10) + \frac{0{,}01053}{2} \cdot (\theta_1'^2 - 10^2) \right] \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει:

$$\frac{\theta'_1 - 10}{0{,}175 + \frac{0{,}03}{0{,}041}} = \frac{0{,}038}{0{,}04} \cdot \left[(\theta'_1 - 10) + \frac{0{,}01053}{2} \cdot (\theta_1'^2 - 10^2) \right] \Rightarrow$$

$$\frac{\theta'_1 - 10}{0{,}9067} = 0{,}95 \cdot (\theta'_1 - 10) + 0{,}005 \cdot (\theta_1'^2 - 10^2) \Rightarrow$$

$$\frac{\theta'_1 - 10}{0{,}9067} = (\theta'_1 - 10) \cdot [0{,}95 + 0{,}005 \cdot (\theta'_1 + 10)] \Rightarrow$$

$$\frac{1}{0{,}9067} = 0{,}95 + 0{,}005 \cdot (\theta'_1 + 10) \Rightarrow$$

$$1{,}1029 = 0{,}95 + 0{,}005 \cdot \theta'_1 + 0{,}05 \Rightarrow \boldsymbol{\theta'_1 \approx 20{,}6^o C}$$ ♦

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Η θ'_1 μπορεί να υπολογιστεί έμμεσα, αν υπολογιστεί η τιμή λ_m (μέσος συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας) του μονωτικού (b), από την ισότητα των q, και κατόπιν βρεθεί η θ_m θερμοκρασία για την οποία θα ισχύει/προκύπτει πράγματι αυτός ο συγκεκριμένος λ_m και επομένως και η άγνωστη θ'_1. Δηλαδή:

$$\frac{q'_a}{A} = \frac{\theta'_1 - \theta_2}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2}} = \frac{q'_b}{A} = \frac{\theta'_1 - \theta_2}{\frac{\delta_3}{\lambda_m}} \Rightarrow \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} = \frac{\delta_3}{\lambda_m}$$ και αντικαθιστώντας:

$$0{,}175 + \frac{0{,}03}{0{,}041} = \frac{0{,}04}{\lambda_m} \Rightarrow \lambda_m = 0{,}04412 \text{ W/mK}$$

Άρα θα πρέπει: $0{,}04412 = 0{,}038 + 0{,}0004 \cdot \theta_m \Rightarrow \theta_m = 15{,}3^o C$ και

$$\theta_m = \frac{\theta'_1 + \theta_2}{2} \Rightarrow \theta'_1 = 2 \cdot \theta_m - \theta_2 \Rightarrow \theta'_1 = 2 \cdot 15{,}3 - 10 \Rightarrow \boldsymbol{\theta'_1 \approx 20{,}6^o C}$$ ♦

➲ **Όταν ο συντελεστής θερμ. αγωγιμότητας ενός υλικού μεταβάλλεται με τη θερμοκρασία $\lambda = \lambda_o(1+b\theta)$, οι – ακραίες – θερμοκρασίες λειτουργίας του υλικού παίζουν καθοριστικό ρόλο στη διαμόρφωση της θερμορροής δια μέσου αυτού με αγωγή.**

ΑΣΚΗΣΗ 1-6 ★★

Προκειμένου να κτιστεί ένας τοίχος φούρνου, υπάρχουν διαθέσιμα δύο είδη τούβλων, με ίδιες διαστάσεις 22 x 15 x 9 cm. Τα τούβλα (α) έχουν συντ. θερμικής αγωγιμότητας $\lambda_\alpha = 1,2$ W/mK και αντέχουν μέχρι θερμοκρασία 1000°C, ενώ τα τούβλα (β) έχουν συντ. θερμικής αγωγιμότητας $\lambda_\beta = 0,6$ W/mK και αντέχουν μέχρι θερμοκρασία 800°C.

Τα τούβλα έχουν ίδιο κόστος/τεμάχιο και μπορούν να κτιστούν με πάχος 22 ή 15 cm. Η πυκνότητα θερμορροής διαμέσου του τοίχου πρέπει να είναι το πολύ 1600 W/m^2, όταν η θερμοκρασία πάνω στην εσωτερική πλευρά του τοίχου είναι 900°C και στην εξωτερική πλευρά (προς το περιβάλλον) 150°C.

Ζητείται να προσδιοριστεί η πιο οικονομική επιλογή και τοποθέτηση των τούβλων (σε μία ή περισσότερες στρώσεις).

(Σχετίζεται με την ΑΣΚΗΣΗ 4-8, η οποία είναι συνέχεια αυτής και χρησιμοποιεί τα δεδομένα της).

ΛΥΣΗ

Κατευθύνσεις λύσης: Εφόσον τα τούβλα έχουν ίδιο κόστος/τεμάχιο, η πιο οικονομική επιλογή και τοποθέτηση θα είναι εκείνη στην οποία θα ικανοποιούνται οι απαιτήσεις, χρησιμοποιώντας τα λιγότερα τούβλα, προφανώς σε λιγότερες κατά το δυνατόν στρώσεις.

Η κάθε στρώση είναι οικονομικότερο να κτίζεται με πάχος 15 cm (αν, βέβαια, ικανοποιείται η q/A), αφού έτσι κάθε τούβλο θα καλύπτει 0,22 x 0,09 = 0,0198 m^2, ενώ αν κτίζεται με πάχος 22 cm καλύπτει μόνο 0,15 x 0,09 = 0,0135 m^2.

Θα εξεταστούν διάφορες περιπτώσεις τοποθέτησης και θα υπολογίζεται κάθε φορά η πυκνότητα θερμορροής και θα ελέγχονται οι θερμοκρασίες των τούβλων.

Τα δεδομένα είναι:

- $\lambda_\alpha = 1,2$ W/mK
- $\lambda_\beta = 0,6$ W/mK
- $\delta_\alpha = 22$ ή 15 cm $= 0,22$ ή $0,15$ m
- $\delta_\beta = 22$ ή 15 cm $= 0,22$ ή $0,15$ m

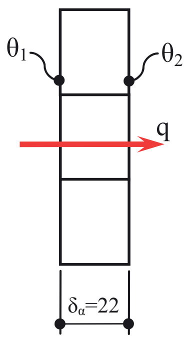
- $\theta_{\alpha,max} = 1000$°C
- $\theta_{\beta,max} = 800$°C
- $\theta_1 = 900$°C
- $\theta_2 = 150$°C

Η πυκνότητα θερμορροής υπολογίζεται από την απλή σχέση αγωγής, σε απλό ή σύνθετο τοίχωμα (σχέση {1-04} ή {1-07}).

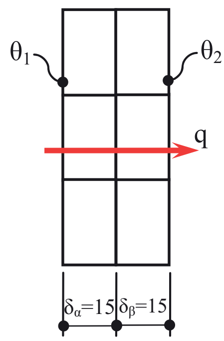
Σε όλες τις περιπτώσεις το τοίχωμα θα βρίσκεται σε θερμοκρασιακή διαφορά

$\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2 = 900 - 150 = 750$°C.

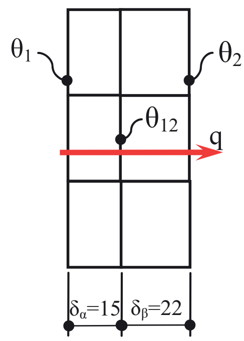
Είναι προφανές ότι από την πλευρά της θερμοκρασίας των 900°C θα πρέπει να τοποθετηθεί οπωσδήποτε τούβλο (α), λόγω του ότι το τούβλο (β) δεν αντέχει, αφού $\theta_{\beta,max} = 800$°C.



Περ. 1



Περ. 2



Περ. 3

Περ. 1: Αρχικά, λοιπόν, εξετάζεται τούβλο (α), σε μία στρώση των **22 cm =** $\boldsymbol{\delta_\alpha}$. (Για να επιτυγχάνεται μικρότερη q/A, σε σχέση με πάχος 15 cm)

$$\frac{q}{A} = \frac{\Delta\theta}{\frac{\delta_\alpha}{\lambda_\alpha}} \quad \Rightarrow \quad \frac{q}{A} = \frac{750}{\frac{0{,}22}{1{,}2}} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{q}{A} = 4090{,}9\ \mathrm{W/m^2} > 1600\ \mathrm{W/m^2}\,,$$ δηλ. ΑΠΟΚΛΕΙΕΤΑΙ.

[Πολύ περισσότερο αποκλείεται και το πάχος $\delta_\alpha = 15$ cm]
Άρα, πρέπει να τοποθετηθεί και δεύτερη στρώση τούβλων.

Περ. 2: Εξετάζεται μία στρώση τούβλου (α), πάχους $\boldsymbol{\delta_\alpha}$ **= 15 cm** και μία στρώση τούβλου (β) πάχους επίσης **15 cm =** $\boldsymbol{\delta_\beta}$ (οικονομικότερη κατασκευή).

$$\frac{q}{A} = \frac{\Delta\theta}{\frac{\delta_\alpha}{\lambda_\alpha} + \frac{\delta_\beta}{\lambda_\beta}} \quad \Rightarrow \quad \frac{q}{A} = \frac{750}{\frac{0{,}15}{1{,}2} + \frac{0{,}15}{0{,}6}} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{q}{A} = 2000\ \mathrm{W/m^2} > 1600\ \mathrm{W/m^2}\,,$$ δηλ. ΑΠΟΚΛΕΙΕΤΑΙ.

(Προφανώς αποκλείονται δύο στρώσεις τούβλου (α) 15 cm, αφού θα προκύψει ακόμη μεγαλύτερο q/A).

Περ. 3: Η αμέσως πιο οικονομική λύση είναι η τοποθέτηση μίας στρώσης τούβλου (α), πάχους $\boldsymbol{\delta_\alpha}$ **= 15 cm** και μία στρώση τούβλου (β) πάχους **22 cm =** $\boldsymbol{\delta_\beta}$.

[Η αντίστροφη τοποθέτηση $\delta_\alpha = 22$ cm και $\delta_\beta = 15$ cm,ενώ είναι οικονομικά ισοδύναμη, οδηγεί προφανώς σε μεγαλύτερο q/A].

$$\frac{q}{A} = \frac{\Delta\theta}{\frac{\delta_\alpha}{\lambda_\alpha} + \frac{\delta_\beta}{\lambda_\beta}} \quad \Rightarrow \quad \frac{q}{A} = \frac{750}{\frac{0,15}{1,2} + \frac{0,22}{0,6}} \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{\frac{q}{A} \approx 1525\ W/m^2 < 1600\ W/m^2}\ ,\quad \textbf{δηλ. ΔΕΚΤΗ.}$$

Θα πρέπει τώρα να γίνει έλεγχος για τα τούβλα (β),σε ότι αφορά τη μέγιστη θερμοκρασία τους, που εμφανίζεται στην επιφάνεια διεπαφής, δηλ. την θ_{12}.

Θα έχουμε, από αγωγή, στην πρώτη στρώση:

$$\frac{q}{A} = \frac{\theta_1 - \theta_{12}}{\frac{\delta_\alpha}{\lambda_\alpha}} \quad \Rightarrow \quad 1525 = \frac{900 - \theta_{12}}{\frac{0,15}{1,2}} \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{\theta_{12} = 709,3°C < 800°C},\quad \textbf{δηλ. ΔΕΚΤΗ.}$$

Συνεπώς, αυτή είναι η τεχνικά δεκτή και οικονομικότερη λύση.

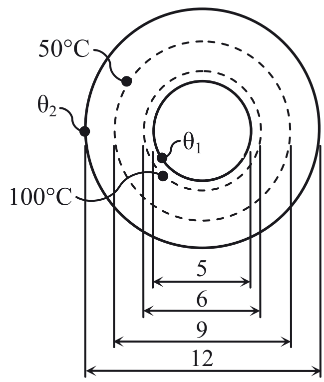
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν τα τούβλα (β) άντεχαν σε μικρότερη θερμοκρασία, π.χ. έως 700°C, τότε η πιο πάνω λύση δεν θα ήταν δεκτή. Θα έπρεπε να εξεταστεί η (ακριβότερη) λύση: $\delta_\alpha = 22$ cm και $\delta_\beta = 22$ cm, η οποία θα οδηγούσε και σε μικρότερη $q/A \approx 1364\ W/m^2$ και σε χαμηλότερη θερμοκρασία $\theta_{12} = 650°C$.

➲ Σε εφαρμογές όπου συναντώνται υψηλές (ή χαμηλές) θερμοκρασίες, είναι πολύ πιθανόν ορισμένα υλικά να επηρεάζονται (καταστροφή, δομική αλλοίωση, αλλαγή των ιδιοτήτων τους κλπ) και πρέπει να λαμβάνονται μέτρα ώστε τα υλικά αυτά να μην εκτίθενται σ' αυτές τις θερμοκρασίες.

ΑΣΚΗΣΗ 1-7 ★★

Βρείτε τις θερμοκρασίες που λείπουν στο κυλινδρικό τοίχωμα του σχήματος, που έχει σταθερό συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας.

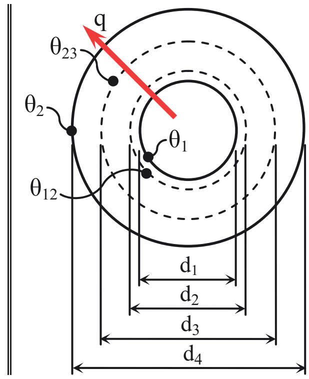
(Οι διαστάσεις σε cm).



ΛΥΣΗ

Κατευθύνσεις λύσης: Η κατεύθυνση ροής της θερμότητας είναι από μέσα προς

τα έξω. Ο λ δεν είναι γνωστός. Αλλά, γνωρίζοντας δύο θερμοκρασίες σε ορισμένες θέσεις του κυλινδρικού τοιχώματος, μπορούν να βρεθούν άλλες θερμοκρασίες σε άλλες θέσεις (όπως εδώ οι ζητούμενες θ_1 και θ_2) με κατάλληλη χρήση της βασικής σχέσης της αγωγής, για σταθερό λ.



Τα δεδομένα είναι:

- $d_1 = 5$ cm $= 0{,}05$ m
- $d_2 = 6$ cm $= 0{,}06$ m
- $d_3 = 9$ cm $= 0{,}09$ m
- $d_2 = 12$ cm $= 0{,}12$ m
- $\theta_{12} = 100°C$
- $\theta_{23} = 50°C$

Επειδή είναι γνωστές οι θ_{12} και θ_{23} γράφουμε τη σχέση {1-11} ως εξής:

$$\frac{q}{\ell} = \frac{\theta_{12} - \theta_{23}}{\frac{1}{2\pi\lambda} \cdot \ln\frac{d_3}{d_2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{q}{\ell} = \frac{100 - 50}{\frac{1}{2\pi\lambda} \cdot \ln\frac{0{,}09}{0{,}06}} \qquad (1)$$

Επίσης, για τις θ_1 και θ_{12} γράφουμε τη σχέση ως εξής:

$$\frac{q}{\ell} = \frac{\theta_1 - \theta_{12}}{\frac{1}{2\pi\lambda} \cdot \ln\frac{d_2}{d_1}} \quad \Rightarrow \quad \frac{q}{\ell} = \frac{\theta_1 - 100}{\frac{1}{2\pi\lambda} \cdot \ln\frac{0{,}06}{0{,}05}} \qquad (2)$$

Από τις ισότητες (1) και (2) παίρνουμε:

$$\frac{\theta_1 - 100}{\cancel{\frac{1}{2\pi\lambda}} \cdot \ln\frac{0{,}06}{0{,}05}} = \frac{100 - 50}{\cancel{\frac{1}{2\pi\lambda}} \cdot \ln\frac{0{,}09}{0{,}06}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\theta_1 - 100}{0{,}1823} = \frac{50}{0{,}4055} \quad \Rightarrow$$

$$50 \cdot 0{,}1823 = (\theta_1 - 100) \cdot 0{,}4055 \quad \Rightarrow$$

$$9{,}115 = \theta_1 \cdot 0{,}4055 - 40{,}55 \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\theta_1 = 122{,}5°C}$$ ♦

Όμοια, για τις θ_{23} και θ_2 γράφουμε τη σχέση {1-11} ως εξής:

$$\frac{q}{\ell} = \frac{\theta_{23} - \theta_2}{\frac{1}{2\pi\lambda} \cdot \ln\frac{d_4}{d_3}} \quad \Rightarrow \quad \frac{q}{\ell} = \frac{50 - \theta_2}{\frac{1}{2\pi\lambda} \cdot \ln\frac{0{,}12}{0{,}09}} \qquad (3)$$

Από τις ισότητες (1) και (3) παίρνουμε:

$$\frac{50 - \theta_2}{\cancel{\frac{1}{2\pi\lambda}} \cdot \ln\frac{0{,}012}{0{,}09}} = \frac{100 - 50}{\cancel{\frac{1}{2\pi\lambda}} \cdot \ln\frac{0{,}09}{0{,}06}} \quad \Rightarrow \quad \frac{50 - \theta_2}{0{,}2877} = \frac{50}{0{,}4055} \quad \Rightarrow$$

$$50 \cdot 0{,}2877 = (50 - \theta_2) \cdot 0{,}4055 \Rightarrow 14{,}38 = 20{,}275 - 0{,}4055\theta_2 \Rightarrow \boldsymbol{\theta_2 = 14{,}5°C} \quad ♦$$

➲ Όταν σ' ένα κυλινδρικό ή επίπεδο ή σφαιρικό τοίχωμα, που έχει σταθερό συντελεστή θερμ. αγωγιμότητας, είναι γνωστές δύο θερμοκρασίες σε συγκεκριμένες θέσεις, τότε μπορεί να υπολογιστεί η θερμοκρασία και σε οποιαδήποτε άλλη θέση του τοιχώματος. (εννοείται, για μονοδιάστατη μετάδοση, χωρίς θερμικές πηγές)

ΑΣΚΗΣΗ 1-8 ★★

Μια καμινάδα από ενισχυμένο σκυρόδεμα (C20/25) έχει εσωτερική διάμετρο $d_2 = 700$ mm και εξωτερική διάμετρο $d_3 = 1300$ mm.

Η καμινάδα πρόκειται να επενδυθεί εσωτερικά με πυρίμαχη άργιλο για να διατηρείται το σκυρόδεμα (για λόγους αντοχής του) σε θερμοκρασία οπωσδήποτε μικρότερη των 225°C.

Δίδεται για την πυρίμαχη άργιλο: $\lambda = 0{,}9$ W/mK. *Ζητείται:*

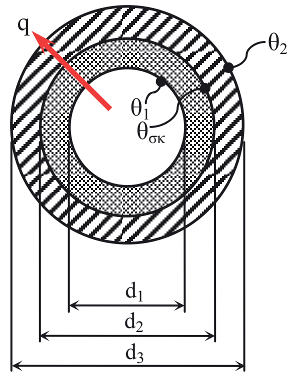
Α. Να υπολογισθεί το ελάχιστο πάχος της επένδυσης αυτής, ώστε να ικανοποιείται η παραπάνω απαίτηση, στη (δυσμενή) περίπτωση όπου, λόγω υψηλής θερμοκρασίας περιβάλλοντος και άπνοιας, η θερμοκρασία πάνω στην εξωτερική επιφάνεια της καπνοδόχου μπορεί να φθάσει τους 100°C, ενώ η εσωτερική επιφάνεια της επένδυσης αποκτά θερμοκρασία 380°C.

Β. Για την καπνοδόχο με την παραπάνω επένδυση, να βρεθεί η σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας που επιτρέπεται να φθάσει το εσωτερικό της επένδυσης καθώς θα μεταβάλλεται η θερμοκρασία πάνω στην εξωτερική επιφάνεια της καπνοδόχου.

ΛΥΣΗ

Το σχήμα της καμινάδας μαζί με την επένδυση, σε τομή, θα είναι όπως παρακάτω, με τα δεδομένα:

- $d_2 = 700$ mm $= 0{,}7$ m
- $d_3 = 1300$ mm $= 1{,}3$ m
- λ_1 (πυρίμαχη άργιλος, εσωτερική επένδυση) = $= 0{,}9$ W/mK
- λ_2 (οπλ. σκυρόδεμα C20/25, από ΠΙΝ. 1-1) = $= 2{,}03$ W/mK
- $\theta_{σκ} = 225°C$
- $\theta_1 = 380°C$
- $\theta_2 = 100°C$



Α. Κατευθύνσεις λύσης: Η κατεύθυνση ροής της θερμότητας είναι από μέσα προς τα έξω. Ζητείται η d_1. Γνωρίζοντας δύο θερμοκρασίες και τον συντελεστή θερμ. αγωγιμότητας για τη μία στρώση (του σκυροδέματος), μπορεί να υπολογι-

στεί η ανά μονάδα μήκους θερμορροή και κατόπιν το ζητούμενο πάχος της άλλης στρώσης (πυρίμαχης αργίλου), με χρήση της απλής σχέσης αγωγής για σταθερό λ.

Έτσι, για το τοίχωμα της καμινάδας, γράφουμε τη σχέση {1-11}:

$$\frac{q}{\ell}=\frac{\theta_{\sigma\kappa}-\theta_2}{\frac{1}{2\pi\lambda_2}\ln\frac{d_3}{d_2}}=\frac{225-100}{\frac{1}{2\pi\cdot 2{,}03}\ln\frac{1{,}3}{0{,}7}} \quad\Rightarrow\quad \frac{q}{\ell}\approx 2575\ \text{W/m}$$

Και ισχύει και η παρόμοια σχέση για τη στρώση της επένδυσης: $\dfrac{q}{\ell}=\dfrac{\theta_1-\theta_{\sigma\kappa}}{\frac{1}{2\pi\lambda_1}\ln\frac{d_2}{d_1}}$

και αντικαθιστώντας την ευρεθείσα $\dfrac{q}{\ell}$ και τα λοιπά δεδομένα:

$$2575=\frac{380-225}{\frac{1}{2\pi\cdot 0{,}9}\ln\frac{0{,}7}{d_1}} \quad\Rightarrow\quad 455{,}36\cdot\ln\frac{0{,}7}{d_1}=155 \quad\Rightarrow$$

$$\ln\frac{0{,}7}{d_1}=0{,}3404 \quad\Rightarrow\quad \frac{0{,}7}{d_1}=1{,}405 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{d_1\approx 0{,}5\ m}$$

Άρα το πάχος της επένδυσης θα είναι: $s=\dfrac{d_2-d_1}{2}=\dfrac{0{,}7-0{,}5}{2} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{s=0{,}1\ m}$ ♦

Β. Κατευθύνσεις λύσης: Αν θα αλλάζει η θερμοκρασία πάνω στην εξωτερική επιφάνεια της καπνοδόχου, δηλ. η θ_2, και η θερμοκρασία στην επένδυση, δηλ. η θ_1, τότε θα αλλάζει και η θερμορροή q/ℓ. Αλλά πάντα η ίδια θερμορροή θα διαπερνά και τις δύο στρώσεις και, με τον περιορισμό της ορισμένης θερμοκρασίας διεπαφής, δηλ. $\theta_{\sigma\kappa}=225°C$, θα προκύψει η σχέση μεταξύ των θερμοκρασιών αυτών θ_1 και θ_2.

Για κάθε μία από τις στρώσεις θα ισχύει η {1-11}:

$$\frac{q}{\ell}=\frac{\theta_1-\theta_{\sigma\kappa}}{\frac{1}{2\pi\lambda_1}\ln\frac{d_2}{d_1}}=\frac{\theta_{\sigma\kappa}-\theta_2}{\frac{1}{2\pi\lambda_2}\ln\frac{d_3}{d_2}}$$ και αντικαθιστώντας τα δεδομένα, παίρνουμε:

$$\frac{\theta_1-225}{\frac{1}{2\pi\cdot 0{,}9}\ln\frac{0{,}7}{0{,}5}}=\frac{225-\theta_2}{\frac{1}{2\pi\cdot 2{,}03}\ln\frac{1{,}3}{0{,}7}} \quad\Rightarrow\quad \frac{\theta_1-225}{0{,}37386}=\frac{225-\theta_2}{0{,}30495}$$ και τελικά:

$$\boldsymbol{\theta_1\approx 501-1{,}226\cdot\theta_2}$$ ♦

Δηλ. η θ_1 μπορεί (επιτρέπεται) να αυξάνεται γραμμικά όσο μειώνεται η εξωτ. επιφανειακή θερμοκρασία θ_2.

➲ **Η προσθήκη ενός πυρίμαχου υλικού, με κατάλληλο πάχος, είναι πολλές φορές απαραίτητη ενέργεια, προκειμένου να προστατευθεί ένα υλικό από την έκθεσή του σε υψηλές θερμοκρασίες.**