ΘΩΜΑ ΚΥΒΕΝΤΙΔΗ

ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει τη σφραγίδα του εκδότη

ΘΩΜΑΣ Α. ΚΥΒΕΝΤΙΔΗΣ

- Γεννήθηκε το 1947 στο Νέο Πετρίτσι του Ν. Σερρών.
- Το 1965 αποφοίτησε από το εξατάξιο Γυμνάσιο Σιδηροκάστρου του Ν. Σερρών και εγγράφηκε στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης.
- Πήρε το πτυχίο των Μαθηματικών το 1969.
- Αναγορεύτηκε διδάκτορας στο τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης το 1979 και από το 1972 μέχρι σήμερα εργάζεται σ' αυτό.

ISBN set 960-431-951-5
ISBN Τ.2 960-431-995-7

www.ziti.gr

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 23920 72222 (5 γραμ.) - Fax: 23920 72229
e-mail: info@ziti.gr

Βιβλιοπωλείο

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ. 2310 203720, Fax 2310 211305
e-mail: sales@ziti.gr

«Καταλήγω λοιπόν στην ακόλουθη τοποθέτηση: αν η νόηση και η αληθής γνώμη είναι δύο διακριτά γένη, τότε οπωσδήποτε υπάρχουν όντα «αυτά καθαυτά», Ιδέες που τις συλλαμβάνουμε όχι με την αίσθηση αλλά μόνο με τη νόηση· αν πάλι, όπως πιστεύουν μερικοί, η αληθής γνώμη δεν διαφέρει σε τίποτα από τη νόηση, τότε θα αποδώσουμε βέβαιη ύπαρξη μόνον σε όσα αισθανόμαστε διαμέσου του σώματος. Νόηση όμως και αληθής γνώμη είναι χωρίς αμφιβολία δύο διακριτά γένη, γιατί έχουν αναπτυχθεί χωριστά και διατηρούν ανόμοιο χαρακτήρα.»

ΠΛΑΤΩΝ (429 - 347 π.Χ.)

Τίμαιος (51 cd)

Αφιερώνεται
στη μνήμη των παππούδων μου
Κωνσταντίνου και Σάββα

Πρόλογος

Η σειρά με τον τίτλο «Ανώτερα Μαθηματικά», που αποτελείται από τρεις τόμους, γράφηκε για να προσφέρει σε Μαθηματικούς και μη Μαθηματικούς, μια αξιόπιστη και σχετικά συνοπτική παρουσίαση βασικών θεμάτων των Μαθηματικών, και κυρίως της Μαθηματικής Ανάλυσης.

Τα θέματα που αναπτύσσονται αφορούν την Άλγεβρα, την Αναλυτική Γεωμετρία, τις Ακολουθίες και Σειρές πραγματικών αριθμών, το Διαφορικό και Ολοκληρωτικό Λογισμό συναρτήσεων μιας ή περισσοτέρων μεταβλητών, τη Διανυσματική Ανάλυση, τις Σειρές Fourier, τις Μιγαδικές Συναρτήσεις, τις Διαφορικές Εξισώσεις και τις Εξισώσεις Διαφορών.

Η παρουσίαση αυτών των θεμάτων γίνεται με απλό, κατανοητό και πρακτικό τρόπο, χωρίς όμως να βλάπτεται η μαθηματική αυστηρότητα.

Βέβαια ο απαιτητικός αναγνώστης θα πρέπει να ανατρέξει σε άλλα πιο ειδικά βιβλία πάνω στα θέματα αυτά, όπου υπάρχουν περισσότερες λεπτομέρειες και άλλη επιπλέον ύλη.

Ο δεύτερος τόμος αποτελείται από τρία κεφάλαια.

Στο έκτο κεφάλαιο περιέχονται βασικά θέματα του διαφορικού λογισμού συναρτήσεων πολλών μεταβλητών, όπως το όριο, η συνέχεια, οι μερικές παράγωγοι, η διαφόριση, ο τύπος του Taylor, οι πεπλεγμένες συναρτήσεις, τα ακρότατα συναρτήσεων και στοιχεία της θεωρίας καμπύλων στο χώρο $\mathbb{R}^3$.

Στο έβδομο κεφάλαιο αναπτύσσονται βασικά θέματα του ολοκληρωτικού λογισμού συναρτήσεων πολλών μεταβλητών, όπως το διπλό και τριπλό ολοκλήρωμα, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα, τα επιεπιφάνεια ολοκληρώματα, τα γενικευμένα ολοκληρώματα και ολοκληρώματα εξαρτώμενα από παράμετρο.

Στο όγδοο κεφάλαιο περιέχονται θέματα της διανυσματικής ανάλυσης, όπως ο διανυσματικός λογισμός, οι διανυσματικές συναρτήσεις, τα αριθμητικά και διανυσματικά πεδία, οι τελεστές (κλίση, απόκλιση, στροφή), τα επικαμπύλια ολοκληρώματα και ο τύπος του Green, τα επιεπιφάνεια ολοκληρώματα και τα Θεωρήματα του Gauss και του Stokes.

Σε κάθε κεφάλαιο περιέχονται ασκήσεις των οποίων οι απαντήσεις βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου.

Θεσσαλονίκη, 2005 Θ. ΚΥΒΕΝΤΙΔΗΣ

Περιεχόμενα

ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΚΑΙ ΣΕΙΡΕΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5
ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ
[Συνοπτική παρουσίαση διαφορικού και ολοκληρωτικού
λογισμού συναρτήσεων πολλών μεταβλητών.]

ΤΟΜΟΣ ΤΡΙΤΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9
I. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
II. ΣΕΙΡΕΣ *FOURIER*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10
ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11
ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12
ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

Βιβλία του συγγραφέα Θ. ΚΥΒΕΝΤΙΔΗ

1. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, Τόμος Πρώτος, (σελ. 480, 1987).

1α. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, (σελ. 436, 2004).

2. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ,
Τόμος Δεύτερος, (σελ. 400, 1988).

3. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, Τόμος Τρίτος, (σελ. 478, 1991).

4. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ (Ασκήσεις), (σελ. 560, 1998).

5. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΠΛΗΘΥΣΜΩΝ (Συνεχή Μοντέλα), (σελ. 128, 1993).

6. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΠΛΗΘΥΣΜΩΝ (Διακριτά Μοντέλα), (σελ. 164, 2001).

7. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΚΑΙ ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ,
(σελ. 538, 2001).

8. ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ, (σελ. 320, 1994).

9. ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ (Ασκήσεις), (σελ. 400, 1977).

10. ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
Συναρτήσεων Μιας Πραγματικής Μεταβλητής,
(Δύο Τεύχη: Α, σελ. 640, 2001 – Β, σελ. 312, 2001).

11. ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
Συναρτήσεων Μιας Πραγματικής Μεταβλητής (σελ. 624, 2005).

12. ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
(Τόμος Πρώτος, σελ. 624, Τόμος Δεύτερος, σελ. 616,
Τόμος Τρίτος, σελ. 504, 2006).

ΠΙΝΑΚΑΣ
Ειδικές τιμές των τριγωνομετρικών συναρτήσεων

θ	0° 180°	30° 150°	45° 135°	60° 120°	90° 270°
$\eta\mu\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	± 1
$\sigma\upsilon\nu\theta$	± 1	$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	0
$\varepsilon\varphi\theta$	0	$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$	± 1	$\pm\sqrt{3}$	$\pm\infty$
$\sigma\varphi\theta$	$\pm\infty$	$\pm\sqrt{3}$	± 1	$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

- Το άνω πρόσημο αντιστοιχεί στην πρώτη γραμμή των τιμών της γωνίας θ και το κάτω πρόσημο στη δεύτερη γραμμή των τιμών της γωνίας θ.

- Η αντιστοιχία των μοιρών της γωνίας θ σε ακτίνια είναι:

$$0^\circ \updownarrow 0 \qquad 30^\circ \updownarrow \frac{\pi}{6} \qquad 45^\circ \updownarrow \frac{\pi}{4} \qquad 60^\circ \updownarrow \frac{\pi}{3} \qquad 90^\circ \updownarrow \frac{\pi}{2}$$

και

$$180^\circ \updownarrow \pi \qquad 150^\circ \updownarrow \frac{5\pi}{6} \qquad 135^\circ \updownarrow \frac{3\pi}{4} \qquad 120^\circ \updownarrow \frac{2\pi}{3} \qquad 270^\circ \updownarrow \frac{3\pi}{2}$$

Τυπολόγιο τριγωνομετρικών σχέσεων

$$\eta\mu(\theta_1+\theta_2)=\eta\mu\theta_1\sigma\upsilon\nu\theta_2+\sigma\upsilon\nu\theta_1\eta\mu\theta_2\ ,\quad \eta\mu(\theta_1-\theta_2)=\eta\mu\theta_1\sigma\upsilon\nu\theta_2-\sigma\upsilon\nu\theta_1\eta\mu\theta_2$$

$$\sigma\upsilon\nu(\theta_1+\theta_2)=\sigma\upsilon\nu\theta_1\sigma\upsilon\nu\theta_2-\eta\mu\theta_1\eta\mu\theta_2\ ,\ \sigma\upsilon\nu(\theta_1-\theta_2)=\sigma\upsilon\nu\theta_1\sigma\upsilon\nu\theta_2+\eta\mu\theta_1\eta\mu\theta_2$$

$$\eta\mu 2\theta=2\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta,\qquad \sigma\upsilon\nu 2\theta=\sigma\upsilon\nu^2\theta-\eta\mu^2\theta=2\sigma\upsilon\nu^2\theta-1=1-2\eta\mu^2\theta$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta_1+\sigma\upsilon\nu\theta_2=2\sigma\upsilon\nu\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\ ,$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta_1-\sigma\upsilon\nu\theta_2=-2\eta\mu\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\eta\mu\frac{\theta_1-\theta_2}{2}$$

$$\eta\mu\theta_1+\eta\mu\theta_2=2\eta\mu\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\ ,$$

$$\eta\mu\theta_1-\eta\mu\theta_2=2\eta\mu\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

$$\varepsilon\varphi(\theta_1+\theta_2)=\frac{\varepsilon\varphi\theta_1+\varepsilon\varphi\theta_2}{1-\varepsilon\varphi\theta_1\,\varepsilon\varphi\theta_2}\ ,\quad \varepsilon\varphi(\theta_1-\theta_2)=\frac{\varepsilon\varphi\theta_1-\varepsilon\varphi\theta_2}{1+\varepsilon\varphi\theta_1\,\varepsilon\varphi\theta_2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta_1\,\sigma\upsilon\nu\theta_2=\frac{1}{2}[\sigma\upsilon\nu(\theta_1+\theta_2)+\sigma\upsilon\nu(\theta_1-\theta_2)]$$

$$\eta\mu\theta_1\,\eta\mu\theta_2=\frac{1}{2}[\sigma\upsilon\nu(\theta_1-\theta_2)-\sigma\upsilon\nu(\theta_1+\theta_2)]$$

$$\eta\mu\theta_1\,\sigma\upsilon\nu\theta_2=\frac{1}{2}[\eta\mu(\theta_1+\theta_2)+\eta\mu(\theta_1-\theta_2)]$$

$$\eta\mu 3\theta=3\eta\mu\theta-4\eta\mu^3\theta\ ,\quad \sigma\upsilon\nu 3\theta=4\sigma\upsilon\nu^3\theta-3\sigma\upsilon\nu\theta$$

6

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

1. Εισαγωγή

Οι συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, που είναι το αντικείμενο αυτού και των δύο επομένων κεφαλαίων, ορίζονται σε υποσύνολα του χώρου $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, των διατεταγμένων *n-άδων* πραγματικών αριθμών και παίρνουν τιμές σε υποσύνολα του $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$,

Για $n = m = 1$ έχουμε τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, που είναι οι πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής.

Για $n \geq 2$, $m = 1$ έχουμε τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, δηλαδή

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \to f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R},$$

που είναι οι πραγματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

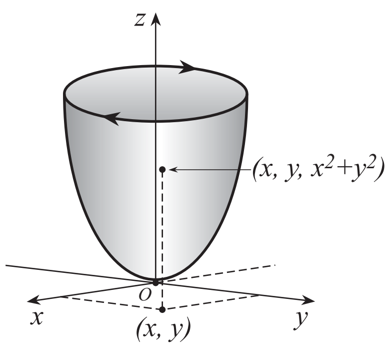
Π.χ. για παράδειγμα έχουμε

α) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

β) $g(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $(x, y) \in A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$,

γ) $\theta(x, y, z) = \dfrac{xy}{z}$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \{(x, y, 0) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

Το γράφημα $(x, y, f(x, y))$ μιας συνάρτησης $z = f(x, y)$ είναι μια επιφάνεια π.χ. η συνάρτηση $z = x^2 + y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ είναι ένα παραβολοειδές από περιστροφή της παραβολής $z = y^2$ περί του άξονα Oz.



Ένας άλλος τρόπος γεωμετρικής παρουσίασης των συναρτήσεων είναι:

α) *οι ισοσταθμισμένες καμπύλες* της συνάρ-

τησης $f(x, y)$, δηλαδή το σύνολο των καμπύλων

$$\{f(x, y) = c, \quad c \text{ σταθερή}, \quad (x, y) \in A \subset \mathbb{R}^2\},$$

β) *οι ισοσταθμισμένες επιφάνειες* της συνάρτησης $f(x, y, z)$, δηλαδή το σύνολο των επιφανειών

$$\{f(x, y, z) = c, \quad c \text{ σταθερή}, \quad (x, y, z) \in B \subset \mathbb{R}^3\}.$$

Παράδειγμα 1

Να βρεθούν οι ισοσταθμισμένες καμπύλες των συναρτήσεων:

α) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $\qquad (x, y) \in A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$,

β) $f(x, y) = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$, $\qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

➠ **α)** Για c σταθερή έχουμε τις ισοσταθμισμένες καμπύλες

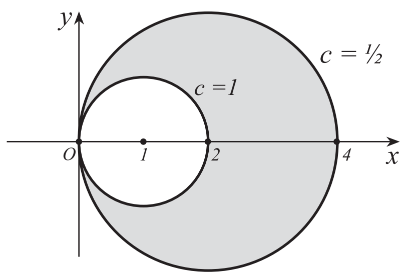
$$\sqrt{4 - x^2 - y^2} = c \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 4 - c^2, \quad 0 \leq c \leq 2$$

που είναι ομόκεντροι κύκλοι, με κέντρο το $(0, 0)$.

β) Για c σταθερή έχουμε τις ισοσταθμισμένες καμπύλες

$$\frac{2x}{x^2 + y^2} = c \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{c}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{c^2}, \; c \neq 0,$$

δηλαδή κύκλους με κέντρο $\left(\dfrac{1}{c}, 0\right)$ και ακτίνα $\dfrac{1}{c}$, $c \neq 0$.



Παράδειγμα 2

Να βρεθούν οι ισοσταθμισμένες επιφάνειες των συναρτήσεων:

α) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $\qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

β) $f(x, y, z) = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$, $\qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, με $(x, y) \neq (0, 0)$.

α) Για c σταθερή έχουμε τις ισοσταθμισμένες επιφάνειες

$$x^2+y^2+z^2=c\,,\qquad c>0\,,$$

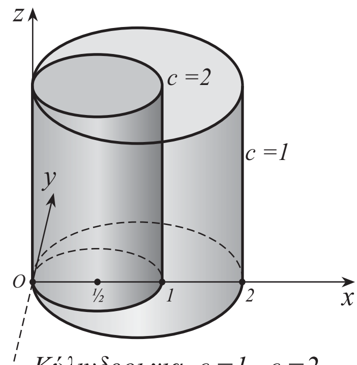
που είναι μια οικογένεια ομόκεντρων σφαιρών, με κέντρο $(0,0,0)$.

β) Για c σταθερή έχουμε τις ισοσταθμισμένες επιφάνειες

$$\frac{2x}{x^2+y^2}=c \;\Leftrightarrow\; \left(x-\frac{1}{c}\right)^2+y^2=\frac{1}{c^2}\,,\quad c\neq 0$$

οι οποίες στο χώρο $\mathbb{R}^3$ είναι μια οικογένεια ομογενέτειρων κυλίνδρων:

$$\left(x-\frac{1}{c}\right)^2+y^2=\frac{1}{c^2}\,,\quad c\neq 0\,,\quad z \text{ αυθαίρετο.}$$



Κύλινδροι για $c=1,\ c=2$

Γραμμικές και ομοπαραλληλικές συναρτήσεις

Δύο σημαντικοί τύποι συναρτήσεων

$$f\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m\,,$$

είναι οι γραμμικές και οι ομοπαραλληλικές συναρτήσεις.

- Η συνάρτηση f λέγεται *γραμμική* όταν, για $x, y\in\mathbb{R}^n$ και $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ισχύει

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)\,.$$

Από τον ορισμό προκύπτει ότι η συνάρτηση f είναι γραμμική αν και μόνον αν οι συνιστώσες συναρτήσεις της $f=(f_1,f_2,\dots,f_m)$

$$f_i\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\,,\quad i=1,2,\dots,m\,,$$

είναι γραμμικές.

Π.χ. η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, που ορίζεται από την απεικόνιση

$$(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\to f(x_1,x_2)=(x_1+2x_2,\ x_1-x_2,x_1)\,,$$

είναι γραμμική, εφόσον οι συνιστώσες συναρτήσεις της f:

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \qquad f_1(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2\,,$$
$$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \qquad f_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2\,,$$
$$f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \qquad f_3(x_1, x_2) = x_1\,,$$

είναι όλες γραμμικές.

- Η συνάρτηση $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ λέγεται *ομοπαραλληλική*, αν υπάρχει γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και σταθερό στοιχείο $c \in \mathbb{R}^m$, τέτοιο ώστε να ισχύει
$$g(x) = f(x) + c\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,.$$

Π.χ. η συνάρτηση $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, με $g(x, y) = \alpha_1 x + \alpha_2 y + c$ όπου α_1, α_2, $c \in \mathbb{R}$ είναι ομοπαραλληλική και το γράφημά της στο $\mathbb{R}^3$ είναι το επίπεδο

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y + c = z \;\Rightarrow\; \alpha_1 x + \alpha_2 y - z + c = 0\,,$$

με κάθετο διάνυσμα σ' αυτό $\overline{n}(-\alpha_1, -\alpha_2, 1)$.

Σύνθεση συναρτήσεων

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$g : A \to \mathbb{R}^m\,, \quad f : B \to \mathbb{R}^k\,, \quad \text{όπου } A \subset \mathbb{R}^n\,,\; B \subset \mathbb{R}^m\,.$$

Όταν είναι $g(A) \subset B$ τότε ορίζεται η σύνθεση $f \circ g$ των συναρτήσεων g και f από τη σχέση

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), \quad x \in A \subset \mathbb{R}^n, \quad g(x) \in B \in \mathbb{R}^m$$

και είναι $f \circ g : A \to \mathbb{R}^k$, $A \subset \mathbb{R}^n$.

Π.χ. αν έχουμε τη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, με $g(x) = (x, x^2, 1)$ και είναι $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, με

$$f(x, y, z) = \left[\frac{-x}{x^2 + y^2 + z^2}\,,\; \frac{-y}{x^2 + y^2 + z^2}\,,\; \frac{-z}{x^2 + y^2 + z^2}\right],$$

τότε η σύνθετη συνάρτηση $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ ορίζεται από τη σχέση

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \left[\frac{-x}{x^2 + x^4 + 1},\; \frac{-x^2}{x^2 + x^4 + 1},\; \frac{-1}{x^2 + x^4 + 1}\right].$$

Νορμικές

Θεωρούμε το σύνολο των διατεταγμένων *n-άδων* πραγματικών αριθμών

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1,\ x_2, \ldots, x_n):\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}\ ,$$

το οποίο με τον ορισμό της πρόσθεσης

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

και του αριθμητικού πολλαπλασιασμού

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1,\ \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)\ , \qquad \lambda \in \mathbb{R}\ ,$$

γίνεται *διανυσματικός χώρος*, πάνω στο σώμα $\mathbb{R}$, διάστασης n.

Η βάση $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n)$ του $\mathbb{R}^n$, όπου

$$\overline{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)\ , \quad \overline{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)\ , \ldots, \overline{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)\ ,$$

λέγεται *ορθοκανονική βάση.*

Αν $x = (x_1,\ x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ τότε γράφεται

$$x = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + \ldots + x_n\overline{e}_n\ ,$$

δηλαδή το x_i είναι η *i-συνιστώσα* του x.

Μια απεικόνιση $P:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+ = \{\upsilon \in \mathbb{R}:\ \upsilon \geq 0\}$
λέγεται *νορμική* όταν επαληθεύει τα τρία αξιώματα:

$[N_1]$ $\quad P(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = (0, 0, \ldots, 0) = \overline{0}$ μηδενικό στοιχείο,

$[N_2]$ $\quad P(\lambda x) = |\lambda| P(x)\ , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}\ ,$

$[N_3]$ $\quad P(x + y) \leq P(x) + P(y)\ , \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n\ .$

Η νορμική σημειώνεται $P(x) = \|x\|\ , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n\ .$

Στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$ επαληθεύεται, εύκολα, ότι οι παρακάτω συναρτήσεις ορίζουν νορμικές:

$$P_1(x) = \|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|\ ,$$

$$P_2(x) = \|x\|_2 = [x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2]^{\frac{1}{2}} \quad \text{(ευκλείδεια νορμική)},$$

$$P_\infty(x) = \|x\|_\infty = max\{|x_1|,\ |x_2|, \ldots, |x_n|\}\ ,$$

όπου $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Αποδεικνύεται, ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύουν οι ανισότητες

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le n\,\|x\|_\infty ,$$

οπότε οι τρεις αυτές νορμικές είναι ισοδύναμες (ορίζουν τα ίδια ανοικτά σύνολα του $\mathbb{R}^n$).

Από μια νορμική ορίζεται πάντοτε μία *απόσταση* με την απεικόνιση

$$d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+ = \{\upsilon \in \mathbb{R} : \upsilon \ge 0\} ,$$

όπου $d(x, y) = \|x - y\|, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$.

Επομένως, στο $\mathbb{R}^n$ ορίζονται οι αποστάσεις:

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \ldots + |x_n - y_n| ,$$

$$d_2(x, y) = \left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

(ευκλείδεια απόσταση),

$$d_\infty(x, y) = max\{|x_1 - y_1|,\ |x_2 - y_2|, \ldots, |x_n - y_n|\} ,$$

όπου $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Ανάλογα, αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι ανισότητες

$$d_\infty(x, y) \le d_2(x, y) \le d_1(x, y) \le n d_\infty(x, y) ,$$

οπότε οι τρεις αυτές αποστάσεις είναι ισοδύναμες (δηλαδή ορίζουν τα ίδια ανοικτά σύνολα του $\mathbb{R}^n$).

1.1. Τοπολογική δομή του $\mathbb{R}^n$ – Ακολουθίες

Θεωρούμε το $\mathbb{R}^n$ με την απόσταση $d(x, y), \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$ και ορίζουμε τις έννοιες:

- *ανοικτή σφαιρική περιοχή* είναι το σύνολο

$$B(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x_0, x) < \varepsilon\} ,$$

  όπου x_0 είναι το κέντρο της και $\varepsilon > 0$ η ακτίνα της.

- *κλειστή σφαιρική περιοχή* είναι το σύνολο

$$\overline{B}(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x_0, x) \le \varepsilon\} ,$$

όπου x_0 είναι το κέντρο της και $\varepsilon > 0$ η ακτίνα της.

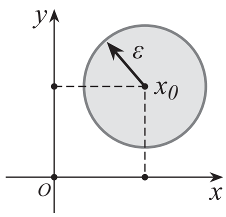
- *σφαιρική επιφάνεια* είναι το σύνολο

$$S(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x_0, x) = \varepsilon\},$$

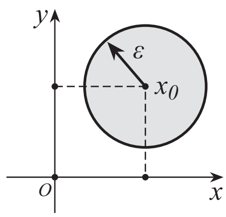
όπου x_0 είναι το κέντρο της και $\varepsilon > 0$ η ακτίνα της.

Π.χ. στο $\mathbb{R}^2$ έχουμε τα παρακάτω σχήματα με την ευκλείδεια απόσταση

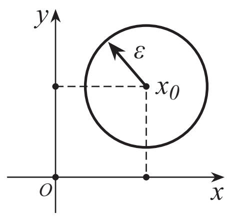
$$d_2(x, y) = [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}}, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^2 .$$



Ανοικτή σφαιρική περιοχή: εσωτερικό του κύκλου



Κλειστή σφαιρική περιοχή: εσωτερικό του κύκλου και περιφέρεια



Σφαιρική επιφάνεια: η περιφέρεια του κύκλου

Είδη σημείων

Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ και $\alpha \in \mathbb{R}^n$:

- αν το $\alpha \in A$ και υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε

$$B(\alpha, \varepsilon) \subset A,$$

τότε λέμε ότι το α είναι *εσωτερικό σημείο* του A.

- αν το $\alpha \in A$ και υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε

$$B(\alpha, \varepsilon) \cap A = \{\alpha\},$$

τότε λέμε ότι το α είναι *μεμονωμένο σημείο* του A.

- αν το $\alpha \in A$ ή $\alpha \notin A$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$(B(\alpha, \varepsilon) - \{\alpha\}) \cap A \neq \varnothing,$$

τότε λέμε ότι το α είναι *σημείο συσσώρευσης* του A.

- αν το $\alpha \in A$ ή $\alpha \notin A$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$B(\alpha, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing,$$

τότε λέμε ότι το α είναι *σημείο περιβλήματος* του A.

- αν το $\alpha \in A$ ή $\alpha \notin A$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$B(\alpha,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing \quad \text{και} \quad B(\alpha,\varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n - A) \neq \varnothing,$$

τότε λέμε ότι το α είναι *συνοριακό σημείο* του A.

Το *σύνορο* του υποσυνόλου $A \subset \mathbb{R}^n$, συμβολίζεται ∂A και είναι το σύνολο των συνοριακών σημείων του.

Αν θέσουμε $cA = \mathbb{R}^n - A$ το συμπλήρωμα του A, τότε ισχύει

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{cA},$$

οπότε το σύνορο του συνόλου A είναι κλειστό σύνολο.

Σημειώνουμε με $\mathring{A}$ όλα τα εσωτερικά σημεία του A και με $\overline{A}$ όλα τα σημεία περιβλήματος του A.

Προφανώς, ισχύει η βασική σχέση $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$.

Όταν είναι $A = \mathring{A}$ το σύνολο A λέγεται *ανοικτό* και όταν είναι $A = \overline{A}$ το σύνολο A λέγεται *κλειστό*.

Τα σύνολα $\mathbb{R}^n$ και το κενό σύνολο $\varnothing$ είναι ανοικτά και κλειστά σύνολα, συγχρόνως.

Κάθε *ανοικτό διάστημα* του $\mathbb{R}^n$

$$\mathring{I} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ \alpha_i < x_i < \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n\},$$

είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και κάθε *κλειστό διάστημα* του $\mathbb{R}^n$

$$\overline{I} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ \alpha_1 \leq x_i \leq \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n\}$$

είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

Για παράδειγμα, για το σύνολο (λωρίδα)

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in \mathbb{R}, \ 1 < y \leq 3\},$$

έχουμε:

$$\mathring{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in \mathbb{R}, \ 1 < y < 3\}, \qquad \overline{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in \mathbb{R}, \ 1 \leq y \leq 3\}$$

και $\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in \mathbb{R}, \ y = 1, \ y = 3\}$.

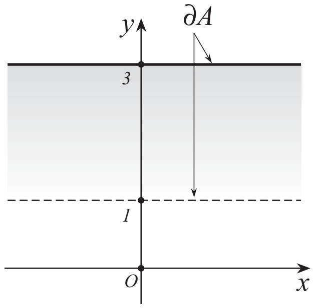
Επίσης, για το σύνολο

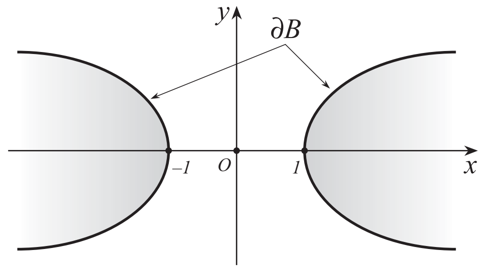
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 - y^2 > 1\},$$

έχουμε

$$\overset{\circ}{B} = B\,, \quad \overline{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \geq 1\}\,,$$

και $$\partial B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\}\,.$$





Ακολουθίες του χώρου $\mathbb{R}^n$

Κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$, που απεικονίζει στο σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, k, \ldots\}$ στο χώρο $\mathbb{R}^n$ λέγεται *ακολουθία σημείων του χώρου* $\mathbb{R}^n$ και συμβολίζεται (x_k), όπου

$$x_k = (x_1^{(k)},\ x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}\,.$$

Η ακολουθία (x_k) λέγεται *συγκλίνουσα* στο σημείο $x_0 \in \mathbb{R}^n$, όπου $x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, αν για κάθε $\varepsilon > 0,\ \exists\, k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε: $\forall\, k > k_0 \ \Rightarrow\ d(x_k, x_0) < \varepsilon$, όπου d είναι η απόσταση στο χώρο $\mathbb{R}^n$.

Γράφουμε $\lim\limits_{k \to +\infty} x_k = x_0$ ή απλώς $\lim x_k = x_0$,

και το x_0 λέγεται *όριο* της ακολουθίας (x_k).

Το επόμενο θεώρημα είναι βασικό για τη σύγκλιση και τον προσδιορισμό του ορίου ακολουθίας του $\mathbb{R}^n$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1: *Αν* (x_k), *όπου* $x_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n$, *είναι μια ακολουθία του* $\mathbb{R}^n$ *και* $x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \in \mathbb{R}^n$, *τότε ισχύει*

$$\lim_{k \to +\infty} x_k = x_0 \ \Leftrightarrow\ \lim_{k \to +\infty} x_i^{(k)} = x_i^{(0)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$