ΘΩΜΑ ΚΥΒΕΝΤΙΔΗ

ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΟΜΟΣ ΤΡΙΤΟΣ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει τη σφραγίδα του εκδότη

ΘΩΜΑΣ Α. ΚΥΒΕΝΤΙΔΗΣ

Γεννήθηκε το 1947 στο Νέο Πετρίτσι του Ν. Σερρών.
Το 1965 αποφοίτησε από το εξατάξιο Γυμνάσιο Σιδηροκάστρου του Ν. Σερρών και εγγράφηκε στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης.
Πήρε το πτυχίο των Μαθηματικών το 1969.
Αναγορεύτηκε διδάκτορας στο τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης το 1979 και από το 1972 μέχρι σήμερα εργάζεται σ' αυτό.

ISBN set 960-431-951-5
ISBN Τ.3 960-431-950-7

Copyright © 2005 ΘΩΜΑΣ Α. ΚΥΒΕΝΤΙΔΗΣ, Εκδόσεις ΖΗΤΗ
Ανατύπωση διορθωμένη 2009

Απαγορεύεται η με κάθε τρόπο αντιγραφή ή αναπαραγωγή μέρους ή όλου του βιβλίου χωρίς την έγγραφη άδεια του συγγραφέα και του εκδότη.

---

www.ziti.gr

Φωτοστοιχειοθεσία Εκτύπωση
Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 23920 72222 (5 γραμ.) - Fax: 23920 72229
e-mail: info@ziti.gr

Βιβλιοπωλείο
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ. 2310 203720, Fax 2310 211305
e-mail: sales@ziti.gr

“Συνήθως όμως διερευνούν τις αιτίες της μεταβολής των όντων ως εξής: εξετάζουν τί έρχεται μετά από τί, ποιά είναι η πρώτη ενέργεια που κάτι έκανε ή έπαθε, και συνεχίζουν με τον ίδιο τρόπο στα επόμενα.

Οι αρχές όμως που προκαλούν τη φυσική κίνηση είναι δύο, και η δεύτερη από αυτές δεν είναι φυσική – γιατί δεν έχει μέσα της αρχή κίνησης.

Τέτοια αρχή είναι, ό,τι κινεί χωρίς να κινείται, όπως αυτό που είναι εντελώς ακίνητο και προηγείται των πάντων, και ακόμη το «τί είναι κάτι» και η μορφή των όντων – γιατί αποτελούν ένα τέλος και έναν σκοπό.

Συνεπώς επειδή η φύση έχει σκοπό, θα πρέπει ο φυσικός να γνωρίζει και αυτό το είδος της αιτίας, και να δίνει την πλήρη αιτιολογία απαντώντας στο ερώτημα ″γιατί″: πώς από αυτό γίνεται κατ’ ανάγκην εκείνο.”

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ (384-323 π.Χ.)
Περί Φύσεως (Ενότητα 7)
(Το δεύτερο βιβλίο των Φυσικών)

Αφιερώνεται στη μνήμη
των γιαγιάδων μου
Ευθυμίας και Σοφίας

Πρόλογος

Η σειρά με τον τίτλο «Ανώτερα Μαθηματικά», που αποτελείται από τρεις τόμους, γράφηκε για να προσφέρει σε Μαθηματικούς και μη Μαθηματικούς, μια αξιόπιστη και σχετικά συνοπτική παρουσίαση βασικών θεμάτων των Μαθηματικών, και κυρίως της Μαθηματικής Ανάλυσης.

Τα θέματα που αναπτύσσονται αφορούν την Άλγεβρα, την Αναλυτική Γεωμετρία, τις Ακολουθίες και Σειρές πραγματικών αριθμών, το Διαφορικό και Ολοκληρωτικό Λογισμό συναρτήσεων μιας ή περισσοτέρων μεταβλητών, τη Διανυσματική Ανάλυση, τις Σειρές Fourier, τις Μιγαδικές Συναρτήσεις, τις Διαφορικές Εξισώσεις και τις Εξισώσεις Διαφορών.

Η παρουσίαση αυτών των θεμάτων γίνεται με απλό, κατανοητό και πρακτικό τρόπο, χωρίς όμως να βλάπτεται η μαθηματική αυστηρότητα.

Βέβαια ο απαιτητικός αναγνώστης θα πρέπει να ανατρέξει σε άλλα πιο ειδικά βιβλία πάνω στα θέματα αυτά, όπου υπάρχουν περισσότερες λεπτομέρειες και άλλη επί πλέον ύλη.

Ο τρίτος τόμος αποτελείται από τέσσερα κεφάλαια.

Στο ένατο κεφάλαιο περιέχονται στοιχεία της διανυσματικής ανάλυσης όπως ο διανυσματικός λογισμός, τα διανυσματικά πεδία, οι τελεστές (κλίση, απόκλιση, στροφή), το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα και ο τύπος του Green, τα επιεπιφάνεια ολοκληρώματα και τα θεωρήματα του Gauss και του Stokes, καθώς επίσης και στοιχεία από τις σειρές Fourier.

Στο δέκατο κεφάλαιο αναπτύσσονται τα βασικά θέματα των μιγαδικών συναρτήσεων όπως οι μιγαδικοί αριθμοί, το όριο, η συνέχεια, η παράγωγος, οι αναλυτικές συναρτήσεις, οι σύμμορφες απεικονίσεις, οι ομογραφικοί μετασχηματισμοί, η μιγαδική ολοκλήρωση, οι σειρές του Taylor και του Laurent, τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα και οι αρμονικές συναρτήσεις.

Στο ενδέκατο κεφάλαιο περιέχονται οι διαφορικές εξισώσεις που αναφέρονται σε διαφορικές εξισώσεις πρώτης και ανώτερης τάξης, σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις τάξης $n \geq 2$*, σε σειρές ως λύσεις διαφορικών εξισώσεων, στα συστήματα διαφορικών εξισώσεων, και στις μεθόδους επίλυσής τους (απαλοιφής, πινάκων), στις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης και στους μετασχηματισμούς Laplace.*

Στο δωδέκατο κεφάλαιο αναφέρονται θέματα εξισώσεων διαφορών όπως οι γραμμικές εξισώσεις διαφορών πρώτης και ανώτερης τάξης, η ευστάθεια των λύσεων, τα γραμμικά συστήματα εξισώσεων διαφορών, η πρώτη γραμμική προσέγγιση και οι περιοδικές λύσεις.

Σε κάθε κεφάλαιο υπάρχουν ασκήσεις με τις απαντήσεις τους.

Θεσσαλονίκη, 2004 Θ. ΚΥΒΕΝΤΙΔΗΣ

Περιεχόμενα

ΤΟΜΟΣ ΤΡΙΤΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9
I. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

II. ΣΕΙΡΕΣ FOURIER

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10
ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11
ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12
ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ

ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ

Βιβλία του συγγραφέα ΘΩΜΑ ΚΥΒΕΝΤΙΔΗ

Α. *Διακριτά Μαθηματικά*

1. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΚΑΙ ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ, (σελ. 552, 2001).
2. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΠΛΗΘΥΣΜΩΝ (*Διακριτά Μοντέλα*), (σελ. 164, 2001).

Β. *Διαφορικές Εξισώσεις*

1. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, *Τόμος Πρώτος*, (σελ. 480, 1987).
2. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ, *Τόμος Δεύτερος*, (σελ. 400, 1988).
3. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, *Τόμος Τρίτος*, (σελ. 478, 1991), (*Ποιοτική Θεωρία Διαφορικών Εξισώσεων*).
4. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ (*Ασκήσεις*), (σελ. 560, 1998).
5. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, (σελ. 512, 2007).
6. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΠΛΗΘΥΣΜΩΝ (*Συνεχή Μοντέλα*), (σελ. 128, 1993).
7. ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ, (σελ. 320, 1994).
8. ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, (σελ. 384, 2009).

Γ. *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*

1. ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
   Συναρτήσεων Μιας Πραγματικής Μεταβλητής,
   (*Τεύχος Πρώτο*, σελ. 640, 2001 – *Τεύχος Δεύτερο*, σελ. 312, 2001).
2. ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
   Συναρτήσεων Μιας Πραγματικής Μεταβλητής, (σελ. 624, 2005).
3. ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
   Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών, (σελ. 240, 2007).

Δ. *Σειρά Μαθηματικών*

1. ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, Τόμος Πρώτος, (σελ. 628, 2005).
   (Άλγεβρα, Αναλυτική Γεωμετρία, Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός)
2. ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, Τόμος Δεύτερος, (σελ. 616, 2006).
   (Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών)
3. ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, Τόμος Τρίτος, (σελ. 504, 2005).
   (Διανυσματική Ανάλυση, Σειρές Fourier, Μιγαδικές Συναρτήσεις, Διαφορικές Εξισώσεις, Εξισώσεις Διαφορών).

Ε. *Τοπολογία*

1. ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ (*Ασκήσεις*), (σελ. 400, 1977).
2. ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ ΜΕΤΡΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ (σελ. 336, 2009).

ΠΙΝΑΚΑΣ

Ειδικές τιμές των τριγωνομετρικών συναρτήσεων

θ	0° 180°	30° 150°	45° 135°	60° 120°	90° 270°
$\eta\mu\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	± 1
$\sigma\upsilon\nu\theta$	± 1	$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	0
$\varepsilon\varphi\theta$	0	$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$	± 1	$\pm\sqrt{3}$	$\pm\infty$
$\sigma\varphi\theta$	$\pm\infty$	$\pm\sqrt{3}$	± 1	$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

- Το άνω πρόσημο αντιστοιχεί στην πρώτη γραμμή των τιμών της γωνίας θ και το κάτω πρόσημο στη δεύτερη γραμμή των τιμών της γωνίας θ.

- Η αντιστοιχία των μοιρών της γωνίας θ σε ακτίνια είναι:

$$\begin{array}{ccccc} 0^\circ & 30^\circ & 45^\circ & 60^\circ & 90^\circ \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 0 & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} \end{array}$$

και

$$\begin{array}{ccccc} 180^\circ & 150^\circ & 135^\circ & 120^\circ & 270^\circ \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \pi & \frac{5\pi}{6} & \frac{3\pi}{4} & \frac{2\pi}{3} & \frac{3\pi}{2} \end{array}$$

Τυπολόγιο τριγωνομετρικών σχέσεων

$$\eta\mu(\theta_1+\theta_2)=\eta\mu\theta_1\sigma\upsilon\nu\theta_2+\sigma\upsilon\nu\theta_1\eta\mu\theta_2\ ,\quad \eta\mu(\theta_1-\theta_2)=\eta\mu\theta_1\sigma\upsilon\nu\theta_2-\sigma\upsilon\nu\theta_1\eta\mu\theta_2$$

$$\sigma\upsilon\nu(\theta_1+\theta_2)=\sigma\upsilon\nu\theta_1\sigma\upsilon\nu\theta_2-\eta\mu\theta_1\eta\mu\theta_2\ ,\ \sigma\upsilon\nu(\theta_1-\theta_2)=\sigma\upsilon\nu\theta_1\sigma\upsilon\nu\theta_2+\eta\mu\theta_1\eta\mu\theta_2$$

$$\eta\mu 2\theta=2\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta\ ,\qquad \sigma\upsilon\nu 2\theta=\sigma\upsilon\nu^2\theta-\eta\mu^2\theta=2\sigma\upsilon\nu^2\theta-1=1-2\eta\mu^2\theta$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta_1+\sigma\upsilon\nu\theta_2=2\sigma\upsilon\nu\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\ ,$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta_1-\sigma\upsilon\nu\theta_2=-2\eta\mu\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\eta\mu\frac{\theta_1-\theta_2}{2}$$

$$\eta\mu\theta_1+\eta\mu\theta_2=2\eta\mu\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\ ,$$

$$\eta\mu\theta_1-\eta\mu\theta_2=2\eta\mu\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

$$\varepsilon\varphi(\theta_1+\theta_2)=\frac{\varepsilon\varphi\theta_1+\varepsilon\varphi\theta_2}{1-\varepsilon\varphi\theta_1\,\varepsilon\varphi\theta_2}\ ,\quad \varepsilon\varphi(\theta_1-\theta_2)=\frac{\varepsilon\varphi\theta_1-\varepsilon\varphi\theta_2}{1+\varepsilon\varphi\theta_1\,\varepsilon\varphi\theta_2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta_1\,\sigma\upsilon\nu\theta_2=\frac{1}{2}[\sigma\upsilon\nu(\theta_1+\theta_2)+\sigma\upsilon\nu(\theta_1-\theta_2)]$$

$$\eta\mu\theta_1\,\eta\mu\theta_2=\frac{1}{2}[\sigma\upsilon\nu(\theta_1-\theta_2)-\sigma\upsilon\nu(\theta_1+\theta_2)]$$

$$\eta\mu\theta_1\,\sigma\upsilon\nu\theta_2=\frac{1}{2}[\eta\mu(\theta_1+\theta_2)+\eta\mu(\theta_1-\theta_2)]$$

$$\eta\mu 3\theta=3\eta\mu\theta-4\eta\mu^3\theta\ ,\quad \sigma\upsilon\nu 3\theta=4\sigma\upsilon\nu^3\theta-3\sigma\upsilon\nu\theta$$

9

I. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

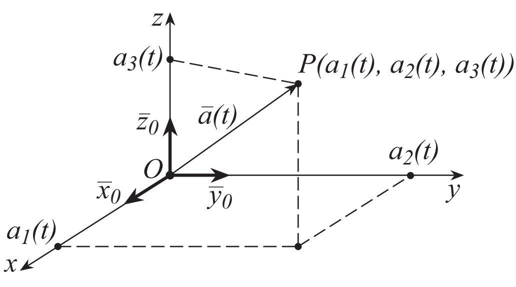
Παραθέτουμε εδώ μια συνοπτική παρουσίαση των βασικών θεμάτων της διανυσματικής ανάλυσης.

1. Ορισμοί – Ιδιότητες

Σ' ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε τη διανυσματική συνάρτηση

$$\bar{a}(t) = a_1(t)\bar{x}_0 + a_2(t)\bar{y}_0 + a_3(t)\bar{z}_0 \ ,$$

όπου $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\alpha_3(t)$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, οι *συντεταγμένες του σημείου* P, που λέγονται *συντεταγμένες συναρτήσεις* της $\bar{a}(t)$ και $\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$, $\bar{z}_0$ είναι οι διανυσματικές μονάδες των αξόνων Ox, Oy, Oz, αντίστοιχα.



Το διάνυσμα $\bar{a}(t)$ είναι μια *διανυσματική συνάρτηση* της πραγματικής μεταβλητής $t \in I \subset \mathbb{R}$ και αυτή καθορίζεται από τις τρεις συντεταγμένες αριθμητικές συναρτήσεις $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\alpha_3(t)$, με $t \in I \subset \mathbb{R}$ (I κοινό σύνολο ορισμού τους).

Εσωτερικό γινόμενο

Αν έχουμε τις διανυσματικές συναρτήσεις

$$\overline{a}(t)=a_1(t)\overline{x}_0+a_2(t)\overline{y}_0+a_3(t)\overline{z}_0,$$
$$\overline{\beta}(t)=\beta_1(t)\overline{x}_0+\beta_2(t)\overline{y}_0+\beta_3(t)\overline{z}_0,\quad t\in I\subset\mathbb{R}$$

τότε το *εσωτερικό γινόμενό* τους είναι

$$\overline{a}(t)\cdot\overline{\beta}(t)=a_1(t)\,\beta_1(t)+a_2(t)\,\beta_2(t)+a_3(t)\,\beta_3(t),\quad t\in I$$

και είναι ένας πραγματικός αριθμός.

Γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$\overline{a}(t)\cdot\overline{\beta}(t)=0 \iff \overline{a}(t),\overline{\beta}(t)\ \text{ κάθετα μεταξύ τους}$$

και
$$\overline{a}(t)\cdot\overline{a}(t)=a_1^2(t)+a_2^2(t)+a_3^2(t)$$

είναι το μήκος του διανύσματος $\overline{a}(t)$ (με ευκλείδεια απόσταση) στο τετράγωνο.

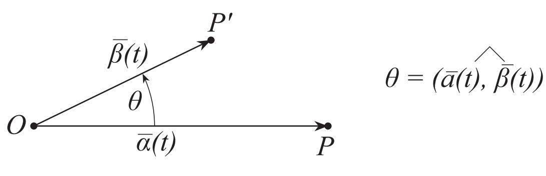
Μήκος του διανύσματος $\overline{a}(t)$ (με ευκλείδεια απόσταση) είναι

$$|\overline{a}(t)|=\sqrt{a_1^2(t)+a_2^2(t)+a_3^2(t)},\quad t\in I.$$

και το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ως

$$\overline{a}(t)\cdot\overline{\beta}(t)=|\overline{a}(t)||\overline{\beta}(t)|\ \sigma\upsilon\nu(\widehat{\overline{a}(t),\overline{\beta}(t)}),$$

όπου $(\widehat{\overline{a}(t),\overline{\beta}(t)})$ η γωνία των δύο ημιευθειών $OP,\ OP'$ *όπου* $P(a_1(t),a_2(t),a_3(t))$, $P'(\beta_1(t),\beta_2(t),\beta_3(t))$.



Ιδιότητες

i) $\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}=\overline{\beta}\cdot\overline{\alpha}$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)

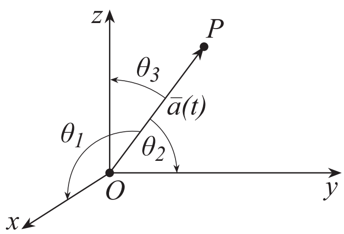
ii) $(\lambda\overline{\alpha})\cdot\overline{\beta}=\lambda(\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}),\ \lambda\in\mathbb{R}$ (πραγματικοί αριθμοί)

iii) $(\overline{\alpha}+\overline{\beta})\cdot\overline{\gamma}=\overline{\alpha}\cdot\overline{\gamma}+\overline{\beta}\cdot\overline{\gamma}$

iv) $\overline{\alpha}\cdot\overline{\alpha}\geq 0$ *και* $\overline{\alpha}\cdot\overline{\alpha}=0 \Leftrightarrow \overline{\alpha}=\overline{0}$,

$\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}=0 \Leftrightarrow \overline{\alpha},\overline{\beta}$ κάθετα ή $\overline{\alpha}=\overline{0}$ ή $\overline{\beta}=\overline{0}$.

Συνημίτονα κατεύθυνσης



Αν θέσουμε $\theta_1=(\widehat{\overline{a},\overline{x}_0})$, $\theta_2=(\widehat{\overline{a},\overline{y}_0})$, $\theta_3=(\widehat{\overline{a},\overline{z}_0})$ τότε έχουμε

$$a_1=\overline{a}\cdot\overline{x}_0=|\overline{a}||\overline{x}_0|\,\sigma\upsilon\nu\theta_1=|\overline{\alpha}|\,\sigma\upsilon\nu\theta_1 ,$$

$$a_2=\overline{a}\cdot\overline{y}_0=|\overline{a}||\overline{y}_0|\,\sigma\upsilon\nu\theta_2=|\overline{\alpha}|\,\sigma\upsilon\nu\theta_2 ,$$

$$a_3=\overline{a}\cdot\overline{z}_0=|\overline{a}||\overline{z}_0|\,\sigma\upsilon\nu\theta_3=|\overline{\alpha}|\,\sigma\upsilon\nu\theta_3 .$$

Άρα, είναι

$$\overline{a}=(\overline{a}\cdot\overline{x}_0)\overline{x}_0+(\overline{a}\cdot\overline{y}_0)\overline{y}_0+(\overline{a}\cdot\overline{z}_0)\overline{z}_0=$$
$$=|\overline{a}|(\sigma\upsilon\nu\theta_1\overline{x}_0+\sigma\upsilon\nu\theta_2\overline{y}_0+\sigma\upsilon\nu\theta_3\overline{z}_0)$$

$$\Rightarrow\ \sigma\upsilon\nu\theta_1\overline{x}_0+\sigma\upsilon\nu\theta_2\overline{y}_0+\sigma\upsilon\nu\theta_3\overline{z}_0=\frac{\overline{a}}{|\overline{a}|} ,$$

δηλαδή το διάνυσμα

$$\sigma\upsilon\nu\theta_1\overline{x}_0+\sigma\upsilon\nu\theta_2\overline{y}_0+\sigma\upsilon\nu\theta_3\overline{z}_0$$

είναι παράλληλο προς το $\overline{a}$ και μοναδιαίο.

Επομένως, έχουμε (ευκλείδεια απόσταση)

$$\sigma\upsilon\nu^2\theta_1+\sigma\upsilon\nu^2\theta_2+\sigma\upsilon\nu^2\theta_3=1 .$$

Οι αριθμοί

$$\lambda_1=\sigma\upsilon\nu\theta_1 ,\quad \lambda_2=\sigma\upsilon\nu\theta_2 ,\quad \lambda_3=\sigma\upsilon\nu\theta_3$$

λέγονται *συνημίτονα κατεύθυνσης* του διανύσματος $\overline{a}$.

Εξωτερικό γινόμενο

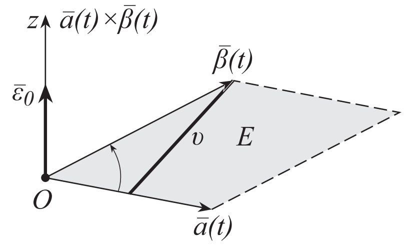
Αν έχουμε τις διανυσματικές συναρτήσεις

$$\overline{a}(t) = \alpha_1(t)\overline{x}_0 + \alpha_2(t)\overline{y}_0 + \alpha_3(t)\overline{z}_0$$
$$\overline{\beta}(t) = \beta_1(t)\overline{x}_0 + \beta_2(t)\overline{y}_0 + \beta_3(t)\overline{z}_0, \quad t \in I$$

τότε το *εξωτερικό γινόμενό* τους $\overline{a}(t) \times \overline{\beta}(t)$ είναι διάνυσμα και έχει:

α) μέτρο $|\overline{a}(t) \times \overline{\beta}(t)| = |\overline{a}(t)||\overline{\beta}(t)||\eta\mu(\widehat{\overline{\alpha}, \overline{\beta}})|$

β) είναι κάθετο στο επίπεδο των $\overline{a}(t), \overline{\beta}(t)$.



Προφανώς, μπορούμε να γράψουμε

$$\overline{a} \times \overline{\beta} = |\overline{a}||\overline{\beta}||\eta\mu(\widehat{\overline{\alpha}, \overline{\beta}})|\overline{\varepsilon}_0$$

όπου $\overline{\varepsilon}_0$ μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη φορά του διανύσματος $\overline{a} \times \overline{\beta}$.

Επειδή το $\upsilon = |\overline{\beta}||\eta\mu(\widehat{\overline{\alpha}, \overline{\beta}})|$ είναι το ύψος του παραλληλογράμμου (με πλευρές τα διανύσματα $\overline{a}(t)$, $\overline{\beta}(t)$, τότε το εμβαδόν του E δίνεται από τον τύπο

$$E = |\overline{a}| \cdot \upsilon = |\overline{\alpha}||\overline{\beta}||\eta\mu(\widehat{\overline{\alpha}, \overline{\beta}})| = |\overline{\alpha} \times \overline{\beta}| \; .$$

Άρα, το μέτρο του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$ είναι ίσο με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που έχει ως διαδοχικές πλευρές τις $\overline{\alpha}$ και $\overline{\beta}$.

Συμβολικά, το εξωτερικό γινόμενο γράφεται

$$\overline{\alpha} \times \overline{\beta} = \begin{vmatrix} \overline{x}_0 & \overline{y}_0 & \overline{z}_0 \\ \alpha_1 & a_2 & a_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\overline{x}_0 + (\beta_1\alpha_3 - \beta_3\alpha_1)\overline{y}_0 + (a_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)\overline{z}_0 \; .$$

Προφανώς, ισχύει

$$\overline{\alpha}\times\overline{\beta}=\overline{0} \;\Leftrightarrow\; \overline{\alpha}=\overline{0} \;\text{ ή }\; \overline{\beta}=\overline{0} \;\text{ ή }\; \overline{\alpha},\overline{\beta} \;\text{ είναι συγγραμμικά}$$

$$(\text{δηλ. } \;\overline{\alpha}=\lambda\overline{\beta},\; \lambda\in\mathbb{R}).$$

Ιδιότητες

i) $\overline{\alpha}\times\overline{\beta}=-(\overline{\beta}\times\overline{\alpha})$,

ii) $(\overline{\alpha}+\overline{\beta})\times\overline{\gamma}=\overline{\alpha}\times\overline{\gamma}+\overline{\beta}\times\overline{\gamma}$,

iii) $\overline{\alpha}\times(\overline{\beta}+\overline{\gamma})=\overline{\alpha}\times\overline{\beta}+\overline{\alpha}\times\overline{\gamma}$,

iv) $(\lambda\overline{\alpha})\times\overline{\beta}=\overline{\alpha}\times(\lambda\overline{\beta})=\lambda(\overline{\alpha}\times\overline{\beta}),\quad \lambda\in\mathbb{R}$.

Μικτό γινόμενο

Αν έχουμε τους διανυσματικές συναρτήσεις

$$\overline{\alpha}(t)=a_1(t)\overline{x}_0+a_2(t)\overline{y}_0+a_3(t)\overline{z}_0\,,$$
$$\overline{\beta}(t)=\beta_1(t)\overline{x}_0+\beta_2(t)\overline{y}_0+\beta_3(t)\overline{z}_0\,,$$
$$\overline{\gamma}(t)=\gamma_1(t)\overline{x}_0+\gamma_2(t)\overline{y}_0+\gamma_3(t)\overline{z}_0\,,\quad t\in I$$

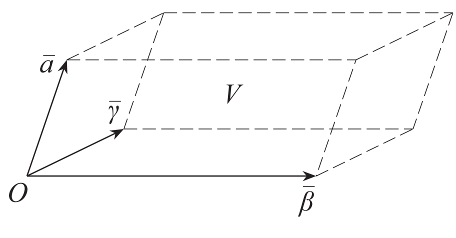
τότε το *μικτό γινόμενό* τους είναι ο αριθμός

$$[\overline{a}(t),\overline{\beta}(t),\overline{\gamma}(t)]=\overline{\alpha}(t)\cdot(\overline{\beta}(t)\times\overline{\gamma}(t)),\quad t\in I\,.$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις του εσωτερικού και εξωτερικού γινομένου παίρνουμε τον τύπο

$$[\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma}]=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}\,.$$

Η απόλυτη τιμή του μικτού γινομένου είναι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου με ακμές τα διανύσματα $\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma}$



δηλαδή ο όγκος $V=|[\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma}]|$.

Ιδιότητες

i) $[\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma}]=0 \Leftrightarrow \overline{\alpha}=0$ ή $\overline{\beta}=0$ ή $\overline{\gamma}=0$ ή $\overline{\alpha}\perp\overline{\beta}\times\overline{\gamma}$

ή δύο είναι μεταξύ τους συγγραμμικά.

ii) $[\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma}]=[\overline{\gamma},\overline{\alpha},\overline{\beta}]=[\overline{\beta},\overline{\gamma},\overline{\alpha}]$ (κυκλική εναλλαγή).

iii) $[\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma}]=-[\overline{\beta},\overline{\alpha},\overline{\gamma}]=-[\overline{\gamma},\overline{\beta},\overline{\alpha}]=-[\overline{\alpha},\overline{\gamma},\overline{\beta}]$.

Ιδιότητες διανυσματικών συναρτήσεων

Όριο

$$\lim_{t\to t_0}\overline{a}(t)=\lim_{t\to t_0}a_1(t)\overline{x}_0+\lim_{t\to t_0}a_2(t)\overline{y}_0+\lim_{t\to t_0}a_3(t)\overline{z}_0$$

οπότε όταν υπάρχουν τα αριθμητικά όρια

$$\lim_{t\to t_0}a_1(t),\quad \lim_{t\to t_0}a_2(t),\quad \lim_{t\to t_0}a_3(t)$$

τότε υπάρχει και το όριο $\lim_{t\to t_0}\overline{a}(t)$, και αντίστροφα.

Όταν υπάρχουν τα όρια $\lim_{t\to t_0}\overline{a}(t)$, $\lim_{t\to t_0}\overline{\beta}(t)$ και $\lim_{t\to t_0}\overline{\gamma}(t)$ τότε ισχύουν:

i) $\lim_{t\to t_0}[\overline{a}(t)+\overline{\beta}(t)]=\lim_{t\to t_0}\overline{a}(t)+\lim_{t\to t_0}\overline{\beta}(t)$,

ii) $\lim_{t\to t_0}[\lambda(t)\,\overline{a}(t)]=\lim_{t\to t_0}\lambda(t)\lim_{t\to t_0}\overline{a}(t)$,

iii) $\lim_{t\to t_0}\left[\dfrac{\overline{\alpha}(t)}{\lambda(t)}\right]=\dfrac{\lim_{t\to t_0}\overline{a}(t)}{\lim_{t\to t_0}\lambda(t)}$, αν $\lim_{t\to t_0}\lambda(t)\neq 0$,

iv) $\lim_{t\to t_0}\left[\overline{a}(t)\cdot\overline{\beta}(t)\right]=\lim_{t\to t_0}\overline{a}(t)\cdot\lim_{t\to t_0}\overline{\beta}(t)$, $"\cdot"$ εσωτερικό γινόμενο,

v) $\lim_{t\to t_0}\left[\overline{a}(t)\times\overline{\beta}(t)\right]=\lim_{t\to t_0}\overline{a}(t)\times\lim_{t\to t_0}\overline{\beta}(t)$,

vi) αν $t=\lambda(s)$ και $\lim_{s\to s_0}\lambda(s)=t_0$, $\lim_{t\to t_0}\overline{a}(t)=\overline{a}(t_0)$

$$\lim_{s\to s_0}\overline{a}(t)=\lim_{s\to s_0}\overline{a}(\lambda(s))=\overline{a}(\lim_{s\to s_0}\lambda(s)).$$

Συνέχεια

Η διανυσματική συνάρτηση $\overline{a}(t) = a_1(t)\overline{x}_0 + a_2(t)\overline{y}_0 + a_3(t)\overline{z}_0$, $t \in I$ είναι συνεχής στο $t_0 \in I$, όταν οι συναρτήσεις

$$a_1(t),\ a_2(t),\ a_3(t), \quad t \in I$$

είναι συνεχείς στο $t_0 \in I$, και αντίστροφα.

Για τη συνέχεια των διανυσματικών συναρτήσεων αποδεικνύεται ότι το άθροισμα, το εσωτερικό και εξωτερικό γινόμενο συνεχών διανυσματικών συναρτήσεων είναι συνεχείς συναρτήσεις, και ακόμη η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση.

Παράγωγος

Μια διανυσματική συνάρτηση

$$\overline{a}(t) = a_1(t)\overline{x}_0 + a_2(t)\overline{y}_0 + a_3(t)\overline{z}_0, \quad t \in I \subset \mathbb{R}$$

είναι παραγωγίσιμη στο $t_0 \in I$, όταν οι συντεταγμένες συναρτήσεις $a_1(t)$, $a_2(t)$, $a_3(t)$, $t \in I$ είναι παραγωγίσιμες στο $t_0 \in I$, και αντίστροφα.

Τότε, έχουμε

$$\overline{a}'(t) = a_1'(t)\overline{x}_0 + a_2'(t)\overline{y}_0 + a_3'(t)\overline{z}_0 .$$

Εύκολα, αποδεικνύεται ότι αν η $\overline{a}(t)$ είναι παραγωγίσιμη στο t_0 τότε είναι συνεχής στο t_0.

Αν οι συναρτήσεις $\overline{a}(t)$, $\overline{\beta}(t)$, $\overline{\gamma}(t)$ και $\lambda(t)$ είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα $I \subset \mathbb{R}$ τότε ισχύουν:

1) $[\overline{a}(t) + \overline{\beta}(t)]' = \overline{a}'(t) + \overline{\beta}'(t)$,

2) $\left[\lambda(t)\,\overline{a}(t)\right]' = \lambda(t)\,\overline{a}'(t) + \lambda'(t)\,\overline{a}(t)$,

3) $[\overline{a}(t)\cdot\overline{\beta}(t)]' = \overline{a}'(t)\cdot\overline{\beta}(t) + \overline{a}(t)\cdot\overline{\beta}'(t)$, $"\cdot"$ εσωτερικό γινόμενο,

4) $[\overline{a}(t)\times\overline{\beta}(t)]' = \overline{a}'(t)\times\overline{\beta}(t) + \overline{a}(t)\times\overline{\beta}'(t)$,

5) $[\overline{a}(t), \overline{\beta}(t), \overline{\gamma}(t)]' = \overline{a}'(t)\cdot(\overline{\beta}(t)\times\overline{\gamma}(t)) + \overline{a}(t)\cdot(\overline{\beta}'(t)\times\overline{\gamma}(t))$
$$+\overline{a}(t)\cdot(\overline{\beta}(t)\times\overline{\gamma}'(t)),$$

6) $\overline{a}(t)\times(\overline{\beta}(t)\times\overline{\gamma}(t)) = \overline{a}'(t)\times(\overline{\beta}(t)\times\overline{\gamma}(t)) + \overline{a}(t)\times(\overline{\beta}'(t)\times\overline{\gamma}(t))$
$$+\overline{a}(t)\times(\overline{\beta}(t)\times\overline{\gamma}'(t)),$$

7) Παραγώγιση σύνθετης συνάρτησης $t=\varphi(s)$, φ παραγωγίσιμη.

$$\frac{d\overline{a}}{ds}=\frac{d\overline{a}}{dt}\frac{dt}{ds},$$

8) αν $\overline{a}(t)=$ σταθερό διάνυσμα $\Rightarrow \overline{a}'(t)=\overline{0}$,

9) αν $\overline{a}(t)$ δεν είναι σταθερό διάνυσμα αλλά έχει σταθερό μέτρο, $|\overline{a}(t)|=$ σταθερό, τότε έχουμε

$$\overline{\alpha}(t)\cdot\overline{\alpha}(t)=|\overline{\alpha}(t)|^2=\text{σταθερό},$$

οπότε ισχύει

$$[\overline{\alpha}(t)\cdot\overline{\alpha}(t)]'=0$$
$$\Rightarrow \overline{\alpha}(t)\cdot\overline{\alpha}'(t)=0,$$

άρα τα $\overline{a}(t)$, $\overline{a}'(t)$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

Παραδείγματα

1. Αν είναι $\overline{a}(t)=t^2\overline{x}_0+\overline{y}_0+t\overline{z}_0$,

$\overline{\beta}(t)=\eta\mu t\,\overline{x}_0-\sigma\upsilon\nu t\,\overline{y}_0,\ t\in\mathbb{R}$

να υπολογισθούν οι παράγωγοι:

$$\frac{d}{dt}[\overline{a}(t)\cdot\overline{\beta}(t)]=\frac{d}{dt}[t^2\eta\mu t-\sigma\upsilon\nu t]=2t\eta\mu t+t^2\sigma\upsilon\nu t+\eta\mu t=(2t+1)\eta\mu t+t^2\sigma\upsilon\nu t,$$

$$\frac{d}{dt}[\overline{a}(t)\times\overline{\beta}(t)]=\frac{d}{dt}\begin{vmatrix}\overline{x}_0 & \overline{y}_0 & \overline{z}_0\\ t^2 & 1 & t\\ \eta\mu t & -\sigma\upsilon\nu t & 0\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{d}{dt}[\sigma\upsilon\nu t\,\overline{x}_0+\eta\mu t\,\overline{y}_0+(-t^2\sigma\upsilon\nu t-\eta\mu t)\overline{z}_0]=$$

$$=-\eta\mu\overline{x}_0+(\eta\mu t+t\sigma\upsilon\nu t)\overline{y}_0+(-2t\sigma\upsilon\nu t+t^2\eta\mu t-\sigma\upsilon\nu t)\overline{z}_0,$$

$$\frac{d}{dt}[\overline{a}(t)\cdot\overline{a}(t)]=(t^4+1+t^2)'=4t^3+2t\ .$$

2. Να αποδειχθεί ότι

$$\frac{d}{dt}[\overline{a}(t)\cdot\left(\frac{d\overline{a}(t)}{dt}\times\frac{d^2\overline{a}(t)}{dt^2}\right)]=\overline{a}(t)\cdot\left(\frac{d\overline{a}(t)}{dt}\times\frac{d^3\overline{a}(t)}{dt^3}\right).$$

➠ Έχουμε

$$\frac{d\overline{a}(t)}{dt}\cdot\left(\frac{d\overline{a}(t)}{dt}\times\frac{d^2\overline{a}(t)}{dt^2}\right)+\overline{a}(t)\cdot\left(\frac{d^2\overline{a}(t)}{dt^2}\times\frac{d^2\overline{a}(t)}{dt^2}\right)$$
$$+\overline{a}(t)\cdot\left(\frac{d\overline{a}(t)}{dt}\times\frac{d^3\overline{a}(t)}{dt^3}\right)=$$
$$=0+0+\overline{a}(t)\cdot\left(\frac{d\overline{a}(t)}{dt}\times\frac{d^3\overline{a}(t)}{dt^3}\right).$$

2. Διανυσματικά πεδία – Τελεστές

2.1. Αριθμητικά και διανυσματικά πεδία

Αριθμητικό (ή βαθμωτό) πεδίο λέγεται μια συνάρτηση

$$f : D \to \mathbb{R}, \text{ όπου } D \subset \mathbb{R}^3,$$

δηλαδή το σύνολο ορισμού της είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ και οι τιμές της στους πραγματικούς αριθμούς $\mathbb{R}$.

Π.χ. τα σημεία του χώρου $\mathbb{R}^3$ που έχουν την ίδια τιμή θερμοκρασίας αποτελούν τη λεγόμενη *ισοθερμική επιφάνεια.*

Ακόμη, το δυναμικό οποιουδήποτε πεδίου είναι αριθμητικό πεδίο.

Διανυσματικό πεδίο λέγεται μια διανυσματική συνάρτηση

$$F : D \to \mathbb{R}^3, \quad \text{όπου } D \subset \mathbb{R}^3,$$

οπότε οι τρεις συντεταγμένες συναρτήσεις απαιτούνται για να περιγράψουν ένα διανυσματικό πεδίο.

Δηλαδή, σε κάθε σημείο $M(x,y,z)$ αντιστοιχεί το διάνυσμα

$$F(x,y,z)=f_1(x,y,z)\overline{x}_0+f_2(x,y,z)\overline{y}_0+f_3(x,y,z)\overline{z}_0.$$

Βέβαια, μπορεί να ορισθεί διανυσματικό πεδίο με σύνολο ορισμού υποσύνολο του $\mathbb{R}^4$ (τέσσερις μεταβλητές) που είναι: x,y,z οι συντεταγμένες του χώρου $\mathbb{R}^3$ και t η μεταβλητή του χρόνου και τιμές στο χώρο $\mathbb{R}^3$.

Δηλαδή, σε κάθε σημείο $P(x,y,z,t)$ αντιστοιχεί το διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$

$$F(x,y,z,t)=f_1(x,y,z,t)\overline{x}_0+f_2(x,y,z,t)\overline{y}_0+f_3(x,y,z,t)\overline{z}_0 .$$

Σημειώνουμε ότι οι συντεταγμένες συναρτήσεις f_1, f_2, f_3 στις διανυσματικές συναρτήσεις είναι βαθμωτές (ή αριθμητικές) συναρτήσεις.

Οι μερικές παράγωγοι των διανυσματικών συναρτήσεων ανάγονται στις μερικές παραγώγους των συντεταγμένων συναρτήσεων που είναι βαθμωτές (ή αριθμητικές) συναρτήσεις.

Για τα διαφορικά πρώτης τάξης έχουμε

$$dF=df_1\overline{x}_0+df_2\overline{y}_0+df_3\overline{z}_0 ,$$

όπου

$$df_1=\frac{\partial f_1}{\partial x}dx+\frac{\partial f_1}{\partial y}dy+\frac{\partial f_1}{\partial z}dz+\frac{\partial f_1}{\partial t}dt,$$

$$df_2=\frac{\partial f_2}{\partial x}dx+\frac{\partial f_2}{\partial y}dy+\frac{\partial f_2}{\partial z}dz+\frac{\partial f_2}{\partial t}dt,$$

$$df_3=\frac{\partial f_3}{\partial x}dx+\frac{\partial f_3}{\partial y}dy+\frac{\partial f_3}{\partial z}dz+\frac{\partial f_3}{\partial t}dt.$$

Επομένως, όταν $F=F(x,y,z,t)$ έχουμε

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f_1}{\partial x}\overline{x}_0+\frac{\partial f_2}{\partial x}\overline{y}_0+\frac{\partial f_3}{\partial x}\overline{z}_0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f_1}{\partial y}\overline{x}_0+\frac{\partial f_2}{\partial y}\overline{y}_0+\frac{\partial f_3}{\partial y}\overline{z}_0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial f_1}{\partial z}\overline{x}_0+\frac{\partial f_2}{\partial z}\overline{y}_0+\frac{\partial f_3}{\partial z}\overline{z}_0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\partial f_1}{\partial t}\overline{x}_0+\frac{\partial f_2}{\partial t}\overline{y}_0+\frac{\partial f_3}{\partial t}\overline{z}_0.$$

Για τις μερικές παραγώγους ανώτερης τάξης έχουμε

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right),\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) \text{ κ.τ.λ.}$$

➠ Όταν οι μερικές παράγωγοι είναι *συνεχείς συναρτήσεις* τότε μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x},$$

δηλαδή δεν ενδιαφέρει η σειρά με την οποία έγιναν οι παραγωγίσεις. Διαφορετικά, μπορούν να διαφέρουν.

Οι κανόνες παραγώγισης για τον υπολογισμό των μερικών παραγώγων βαθμωτών (ή αριθμητικών) συναρτήσεων πολλών μεταβλητών ισχύουν και για τις διανυσματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

Αν $F_1(x, y, z, t)$, $F_2(x, y, z, t)$ διανυσματικές συναρτήσεις και $f(x, y, z, t)$ αριθμητική συνάρτηση, τότε ισχύουν:

1. $$\frac{\partial}{\partial x}(F_1 + F_2) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial x},$$

2. $$\frac{\partial}{\partial x}(F_1 \cdot F_2) = \frac{\partial F_1}{\partial x} \cdot F_2 + F_1 \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x},$$

3. $$\frac{\partial}{\partial x}(F_1 \times F_2) = \frac{\partial F_1}{\partial x} \times F_2 + F_1 \times \frac{\partial F_2}{\partial x},$$

4. $$\frac{\partial}{\partial x}(fF) = \frac{\partial f}{\partial x} F + f \frac{\partial F}{\partial x},$$

5. $$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(F_1 \cdot F_2) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}(F_1 \cdot F_2)\right] =$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial F_1}{\partial x} \cdot F_2 + F_1 \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x}\right] =$$
$$= \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial x} \cdot F_2 + \frac{\partial F_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x} + F_1 \cdot \frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial x}$$

κ.ο.κ.

Παραδείγματα

1. Αν είναι $f(x,y,z) = x^2 yz$, $F = xz\overline{x}_0 - xy^2\overline{y}_0 + yz^2 z_0$, να υπολογισθεί η μερική παράγωγος

$$\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial z}(fF) \text{ στο σημείο } (1, -1, 1).$$

➡ Έχουμε $fF = x^2 yz[xz\overline{x}_0 - xy^2\overline{y}_0 + yz^2\overline{z}_0] = x^3 yz^2\overline{x}_0 - x^3 y^3 z\overline{y}_0 + x^2 y^2 z^3\overline{z}_0$,

οπότε παίρνουμε

$$\frac{\partial(fF)}{\partial z}=2x^3yz\overline{x}_0-x^3y^3\overline{y}_0+3x^2y^2z^2\overline{z}_0$$

και $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial z}(fF)\right)=6x^2yz\overline{x}_0-3x^2y^3\overline{y}_0+6xy^2z^2\overline{z}_0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial z}(fF)\right)\right]=12xyz\overline{x}_0-6xy^3\overline{y}_0+6y^2z^2\overline{z}_0.$$

Άρα, στο σημείο $(1,-1,1)$ έχουμε

$$\frac{\partial^3}{\partial x\partial z}(fF)=12\cdot 1(-1)\cdot 1\overline{x}_0-6\cdot 1\cdot(-1)^3\cdot 1\overline{y}_0+6(-1)^2 1^2\overline{z}_0=$$
$$=-12\overline{x}_0+6\overline{y}_0+6\overline{z}_0.$$

2. Αν είναι $F_1=x^2yz\overline{x}_0-2xz^3\overline{y}_0+xz^2\overline{z}_0,\qquad F_2=2x\overline{x}_0+y\overline{y}_0-x^2\overline{z}_0,$ να βρεθεί η παράγωγος

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(F_1\times F_2)\quad \text{στο σημείο } (1,\,0,\,2).$$

➠ Έχουμε

$$F_1\times F_2=\begin{vmatrix}\overline{x}_0 & \overline{y}_0 & \overline{z}_0\\ x^2yz & -2xz^3 & xz^2\\ 2x & y & -x^2\end{vmatrix}=$$
$$=(2x^3z^3-xyz^2)\overline{x}_0+(x^4yz+2x^2z^2)\overline{y}_0+(x^2y^2z+2x^2z^2)\overline{z}_0\ ,$$

οπότε παίρνουμε

$$\frac{\partial}{\partial y}(F_1\times F_2)=-xz^2\overline{x}_0+x^4xz\overline{y}_0+2x^2yz\overline{z}_0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(F_1\times F_2)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}(F_1\times F_2)\right]=-z^2\overline{x}_0+4x^3z\overline{y}_0+4xyz\overline{z}_0.$$

Άρα, στο σημείο $(1,0,2)$ έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial x\partial y}(F_1\times F_2)=-2^2\overline{x}_0+4\cdot 1^3\cdot 2\overline{y}_0+4\cdot 1\cdot 0\cdot 2\overline{z}_0=-4\overline{x}_0+8\overline{y}_0.$$