ΘΩΜΑ ΚΥΒΕΝΤΙΔΗ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό είναι μια εισαγωγή στη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους, η οποία γίνεται χωρίς να χρησιμοποιηθούν οι μέθοδοι και οι συμβολισμοί της συναρτησιακής ανάλυσης.

Η ανάπτυξη της θεωρίας, που παραμένει σε στοιχειώδες επίπεδο, γίνεται με απλό και καταληπτό τρόπο.

Αναπτύσσονται οι διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης, τα συστήματα διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους πρώτης τάξης και ορισμένες αριθμητικές και προσεγγιστικές μέθοδοι επίλυσης διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους.

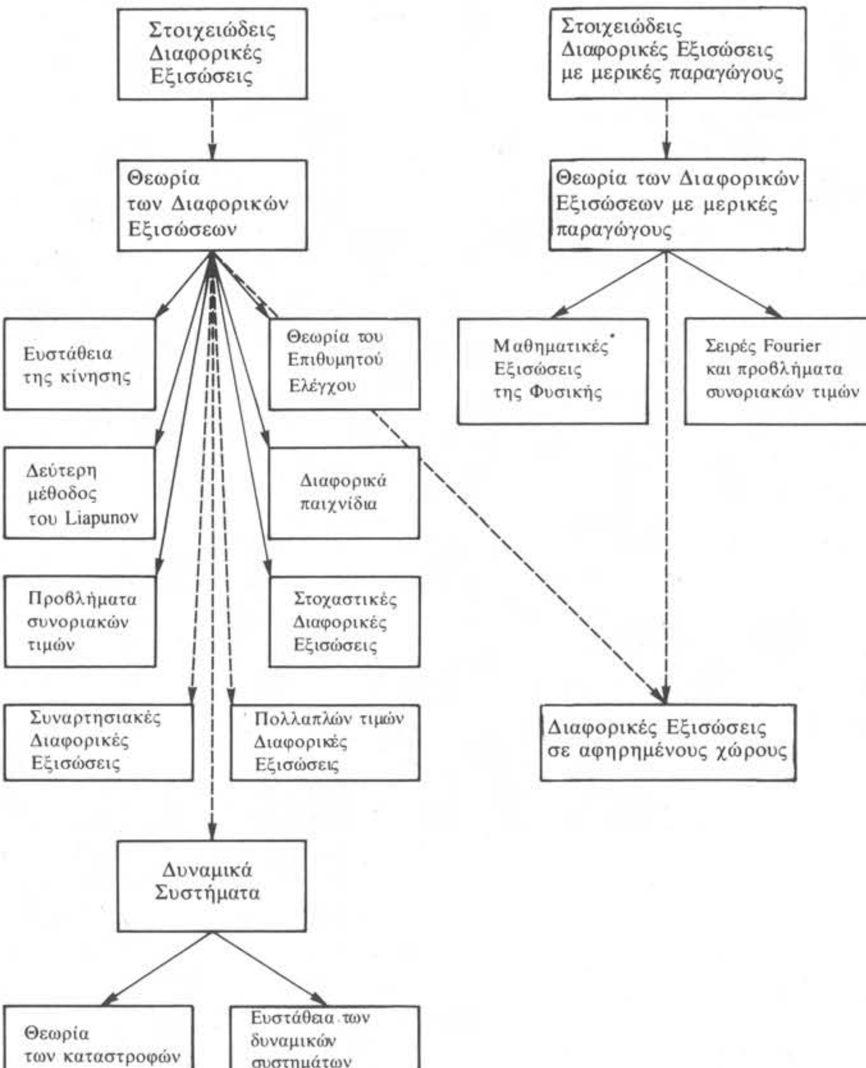
Μελετώνται, ακόμη, τα συνοριακά προβλήματα, οι μέθοδοι μετασχηματισμών για προβλήματα συνοριακών τιμών (μετασχηματισμοί Fourier, μετασχηματισμοί Laplace) και οι συναρτήσεις Green.

Η θεωρία αποσαφηνίζεται με παραδείγματα. Περιλαμβάνονται, επίσης, μερικές χαρακτηριστικές εφαρμογές από τη φυσική και τη γεωμετρία.

Για μιά πιο πλήρη ενημέρωση πάνω στη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους μπορεί κανείς να συμβουλευτεί την παράγραφο των υποδείξεων για παραπέρα μελέτη.

Θεσσαλονίκη, 1988 — *Θ. ΚΥΒΕΝΤΙΔΗΣ*

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΤΟΜΟΥ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

1. Βασικές έννοιες 1
2. Σχηματισμός των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους 4
3. Ιστορική αναδρομή 14

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

1. Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους πρώτης τάξης 18
   1.1. Το πρόβλημα του Cauchy 35
2. Εξισώσεις ολικών διαφορικών 42
3. Μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους πρώτης τάξης – Μέθοδος του Charpit 57
   3.1. Μελέτη ειδικών περιπτώσεων 61
4. Μετασχηματισμοί 66
5. Λύσεις που πληρούν δοσμένες συνθήκες 70
6. Λυμένα προβλήματα 77
7. Ασκήσεις 99

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

1. Ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους με σταθερούς συντελεστές 104
2. Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης 113
   2.1. Μέθοδος των διαφορικών τελεστών 115
   2.2. Μέθοδος της αναγωγής στην κανονική μορφή 123
3. Διαχωρισμός των μεταβλητών 135
4. Μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης – Μέθοδος του Monge 137
5. Το πρόβλημα της αρχικής τιμής 143
6. Λυμένα προβλήματα 153
7. Ασκήσεις 182

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

1. Βασικοί ορισμοί 187
2. Ταξινόμηση των συστημάτων 193
3. Ολικά υπερβολικά γραμμικά συστήματα 201
4. Λυμένα προβλήματα 208
5. Ασκήσεις 224

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

1. Μέθοδοι πεπερασμένης διαφοράς 229
2. Μέθοδος των χαρακτηριστικών 238
3. Μέθοδος των διαταραχών 249
4. Λυμένα προβλήματα 263
5. Ασκήσεις 281

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΣΥΝΟΡΙΑΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ - ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ GREEN

1. Συνοριακά προβλήματα 286
2. Μέθοδοι μετασχηματισμών για προβλήματα συνοριακών τιμών 307
   2.I. Μετασχηματισμοί Fourier 307
   2.II. Μετασχηματισμοί Laplace 315
3. Συναρτήσεις Green 318
4. Λυμένα προβλήματα 332
5. Ασκήσεις 351

Υποδείξεις για παραπέρα μελέτη 356

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ III: Σειρές Fourier 357
1. Σειρές συνημιτόνων και σειρές ημιτόνων 359
2. Σειρές σε τυχαίο διάστημα 360
3. Ολοκλήρωση και παραγώγιση σειράς Fourier 361
4. Παραδείγματα 361
5. Διπλές σειρές Fourier 366
6. Ασκήσεις 367

Βιβλιογραφία 369
Απαντήσεις των ασκήσεων 370
Ευρετήριο όρων 383

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

1. Βασικές έννοιες

Διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους είναι μια εξίσωση που συνδέει δύο ή περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_n$, μια άγνωστη συνάρτηση αυτών z και τις μερικές παραγώγους της z μέχρι ορισμένη τάξη.

Η μεγαλύτερη τάξη μερικών παραγώγων που εμφανίζεται στην εξίσωση λέγεται *τάξη της δ.ε.**.

Π.χ. οι δ.ε.

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2$$

είναι δ.ε. με μερικές παραγώγους πρώτης τάξης, ενώ η δ.ε.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y$$

είναι δ.ε. με μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης.

Μια συνάρτηση $z = \varphi(x, y)$, ή με πεπλεγμένη μορφή $F(x, y, z) = 0$, είναι *λύση* της δ.ε. με μερικές παραγώγους, αν αντικαθιστώντας την στη δ.ε. αναγόμαστε σε μια ταυτότητα.

Π.χ. η συνάρτηση $z = e^x (y-x)$ είναι λύση της δ.ε.

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z$$

γιατί, αν την αντικαταστήσουμε στη δ.ε., παίρνουμε την ταυτότητα

$$e^x (y-x-1) + e^x \equiv e^x (y-x) .$$

---

* διαφορικής εξίσωσης

Μπορεί να επαληθευτεί, ανάλογα, πως η $z = x+y^2$ είναι λύση της δ.ε.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2$$

και η $z = x^2y + e^y$ της δ.ε.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y .$$

Σ' όλο το βιβλίο στις δ.ε. με μερικές παραγώγους θα χρησιμοποιήσουμε τους συμβολισμούς

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} .$$

Μερικές δ.ε. με μερικές παραγώγους μπορούν να λυθούν με ολοκλήρωση ή (και) με μεθόδους των συνηθισμένων δ.ε.

Παράδειγμα 1. Η δ.ε. με μερικές παραγώγους $ys + p = 4xy$ γράφεται

$$y \frac{\partial p}{\partial y} + p = 4xy$$

και μπορούμε να τη δούμε σαν συνηθισμένη γραμμική δ.ε. πρώτης τάξης ως προς p και y, αν το x θεωρηθεί σαν σταθερή.

Επομένως, οι λύσεις της είναι (Κεφάλαιο 1, §3, Τόμος Πρώτος)

$$py = 2xy^2 + \varphi(x)$$

απ' όπου βρίσκουμε τις λύσεις της δοσμένης δ.ε.

$$z = \int p \, dx = \int \left[2xy + \frac{1}{y} \varphi(x) \right] dx, \ \ y = \text{σταθ.} \Rightarrow z = x^2 y + \frac{1}{y} \varphi_1(x) + \psi(y)$$

όπου $\varphi_1(x) = \int \varphi(x) \, dx$ και $\psi(y)$ είναι αυθαίρετες συναρτήσεις

Παράδειγμα 2. Η δ.ε. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = x^2 + y$, προφανώς έχει τη λύση

$$z = \frac{1}{3} x^3 + xy + \varphi(y)$$

όπου $\varphi(y)$ είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση του y.

Επειδή στη δ.ε. έχουμε παραγώγιση μόνον ως προς x, ολοκληρώνουμε ως προς x θεωρώντας το y σαν σταθερή. Παρατηρούμε ότι η $\varphi(y)$ παίζει το ρόλο της σταθερής της ολοκλήρωσης.

Παράδειγμα 3. Η δ.ε. με μερικές παραγώγους $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 z = xy^2$, αν θεωρήσουμε το y σαν σταθερή, μπορεί να λυθεί όπως οι συνηθισμένες γραμμικές δ.ε. δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Έτσι παίρνουμε τις λύσεις $z = \varphi_1 (y)\, e^{xy} + \varphi_2 (y)\, e^{-xy} - x$, όπου $\varphi_1 (y)$, $\varphi_2 (y)$ είναι αυθαίρετες συναρτήσεις.

Σημειώνουμε πώς, σ' αυτές τις περιπτώσεις, *οι σταθερές της ολοκλήρωσης είναι αυθαίρετες συναρτήσεις της μεταβλητής που θεωρείται σαν σταθερή κατά την ολοκλήρωση.*

Δίνεται η δ.ε. με μερικές παραγώγους, τάξης k

$$F \left(x_1, \ldots, x_n, z, \ldots, \frac{\partial^m z}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}, \ldots \right) = 0 \tag{1}$$

όπου $\sum_{j=1}^{n} i_j = m$, $m = 1, 2, \ldots, k$, $k \geqslant 1$ και $z = z(x_1, \ldots, x_n)$.

Η (1) λέγεται *γραμμική όταν η F* είναι γραμμική συνάρτηση ως προς όλες τις μεταβλητές $\dfrac{\partial^m z}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}$ και z.

Διακρίνουμε τα παρακάτω είδη λύσεων της δ.ε. (1):

Λέμε *γενική λύση* της δ.ε. (1) μια αυθαίρετη συνάρτηση n συναρτήσεων των ανεξάρτητων μεταβλητών $x_1, x_2, \ldots, x_n$ και της z, που την επαληθεύει.

Π.χ. η δ.ε. με μερικές παραγώγους

$$x\,p + y\,q = z$$

έχει ως γενική λύση την αυθαίρετη συνάρτηση $\Phi \left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{x}{z} \right) = 0$.

Σημειώνουμε πως το πλήθος των αυθαίρετων συναρτήσεων της γενικής λύσης ισούται με την τάξη της δ.ε. με μ.π. (1).

Λέμε *μερική λύση* της δ.ε. (1) κάθε λύση που προκύπτει από τη γενική λύση όταν η αυθαίρετη συνάρτηση πάρει ειδική μορφή.

Π.χ. η συνάρτηση

$$\frac{x}{y} - \frac{x}{z} = 0 \Rightarrow z = y$$

είναι μερική λύση της δ.ε. με μερικές παραγώγους $x\,p + y\,q = z$.

Λέμε *ιδιάζουσα λύση* της δ.ε. (1) κάθε λύση που δεν προκύπτει από τη γενική λύση.

Όταν η δ.ε. (1) είναι πρώτης τάξης *(k=1)* τότε κάθε λύση της που εξαρτάται από *n* αυθαίρετες σταθερές λέγεται *πλήρης λύση*.

Π.χ. η $z = ae^x + \beta e^y$ είναι πλήρης λύση της δ.ε. με μερικές παραγώγους $p + q = z$.

Σημειώνουμε πως η γενική λύση δίνει υπό κάποια έννοια περισσότερες λύσεις της δ.ε. από την πλήρη λύση. *Αλλ' όταν η (1) είναι γραμμική πρώτης τάξης, τότε η γενική λύση της αποτελείται από τις περιβάλλουσες όλων των μονοπαραμετρικών οικογενειών που προκύπτουν από πλήρη λύση της**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να επαληθευτεί πως οι συναρτήσεις

$$az = a^2x+y+\beta, \quad 2z=2ax\, e^y+a^2e^{2y}+\beta, \quad 6az = x^3y+x\,\varphi(y)+\psi(y)$$

είναι λύσεις, αντίστοιχα, των δ.ε.

$$p\,q = 1, \quad q = x\,p+p^2, \quad ar = x\,y\,.$$

2. Να λυθούν οι δ.ε. με μερικές παραγώγους

(i) $y\,q + z = x^2$, *(iii)* $t+2q-3z = x^2\,(2-3y)$,

(ii) $xr+p = x\,y$, *(iv)* $z\,p+z^2 = xy^2$.

(*Απαντήσεις:* *(i)* $yz = x^2y+\varphi(x)$, *(ii)* $4z = x^2y+\varphi(y)\log x+\psi(y)$, *(iii)* $z = \varphi_1(x)\,e^{-3y}+\varphi_2(y)\,e^y+x^2y$, *(iv)* $2z^2= (2x-1)\,y^2+\varphi(y)\,e^{-2x}$).

2. *Σχηματισμός των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους*

Οι δ.ε. με μερικές παραγώγους σχηματίζονται:

α) από απαλοιφή αυθαίρετων σταθερών δοσμένης εξίσωσης,

β) από απαλοιφή αυθαίρετων συναρτήσεων δοσμένων συναρτήσεων.

α) Απαλοιφή αυθαίρετων σταθερών.

Δίνεται η εξίσωση

$$f(x,\,y,\,z,\,a,\,\beta) = 0 \tag{1}$$

όπου $a,\,\beta$ είναι αυθαίρετες σταθερές.

---

* *E. GOURSAT: «A course in Mathematical Analysis», Vol. III, Part One, Dover, New York, 1964, ch. III, § 27.*

Παραγωγίζουμε την εξίσωση (1):

ως προς x : $$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}p=0 \qquad (2)$$

ως προς y : $$\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}q=0 \qquad (3)$$

και μεταξύ των εξισώσεων (1), (2) και (3) απαλείφουμε τις σταθερές a, β.

Η εξίσωση που προκύπτει από την παραπάνω απαλοιφή είναι της μορφής $F(x, y, z, p, q) = 0$ και είναι η δ.ε. με μερικές παραγώγους που αντιστοιχεί στην εξίσωση (1). Για να έχουμε μία ακριβώς δ.ε. με μ.π. τάξης $n \geq 1$, από απαλοιφή αυθαίρετων σταθερών, πρέπει στη συνάρτηση να εμφανίζονται $\frac{n(n+3)}{2}$ αυθαίρετες σταθερές.

Για $n=1$ έχουμε $\frac{1(1+3)}{2} = 2$ αυθαίρετες σταθερές.

Παράδειγμα 1. Να βρεθεί η δ.ε. με μερικές παραγώγους που αντιστοιχεί στην εξίσωση

$$z = ax^2 + \beta y^2 + a\beta.$$

Παραγωγίζουμε: ως προς x, $p = 2ax \Rightarrow a = \frac{p}{2x}$

ως προς y, $q = 2\beta y \Rightarrow \beta = \frac{q}{2y}$,

αντικαθιστούμε τις τιμές αυτές των a, β, στη δοσμένη εξίσωση και παίρνουμε τη ζητούμενη δ.ε. με μερικές παραγώγους

$$z = \frac{p}{2x}x^2 + \frac{q}{2y}y^2 + \frac{pq}{4xy} \Rightarrow 4xyz = 2x^2yp + 2y^2xq + pq. \quad \square$$

Η εξίσωση (1), γεωμετρικά, παριστάνει μια διπαραμετρική οικογένεια επιφανειών του ευκλείδειου χώρου R^3.

Όταν η δοσμένη εξίσωση περιέχει μόνον μία αυθαίρετη σταθερή τότε απ' αυτήν προκύπτουν περισσότερες της μιάς δ.ε. με μερικές παραγώγους.

Π.χ. από την εξίσωση $z = a(x+y)$, παραγωγίζοντάς την ως προς x, έχουμε $p=a$ και, ως προς y, έχουμε $q = a$.

Επομένως, προκύπτουν οι δύο δ.ε. με μερικές παραγώγους

$$z = p\,(x+y), \qquad z = q\,(x+y).$$

Τέλος όταν στην εξίσωση ο αριθμός των αυθαίρετων σταθερών είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των ανεξάρτητων μεταβλητών, η προκύπτουσα ή οι προκύπτουσες δ.ε. με μερικές παραγώγους είναι ανώτερης της πρώτης τάξης.

Παράδειγμα 2. Να βρεθεί η δ.ε. με μερικές παραγώγους που αντιστοιχεί στην εξίσωση

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma xy .$$

Παραγωγίζουμε την εξίσωση δύο φορές ως προς x και ως προς y, και παίρνουμε

$$p = \alpha + \gamma y , \quad r = 0$$

$$q = \beta + \gamma x , \quad t = 0$$

Επίσης, έχουμε $s = \gamma$.

Προκύπτουν, λοιπόν, οι δ.ε. με μερικές παραγώγους $r = 0$, $t = 0$ και με απαλοιφή των α, β, γ μεταξύ των άλλων τεσσάρων εξισώσεων, η δ.ε. με μερικές παραγώγους $z = px + qy - sxy$. □

β) Απαλοιφή αυθαίρετων συναρτήσεων.

Δίνονται οι συναρτήσεις $u = u\,(x,\ y,\ z)$, $\upsilon = \upsilon\,(x,\ y,\ z)$ και μια αυθαίρετη συνάρτησή τους

$$\Phi\,(u,\ \upsilon) = 0. \tag{1}$$

Παραγωγίζουμε την εξίσωση (1) ως προς x και ως προς y

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \upsilon}\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \upsilon}\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

οπότε σχηματίζεται ένα ομογενές γραμμικό σύστημα με άγνωστους τις μερικές παραγώγους $\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}$, $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \upsilon}$.

Είναι γνωστό πως, το σύστημα αυτό για να έχει λύση διαφορετική της μηδενικής, πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών του να ισούται με μηδέν, δηλ.

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\,p & \dfrac{\partial \upsilon}{\partial x} + \dfrac{\partial \upsilon}{\partial z}\,p \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\,q & \dfrac{\partial \upsilon}{\partial y} + \dfrac{\partial \upsilon}{\partial z}\,q \end{vmatrix} = 0 .$$

Μετά την εκτέλεση των πράξεων παίρνουμε τη δ.ε. με μερικές παραγώγους.

$$p\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial \upsilon}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+q\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \upsilon}{\partial z}-\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \upsilon}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)=0$$

$$\Rightarrow p\,P\,(x,\,y,\,z)+q\,Q\,(x,\,y,\,z)-R\,(x,\,y,\,z)=0 \quad \text{ή} \quad pP+qQ=R$$

Παράδειγμα 1. Βρείτε τη δ.ε. με μερικές παραγώγους που έχει ως γενική λύση την αυθαίρετη συνάρτηση $\Phi\left(\frac{z}{x^3},\ \frac{y}{x}\right)=0.$

Έχουμε $u=\frac{z}{x^3}$, $\upsilon=\frac{y}{x}$, οπότε η ζητούμενη δ.ε. είναι

$$\begin{vmatrix} -\frac{3z}{x^4}+\frac{1}{x^3}\,p & -\frac{y}{x^2}+0\cdot p \\ 0+\frac{1}{x^3}\,q & \frac{1}{x}+0\cdot q \end{vmatrix}=0$$

ή, μετά την εκτέλεση των πράξεων $xp+yq=3z$.

Παράδειγμα 2. Βρείτε τη δ.ε. με μερικές παραγώγους που έχει ως γενική λύση την αυθαίρετη συνάρτηση

$$\Phi\,(x^2-z^2,\ x^3-y^3)=0\,.$$

Έχουμε $u=x^2-z^2$, $\upsilon=x^3-y^3$, οπότε η ζητούμενη δ.ε. είναι

$$\begin{vmatrix} 2x-2zp & 3x^2 \\ -2zq & -3y^2 \end{vmatrix}=0$$

ή

$$z\,(x^2q+y^2p)=x\,y^2\,.$$

Σημείωση: Όταν η δοσμένη αυθαίρετη συνάρτηση δίνεται με τη μορφή

$$z=u\,f\,(\upsilon) \tag{1}$$

όπου u, υ είναι γνωστές συναρτήσεις και f είναι αυθαίρετη συνάρτηση της υ, τότε, για το σχηματισμό της δ.ε. εργαζόμαστε ως εξής:

Παραγωγίζουμε την (1) ως προς x και ως προς y

$$p=\frac{\partial u}{\partial x}f\,(\upsilon)+\frac{df}{d\upsilon}\,\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\;u \tag{2}$$

$$q=\frac{\partial u}{\partial y}f\,(\upsilon)+\frac{df}{d\upsilon}\,\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\;u \tag{3}$$

και μεταξύ των (1), (2) και (3) απαλείφουμε τις $f(\upsilon)$, $\dfrac{df}{d\upsilon}$.

Από την (1) έχουμε $f(\upsilon) = \dfrac{z}{u}$, οπότε από τις (2) και (3), παίρνουμε, αντίστοιχα,

$$\frac{df}{d\upsilon} = \frac{p - \dfrac{z}{u}\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x}u}, \qquad \frac{df}{d\upsilon} = \frac{q - \dfrac{z}{u}\dfrac{\partial u}{\partial y}}{\dfrac{\partial \upsilon}{\partial y}u}$$

και η δ.ε. είναι

$$pu\frac{\partial \upsilon}{\partial y} - qu\frac{\partial \upsilon}{\partial x} = z\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \upsilon}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right). \quad \square$$

Υποθέτουμε πως η συνάρτηση z δίνεται με τη μορφή

$$z = f(u) + g(\upsilon) + w \tag{1$'$}$$

όπου f, g είναι αυθαίρετες συναρτήσεις των u, υ, αντίστοιχα και u, υ, w είναι γνωστές συναρτήσεις των x, y.

Παραγωγίζουμε την (1)$'$ ως προς x και ως προς y:

$$p = f'(u)\frac{\partial u}{\partial x} + g'(\upsilon)\frac{\partial \upsilon}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \tag{i}$$

$$q = f'(u)\frac{\partial u}{\partial y} + g'(\upsilon)\frac{\partial \upsilon}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \tag{ii}$$

Παραγωγίζοντας τις *(i)*, *(ii)* ως προς x και ως προς y, παίρνουμε

$$r = f''(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + g''(\upsilon)\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)^2 + f'(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g'(\upsilon)\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{iii}$$

$$s = f''(u)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + g''(\upsilon)\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\frac{\partial \upsilon}{\partial y} + f'(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + g'(\upsilon)\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} \tag{iv}$$

$$t = f''(u)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + g''(\upsilon)\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)^2 + f'(u)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g'(\upsilon)\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{v}$$

Έχουμε, λοιπόν, τις πέντε εξισώσεις *(i)*-*(v)* που περιέχουν τις τέσσερις αυθαίρετες ποσότητες f', f'', g', g''.

Αν απαλείψουμε αυτές τις τέσσερις ποσότητες μεταξύ των πέντε εξισώσεων *(i)*-*(v)*, θα πάρουμε τη σχέση (συμβιβαστότητας και εξισώσεων)

$$\begin{vmatrix} p-\dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial \upsilon}{\partial x} & 0 & 0 \\ q-\dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial \upsilon}{\partial y} & 0 & 0 \\ r-\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} & (\dfrac{\partial u}{\partial x})^2 & (\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x})^2 \\ s-\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} & \dfrac{\partial^2 \upsilon}{\partial x\,\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial \upsilon}{\partial x}\dfrac{\partial \upsilon}{\partial y} \\ t-\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2} & (\dfrac{\partial u}{\partial y})^2 & (\dfrac{\partial \upsilon}{\partial y})^2 \end{vmatrix} = 0$$

που περιέχει μόνον τις μερικές παραγώγους p, q, r, s, t και γνωστές συναρτήσεις των x και y.

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα, κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης, παίρνουμε τη δ.ε. με μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης

$$Rr + Ss + Tt + Pp + Qq = W$$

όπου R, S, T, P, Q, W είναι γνωστές συναρτήσεις των x και y.

Αυτή η δ.ε. με μ.π. είναι ειδική περίπτωση γιατί δεν εμφανίζεται στις u, υ η συνάρτηση z. Όταν στις u, υ εμφανίζεται η z τότε αλλάζει η μορφή της δ.ε. με μ.π. π.χ. αν είναι

$$z = f(x+z) + g(x+y)$$

τότε παίρνουμε τη δ.ε. με μ.π. $qr - (1+p+q)s + (1+p)t = 0$.

Παράδειγμα 3. Έστω $z = f(x+ay) + g(x-ay)$, όπου f, g είναι αυθαίρετες συναρτήσεις και a σταθερή.

Παραγωγίζοντας τη z δύο φορές ως προς x και δύο ως προς y, έχουμε

$$r = f'' + g'', \quad t = a^2 f'' + a^2 g''$$

απ' όπου, με απαλοιφή των f'', g'', παίρνουμε τη δ.ε. $t = a^2 r$.

Παρατήρηση 1. Παρατηρούμε ότι η απαλοιφή μιάς αυθαίρετης συνάρτησης δίνει μια δ.ε. με μερικές παραγώγους πρώτης τάξης, ενώ η απαλοιφή δύο αυθαίρετων συναρτήσεων δίνει μια δ.ε. με μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης. Αλλ' όμως, αν στις παραγωγίσεις ως προς x, y παραμένουν οι συναρτήσεις f και g, τότε η τάξη της δ.ε. με μ.π. μπορεί να είναι ανώτερης της δεύτερης. Π.χ. $\sqrt{x+f(y)}+g(xz) = 0$.

Αντίστροφα, οι παραγόμενες δ.ε. έχουν ως γενική λύση των εξίσωση των αυθαίρετων συναρτήσεων (απ' όπου προέκυψαν).

Παρατήρηση 2. Η απαλοιφή $k \geq 2$ αυθαίρετων συναρτήσεων δε μας οδηγεί, πάντοτε, σε γραμμική δ.ε. με μερικές παραγώγους, π.χ. η εξίσωση

$$z = f(x - g(y))$$

όπου f, g είναι αυθαίρετες συναρτήσεις δίνει τη δ.ε. με μερικές παραγώγους $rq = sp$.

Η απαλοιφή όμως μιάς αυθαίρετης συνάρτησης δίνει, πάντοτε, σχεδόν γραμμική δ.ε. με μερικές παραγώγους πρώτης τάξης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν είναι $z = f(x+iy) + g(x-iy)$, όπου f, g είναι αυθαίρετες συναρτήσεις, δείξτε πώς ισχύει

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 .$$

2. Αν είναι $z = f(x^2-y) + g(x^2+y)$, όπου f, g είναι αυθαίρετες συναρτήσεις, αποδείξτε πώς

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} .$$

Οι διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους ορισμένων ευθειογενών επιφανειών.

Ι. Κυλινδρικές επιφάνειες.

Στον ευκλείδειο χώρο R^3 δίνονται, η οδηγός καμπύλη c της κυλινδρικής επιφάνειας που ορίζεται από τις εξισώσεις

$$f_1(x, y, z) = 0 , \quad f_2(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

και το διάνυσμα $\bar{\varepsilon}(a, \beta, 1)$ που είναι παράλληλο προς τις γενέτειρές της.

Θεωρούμε την ευθεία που περνάει από την αρχή O και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\bar{\varepsilon}(a, \beta, 1)$. Η εξίσωσή της είναι

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{1}$$

ή

$$x - az = 0 , \quad y - \beta z = 0 .$$

Κάθε ευθεία παράλληλη προς αυτήν έχει εξίσωση

$$x - az = u , \quad y - \beta z = \upsilon . \tag{2}$$