ΘΩΜΑ ΚΥΒΕΝΤΙΔΗ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΤΟΜΟΣ Ι

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Οι διαφορικές εξισώσεις είναι απαραίτητες για την κατανόηση πολλών σημαντικών φυσικών και μαθηματικών προβλημάτων. Ο Isaak NEWTON χρησιμοποίησε πρώτος, τον 17ο αιώνα, διαφορικές εξισώσεις για την κίνηση των σωμάτων και των πλανητών. Η ανάπτυξη όμως των διαφορικών εξισώσεων έγινε κατά τον 19ο και 20ο αιώνα από πολλούς μαθηματικούς όπως οι BIRKHOFF, CAUCHY, EULER, PICARD, POINCARÉ, LAGRANGE και LIAPUNOV.

Αυτό το σύγγραμμα είναι μια εισαγωγή στις διαφορικές εξισώσεις γι' αυτούς που έχουν γνώσεις διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού αλλά δεν έχουν προηγούμενη πείρα στις διαφορικές εξισώσεις.

Εισάγουμε τις έννοιες με απλότητα και τις φωτίζουμε από διάφορες πλευρές έτσι, ώστε ο αναγνώστης να τις αφομοιώσει καλά, για να μπορέσει στη συνέχεια να τις εφαρμόσει και στο δικό του τομέα.

Κάθε κεφάλαιο χωρίζεται σε τρία μέρη. Στο πρώτο μέρος περιέχονται οι ορισμοί, τα θεωρήματα, οι παρατηρήσεις, τα παραδείγματα και οι απλές αποδείξεις, στο δεύτερο μέρος περιέχονται τα λυμένα προβλήματα και στο τρίτο οι άλυτες ασκήσεις.

Το σύγγραμμα περιλαμβάνει τρεις αυτοτελείς τόμους.

Ο πρώτος τόμος καλύπτει τις στοιχειώδεις διαφορικές εξισώσεις, ο δεύτερος τόμος αναφέρεται στη βασική θεωρία των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους, και ο τρίτος τόμος είναι μια εισαγωγή στην ποιοτική θεωρία των διαφορικών εξισώσεων, και για την ανάπτυξή του χρησιμοποιούνται έννοιες από την τοπολογία και τη γραμμική άλγεβρα.

Σ' όλα τα κεφάλαια αποφεύγουμε τις αποδείξεις των θεωρημάτων που είναι περίπλοκες για να μην επιβαρύνουμε τον αναγνώστη με πρόσθετες ειδικές έννοιες.

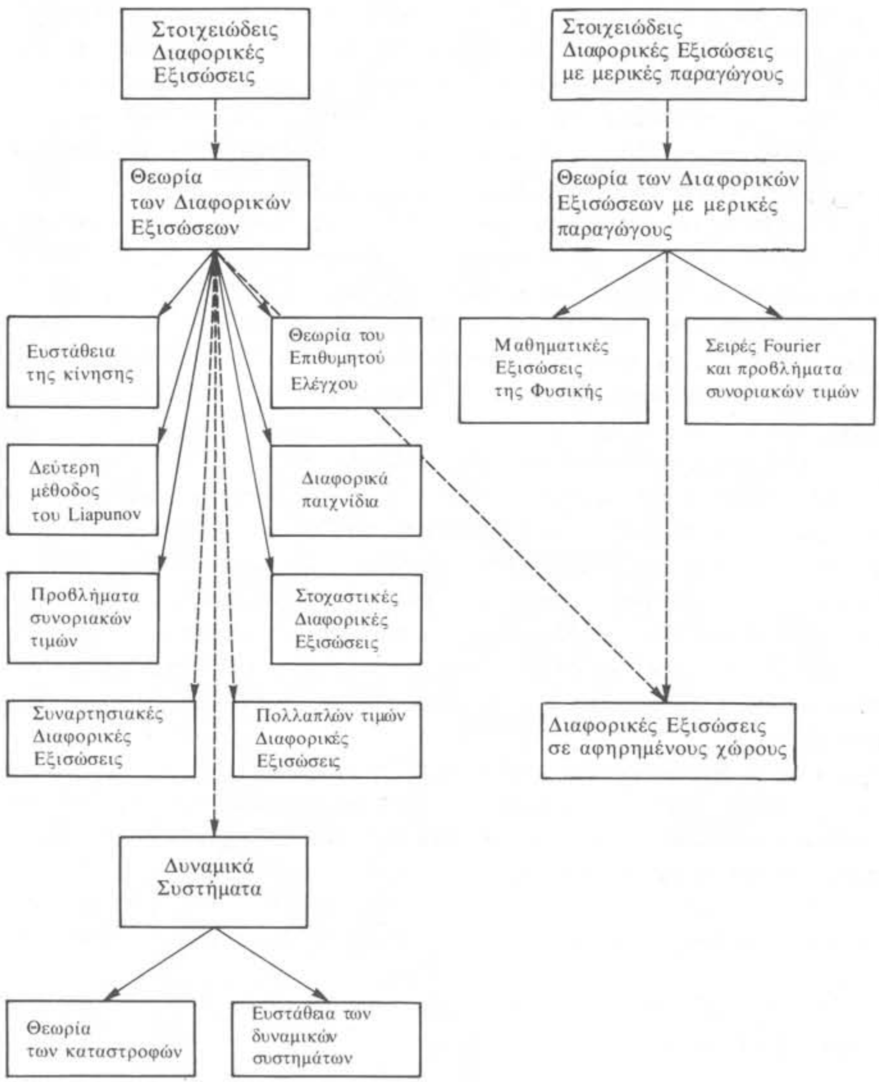
Αυτή η δεύτερη έκδοση γίνεται μετά τη χρησιμοποίηση του συγγράμματος και αυτή η εμπειρία, μαζί με την επιθυμία εμπλουτισμού της ύλης του, οδήγησαν στην επανεξέτασή του. Αρκετά μέρη έχουν προστεθεί κι άλλα έχουν αναδιαρθωθεί με την πρόθεση να γίνουν περισσότερο κατανοητά.

Ο τόμος αυτός, καθώς και οι άλλοι δύο, απευθύνονται και σε μη μαθηματικούς που θέλουν να εφαρμόσουν τις διαφορικές εξισώσεις στο δικό τους χώρο.

Τέλος, ευχαριστώ τις εκδόσεις Ζήτη για την επιμελημένη έκδοση των τριών τόμων του συγγράμματος.

Θεσσαλονίκη, 1987 — *Θ. ΚΥΒΕΝΤΙΔΗΣ*

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Τόμος πρώτος

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΕΙΔΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ LAPLACE - ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ GREEN

Τόμος Δεύτερος

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ
(Βασική Θεωρία - Ασκήσεις)

Τόμος Τρίτος

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
(Εισαγωγή στην ποιοτική Θεωρία - Ασκήσεις)

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η Επιστήμη επιδιώκει την κατανόηση του κόσμου στον οποίο ζούμε, και τα μαθηματικά έχουν πρωταρχική σημασία προς αυτόν το σκοπό. Ζούμε μέσα σ' ένα κόσμο όπου όλες οι οντότητές του αλληλένδετα μεταβάλλονται, όπως επιγραμματικά μας το εκφράζει το γνωστό ρητό του Ηράκλειτου (544 - 484 π.Χ.) «*Πάντα ρεῖ, πάντα χωρεῖ καί οὐδέν μένει*».

Η θέση της Γης αλλάζει με το χρόνο, η ταχύτητα ενός σώματος που πέφτει μεταβάλλεται με την απόσταση, το κύρτωμα μιας δοκού αλλάζει με το βάρος του φορτίου που τοποθετείται πάνω του, το εμβαδόν του κύκλου μεταβάλλεται με το μήκος της ακτίνας του.

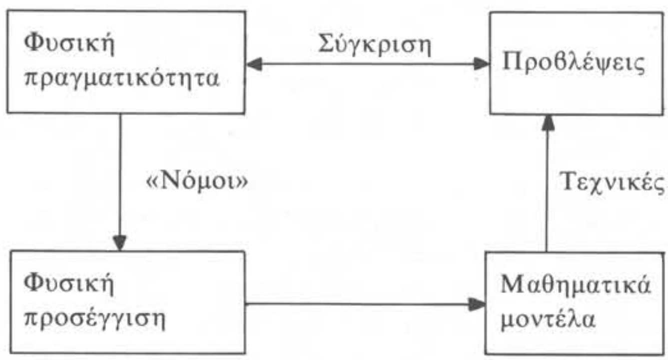
Στη μαθηματική γλώσσα οι μεταβαλλόμενες οντότητες ονομάζονται μεταβλητές και *ο ρυθμός μεταβολής μιας μεταβλητής ως προς μια άλλη* λέγεται *παράγωγος*. Οι εξισώσεις που εκφράζουν σχέσεις μεταξύ μεταβλητών και των παραγώγων τους λέγονται *διαφορικές εξισώσεις*. Στις φυσικές και στις κοινωνικές επιστήμες πολλά προβλήματα εκφράζονται με διαφορικές εξισώσεις, εκείνο όμως που κυρίως ενδιαφέρει δεν είναι η σχέση μεταξύ της μεταβλητής και των παραγώγων της (δηλ. η διαφορική εξίσωση) αλλά η έκφραση της ίδιας της μεταβλητής. Για παράδειγμα, αν είναι γνωστή η σχέση μεταξύ της μεταβλητής που εκφράζει τη θέση ενός σωματιδίου και του ρυθμού της μεταβολής της με το χρόνο (δηλ. είναι γνωστή η διαφορική εξίσωση της κίνησης του σωματιδίου) εμείς θέλουμε να γνωρίζουμε πού θα είναι το σωματίδιο κάθε χρονική στιγμή.

Η κατασκευή των διαφορικών εξισώσεων (μαθηματικών μοντέλων) για κάποιο πρόβλημα φυσικό ή κοινωνικό (π.χ. ηλεκτρικού κυκλώματος, μηχανικής, αύξησης πληθυσμού, χημικού μίγματος) είναι συχνά δύσκολη και απαιτεί μεγάλη πείρα. Το επόμενο βήμα είναι η χρησιμοποίηση μαθηματικών μεθόδων για να ερευνηθούν ιδιότητες του μοντέλου κι έτσι ν' απαντήσουμε σε ειδικές ερωτήσεις. Αυτό το βήμα στη μαθηματική γλώσσα σημαίνει, κυρίως, να λυθεί η διαφορική εξίσωση που σχηματίστηκε, δηλ. να βρεθεί η έκφραση της ίδιας της μεταβλητής, ή να βρεθούν ποιοτικές πληροφορίες γι' αυτήν.

Δεν πρέπει να συγχέουμε το μοντέλο με την πραγματικότητα.

Αν φιλοσοφήσουμε λίγο θα δούμε πώς κι' αυτό ακόμη το $1+1=2$ της αριθμητικής δεν είναι τίποτε άλλο παρά ένα μοντέλο, γιατί δεν υπάρχουν στη Φύση δύο πράγματα *ακριβώς* ίσα.

Βέβαια 1 δραχμή + 1 δραχμή = 2 δραχμές, αλλά η δραχμή είναι κι αυτή μοντέλο και όχι φυσικό αντικείμενο. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται μια απλή και σαφής σχέση μεταξύ των μαθηματικών μοντέλων και της πραγματικότητας.



Για παράδειγμα οι φυσικοί θεωρούν το φως άλλοτε σαν κύμα και άλλοτε σαν σωματίδιο. Τί είναι όμως το φως στην πραγματικότητα; Κύμα ή σωματίδιο; Η απάντηση είναι, τίποτε από τα δύο, απλώς και τα δύο είναι μαθηματικά μοντέλα για το φως.

Με άλλα λόγια *δεν πρέπει να περιμένουμε να έχουμε ακριβώς ένα μοναδικό σωστό μαθηματικό μοντέλο για κάποια θεώρηση της πραγματικότητας*. Οι «νόμοι της κίνησης» του ***Newton*** δεν είναι οι μόνοι «σωστοί», π.χ. στις μεγάλες ταχύτητες οι νόμοι του ***Einstein*** είναι πιο κοντά στην πραγματικότητα.

Τα μαθηματικά, γενικά, είναι σαν το χάρτη που αναπαριστά μια πραγματικότητα αλλά δεν είναι η πραγματικότητα. Τα μαθηματικά, λοιπόν, μας δίνουν ένα χάρτη του πραγματικού κόσμου.

Το σύγγραμμα αυτό περιέχει τις μαθηματικές μεθόδους που είναι απαραίτητες για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων και χωρίζεται σε τρία αυτοτελή μέρη. Στο πρώτο μέρος (τόμος πρώτος), κεφάλαια 1 έως 6, περιέχονται οι στοιχειώδεις διαφορικές εξισώσεις, στο δεύτερο μέρος (τόμος δεύτερος), κεφάλαια 1 έως 5 περιέχονται στοιχεία των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους και στο τρίτο μέρος (τόμος τρίτος) κεφάλαια 1 έως 3 περιέχονται στοιχεία από την ποιοτική θεωρία των διαφορικών εξισώσεων.

Στα παραρτήματα, στο τέλος κάθε τόμου, αναφέρονται στοιχεία από τον διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό, τις σειρές *Fourier*, την τοπολογία και τη γραμμική άλγεβρα.

Τόμος Πρώτος: Αναλυτικότερα, στο κεφάλαιο 1 περιέχονται οι διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης, στο κεφάλαιο 2 αναπτύσσονται αναλυτικά, κυρίως, οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης, γιατί αυτές συναντώνται συχνά στις εφαρμογές, στο κεφάλαιο 3 περιλαμβάνονται οι διαφορικές εξισώσεις που με μετασχηματισμό ή τεχνάσματα ανάγονται σε γνωστές ή απλούστερες μορφές διαφορικών εξισώσεων και ειδικές περιπτώσεις διαφορικών εξισώσεων, στο κεφάλαιο 4 περιέχονται δύο μέθοδοι επίλυσης συστημάτων διαφορικών εξισώσεων, της απαλοιφής και των πινάκων, στο κεφάλαιο 5 αναφέρονται οι πλέον γνωστές αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης διαφορικών εξισώσεων (*Euler*, σειράς *Taylor*, *Milne*, *Runge-Kutta*) και στο κεφάλαιο 6 αναφέρονται οι μετασχηματισμοί *Laplace*.

Τόμος Δεύτερος. Σ' αυτόν περιέχονται στοιχεία των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης με σταθερούς, κυρίως, συντελεστές. Περιλαμβάνονται, ακόμη, συστήματα, αριθμητικές και προσεγγιστικές μέθοδοι των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους, καθώς και συνοριακά προβλήματα.

Τόμος Τρίτος. Στο κεφάλαιο 1 αναπτύσσεται η θεωρία των διανυσματικών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (σε νορμικό χώρο πεπερασμένης διάστασης), στο κεφάλαιο 2 περιέχονται, η ευστάθεια των λύσεων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων και η μέθοδος του *Liapunov* που μας επιτρέπει να μελετάμε ιδιότητες των λύσεων διαφορικής εξίσωσης χωρίς να τις γνωρίζουμε, και στο κεφάλαιο 3 περιλαμβάνονται τα θεωρήματα ύπαρξης και μοναδικότητας και η σύγκριση των λύσεων διαφορικών εξισώσεων που μας επιτρέπει να μελετάμε μια «γειτονική» διαφορική εξίσωση γνωστής μορφής αντί της ίδιας διαφορικής εξίσωσης που δεν μπορούμε να λύσουμε ή να την ερευνήσουμε ποιοτικά.

Στο βιβλίο αυτό, στις παραγράφους των λυμένων προβλημάτων κάθε κεφαλαίου, περιέχονται και ορισμένες εφαρμογές των διαφορικών εξισώσεων στη Φυσική και τις άλλες Επιστήμες.

Η διατύπωση μαθηματικών μοντέλων έχει τελευταία, δίκαια, αυξημένο ενδιαφέρον ως ένα σημαντικό μέρος των μαθηματικών.

Ένα πρόβλημα το οποίο προκύπτει από μια πρακτική κατάσταση συνήθως χρειάζεται να πάρει μια μαθηματική μορφή πριν επιχειρηθεί να λυθεί. Κατά τη διαδικασία αυτή μερικές πλευρές του προβλήματος πρέπει να παραλειφθούν ή να τροποποιηθούν, έτσι το πρώτο πρόβλημα

είναι ν' αποφασίσουμε ποιό είναι το πρόβλημα.

Διαφορετικές παρουσιάσεις θα δώσουν διαφορετικά αποτελέσματα και συχνά είναι θέμα προσωπικής άποψης το ποιό απ' αυτά είναι το ενδιαφέρον.

Βέβαια τα μαθηματικά μοντέλα είναι ιδεαλισμοί, αλλά το σημαντικό είναι ότι εξηγούν ένα μεγάλο μέρος των εμπειρικών παρατηρήσεων του μελετούμενου προβλήματος. Ακόμη, ένα μοντέλο μας επιτρέπει να καταλάβουμε καλύτερα το πρόβλημα που εξετάζουμε.

Τέλος, στις παραπομπές, αν η αναφορά γίνεται μέσα στο ίδιο το κεφάλαιο τότε απλώς αναφέρουμε την παράγραφο (π.χ. §2), διαφορετικά σημειώνεται και το κεφάλαιο (π.χ. Κεφ. 3, §2) ή (π.χ. Κεφ. 3, §2, Τόμος Τρίτος) αν θέλουμε ν' αναφερθούμε σ' άλλον τόμο.

2. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Λέγοντας *διαφορική εξίσωση* (στο εξής θα γράφουμε δ.ε.) εννοούμε μια σχέση μεταξύ μιας μεταβλητής x, μιας συνάρτησης y της x και μερικών (ή όλων) από τις παραγώγους της y', y'', ..., $y^{(n)}$ ως προς x δηλ.

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

Π.χ. $y' = 1 + y$, $y'' + 3y' + 2y = x^2$, $[1 + y']^2 = y''$.

Η μεγαλύτερη παράγωγος που εμφανίζεται στην εξίσωση (1) λέγεται *τάξη* της δ.ε. (1). Όταν η δ.ε. είναι πολυώνυμο ως προς τις παραγώγους της άγνωστης συνάρτησης $y(x)$, η μεγαλύτερη δύναμη των παραγώγων της λέγεται *βαθμός* της δ.ε.

Π.χ. η δ.ε. $1 + (y')^2 = 3y''$ είναι δεύτερης τάξης και δεύτερου βαθμού ενώ η δ.ε. $y'' + y = x^3$ είναι δεύτερης τάξης και πρώτου βαθμού.

Είναι γνωστό πως η παράγωγος μιας συνάρτησης εκφράζει το *ποσοστό της μεταβολής* των τιμών της συνάρτησης. Επομένως, μια δ.ε. είναι μια σχέση που συνδέει μια άγνωστη συνάρτηση με τις μεταβολές των τιμών της.

Διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους είναι μια εξίσωση που συνδέει δύο ή περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές x_1, x_2, ..., x_n, μια άγνωστη συνάρτηση $z = z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και τις μερικές παραγώγους της z μέχρι ορισμένης τάξης. Η μεγαλύτερη τάξη μερικών παραγώγων που εμφανίζεται στην εξίσωση λέγεται τάξη της δ.ε.

Μια δ.ε. με μερικές παραγώγους μπορεί να προκύψει είτε με απαλοιφή αυθαίρετων σταθερών είτε με απαλοιφή αυθαίρετων συναρτήσεων (Βλέπε Τόμο Δεύτερο).

ΟΡΙΣΜΟΣ 1: *Λέγοντας* λύση *μιας δ.ε. (1) εννοούμε μια* συνάρτηση $y = \varphi(x)$ *που την επαληθεύει δηλ.*

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$$

σε κάποιο διάστημα $I = (a, \beta)$.

Π.χ. η συνάρτηση $y = \varphi(x) = e^x - 1$ είναι λύση της δ.ε. $y' = 1 + y$, ακόμη οι συναρτήσεις $y = ce^x - 1$, $c \in R$ είναι, επίσης, λύσεις της ίδιας δ.ε., για κάθε $x \in R$ (πραγματική ευθεία).

Προσοχή! Σε αντίθεση με τις αλγεβρικές εξισώσεις που οι λύσεις τους είναι *αριθμοί* οι λύσεις των δ.ε. είναι *συναρτήσεις*.

Γενικά, κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις (Κεφ. 3, Τόμος Τρίτος), η δ.ε. (1) τάξης n έχει μια n-παραμετρική οικογένεια συναρτήσεων

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

που επαληθεύει τη δ.ε. (1) και την λέμε *γενικό ολοκλήρωμα.*

Π.χ. η δ.ε. τάξης 1, $y' = f(x, y)$ έχει γενικό ολοκλήρωμα της μορφής $y = \varphi(x, c)$, $c \in R$, ενώ μια δ.ε. τάξης 2, $y'' = f(x, y, y')$, έχει γενικό ολοκλήρωμα της μορφής $y = \varphi(x, c_1, c_2)$, $c_1, c_2 \in R$.

Οι συναρτήσεις αυτές παριστάνουν στο επίπεδο Oxy μια οικογένεια καμπύλων που λέγεται οικογένεια των *ολοκληρωτικών καμπύλων* της δ.ε.

Παρατηρούμε λοιπόν πως η τάξη της δ.ε. ισούται με τον αριθμό των αυθαίρετων σταθερών που εμφανίζονται στο γενικό ολοκλήρωμα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2: Μερική λύση *της δ.ε. (1) είναι η συνάρτηση που δεν εξαρτάται από αυθαίρετες σταθερές και είναι λύση της δ.ε. Η γραφική παράσταση μερικής λύσης λέγεται ολοκληρωτική καμπύλη της δ.ε.*

Μερικές λύσεις μπορούν να προκύψουν από το γενικό ολοκλήρωμα όταν οι αυθαίρετες σταθερές πάρουν ορισμένες τιμές.

Π.χ. η δ.ε. $y' = 1 + y$ έχει γενικό ολοκλήρωμα $y = ce^x - 1$, $c \in R$ απ' όπου για $c = 1$ παίρνουμε τη μερική λύση $y = e^x - 1$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3: *Οι λύσεις της δ.ε. που δεν προκύπτουν από το γενικό ολοκλήρωμα λέγονται* ιδιάζουσες λύσεις *της δ.ε.*

Π.χ. η δ.ε. $y = xy' + (y')^2$ (μορφής του *Clairaut*) έχει γενικό ολοκλήρωμα

$$y = cx + c^2, \quad c \in R$$

απ' όπου δεν προκύπτει η λύση της $y = -\dfrac{1}{4}x^2$ (ιδιάζουσα λύση).

ΟΡΙΣΜΟΣ 4: *Το γενικό ολοκλήρωμα είναι γενική* λύση *της δ.ε. όταν μας δίνει* όλες *τις λύσεις της δ.ε. με κατάλληλη εκλογή των αυθαίρετων σταθερών.*

Π.χ. το γενικό ολοκλήρωμα $y = ce^x - 1$, $c \in R$ της δ.ε. $y' = 1 + y$ είναι γενική λύση της δ.ε.

Το πρόβλημα του προσδιορισμού μιας μερικής λύσης της δ.ε. (1) παρουσιάζεται, συνήθως, με την εξής μορφή:

Να προσδιορίσουμε τη μερική λύση $\varphi(x)$ της δ.ε. (1) που για ορισμένη τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής $x = x_0$ παίρνει μια δοσμένη τιμή a_0 και οι παράγωγοί της, ως την τάξη $n-1$ παίρνουν επίσης δοσμένες τιμές $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ δηλ. η μερική λύση πρέπει να ικανοποιεί τις συνθήκες

$$\varphi(x_0) = a_0, \; \varphi'(x_0) = a_1, \; \varphi''(x_0) = a_2, \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}.$$

Οι συνθήκες αυτές που συνήθως επιβάλλονται από το πρόβλημα λέγονται *αρχικές συνθήκες* του προβλήματος ή της δ.ε. (1).

Μία δ.ε. μαζί με αρχικές συνθήκες λέγεται *πρόβλημα αρχικής τιμής* ή *πρόβλημα του Cauchy*.

Η εύρεση της μερικής λύσης που ικανοποιεί αρχικές συνθήκες γίνεται με τον παρακάτω τρόπο:

α) Αν ζητάμε τη λύση $\varphi(x)$ μιας δ.ε. πρώτης τάξης που ικανοποεί την αρχική συνθήκη $\varphi(x_0) = y_0$, βρίσκουμε πρώτα το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε. $y = g(x, c)$, $c \in R$ και στη συνέχεια από την εξίσωση $y_0 = g(x_0, c)$ προσδιορίζουμε τη σταθερή ποσότητα $c = c_0$.

Η ζητούμενη λύση είναι $\varphi(x) = g(x, c_0)$.

Π.χ. η μερική λύση $\varphi(x)$ της δ.ε. $y' = 1 + y$ που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $\varphi(0) = 0$ είναι $\varphi(x) = e^x - 1$ και προκύπτει από το γενικό ολοκλήρωμα $y = ce^x - 1$, για $c = 1$, γιατί $0 = ce^0 - 1$.

β) Αν ζητάμε τη λύση $\varphi(x)$ μιας δ.ε. δεύτερης τάξης, με αρχικές συνθήκες $\varphi(x_0) = a_0$, $\varphi'(x_0) = a_1$, βρίσκουμε πρώτα το γενικό ολοκλήρωμα $y = g(x, c_1, c_2)$, $c_1, c_2 \in R$ και στη συνέχεια από το σύστημα

$$g(x_0, c_1, c_2) = a_0$$
$$g'(x_0, c_1, c_2) = a_1$$

προσδιορίζουμε τις αυθαίρετες σταθερές $c_1 = c_1^0$, $c_2 = c_2^0$.

Η ζητούμενη λύση είναι $\varphi(x) = g(x, c_1^0, c_2^0)$.

Π.χ. η μερική λύση $\varphi(x)$ της δ.ε. $y'' - 3y' + 2y = 0$, με αρχικές συνθήκες $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$, είναι $\varphi(x) = -e^x + e^{2x}$ και προκύπτει από τη γενική λύση $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$, για $c_1 = -1$, $c_2 = 1$, γιατί έχουμε $c_1 + c_2 = 0$, $c_1 + 2c_2 = 1$.

Η διαδικασία αυτή γενικεύεται, ανάλογα, για δ.ε. τάξης $n > 2$.

Αν οι αρχικές συνθήκες δίνονται σε περισσότερες από μια τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής, το πρόβλημα είναι τότε *συνοριακό πρόβλημα* και οι συνθήκες είναι *συνοριακές συνθήκες*. Π.χ. το πρόβλημα $y''+2y' = e^x$, $y(\pi) = 1$, $y'(\pi) = 2$ είναι πρόβλημα αρχικής τιμής, αλλά το πρόβλημα $y''+2y' = e^x$, $y(0) = 1$, $y(1) = 1$ είναι συνοριακό πρόβλημα.

Α. Παραδείγματα - Εφαρμογές.

1. Θεωρούμε την οικογένεια των παραβολών $y = cx^2$ (1) όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή. Να βρεθεί η οικογένεια των καμπύλων που τέμνει τη δοθείσα οικογένεια (1), σε κάθε σημείο, ορθογώνια.

Η κλίση των παραβολών (1) είναι $y' = 2cx$ (2), αλλά από την (1) έχουμε $c = y/x^2$, άρα $y' = 2y/x$ (3). Η (3) δίνει τις κλίσεις των παραβολών (1) σε κάθε σημείο (x, y).

Επομένως οι κλίσεις της ζητούμενης οικογένειας πρέπει να είναι $y' = -x/2y$ (4). Λύνοντας τη δ.ε. (4) παίρνουμε τις λύσεις

$$x^2+2y^2 = c\,, \qquad c \in R$$

που είναι οικογένεια ελλείψεων.

2. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα ραδιενεργό σώμα. Αν καλέσουμε $N(t)$ το πλήθος των ατόμων του τη χρονική στιγμή t, τότε το πλήθος των ατόμων του το χρόνο $t+\Delta t$ θα είναι $N(t+\Delta t)$.

Όταν ο φυσικός αριθμός $N(t)$ είναι «πολύ μεγάλος αριθμός» και η διαφορά $N(t+\Delta t)-N(t)$, «πολύ μικρός αριθμός» ως προς το $N(t)$ τότε, μπορούμε να θεωρήσουμε πως η διαφορά $N(t+\Delta t)-N(t)$ «τείνει στο μηδέν», όταν $\Delta t \to 0$, μπροστά στο μέγεθος του αριθμού $N(t)$.

Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε «μετάβαση στο όριο» και να μιλάμε για «παράγωγο» της συνάρτησης $N(t)$.

Με τις παραπάνω προϋποθέσεις προκύπτει

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)\,, \qquad \lambda > 0 \text{ σταθερή της ραδιενέργειας,}$$

και, αν είναι $N(t_0) = N_0$, τότε έχουμε $N(t) = N_0 e^{-\lambda(t-t_0)}$, $\forall\, t \geq t_0$.

3. Ας καλέσουμε $p(t)$ τον πληθυσμό ενός βιότοπου τη χρονική στιγμή t. Αν είναι $n(t)\%$ γεννήσεις, $m(t)\%$ θάνατοι, $E(t)$ έποικοι, $M(t)$ μετανάστες και ο χρόνος Δt (μεταβολή από t σε $t+\Delta t$) είναι μικρός, η

παρατήρηση δείχνει πως όλες αυτές οι μεταβολές είναι ανάλογες του χρόνου Δt.

Επομένως, έχουμε

$$p\,(t+\Delta t)-p\,(t) = n(t)\,p(t)\cdot\Delta t-m(t)\,p(t)\cdot\Delta t+E(t)\,\Delta t-M\,(t)\,\Delta t$$

ή
$$\frac{p\,(t+\Delta t)-p\,(t)}{\Delta t} = (n\,(t)-m\,(t))\,p\,(t)+E\,(t)-M\,(t)$$

και, όταν $\Delta t \rightarrow 0$, παίρνουμε τη δ.ε. $\dfrac{dp\,(t)}{dt} = (n-m)\,p\,(t)+E-M.$

Αν ο βιότοπος είναι απομονωμένος (π.χ. ο πληθυσμός όλης της Γης), τότε είναι $E=0$, $M=0$, και αν υποθέσουμε πως τα ποσοστά $n\,(t)$ και $m\,(t)$ είναι σταθερά, η δ.ε. γίνεται

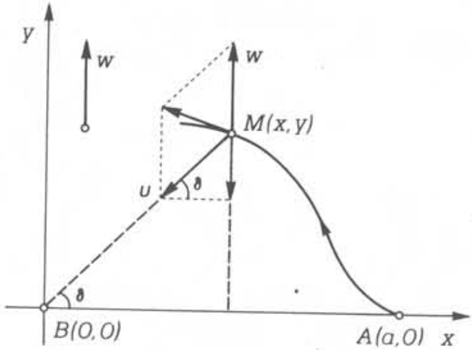
$$\frac{dp}{dt} = (n-m)\,p$$

και έχει γενική λύση $p\,(t) = p_0 e^{(n-m)\,t}$, $\forall\ t \geq 0$.

Ο νόμος αυτός επαληθεύεται ουσιαστικά σε ορισμένες μικροβιακές καλλιέργειες. Στην περίπτωση που το $p\,(t)$ είναι ο πληθυσμός της Γης ο νόμος αυτός λέγεται *νόμος του* ***Malthus*** (1766-1834).

4. Ένα αεροπλάνο, που αναπτύσσει ταχύτητα υ ***km/h***, θέλει να κάνει πτήση από την πόλη A στην πόλη B, ενώ φυσάει άνεμος ταχύτητας w ***km/h*** με κατεύθυνση κάθετη στην ευθεία των δύο πόλεων. Ποιά θα είναι η εξίσωση της κίνησης του αεροπλάνου;

Θεωρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων με άξονα Ox την ευθεία που ορίζουν οι δύο πόλεις A, B.



Προφανώς, οι δ.ε. της κίνησης είναι

$$\frac{dx}{dt} = -\upsilon\,\sigma\upsilon\nu\,\theta \qquad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\upsilon\,\eta\mu\theta+w \qquad (2)$$

όπου

$$\eta\mu\,\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sigma\upsilon\nu\,\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Από τις εξισώσεις (1), (2) παίρνουμε, με διαίρεση κατά μέλη, τη δ.ε. της κίνησης

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\upsilon y + w\sqrt{x^2+y^2}}{-\upsilon x} = \frac{y - \frac{w}{\upsilon}\sqrt{x^2+y^2}}{x}$$

και, αν θέσουμε $k = \frac{w}{\upsilon}$, προκύπτει $x\,dy = (y - k\sqrt{x^2+y^2})\,dx$ (3).

Η δ.ε. (3) είναι ομογενής δ.ε. πρώτης τάξης και όπως θα δούμε στα επόμενα (βλέπε κεφάλαιο 1, §8, Λυμένο πρόβλημα 4), μαζί με την αρχική συνθήκη $y(a) = 0$, μας δίνει τη λύση (εξίσωση της κίνησης του αεροπλάνου)

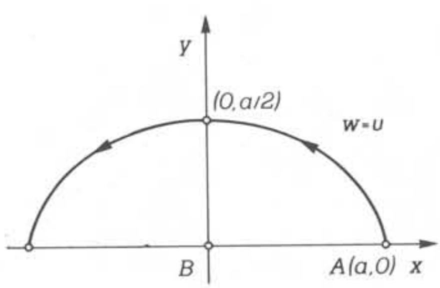
$$y = \frac{a}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{1-(w/\upsilon)} - \left(\frac{x}{a}\right)^{1+(w/\upsilon)}\right]. \tag{4}$$

Περίπτωση 1: $w=\upsilon$. Η εξίσωση (4) γίνεται $y = \frac{a}{2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ ή ακόμη

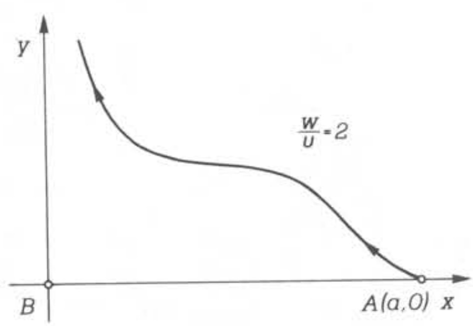
$$x^2 = -2a\left(y - \frac{a}{2}\right)$$

που είναι η εξίσωση μιας παραβολής.

Για $x=0$ είναι $y = \frac{a}{2}$, άρα το αεροπλάνο δεν μπορεί να κάνει πτήση από την πόλη A στην πόλη B.



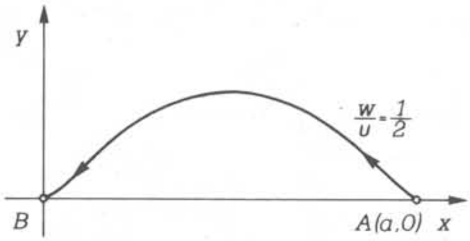
Περίπτωση 1



Περίπτωση 2

Περίπτωση 2: $w>\upsilon$. Έχουμε $\frac{w}{\upsilon} > 1$, οπότε προκύπτει $1 - \frac{w}{\upsilon} < 0$ και όταν $x \to 0$, τότε $\left(\frac{x}{a}\right)^{1-(w/\upsilon)} = \left(\frac{a}{x}\right)^{(w/\upsilon)-1} \to \infty$.

Βλέπουμε λοιπόν, από την (4), πως όταν το $x \to 0$ τότε το $y \to \infty$, άρα το αεροπλάνο δεν φτάνει στην πόλη B.



Περίπτωση 3

Περίπτωση 3: $w<\upsilon$. Έχουμε $\frac{w}{\upsilon}<1$, οπότε $1-\frac{w}{\upsilon}>0$.

Από τη σχέση (4) βλέπουμε πως όταν $x=0$ τότε είναι και $y=0$, άρα το αεροπλάνο φτάνει στην πόλη *B*.

B. Σχηματισμός των διαφορικών εξισώσεων.

Όταν μας δοθεί μια μονοπαραμετρική οικογένεια $y=g(x,\ c)$ ή διπαραμετρική οικογένεια $y=g(x,\ c_1,\ c_2)$ καμπύλων, βρίσκουμε τη δ.ε., της οποίας αποτελούν γενικό ολοκλήρωμα, απαλείφοντας το c ή τα c_1, c_2 μεταξύ των σχέσεων

$$\begin{aligned} y&=g(x,\ c)\\ y'&=g'(x,\ c)\end{aligned} \qquad \text{ή} \qquad \begin{aligned} y&=g(x,\ c_1,\ c_2)\\ y'&=g'(x,\ c_1,\ c_2)\,,\\ y''&=g''(x,\ c_1,\ c_2)\end{aligned}$$

αντίστοιχα. Στην πρώτη περίπτωση θα πάρουμε μια δ.ε. πρώτης τάξης και στη δεύτερη μια δ.ε. δεύτερης τάξης.

Π.χ. αν έχουμε $y=ce^x-1$, τότε $y'=ce^x$ και η απαλοιφή της c μας δίνει τη δ.ε. $y'=1+y$. Επίσης, αν έχουμε $y=c_1e^x+c_2e^{2x}$ τότε, μεταξύ αυτής και των σχέσεων

$$y'=c_1e^x+2c_2e^{2x}\,, \qquad y''=c_1e^x+4c_2e^{2x}$$

απαλείφουμε τις σταθερές c_1, c_2 και παίρνουμε τη δ.ε.

$$y''-3y'+2y=0\,.$$

Η διαδικασία αυτή γενικεύεται, ανάλογα, για μια n-παραμετρική οικογένεια καμπύλων $y=g(x,\ c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_n)$, απ' όπου παίρνουμε μια δ.ε. τάξης n (όσο είναι το πλήθος των αυθαίρετων σταθερών).

Γ. Μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις.

Θεωρούμε τη δ.ε. πρώτης τάξης

$$\dot{x}=f(t,\ x)$$