ΘΩΜΑΣ ΚΥΒΕΝΤΙΔΗΣ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Πρόλογος

Τα μαθηματικά είναι μια γλώσσα με την οποία προσπαθούμε να εκφράσουμε διάφορα προβλήματα και να τα κατανοήσουμε .

Οι διαφορικές εξισώσεις είναι απαραίτητες για την κατανόηση πολλών φυσικών , μαθηματικών και άλλων προβλημάτων .

Παρουσιάζουμε εδώ ορισμένες μαθηματικές τεχνικές επίλυσης βασικών μορφών διαφορικών εξισώσεων, χωρίς να επιβαρύνουμε την ανάπτυξη των μεθόδων με πολλές θεωρητικές αποδείξεις .

Το βιβλίο χωρίζεται σε επτά κεφάλαια .

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης και η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων (μέθοδος του Picard) .

Στο δεύτερο κεφάλαιο αναπτύσσονται οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης και ανώτερης τάξης , οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις του Euler, ο υποβιβασμός της τάξης , οι σειρές ως λύσεις διαφορικών εξισώσεων (μέθοδος Frobenius) και ορισμένες ειδικές μορφές .

Στο τρίτο κεφάλαιο αναφέρονται τα συστήματα διαφορικών εξισώσεων , τα πρώτα ολοκληρώματα ,η μέθοδος της απαλοιφής , η μέθοδος των πινάκων και η μέθοδος του Putzer . Μελετώνται ακόμη , η ευστάθεια των γραμμικών συστημάτων διαφορικών εξισώσεων και η ευστάθεια σε πρώτη γραμμική προσέγγιση .

Στο τέταρτο κεφάλαιο αναπτύσσονται οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης, το αντίστοιχο πρόβλημα της αρχικής τιμής , οι εξισώσεις ολικών διαφορικών και οι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους πρώτης τάξης .

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι μετασχηματισμοί Laplace και οι εφαρμογές τους στις διαφορικές εξισώσεις και τα συστήματα διαφορικών εξισώσεων .

Σε καθένα από τα παραπάνω κεφάλαια 1 έως 5 περιέχονται ασκήσεις που οι απαντήσεις τους δίνονται στο τέλος του βιβλίου .

Στο έκτο κεφάλαιο περιέχονται λυμένα προβλήματα απ' όλα τα κεφάλαια και στο έβδομο κεφάλαιο δίνονται μερικές ενδιαφέρουσες και χρήσιμες εφαρμογές των διαφορικών εξισώσεων .

Η ανάλυση των εφαρμογών γίνεται με τέτοιο τρόπο , ώστε να γίνονται άμεσα κατανοητές , και να μη χρειάζεται ο αναγνώστης ν' αναζητήσει πολύ ειδικές έννοιες των μαθηματικών .

Θεσσαλονίκη, 2007 Θ. ΚΥΒΕΝΤΙΔΗΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ LAPLACE

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Λέγοντας *διαφορική εξίσωση* (θα σημειώνουμε στο εξής δ.ε.) εννοούμε μια εξίσωση που περιέχει μια μεταβλητή x, μια συνάρτηση $y(x)$ και ορισμένες (ή όλες) από τις παραγώγους της $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ ως προς x.

Η μεγαλύτερη παράγωγος που εμφανίζεται στη δ.ε. λέγεται *τάξη* της δ.ε.

Οι δ.ε. τάξης $n \geq 1$ είναι της μορφής

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0, \; n \geq 1 \qquad (1)$$

και *λύση* της δ.ε. (1) είναι μία συνάρτηση $\varphi : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) = 0, \; x \in I.$$

Π.χ. η $\varphi(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι λύση της δ.ε. $y'' - 2y' + y = 0$.

Αρχικές συνθήκες για τη δ.ε. (1) είναι οι συνθήκες

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_0', \; \ldots, \; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \qquad (2)$$

όπου $x_0 \in I$ και y_0, y_0', ..., $y_0^{(n-1)}$ είναι δοσμένοι αριθμοί.

Πρόβλημα της αρχικής τιμής ή πρόβλημα του Cauchy είναι οι εξισώσεις (1) και (2) μαζί.

Σημαίνει να βρεθεί η λύση $\varphi(x)$ της δ.ε. (1) η οποία ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες (2): $\varphi(x) = y_0$, $\varphi'(x) = y'_0, \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε. (1) είναι μια n - παραμετρική οικογένεια συναρτήσεων

$$y = y(x, c_1, c_2, \ldots, c_n),$$

όπου $c_1, c_2, \ldots, c_n$ είναι αυθαίρετες σταθερές, που την επαληθεύει.

Όταν το γενικό ολοκλήρωμα δίνει όλες τις λύσεις της δ.ε.(1) τότε λέγεται *γενική λύση* της δ.ε. (1).

Για να βρούμε τη λύση του προβλήματος της αρχικής τιμής (1), (2), στο γενικό ολοκλήρωμα $y = y(x, c_1, \ldots, c_n)$ και τις παραγώγους του $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ θέτουμε, για $x = x_0$, τις τιμές:

$$y = y_0, \; y' = y_0', \; \ldots, \; y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}.$$

Λύνουμε το σύστημα που δημιουργείται ως προς $c_1, c_2, \ldots, c_n$ και τις τιμές αυτές τις θέτουμε στην έκφραση του γενικού ολοκληρώματος (ή της γενικής λύσης) και βρίσκουμε τη ζητούμενη λύση.

Αυτή η λύση λέγεται *μερική λύση* της δ.ε.

Μερικές λύσεις μπορούν να προκύψουν από το γενικό ολοκλήρωμα , όταν οι αυθαίρετες σταθερές πάρουν ορισμένες τιμές .

Π.χ. η δ.ε.

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$$

έχει τη γενική λύση

$$y = e^{-x^2}[x^2 + c],$$

όπου c αυθαίρετη σταθερή , απ' όπου για $c = 1$ παίρνουμε τη μερική λύση

$$y = e^{-x^2}[x^2 + 1],\ x \in \mathbb{R}.$$

Οι λύσεις της δ.ε. που δεν προκύπτουν από το γενικό ολοκλήρωμά της , λέγονται *ιδιάζουσες λύσεις* της δ.ε.

Αντίστροφα , όταν δοθεί μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων $y = f(x,c)$ ή μια διπαραμετρική οικογένεια καμπύλων $y = g(x,c_1,c_2)$ βρίσκουμε τη δ.ε της οποίας αποτελούν γενικό ολοκλήρωμα , απαλείφοντας το c ή τα c_1, c_2 μεταξύ των σχέσεων

$$\begin{aligned} y &= f(x,c) \\ y' &= f'(x,c) \end{aligned} \qquad \text{ή} \qquad \begin{aligned} y &= g(x,c_1,c_2) \\ y' &= g'(x,c_1,c_2) \\ y'' &= g''(x,c_1,c_2) \end{aligned}$$

αντίστοιχα .

Π.χ. αν έχουμε $y = c_1e^x + c_2e^{2x}$ τότε μεταξύ των σχέσεων

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x}$$

$$y' = c_1e^x + 2c_2e^{2x}$$

$$y'' = c_1e^x + 4c_2e^{2x}$$

απαλείφοντας τις αυθαίρετες σταθερές c_1 , c_2 παίρνουμε τη δ.ε.

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Αυτής της δ.ε. η διπαραμετρική οικογένεια καμπύλων

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} \quad , \qquad c_1\ ,\ c_2 \text{ αυθαίρετες σταθερές ,}$$

αποτελεί *τη γενική λύση της* .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

1

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

1. Διαφορικές εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών

Στη κατηγορία αυτή ανήκουν οι δ.ε. πρώτης τάξης

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

οι οποίες , με αλγεβρικές πράξεις , μπορούν να πάρουν τη μορφή

$$F_1(x)dx + F_2(y)dy = 0 \,.$$

Με απ' ευθείας ολοκλήρωση βρίσκουμε τις λύσεις της δ.ε.

$$\int F_1(x)dx + \int F_2(y)dy = c \quad (\text{γενικό ολοκλήρωμα}) \,,$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή .

Ομογενείς δ.ε. πρώτης τάξης λέγονται εκείνες που μπορούν να πάρουν τη μορφή $$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right) \,.$$

Με αλλαγή της εξαρτημένης μεταβλητής

$$\frac{y(x)}{x} = z(x) \quad , \text{ οπότε } \quad y'(x) = z(x) + x\,z'(x) \,,$$

καταλήγουμε στη δ.ε. χωριζομένων μεταβλητών

$$\frac{dz}{F(z) - z} = \frac{dx}{x} \quad , \qquad F(z) - z \neq 0 \,,\; x \neq 0 \,.$$

Από δώ βρίσκουμε το γενικό ολοκλήρωμα $$\int \frac{dz}{F(z) - z} = \int \frac{dx}{x} + c$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή .

Σημείωση

Μερικές φορές μπορεί να γίνονται ευκολότερα οι πράξεις ολοκλήρωσης , όταν θεωρήσουμε τη μορφή $\frac{dx}{dy} = F\left(\frac{x}{y}\right)$, δηλαδή το y ως ανεξάρτητη μεταβλητή απ' ότι στην πρώτη μορφή .

Π.χ. αυτό συμβαίνει στη δ.ε. $x\,y\,dx + (x^2 + y^2)dy = 0$.

Διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{a_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}{\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2} \right) \quad , \tag{1}$$

με $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \neq \frac{\beta_1}{\beta_2}$ **και** $\gamma_1 \neq 0$ ή $\gamma_2 \neq 0$.

Λύνουμε το γραμμικό σύστημα

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0 \quad ,$$
$$\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0 \quad ,$$

ως προς x και y .

Θέτουμε $x = X + h$, $y = Y + k$, όπου h , k είναι η λύση του γραμμικού συστήματος .

Τότε , επειδή $dx = d(X + h) = dX$, $dy = d(Y + k) = dY$, η δ.ε. (1) γίνεται

$$\frac{dY}{dX} = F\left(\frac{a_1 X + \beta_1 Y}{\alpha_2 X + \beta_2 Y} \right) \quad , \tag{2}$$

που είναι ομογενής δ.ε.

Γεωμετρικά , η αντικατάσταση $x = X + h$, $y = Y + k$ σημαίνει ότι μελετάμε τη δ.ε. στο νέο σύστημα συντεταγμένων $O\ (h ,k)\ X\ Y$.

Ειδικά , όταν είναι $\frac{a_1}{a_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2}$, τότε κάνουμε την αντικατάσταση

$$\alpha_1 x + \beta_1 y = z \quad ,$$

οπότε είναι

$$a_2 x + \beta_2 y = \lambda z \quad , \text{ όπου } \quad \lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\beta_1}$$

και η δ.ε. (1) γίνεται

$$\frac{1}{\beta_1}\left(\frac{dz}{dx} - \alpha_1 \right) = F\left(\frac{z + \gamma_1}{\lambda z + \gamma_2} \right) , \tag{3}$$

που είναι δ.ε. χωριζομένων μεταβλητών .

Παραδείγματα

1. Να βρεθεί η λύση της δ.ε. $(1+x^3)dy - x^2 y dx = 0$, που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(1) = 2$.

► Διαιρούμε και τα δύο μέλη της δ.ε. με $(1+x^3)y$, οπότε έχουμε

$$y(1+x^3) \neq 0 \quad , \quad \frac{dy}{y} = \frac{x^2}{1+x^3}dx \;\Rightarrow\; \int \frac{dy}{y} = \int \frac{x^2}{1+x^3}dx + ln|c_0|$$

$$\Rightarrow ln|\,y\,| = \frac{1}{3} ln|\,1+x^3\,| + ln|\,c_0\,| \;\Rightarrow\; ln|\,y^3\,| = ln|\,1+x^3\,||\,c_0\,|^3$$

$$\Rightarrow\; y^3 = (1+x^3)\,c \quad , \quad \text{όπου} \quad c = \pm c_0^3 \quad \text{αυθαίρετη σταθερή .}$$

Από την αρχική συνθήκη $y(1) = 2$ βρίσκουμε

$$2^3 = (1+x^3)\,c \;\Rightarrow\; 8 = 2c \;\Rightarrow\; c = 4 \;,$$

οπότε η ζητούμενη λύση της δ.ε. είναι $y^3 = 4(1+x^3)\,,\;\; x \neq -1$.
Παρατηρείστε ότι $y(x) \equiv 0$, $x(y) \equiv -1$ είναι λύσεις της δ.ε.

2. Να λυθεί η δ.ε. $x^2\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+1}{3y^2+1}$, $y(2) = 3$.

► Χωρίζουμε τις μεταβλητές x και y

$$(3y^2+1)dy = \left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx \quad , \; x \neq 0$$

απ' όπου με ολοκλήρωση , παίρνουμε το γενικό ολοκλήρωμα

$$y^3 + y = x - \frac{1}{x} + c \quad , \quad c \text{ αυθαίρετη σταθερή .}$$

Θέτοντας $x = 2$, $y = 3$ στο γενικό ολοκλήρωμα βρίσκουμε

$$3^3 + 3 = 2 - \frac{1}{2} + c \;\Rightarrow\; c = 28{,}5$$

άρα , η ζητούμενη λύση είναι

$$y^3 + y = x - \frac{1}{x} + 28{,}5 \quad , \quad x \neq 0 .$$

3. Να λυθεί η δ.ε. $y^2dx = (x^2+2xy)\,dy$.

► Η δ.ε. γράφεται $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{x^2+2xy} = \dfrac{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{1+2\dfrac{y}{x}}$, $x \neq 0$.

Θέτουμε $y(x) = xz(x)$, οπότε $y'(x) = z(x) + x\,z'(x)$, και η δ.ε. γίνεται

$$\frac{dz}{\dfrac{z^2}{1+2z} - z} = \frac{dx}{x} \Rightarrow -\int \frac{1+2z}{z^2+z}dz = \int \frac{dx}{x} + ln\,|\,c_0\,|$$

$$\Rightarrow \quad ln|\,z^2+z\,|^{-1} = ln|\,c_0\,x\,| \Rightarrow (\,z^2+z\,)^{-1} = \pm c_0\,x$$

$$\Rightarrow \quad \pm\, c_0 x = \left(\frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x}\right)^{-1} \Rightarrow \quad cy(x+y) = x \ , \ x \neq 0 \, ,$$

όπου $c = \pm\, c_0$ είναι αυθαίρετη σταθερή .

4. Να λυθεί η δ.ε. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+2y-3}{2x+y-3}$. (1)

► Το γραμμικό σύστημα

$$x + 2y - 3 = 0 \quad , \quad 2x + y - 3 = 0$$

έχει τη μοναδική λύση $x = h = 1$, $y = k = 1$.

Θέτουμε $x = X + h = X + 1$, $y = Y + k = Y + 1$, και η δ.ε. (1) γίνεται

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X+2Y}{2X+Y} \qquad (2)$$

που είναι ομογενής δ.ε.

Θέτουμε $Y = XZ$, οπότε $Y' = Z+XZ'$, και η δ.ε. (2) γίνεται

$$Z + X\frac{dZ}{dX} = \frac{1+2Z}{2+Z} \Rightarrow \frac{dX}{X} = \frac{2+Z}{1-Z^2}dZ \quad , \ X \neq 0 \ , \ Z \neq \pm 1 \, .$$

Με ολοκλήρωση παίρνουμε

$$\int \frac{dX}{X} = \int \frac{2+Z}{1-Z^2}dZ - ln\,|\,c_0\,| = \int \left[\frac{1}{2(1+Z)} + \frac{3}{2(1-Z)}\right]dZ - ln|\,c_0\,|$$

$$\Rightarrow \ 2ln|\,Xc_0| = ln|\,1+Z\,| - ln|1-Z|^3 \Rightarrow \ |\,X\,c_0|^2 = \left|\frac{1+Z}{(1-Z)^3}\right|$$

$$\Rightarrow X^2 c = \frac{1+Z}{(1-Z)^3}$$, όπου $c = \pm\, c_0^2$ είναι αυθαίρετη σταθερή .

Θέτουμε $Z = \dfrac{Y}{X}$ και έχουμε

$$X+Y = c(X-Y)^3 \Rightarrow x-1+y-1 = c(x-1-y+1)^3 \Rightarrow x+y-2 = c(x-y)^3$$

που είναι το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε.

2. Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

Οι γραμμικές δ.ε. πρώτης τάξης μπορούν να πάρουν τη μορφή

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)\ ,$$

όπου $P(x)$, $Q(x)$ συναρτήσεις συνεχείς στο $I\subset\mathbb{R}$.

Η γενική λύση τους δίνεται από τον τύπο

$$y(x)=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx+c\right]\ ,\ x\in I$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή .

Πράγματι ,με το μετασχηματισμό $y(x)=z(x)e^{-\int P(x)dx}$ η δ.ε. γίνεται

$$\frac{dz}{dx}e^{-\int P(x)dx}-P(x)z(x)e^{-\int P(x)dx}+P(x)z(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x)$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dz}{dx}=Q(x)e^{\int P(x)dx}\ \Rightarrow z(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+c\ ,$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή .

Οι δ.ε. του Bernoulli είναι αυτές που μπορούν να πάρουν τη μορφή

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^{n}\quad (n\neq 0\ ,\ n\neq 1)\ .$$

Με την αλλαγή της εξαρτημένης μεταβλητής $\upsilon(x)=y^{1-n}(x)$,

αναγόμαστε στη γραμμική δ.ε. πρώτης τάξης

$$\frac{d\upsilon}{dx}+(1-n)P(x)\upsilon=(1-n)Q(x)\ .$$

Οι δ.ε. του Riccati είναι αυτές που ανάγονται στη μορφή

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y^{2}+Q(x)y+R(x)\ .$$

Με την αλλαγή της εξαρτημένης μεταβλητής $y(x)=u(x)+\dfrac{1}{z(x)}$,

όπου $u(x)$ είναι *γνωστή* λύση της δ.ε. , αναγόμαστε στη γραμμική δ.ε. πρώτης τάξης $\dfrac{dz}{dx}+\big(2P(x)u(x)+Q(x)\big)z=-P(x)$.

Σημείωση

Με την αλλαγή της μεταβλητής $y(x)=\dfrac{\upsilon'(x)}{-P(x)\upsilon(x)}$ η δ.ε εξίσωση του *Riccati* ανάγεται στη γραμμική δ.ε. δεύτερης τάξης

$$\upsilon''+\left(\frac{P'(x)}{P(x)}-Q(x)\right)\upsilon'+R(x)P(x)\upsilon=0\ .$$

Π.χ. να λυθεί η δ.ε. $x^{2}y'+xy+x^{2}y^{2}=1$.

Παραδείγματα

1. Να βρεθεί η λύση της δ.ε. $dy = 3y\,dx + x\,e^{3x}dx$, που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(0) = 1$.

► Η δ.ε. γράφεται $\dfrac{dy}{dx} - 3y = x\,e^{3x}$, και είναι γραμμική δ.ε. πρώτης τάξης , με συναρτήσεις

$$P(x) = -3 \quad , \quad Q(x) = x\,e^{3x} .$$

Επομένως , η γενική λύση της δ.ε. είναι

$$y(x) = e^{\int 3dx}\left[\int xe^{3x}e^{-\int 3dx}dx + c\right] =$$

$$= e^{3x}\left[\int xe^{3x}e^{-3x}dx + c\right] = e^{3x}\left[\int xdx + c\right] =$$

$$= e^{3x}\left(\frac{x^2}{2} + c\right) , \quad c \text{ αυθαίρετη σταθερή .}$$

Από την αρχική συνθήκη $y(0) = 1$ προκύπτει

$$1 = e^{3\cdot 0}\left(\frac{0^2}{2} + c\right) \;\Rightarrow\; c = 1 ,$$

οπότε η ζητούμενη λύση της δ.ε. είναι $y(x) = e^{3x}\left(\dfrac{x^2}{2} + 1\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Να βρεθεί η γενική λύση της δ.ε. $(x^2 + 1)\dfrac{dy}{dx} + 3xy = 6x$.

► Η δ.ε. γράφεται

$$\frac{dy}{dx} + \frac{3x}{x^2+1}y = \frac{6x}{x^2+1}$$

και εδώ οι συναρτήσεις είναι $P(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$, $Q(x) = \dfrac{6x}{x^2+1}$.

Επομένως , η γενική λύση της δ.ε. δίνεται από τον τύπο

$$y(x) = e^{-\int \frac{3x}{x^2+1}dx}\left[\int \frac{6x}{x^2+1}e^{\int \frac{3x}{x^2+1}dx}dx + c\right] , \quad c \text{ αυθαίρετη σταθερή .}$$

Έχουμε $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2+1}dx = \int \frac{3}{2}\;\frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{3}{2}\,ln(x^2+1)$,

οπότε είναι $\qquad e^{\int \frac{3x}{x^2+1}dx} = \left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}$.

Άρα , η γενική λύση είναι

$$y(x)=\left(x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}\left[\int \frac{6x}{x^2+1}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}dx+c\right]=$$

$$=\left(x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}\left[\int 6x\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}dx+c\right]=\left(x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}\left[\int 3\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}d\left(x^2+1\right)+c\right]$$

$$=\left(x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}\left[2\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}+c\right]=2+c\left(x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}\quad ,x\in\mathbb{R}$$

όπου c αυθαίρετη σταθερή .

3. Να λυθεί η δ.ε. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{3}y=\dfrac{1}{3}(1-2x)y^4$.

► Η δ.ε. είναι του *Bernoulli* , με $n=4$.

Θέτουμε $y^{1-4}=y^{-3}=\upsilon(x)$, οπότε έχουμε

$$-3y^{-4}\frac{dy}{dx}=\frac{d\upsilon}{dx}$$

και η δ.ε. γίνεται η γραμμική δ.ε. πρώτης τάξης

$$\frac{d\upsilon}{dx}-\upsilon=2x-1\ .$$

Έχουμε λοιπόν τη γενική λύση

$$\upsilon(x)=y^{-3}(x)=e^x\left[\int(2x-1)e^{-x}dx+c\right]=-1-2x+c\,e^x\ ,$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή .

4. Να λυθεί η δ.ε. $\dfrac{dy}{dx}-(x-1)y^2+(2x-1)y=x$, αν γνωρίζουμε ότι μια λύση της είναι η $u(x)=1$.

► Η δ.ε. είναι του *Riccati* , και με την αντικατάσταση

$$y(x)=1+\frac{1}{z(x)}\quad ,\ \text{οπότε}\quad y'(x)=-\frac{z'(x)}{z^2(x)}\ ,$$

η δ.ε. ανάγεται στη γραμμική δ.ε. πρώτης τάξης

$$\frac{dz}{dx}-z=1-x\ .$$

Η γενική λύση της είναι

$$z(x)=e^{\int dx}\left[\int(1-x)e^{-\int dx}dx+c\right]=e^{x}\left[\int(1-x)e^{-x}dx+c\right]=$$

$$=e^{x}\left[\int e^{-x}dx-\int xe^{-x}dx+c\right]=e^{x}\left[-e^{-x}+\int xde^{-x}+c\right]=$$

$$=e^{x}\left[-e^{-x}+xe^{-x}-\int e^{-x}dx+c\right]=e^{x}\left[-e^{-x}+xe^{-x}+e^{-x}+c\right]$$

$$=e^{x}\left[xe^{-x}+c\right]=x+ce^{x}\quad,\quad c \text{ αυθαίρετη σταθερή .}$$

Επομένως , η γενική λύση της δοσμένης δ.ε. είναι

$$y(x)=1+\frac{1}{z(x)}=1+\frac{1}{x+ce^{x}}\quad .$$

Για $c=\infty$ προκύπτει η λύση $u(x)=1$.

3. Πλήρεις διαφορικές εξισώσεις - Ολοκληρωτικοί παράγοντες

Οι δ.ε. πρώτης τάξης

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{1}$$

λέγονται *πλήρεις δ.ε.* , όταν υπάρχει συνάρτηση $u(x,y)$ τέτοια ώστε

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)\quad,\quad\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)\ . \tag{2}$$

Τότε έχουμε

$$du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

και οι λύσεις της δ.ε. (1) δίνονται από τη σχέση

$$u(x,y)=c\quad(\text{ γενικό ολοκλήρωμα })$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή .

Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $P(x,y)$, $Q(x,y)$ είναι κλάσης C^1 (συνεχείς , με μερικές παραγώγους πρώτης τάξης συνεχείς) σ'έναν απλώς συναφή τόπο $D\subset\mathbb{R}^2$.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ : *Η ικανή και αναγκαία συνθήκη , για να είναι η δ.ε. πλήρης , είναι να ισχύει η σχέση*

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{dx}\quad,\quad\forall(x,y)\in D\ . \tag{3}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ
Η δ.ε. (1) είναι πλήρης αν και μόνο αν ισχύει η σχέση

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \ . \tag{3}$$

Η λύση της δ.ε. (1) δίνεται τότε από τον τύπο

$$\int_{\alpha}^{x} P(t\,,y)dt + \int Q(\alpha\,,y)dy = c \ , \ c \quad \text{αυθαίρετη σταθερή}$$

όπου α είναι κατάλληλη σταθερή .

Απόδειξη
Όταν η δ.ε. είναι πλήρης , τότε υπάρχει συνάρτηση $u(x\,,y)$ τέτοια ώστε

$$du = P(x\,,y)dx + Q(x\,,y)dy$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{3}$$

επειδή ισχύει

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x\,,y) \ , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x\,,y) \tag{2}$$

λόγω της μοναδικότητας της έκφρασης του διαφορικού πρώτης τάξης της συνάρτησης $u = u(x\,,y)$, $(x\,,y) \in D$.

Αντίστροφα , υποθέτουμε πως ισχύει η σχέση (3) .

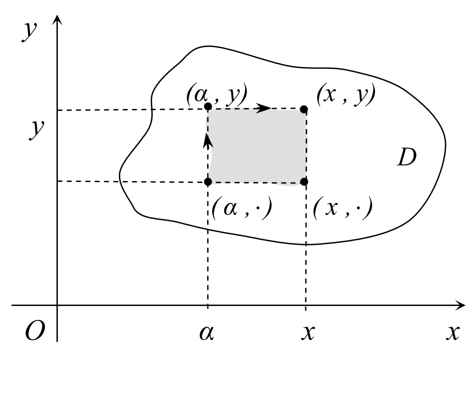
Από τη σχέση $\quad \dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x\,,y) \Rightarrow u = \displaystyle\int_{\alpha}^{x} P(t\,,y)dt + k(y),$

όπου α κατάλληλη σταθερή , και $k(y)$ αυθαίρετη συνάρτηση του y .

Το α κατάλληλη σταθερή σημαίνει πως το “ ασαφές ” ορθογώνιο

$$(\alpha\,,\cdot) - (\alpha\,,y) - (x\,,y) - (x\,,\cdot)$$

περιέχεται στον τόπο $D \subset \mathbb{R}^2$ και περικλείει μόνον σημεία αυτού του τόπου .



Αντικαθιστούμε την τιμή της u στη δευτερη σχέση των (2) και έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{\alpha}^{x} P(t,y)dt + k(y)\right) = Q(x,y)$$

$$\Rightarrow \quad \int_{\alpha}^{x} \frac{\partial P}{\partial y}(t,y)dt + k'(y) = Q(x,y) \ .$$

Αλλά ισχύει , λόγω των σχέσεων (3) ,

$$\int_{\alpha}^{x} \frac{\partial P}{\partial y}(t,y)dt = \int_{\alpha}^{x} \frac{\partial Q}{\partial t}(t,y)dt = Q(x,y) - Q(\alpha,y)$$

οπότε παίρνουμε

$$Q(x,y) - Q(\alpha,y) + k'(y) = Q(x,y) \ \Rightarrow \ k(y) = \int Q(\alpha,y)dy$$

όπου τη σταθερή της ολοκλήρωσης τη θέτουμε μηδέν .

Επομένως , η συνάρτηση

$$u(x,y) = \int_{\alpha}^{x} P(t,y)dt + \int Q(\alpha,y)dy$$

επαληθεύει τις σχέσεις (2) και η έκφραση

$$u(x,y) = c \quad , \ c \ \text{αυθαίρετη σταθερή}$$

δίνει το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε. (1) .

Διαδικασία επίλυσης πλήρους δ.ε. πρώτης τάξης

α) Από τις σχέσεις

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) \qquad (2)$$

υπολογίζουμε τη συνάρτηση $u(x,y)$.

Το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε. (1) είναι

$$u(x,y) = c \ ,$$

όπου c αυθαίρετη σταθερή .

β) Από τον τύπο

$u(x,y) = \int_{\alpha}^{x} P(t,y)\,dt + \int Q(a,y)dy = c$, όπου c αυθαίρετη σταθερή ,

παίρνουμε το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε. (1) .

Το α είναι μια κατάλληλη σταθερή (βέβαια η μεταβλητή x πρέπει να μπορεί να πάρει την τιμή α) .

Παραδείγματα

1. Να λυθεί η δ.ε. $3x(xy-2)dx+(x^3+2y)dy=0$ (1)

► Εδώ είναι $P(x,y)=3x^2y-2\cdot 3x$, $Q(x,y)=x^3+2y$, που είναι κλάσεις C^1 στον τόπο $D=\mathbb{R}^2$.

Έχουμε

$$\frac{\partial P}{\partial y}=3x^2=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

οπότε ισχύει η συνθήκη (3) . Άρα , η δ.ε. (1) είναι πλήρης .

Από τις σχέσεις

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2y-6x \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=x^3+2y \qquad (2)$$

ολοκληρώνουμε τη δεύτερη ως προς y .

Βρίσκουμε

$$u(x,y)=x^3y+y^2+\varphi(x) ,$$

όπου $\varphi(x)$ προσδιοριστέα συνάρτηση .

Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση αυτή ως προς x και την εξισώνουμε με την πρώτη σχέση των (2) .

Παίρνουμε

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2y+\varphi'(x)=3x^2y-6x$$

$\Rightarrow$ $\varphi'(x)=-6x \Rightarrow \varphi(x)=-3x^2$ (θέτουμε σταθερή της ολοκλήρωσης μηδέν) .

Άρα , έχουμε $u(x,y)=x^3y+y^2-3x^2$ και το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε. (1) είναι

$$x^3y+y^2-3x^2=c \quad , \; c \text{ αυθαίρετη σταθερή .}$$

2. Να λυθεί η δ.ε. $(6xy-y^3)dx+(4y+3x^2-3xy^2)dy=0$.

► Εδώ οι συναρήσεις $P(x,y)=6xy-y^3$, $Q(x,y)=4y+3x^2-3xy^2$ είναι κλάσης C^1 στον τόπο $D=\mathbb{R}^2$.

Επί πλέον ικανοποιούν τη συνθήκη (3)

$$\frac{\partial P}{\partial y}=6x-3y^2=\frac{\partial Q}{\partial x} ,$$

οπότε η δ.ε. είναι πλήρης .

Από τις ισότητες (2) έχουμε

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6xy - y^3 \longrightarrow u(x) = 3x^2y - y^3x + \varphi(y)\,,$$

$\varphi(y)$ προσδιοριστέα συνάρτηση

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 4y + 3x^2 - 3xy^2 \longrightarrow 4y + 3x^2 - 3xy^2 = 3x^2 - 3y^2x + \varphi'(y)$$

απ' όπου παίρνουμε

$\varphi'(y) = 4y \Rightarrow \varphi(y) = 2y^2$ (θέτουμε σταθερή της ολοκλήρωσης μηδέν) .

Άρα , έχουμε $u(x,y) = 3x^2y - y^3x + 2y^2$, και το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε. είναι

$$3x^2y - y^3x + 2y^2 = c \quad , \quad c \text{ αυθαίρετη σταθερή .}$$

3. Να λυθεί η δ.ε. $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$. (1)

► Οι συναρτήσεις $P(x,y) = 2x - y + 1$, $Q(x,y) = 2y - x - 1$ είναι κλάσης C^1 στον τόπο $D = \mathbb{R}^2$.

Έχουμε

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

οπότε η δ.ε. (1) είναι πλήρης .

Εκλέγουμε $\alpha = 0$ και το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε. (1) είναι

$$\int_0^x (2t - y + 1)dt + \int (2y - 1)dy = c$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - xy + y^2 + x - y = c \;,\quad c \text{ αυθαίρετη σταθερή .}$$

Ολοκληρωτικοί παράγοντες

Όταν δεν ισχύει η συνθήκη (3) , δηλαδή όταν έχουμε

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

τότε αναζητούμε συνάρτηση $\mu(x,y)$ τέτοια ώστε η δ.ε.

$$\mu(x,y)\, P(x,y)dx + \mu(x,y)\, Q(x,y)dy = 0$$

να είναι πλήρης δ.ε.

Αν υπάρχει τέτοια συνάρτηση $\mu(x,y)$ τη λέμε *ολοκληρωτικό παράγοντα* της δ.ε (1) .

Θα έχουμε λοιπόν $\dfrac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\dfrac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \Rightarrow P\dfrac{\partial \mu}{\partial y}-Q\dfrac{\partial \mu}{\partial x}=\mu\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)$.

Υποθέτοντας ότι είναι $\mu(x,y)=\mu(z)$, όπου $z=z(x,y)$ *γνωστή συνάρτηση των* x , y τότε παίρνουμε

$$P\frac{d\mu}{dz}\frac{\partial z}{\partial y}-Q\frac{d\mu}{dz}\frac{\partial z}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=\left[\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}}{P\dfrac{\partial z}{\partial y}-Q\dfrac{\partial z}{\partial x}}\right]dz \ .$$

Επομένως , όταν είναι
$$\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}}{P\dfrac{\partial z}{\partial y}-Q\dfrac{\partial z}{\partial x}}=f(z) \qquad (4)$$

τότε έχουμε $\mu=\mu(z)= e^{\int f(z)dz}$.

(Θέσαμε $c=1$ στη σταθερή της ολοκλήρωσης) .

Βέβαια , οι δ.ε. δεν έχουν υποχρεωτικά ολοκληρωτικό παράγοντα .

Σημείωση

Ο ολοκληρωτικός παράγοντας , ενδεχομένως , προσθέτει ή αφαιρεί λύσεις στη δ.ε. π.χ. η $\varphi_1(x)$ με $\mu(x,\varphi_1(x))=0$, $x\in I_1$ αν δεν είναι λύση της δ.ε. γίνεται λύσης της . Επίσης , αν είναι
$$\mu(x,y)=\frac{\mu_1(x,y)}{\mu_2(x,y)}$$
και η $\varphi_2(x)$ είναι λύση της δ.ε. , με $\mu_2(x,\varphi_2(x))=0$, $x\in I_2$, τότε αυτή η λύση αφαιρείται .

ΠΡΟΤΑΣΗ

Μια δ.ε. έχει άπειρο πλήθος ολοκληρωτικών παραγόντων ή δεν έχει κανένα ολοκληρωτικό παράγοντα .

Απόδειξη

Αν $\mu=\mu(x,y)$ είναι ολοκληρωτικός παράγοντας της δ.ε. τότε υπάρχει συνάρτηση $u(x,y)$, $(x,y)\in D\subset\mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε
$$du=\mu P(x,y)dx+\mu Q(x,y)dy \ .$$

Έστω $F(u)$ μια *συνεχής* συνάρτηση του u , τότε έχουμε
$$\mu F(u)[Pdx+Qdy]=F(u)[\mu Pdx+\mu Qdy]=F(u)du=d\left(\int F(u)du\right).$$

Άρα , η συνάρτηση $\mu F(u)$ είναι ο ολοκληρωτικός παράγοντας της δ.ε.

Παραδείγματα

1. Να λυθεί η δ.ε. $(2y^3 - 3x\,y)dx + (x^2 + x\,y^2)dy = 0$, με τη βοήθεια του ολοκληρωτικού παράγοντα της μορφής $\mu\left(\dfrac{x}{y^2}\right)$.

► Από τον τύπο (4) βρίσκουμε $f(z) = \dfrac{1}{z} = \dfrac{y^2}{x}$, $x \neq 0$.

Άρα , ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι

$$\mu(z) = e^{\int \frac{dz}{z}} = e^{\ln z} = z = \frac{x}{y^2} \quad (\,x > 0\ ,\ y \neq 0\,)\,.$$

Πολλαπλασιάζουμε , με $\dfrac{x}{y^2}$, τη δ.ε. και παίρνουμε

$$\left(2xy - 3\frac{x^2}{y}\right)dx + \left(\frac{x^3}{y^2} + x^2\right)dy = 0 \quad ,$$

που είναι πλήρης δ.ε. (υποθέσαμε $x > 0$) .
Εκλέγουμε $\alpha = 1$ και παίρνουμε το γενικό ολοκλήρωμα

$$\int_1^x \left(2ty - 3\frac{t^2}{y}\right)dt + \int\left(\frac{1}{y^2} + 1\right)dy = c$$

$$\Rightarrow\ x^2 y - \frac{x^3}{y} = c \quad , \quad c \ \text{αυθαίρετη σταθερή}\ .$$

Εκλέγουμε $\alpha = -1$ αν υποθέσουμε $x < 0$.

2. Να λυθεί η δ.ε. $\left(\dfrac{y^2}{2} + 2ye^x\right)dx + (\,y + e^x\,)\,dy = 0$, με τη βοήθεια ολοκληρωτικού παράγοντα της μορφής $\mu = \mu(x)$.

► Από τον τύπο (4) έχουμε

$$f(x) = \frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{P\dfrac{\partial z}{\partial y} - Q\dfrac{\partial z}{\partial x}} = \frac{e^x - y - 2e^x}{-y - e^x} = 1 \quad ,$$

οπότε ο ολοκληρωτικός παράγοντας της δ.ε. είναι

$$\mu(x) = e^{\int f(x)dx} = e^{\int dx} = e^x \ ,\ x \in \mathbb{R}\ .$$

Πολλαπλασιάζουμε τη δ.ε. με $\mu(x) = e^{x}$ και παίρνουμε την πλήρη δ.ε.

$$\left(\frac{y^2}{2}e^x + 2ye^{2x}\right)dx + \left(ye^x + e^{2x}\right)dy = 0 \ .$$

Από τις σχέσεις

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2}{2}e^x + 2ye^{2x} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = ye^x + e^{2x} \qquad (2)$$

με ολοκλήρωση της πρώτης ως προς x, παίρνουμε

$$u = \int\left(\frac{y^2}{2}e^x + 2ye^{2x}\right)dx + k(y) = \frac{y^2}{2}\int e^x dx + 2y\int e^{2x}dx + k(y)$$

$$\Rightarrow \ u(x,y) = \frac{y^2}{2}\, e^{x} + y\, e^{2x} + k(y) \ , \ k(y) \ \text{ προσδιοριστέα συνάρτηση} \ .$$

Παραγωγίζουμε την $u(x,y)$ ως προς y και την εξισώνουμε με την δεύτερη σχέση των (2)

$$y\, e^{x} + e^{2x} = y\, e^{x} + e^{2x} + k'(y)$$

$$\Rightarrow \quad k'(y) = 0 \ \Rightarrow \ k(y) = \text{ σταθερή} \ .$$

Εκλέγουμε την $k(y) = 0$, οπότε το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε. είναι

$$\frac{y^2}{2}e^x + ye^{2x} = c$$

ή ακόμη $y(x) = -e^x \pm \sqrt{e^{2x} + 2ce^{-x}}$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή .

3. Να λυθεί η δ.ε. $ydx + (2x - ye^y)dy = 0$, αφού αποδειχθεί πως έχει έχει ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu = \mu(y)$.
Ο ολοκληρωτικός παράγοντας αυτός είναι μοναδικός ;

► Για να έχει η δ.ε. ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu = \mu(z)$ με

$z = y$ πρέπει η παράσταση $\dfrac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{P\dfrac{\partial z}{\partial y} - Q\dfrac{\partial z}{\partial x}} = f(z) \ = f(y)$.

Εδώ έχουμε

$$P(x,y)=y \qquad , \qquad \frac{\partial P}{\partial y}=1$$

$$Q(x,y)=2x-ye^{y} \quad , \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=2$$

$$z=y \qquad , \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=1 \;,\; \frac{\partial z}{\partial x}=0$$

οπότε προκύπτει

$$f(z)=f(y)=\frac{2-1}{y\cdot 1}=\frac{1}{y} \quad , \quad y\neq 0 \,.$$

Ο ολοκληρωτικός παράγοντας της δ.ε. είναι

$$\mu(y)=e^{\int\frac{dy}{y}}=e^{ln|y|}=|\,y\,| \quad , \; y\neq 0 \,.$$

Παρατηρείστε ότι η συνάρτηση $y(x)=0$, $x\in\mathbb{R}$ είναι λύση της δ.ε.

Πολλαπλασιάζουμε τη δ.ε. με τον ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu(y)=y$, $y>0$ και παίρνουμε την πλήρη δ.ε.

$$y^2dx+(2xy-y^2e^y)dy=0 \;,$$

όπου οι συναρτήσεις

$$P(x,y)=y^2 \quad , \quad Q(x,y)=2xy-y^2e^y$$

είναι κλάσης C^1 στον τόπο $D=\mathbb{R}^2$.

Επιλέγοντας ως $\alpha=0$ βρίσκουμε το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε. από τον τύπο

$$\int_0^x P(t,y)dt+\int Q(0,y)dy=c$$

$$\Rightarrow \int_0^x y^2dt+\int(-y^2e^y)dy=c$$

$$\Rightarrow y^2x-e^y(y^2-2y+2)=c \;,$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή .

Ο ολοκληρωτικός παράγοντας δεν ορίζεται κατά μοναδικό τρόπο.

Αν θέσουμε

$$u(x,y)=y^2x-e^y(y^2-2y+2)$$

τότε και η συνάρτηση

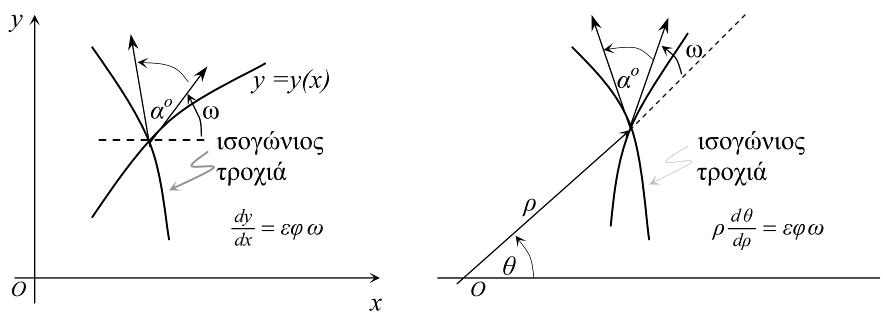
$$\mu(y)F(u)=yF(u)$$

όπου $F(u)$ συνεχής συνάρτηση του u (π.χ. $F(u)=u$) είναι επίσης ολοκληρωτικός παράγοντας της δ.ε.

4. *Ισογώνιες τροχιές*

Στο πρόβλημα των ισογώνιων τροχιών δίνεται μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων $F(x, y, c) = 0$, c παράμετρος , και ζητάμε μια άλλη μονοπαραμετρική οικογένεια $F_0(x, y, c_1) = 0$, c_1 παράμετρος ,που να τέμνει τις καμπύλες με σταθερή γωνία α^0 .

Το πρόβλημα τίθεται σε καρτεσιανές και σε πολικές συντεταγμένες .



Καρτεσιανές συντεταγμένες *Πολικές συντεταγμένες*

Έχουμε τις σχέσεις $x = \rho\ \sigma\upsilon\nu\theta$, $y = \rho\ \eta\mu\theta$, $\rho \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$
και η γωνία ω στο Oxy γίνεται $\omega + \theta$ στο $O\rho\theta$.

ΠΙΝΑΚΑΣ Α. ***Καρτεσιανές συντεταγμένες***

$F(x, y, c) = 0$

Δοσμένη μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων .

Απαλοιφή της c μεταξύ των εξισώσεων :

$F(x, y, c) = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Δ.ε. της δοσμένης οικογένειας καμπύλων .

$F_0(x, y, c_1) = 0$

Ζητούμενη μονοπαραμετρική οικογένεια των ισογώνιων τροχιών .

Γενικό ολοκλήρωμα

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y) + \varepsilon\varphi\alpha}{1 - f(x, y)\,\varepsilon\varphi\alpha} \qquad \left(\begin{array}{c} a^o = 90^o \\ \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{f(x, y)} \end{array} \right)$$

Δ.ε. της ζητούμενης οικογένειας των ισογώνιων τροχιών .

ΠΙΝΑΚΑΣ Β. ***Πολικές συντεταγμένες***

$G(\rho,\theta,c)=0$

Δοσμένη μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων .

$G_0(\rho,\theta,c_1)=0$

Ζητούμενη μονοπαραμετρική οικογένεια των ισογώνιων τροχιών .

Απαλοιφή της c μεταξύ των εξισώσεων :

$$G(\rho,\theta,c)=0$$

$$\frac{\partial G}{\partial \rho}+\frac{\partial G}{\partial \theta}\frac{d\theta}{d\rho}=0$$

Γενικό ολοκλήρωμα

$$\rho\frac{d\theta}{d\rho}=f(\rho,\theta) \Longrightarrow \rho\frac{d\theta}{d\rho}=\frac{f(\rho,\theta)+\varepsilon\varphi\alpha}{1-f(\rho,\theta)\varepsilon\varphi\alpha} \quad \left(\begin{array}{c} \alpha^o=90^0 \\ \rho\dfrac{d\theta}{d\rho}=-\dfrac{1}{f(\rho,\theta)}\end{array}\right)$$

Δ.ε. της δοσμένης οικογένειας καμπύλων.

Δ.ε. της ζητούμενης οικογένειας των ισογώνιων τροχιών .

Παραδείγματα

1. Να βρεθούν οι ορθογώνιες τροχιές της οικογένειας των καμπύλων

$$x^2+y^2-2cx+1=0 \quad , \quad c \text{ παράμετρος .}$$

► Από τις εξισώσεις $x^2+y^2-2cx+1=0$,

$$2x+2yy'-2c=0 ,$$

απαλείφουμε την παράμετρο c και παίρνουμε τη δ.ε.

$$(x^2-y^2-1)\,dx+2xy\,dy=0$$

της δοσμένης οικογένειας των καμπύλων.

Η δ.ε. των ορθογώνιων τροχιών είναι

$$2xy\,dx-(x^2-y^2-1)\,dy=0$$

και έχει τον ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu(y)=y^{-2}$ $(y\neq 0)$.

Το γενικό ολοκλήρωμα της πλήρους δ.ε.

$$2xy^{-1}dx-y^{-2}(x^2-y^2-1)\,dy=0$$

είναι $x^2+y^2-1=2c_1y \Rightarrow x^2+(y-c_1)^2=1+c_1^2$

όπου c_1 παράμετρος .

Οι ορθογώνιες τροχιές εδώ είναι κύκλοι που περνάνε όλοι από τα σημεία $(1,0)$ και $(-1,0)$.

2. Αν $\rho = c\ \eta\mu\theta$, c παράμετρος , είναι η οικογένεια των καμπύλων, ποιές είναι οι ισογώνιες τροχιές της γωνίας α^o ;

►Παραγωγίζουμε τη δοσμένη μονοπαραμετρική οικογένεια των καμπύλων και παίρνουμε

$$1 = c\ \sigma\upsilon\nu\theta\ \frac{d\theta}{d\rho} \Rightarrow \frac{d\theta}{d\rho} = \frac{1}{c\ \sigma\upsilon\nu\theta} \Rightarrow \rho\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{c\ \eta\mu\theta}{c\ \sigma\upsilon\nu\theta} = \varepsilon\varphi\theta\ .$$

Η δ.ε. των ζητούμενων ισογώνιων τροχιών είναι

$$\rho\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{\varepsilon\varphi\theta + \varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi\theta\cdot\varepsilon\varphi\alpha} = \varepsilon\varphi(\theta+\alpha)\ .$$

Έχουμε λοιπόν

$$\frac{d\theta}{\varepsilon\varphi(\theta+\alpha)} = \frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu(\theta+\alpha)\,d\theta}{\eta\mu(\theta+\alpha)} = \frac{d\rho}{\rho}$$

$\Rightarrow\ \rho = c_1\ \eta\mu\ (\theta+\alpha)$, c_1 παράμετρος (ισογώνιες τροχιές) .

5. Διαφορικές εξισώσεις των Clairaut και Lagrange

Οι δ.ε. του Clairaut είναι της μορφής

$$y = x\,y' + f(y')\ .$$

Παραγωγίζουμε τη δ.ε. ως προς x και έχουμε

$$y' = y' + x\,y'' + f'(y')\,y'' \Rightarrow y''[x + f'(y')] = 0$$

απ' όπου προκύπτει

$$y'' = 0 \Rightarrow y' = c \quad , \quad c \text{ αυθαίρετη σταθερή ,}$$

$$\text{και} \quad x = -f'(y')\ .$$

Θέτοντας στη δ.ε. $y' = c$ παίρνουμε το γενικό ολοκλήρωμα της

$$y = x\,c + f(c) \quad , \quad c \text{ αυθαίρετη σταθερή .}$$

Θέτοντας στη δ.ε. $x = -f'(y')$ παίρνουμε την ιδιάζουσα λύση της (κάθε ευθεία του γενικού ολοκληρώματος εφάπτεται σ'αυτήν)

$$x = -f'(y')$$

$$y = -y'f'(y') + f(y') \quad , \quad y' \text{ παράμετρος .}$$

Απαλείφουμε την y' αν αυτό είναι δυνατό .

Η ιδιάζουσα λύση είναι η περιβάλλουσα της οικογένειας των ευθειών $y = xc + f(c)$, c παράμετρος (βλέπε [1] , Κεφ. 1, & 6) δηλαδή σ'αυτήν εφάπτονται όλες αυτές οι ευθείες γραμμές .

Οι δ.ε. του Lagrange είναι της μορφής

$$y = x\varphi(y') + f(y')\ .$$

Θέτουμε $p = y'$ και υποθέτουμε ότι $\varphi(p) \neq p$.

Παραγωγίζουμε τη δ.ε. ως προς x και παίρνουμε

$$p = \varphi(p) + x\,\varphi'(p)\,\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx} \;\Rightarrow\; \frac{dx}{dp} + x\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p} = \frac{f'(p)}{p - \varphi(p)}\ ,$$

που είναι γραμμική δ.ε. πρώτης τάξης .

Αν $x = x(p,c)$ είναι η γενική λύση της τότε το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε. δίνεται παραμετρικά

$$x = x(p, c)\quad ,\quad y = x(p, c)\varphi(p) + f(p)\ ,$$

όπου p παράμετρος , c αυθαίρετη σταθερή .

Απαλείφουμε την p , αν αυτό είναι δυνατό .

Σημείωση

Αν είναι $\varphi(p_0) = p_0$, τότε η ευθεία γραμμή $y = x\,p_0 + f(p_0)$,όταν δεν προκύπτει από το γενικό ολοκλήρωμά της ,είναι ιδιάζουσα λύση της .

Παρατήρηση

Οι δ.ε. της μορφής $y = f(x, y')$ (ή $x = f(y, x')$, το y ως ανεξάρτητη μεταβλητή) λύνονται με παρόμοιες διαδικασίες .

Θέτοντας $y' = p$ (ή $x' = p$) και παραγωγίζοντας κ.λ.π. (βλέπε Κεφ. 6 , Προβλ. 13 β)) .

Για τη γεωμετρική ερμηνεία της διαδικασίας αυτής βλέπε [1] , Κεφ. 3, & 1.2 .

Παραδείγματα

1. Να λυθεί η δ.ε. $y = x\,y' + (y')^2$.

► Παραγωγίζουμε τη δ.ε. ως προς x και έχουμε

$$y' = y' + x\,y'' + 2\,y'\cdot y'' \Rightarrow y''[x + 2\,y'] = 0$$

απ' όπου προκύπτει

$$y'' = 0 \Rightarrow y' = c\ ,\quad c \text{ αυθαίρετη σταθερή}$$

$$\text{και}\quad x = -2\,y'\ .$$

Για $y' = c$, από τη δ.ε. , παίρνουμε το γενικό ολοκλήρωμα

$$y = x\,c + c^2\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

και , για $x = -2\,y'$, έχουμε την ιδιάζουσα λύση

$$x = -2\,y'$$

$$y = -2\,(y')^2 + (y')^2 = -(y')^2\ ,\ y' \text{ παράμετρος .}$$

Απαλείφουμε την y' και παίρνουμε την παραβολή

$$y = -\frac{1}{4}x^2\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

που είναι η περιβάλλουσα των ευθειών του γενικού ολοκληρώματος .

2. Να λυθεί το πρόβλημα της αρχικής τιμής

$$y = x\,y' + \sqrt{y'} \quad , \quad y(-1) = \frac{1}{4} \ .$$

► Παραγωγίζουμε τη δ.ε. ως προς x και έχουμε

$$y' = y' + x y'' + \frac{y''}{2\sqrt{y'}} \ \Rightarrow \ y''\left[x + \frac{1}{2\sqrt{y'}}\right] = 0$$

απ' όπου προκύπτει $y'' = 0 \Rightarrow y' = c$, c αυθαίρετη σταθερή

$$\text{και} \quad x + \frac{1}{2\sqrt{y'}} = 0 \ .$$

Για $y' = c$ από τη δ.ε. παίρνουμε το γενικό ολοκλήρωμα

$$y = xc + \sqrt{c} \ , \ x \in \mathbb{R} \ , \ c > 0 \ \text{αυθαίρετη σταθερή} \ .$$

Για $x = -\dfrac{1}{2\sqrt{y'}}$ έχουμε την ιδιάζουσα λύση

$$x = -\frac{1}{2\sqrt{y'}} \quad ,$$

(από τη δ.ε .) $$y = -\frac{y'}{2\sqrt{y'}} + \sqrt{y'} = \frac{\sqrt{y'}}{2} \quad , \quad y' \ \text{παράμετρος} \ .$$

Με απαλοιφή της y' προκύπτει η ιδιάζουσα λύση με τη μορφή

$$y(x) = -\frac{1}{4x} \quad , \ x < 0 \ .$$

Στην παραβολή $$y = -\frac{1}{4x} \quad , \ x < 0$$

εφάπτονται όλες οι ευθείες $y = xc + \sqrt{c}$, $c>0$ του γενικού ολοκληρώματος.

Η ιδιάζουσα λύση επαληθεύει την αρχική συνθήκη $y(-1) = \dfrac{1}{4}$, άρα είναι μια λύση του προβλήματος .

Θέτοντας $x = -1$, $y = \dfrac{1}{4}$ στο γενικό ολοκλήρωμα παίρνουμε

$$\frac{1}{4} = -c + \sqrt{c} \ \Rightarrow \ c^2 - \frac{c}{2} + \frac{1}{16} = 0$$

που έχει τη διπλή ρίζα $c = \dfrac{1}{4}$.

Επομένως , μια δεύτερη λύση του προβλήματος είναι η ευθεία γραμμή

$$y = \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \quad , \ x \in \mathbb{R}$$

η οποία εφάπτεται στην ιδιάζουσα λύση στο σημείο της $\left(-1, \dfrac{1}{4}\right)$.

3. Να λυθεί η δ.ε. $y + (y')^2 = x(1 + y')$.

► Θέτουμε $p = y'$ και παραγωγίζουμε τη δ.ε. ως προς x

$$p = 1 + p + x\frac{dp}{dx} - 2p\frac{dp}{dx} \Rightarrow p - 1 - p = (x - 2p)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dp} + x = 2p \quad (\text{ γραμμική δ.ε. πρώτης τάξης }) .$$

Η γενική λύση της είναι

$$x = e^{-\int dp}\left[\int 2pe^{\int dp}\,dp + c\right] = e^{-p}\left[\int 2pe^{p}\,dp + c\right] =$$

$$= 2(p-1) + c\,e^{-p} \quad , \quad \text{όπου } c \text{ αυθαίρετη σταθερή} .$$

Επομένως , το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε. , με παραμετρική μορφή είναι

$$x = 2(p-1) + c\,e^{-p} ,$$

$$y = [\,2(p-1) + c\,e^{-p}\,](1+p) - p^2 \quad , \; p \text{ παράμετρος} .$$

Επειδή εδώ έχουμε $\varphi(p) = 1+p$, ισχύει $\varphi(p) \neq p$, οπότε δεν υπάρχει ιδιάζουσα λύση της δ.ε.

6. Μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων (Μέθοδος του Picard)

Δίνεται το πρόβλημα της αρχικής τιμής

$$y' = f(x,y) \quad (1) \quad , \quad y(x_0) = y_0 \; . \quad (2)$$

Υποθέτουμε ότι σε κάποιο ορθογώνιο

$$S = \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; |x-x_0| \leq \alpha \;,\; |y-y_0| \leq \beta\,\}$$

ικανοποιούνται οι συνθήκες :

i) η $f(x,y)$ είναι συνεχής στο S ,

ii) η $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|$ είναι φραγμένη στο S , με φράγμα K .

Οι συνθήκες αυτές i) , ii) εξασφαλίζουν την ύπαρξη και τη μοναδικότητα των λύσεων της δ.ε. (1) .

Με *τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων (ή μέθοδο του Picard)* κατασκευάζουμε την ακολουθία των συναρτήσεων $(y_n(x))$, με τις αναδρομικές σχέσεις

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\, dt \quad , \; n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (3)$$

όπου $y_0(x) \equiv y_0$.

Με τις συνθήκες i) , ii) που θέσαμε , οι διαδοχικές προσεγγίσεις $(y_n(x))$ συγκλίνουν *ομοιόμορφα* προς τη λύση $y(x)$ του προβλήματος της αρχικής τιμής (1) , (2) , σε κάποιο διάστημα

$$I = [\, x_0 - \rho \,,\, x_0 + \rho \,] \;, \text{ όπου } \; \rho = min\left\{ \alpha \,,\, \frac{\beta}{M} \right\} ,$$

και $M = sup\, \{\, |\, f(x, y)| : (x, y) \in S \,\}$ ([1] , Κεφ. 5 , & 1.2) .

ΠΡΟΤΑΣΗ : *Η ακολουθία* $(\, y_n(x)\,)$ *συγκλίνει προς τη λύση* $y(x)$ *του προβλήματος (1) , (2) στο διάστημα* I .

Απόδειξη

Η συνάρτηση $y_1(x)$ ικανοποιεί στο I την ανισότητα

$$|\, y_1(x) - y_0(x) | = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))\, dt \right| \le \int_{x_0}^{x} |\, f(t, y_0)|\, dt \le M\, |\, x - x_0\, | \, .$$

Επειδή η f είναι συνάρτηση *Lipschitz* σταθερής

$$K = sup\left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| : (x, y) \in S \right\},$$

δηλαδή

$$\left| f(t, y_1) - f(t, y_2) \right| \le K\, |\, y_1 - y_2\, | \,, \;\; \forall (t, y_1), (t, y_2) \in S \;,$$

έχουμε

$$|\, y_2(x) - y_1(x) | = \left| \int_{x_0}^{x} [\, f(t, y_1(t)) - f(t, y_0)\,]dt \right| \le \left| \int_{x_0}^{x} |\, f(t, y_1(t)) - f(t, y_0)\, |\, dt \right|$$

$$\le k \left| \int_{x_0}^{x} |\, y_1(t) - y_0\, |\, dt \right| \le \frac{M K |\, x - x_0\, |^2}{2} \quad , \; x \in I \, .$$

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι , για οποιοδήποτε $n = 1, 2, 3, \ldots$ έχουμε

$$|\, y_{n+1}(x) - y_n(x) | = \left| \int_{x_0}^{x} |\, f(t, y_n(t)) - f(t, y_{n-1}(t)) |\, dt \right| \le$$

$$\le K \left| \int_{x_0}^{x} |\, y_n(t) - y_{n-1}(t) |\, dt \right| \quad , \; x \in I \, .$$

Υποθέτοντας ότι

$$|y_n(t)-y_{n-1}(t)| \le \frac{M}{K}\frac{K^n\,|t-x_0|^n}{n!} \quad , \quad t\in I$$

βρίσκουμε ότι

$$|y_{n+1}(x)-y_n(x)| \le \frac{M}{K}\left|\int_{x_0}^{x}\frac{K^{n+1}\,|t-x_0|^n\,dt}{n!}\right| = \frac{M}{K}\,\frac{K^{n+1}\,|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad x\in I.$$

Θα δείξουμε τώρα ότι η ακολουθία των συναρτήσεων ($y_n(x)$) συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα $I=[\ x_0-\rho\ \ ,\ x_0+\rho\ ]$.

Επειδή ισχύει η ανισότητα

$$\frac{(K\,|x-x_0|\,)^{n+1}}{(n+1)!} \le \frac{(K\,\rho)^{n+1}}{(n+1)!} \quad , \quad n=0,1,2,\ldots\ \forall x\in I$$

και η σειρά

$$\frac{M}{K}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(K\,\rho)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{συγκλίνει στο} \qquad \frac{M}{K}(e^{K\,\rho}-1) \quad ,$$

και η άπειρη σειρά θετικών όρων

$$\frac{M}{K}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(K\,|x-x_0|\,)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{συγκλίνει ομοιόμορφα στην} \quad \frac{M}{K}(e^{K|x-x_0|}-1)\ ,\ x\in I\ .$$

Επομένως , σύμφωνα με το κριτήριο του *Weierstrass* , και η σειρά

$$y_0(x)+\sum_{n=0}^{\infty}[\ y_{n+1}(x)-y_n(x)]$$

συγκλίνει επίσης ομοιόμορφα στο διάστημα I .

Αλλά το n- μερικό άθροισμα αυτής της σειράς είναι

$$y_n(x)=y_0(x)+[\ y_1(x)-y_0(x)\,]+\ldots+[\ y_n(x)-y_{n-1}(x)\,]\ ,$$

άρα η ακολουθία ($y_n(x)$) συγκλίνει ομοιόμορφα στο I , γιατί είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων σειράς που συγκλίνει ομοιόμορφα στο I .

Από την (3) , λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης της ($y_n(x)$) , προκύπτει

$$y(x)=\lim_{n\to\infty}y_n(x)=y_0+\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x}f(t,y_{n-1}(t))dt=$$

$$=y_0+\int_{x_0}^{x}\lim_{n\to\infty}f(t,y_{n-1}(t))\,dt$$

και λόγω της συνέχειας της $f(x\,,\,y)$

$$y(x)=\lim_{n\to\infty}y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,\ \lim_{n\to\infty}y_{n-1}(t))dt=$$

$$=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y(t))\,dt\ ,\ x\in I$$

δηλαδή η $y(x)$, $x\in I$ είναι λύση του προβλήματος (1) , (2) . □

Η εκτίμηση του λάθους ,που γίνεται με την $y_n(x)$ προσέγγιση,δηλαδή η εκτίμηση της διαφοράς $|\, y(x) - y_n(x)|$, $x \in I$, δίνεται από την ανισότητα

$$|\, y(x) - y_n(x)| \le \frac{M}{K}\frac{(K\rho)^{n+1}}{(n+1)!} \;\; , \; x \in I \, , \qquad (4)$$

όπου $y(x)$, $x \in I$ η λύση του προβήματος (1) , (2) .

Αυτή η εκτίμηση του λάθους γίνεται και χωρίς να γνωρίζουμε την $y_n(x)$ προσέγγιση, πράγμα που επιτρέπει να υπολογίσουμε ποιά προσέγγιση πρέπει να βρούμε ώστε να έχουμε δοσμένο λάθος εκτίμησης $\varepsilon > 0$.

<u>*Σημείωση*</u>

Αν υποθέσουμε πως το πρόβλημα αρχικών τιμών (1) , (2) έχει και δεύτερη λύση $z(x)$, $x \in I$ τότε θα έχουμε

$$|\, z(x) - y_n(x) \le \frac{M}{K}\frac{(K\rho)^{n+1}}{(n+1)!} \;\; , \; x \in I$$

και παίρνοντας το όριο

$$|\, z(x) - y(x)| \le 0 \; , \; x \in I \Rightarrow \; z(x) = y(x) \; , \; x \in I \, .$$

Επειδή είναι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(K\rho)^{n+1}}{(n+1)!} = e^{K\rho} - 1$ προκύπτει ότι $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{(K\rho)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$.

Παραδείγματα

1. Με τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων βρείτε την $y_2(x)$ προσέγγιση του προβλήματος της αρχικής τιμής

$$y' = \eta\mu x + y^2 \quad (1) \; , \quad y(0) = 0 \qquad (2) \, ,$$

στο ορθογώνιο $S = \{\, (x\,, y) : |\, x \,| \le 1 \; , \; |\, y \,| \le 1 \,\}$.

Κάντε μια εκτίμηση του λάθους της $y_5(x)$ προσέγγιση .

► Εδώ έχουμε $f(x\,,y) = \eta\mu x + y^2$ που είναι συνεχής στο S και

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| = |\, 2y \,| \le 2 \;\; , \;\; \forall (x\,,y) \in S \; ,$$

ενώ είναι $|\, f(x\,,y)| = |\, \eta\mu x + y^2 \,| \le |\, \eta\mu x \,| + y^2 \le 2$, $\forall (x\,,y) \in S$.

Άρα , έχουμε $K = 2$, $M = 2$ και

$$\rho = min\left\{ 1 , \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2}$$

Επομένως , για $| x | \le \frac{1}{2}$, οι διαδοχικές προσεγγίσεις συγκλίνουν στη λύση $y(x)$ του προβλήματος (1) , (2) .
Κατασκευάζουμε τις διαδοχικές προσεγγίσεις

$y_0 (x) \equiv 0$

$$y_1(x) = \int_0^x (\eta\mu\, t + 0^2)\, dt = - \sigma\upsilon\nu x + 1 ,$$

$$y_2(x) = \int_0^x (\eta\mu\, t + (1 - \sigma\upsilon\nu t)^2)\, dt = \frac{3}{2} x + 1 - (2\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu x\, \eta\mu x \quad , x \in I = \left[-\frac{1}{2} , \frac{1}{2} \right] .$$

Το λάθος της $y_5 (x)$ είναι

$$| y(x) - y_5(x) | \le \frac{M}{K} \frac{(K\rho)^{5+1}}{(5+1)!} = \frac{2}{2} \frac{1}{6!} = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720} \quad , \; x \in I ,$$

δηλαδή το λάθος της $y_5(x)$ προσέγγισης δεν υπερβαίνει την τιμή $\frac{1}{720}$ στο διάστημα $I = \left[-\frac{1}{2} , \frac{1}{2} \right]$.

2. Με τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων βρείτε την $y_2(x)$ προσέγγιση του προβλήματος της αρχικής τιμής

$$x\, y' = 2x - y \quad (1) \quad , \quad y(1) = 2 . \qquad (2)$$

Κάντε μια εκτίμηση του λάθους της $y_{10} (x)$ προσέγγισης .

►Εδώ έχουμε $f (x , y) = 2 - \frac{y}{x}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{x}$ και οι συνθήκες i) , ii) ικανοποιούνται στο ορθογώνιο

$$S = \{ (x ,y) : | x - 1| \le \frac{1}{2} \; , \; | y - 2| \le 1 \} .$$

Ακόμη , έχουμε

$$| f(x ,y) | = \left| 2 - \frac{y}{x} \right| \le 2 + \left| \frac{y}{x} \right| \le 2 + 6 = 8 = M \; , \forall (x ,y) \in S \; ,$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y} (x, y) \right| = \left| - \frac{1}{x} \right| \le 2 = K \quad \forall (x ,y) \in S .$$

Επομένως , είναι $\rho = min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right\} = \frac{1}{8}$ οπότε είναι $I = \left[\frac{7}{8}, \frac{9}{8}\right]$,

και για $x \in I$, οι διαδοχικές προσεγγίσεις συγκλίνουν στη λύση $y(x)$ του δοσμένου προβλήματος της αρχικής τιμής (1) , (2) .

Κατασκευάζουμε τις διαδοχικές προσεγγίσεις

$y_0(x) \equiv 2$,

$$y_1(x) = 2 + \int_1^x \left(2 - \frac{1}{t}\right) dt = 2 + [\,2t - ln\,t\,]_1^x = 2x - ln\,x \ ,$$

$$y_2(x) = 2 + \int_1^x \left(2 - \frac{2t - ln\,t}{t}\right) dt = 2 + \int_1^x \frac{ln\,t}{t}\, dt \quad \Rightarrow$$

$$y_2(x) = 2 + \frac{(ln\,x)^2}{2} \ , \ x \in I = \left[\frac{7}{8}, \frac{9}{8}\right] .$$

Το λάθος της $y_{10}(x)$ προσέγγισης είναι

$$|\,y(x) - y_{10}(x)| \le \frac{M}{K}\frac{(K\,\rho)^{10+1}}{(10+1)!} = \frac{8}{2}\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{11}}{11!} = \frac{4}{11!}\left(\frac{1}{4}\right)^{11}$$

$$\Rightarrow \ |\,y(x) - y_{10}(x)| \le \frac{1}{4^{10} \cdot 11!} \ , x \in I ,$$

δηλαδή το λάθος δεν υπερβαίνει την τιμή $(4^{10} \cdot 11!)^{-1}$ στο διάστημα I .

7. Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

Να λυθούν οι δ.ε.

1. $(y+1)\,dx + (y-1)\,(1+x^2)\,dy = 0$,

2. $y^2 dx = (x\,y - x^2)\,dy$,

3. $x\,dy - \left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx = 0$,

4. $(2x + 3y + 1)\,dx + (3x + 4y + 1)\,dy = 0$.

Να λυθούν οι δ.ε.

5. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x+1} = e^x (x+1)$,

6. $4y' - y\,\varepsilon\varphi x + y^5\,\eta\mu x = 0$,

7. $x^2 y' = (y-1)\,(x + y - 1)$,

8. $y' + 2xy = 1 + x^2 + y^2$, $y(x) = x$.

Να λυθούν οι δ.ε. (αφού δειχθεί ότι είναι πλήρεις δ.ε.)

9. $(4x - 2y + 5)\,dx + (2y - 2x)\,dy = 0$,

10. $(x + \eta\mu y)\,dx + (x\,\sigma\upsilon\nu y - 2y)\,dy = 0$,

11. $(3x^2 + 3xy^2)\,dx + (3x^2y - 3y^2 + 2y)\,dy = 0$.

Να λυθούν οι δ.ε. με τη βοήθεια ολοκληρωτικού παράγοντα

12. $(2x - y)\,dx + (x^2 + x)\,dy = 0$, $\mu(x)$,

13. $y(2xy + 1)\,dx - x\,dy = 0$, $\mu(xy)$, $\mu(y)$,

14. $(1 - xy)\,dy + (y^2 + 3xy^3)\,dx = 0$, $\mu(y)$,

15. $(1 - xy)dy + (y^2 + 3xy^3)dx = 0$, $\mu(y)$,

16. $y^2\sigma\upsilon\nu x dx + (4 + 5y\eta\mu\, x)dy = 0$, $\mu(y)$,

17. $(1 + x^2y^2 + y)dx + xdy = 0$, $\mu(xy)$.

18. Να βρεθούν οι ορθογώνιες τροχιές των καμπύλων

α) $x - y = c\,e^x$, γ) $\rho^2 = c(\rho\,\eta\mu\,\theta - 1)$,

β) $y^2 = 4c\,x$, δ) $\rho\theta = c$,

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή .

19. Να λυθούν οι δ.ε.

α) $y = x\,y' + (y')^3$,

β) $y = x(y')^2 + (y')^2$.

20. Με τη βοήθεια των διαδοχικών προσεγγίσεων , βρείτε την $y_2(x)$ προσέγγιση των παρακάτω δ.ε.

Κάντε μια εκτίμηση του λάθους της $y_5(x)$ προσέγγισης .

α) $y' = x^2 - y^2$, $y(-1) = 0$,

β) $y' = x + y^2$, $y(0) = 0$,

γ) $y' = 2y - 2x^2 - 3$, $y(0) = 2$,

δ) $y' = y$, $y(0) = 1$.

21. Να αποδειχθεί ότι τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών , έχουν μοναδική λύση στο αντίστοιχο διάστημα I :

α) $y' = 4x^2 + y^2$, $y(0) = 0$, $I = \left[-\frac{1}{5}\ ,\ \frac{1}{5}\right]$,

β) $y' = y(3x - 1)$, $y(0) = 1$, $I = \left[-\frac{1}{7}\ ,\ \frac{1}{7}\right]$.

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΡΩΝ

Βιβλία του συγγραφέα ΘΩΜΑ ΚΥΒΕΝΤΙΔΗ

Α. *Διακριτά Μαθηματικά*

1. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΚΑΙ ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ, (σελ. 552, 2001).
2. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΠΛΗΘΥΣΜΩΝ (*Διακριτά Μοντέλα*), (σελ. 164, 2001).

Β. *Διαφορικές Εξισώσεις*

1. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, *Τόμος Πρώτος*, (σελ. 480, 1987).
2. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ, *Τόμος Δεύτερος*, (σελ. 400, 1988).
3. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, *Τόμος Τρίτος*, (σελ. 478, 1991), (*Ποιοτική Θεωρία Διαφορικών Εξισώσεων*).
4. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ (*Ασκήσεις*), (σελ. 560, 1998).
5. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, (σελ. 512, 2007).
6. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΠΛΗΘΥΣΜΩΝ (*Συνεχή Μοντέλα*), (σελ. 128, 1993).
7. ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ, (σελ. 320, 1994).
8. ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ (σελ. 384, 2009).

Γ. *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*

1. ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
   Συναρτήσεων Μιας Πραγματικής Μεταβλητής,
   (*Τεύχος Πρώτο*, σελ. 640, 2001 – *Τεύχος Δεύτερο*, σελ. 312, 2001).
2. ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
   Συναρτήσεων Μιας Πραγματικής Μεταβλητής, (σελ. 624, 2005).
3. ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
   Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών, (σελ. 336, 2012).

Δ. *Σειρά Μαθηματικών*

1. ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, Τόμος Πρώτος, (σελ. 628, 2005).
   (Άλγεβρα, Αναλυτική Γεωμετρία, Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός)
2. ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, Τόμος Δεύτερος, (σελ. 616, 2006).
   (Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών)
3. ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, Τόμος Τρίτος, (σελ. 504, 2005).
   (Διανυσματική Ανάλυση, Σειρές Fourier, Μιγαδικές Συναρτήσεις, Διαφορικές Εξισώσεις, Εξισώσεις Διαφορών)

Ε. *Τοπολογία*

1. ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ (*Ασκήσεις*), (σελ. 400, 1977).
2. ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ ΜΕΤΡΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ (σελ. 336, 2009).