ΘΩΜΑΣ ΚΥΒΕΝΤΙΔΗΣ

ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Θωμας Α. Κυβεντιδης

- Γεννήθηκε το 1947 στο Νέο Πετρίτσι του Ν. Σερρών.
- Το 1965 αποφοίτησε από το εξατάξιο Γυμνάσιο Σιδηροκάστρου του Ν. Σερρών και εγγράφηκε στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης.
- Πήρε το πτυχίο των Μαθηματικών το 1969.
- Αναγορεύτηκε διδάκτορας στο τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης το 1979 και από το 1972 μέχρι σήμερα εργάζεται σ' αυτό.

ISBN 978-960-456-183-4

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση
Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσσαλονίκης - Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ:
Αρμενοπούλου 27 - 546 35 Θεσσαλονίκη • Τηλ.: 2310-203.720 • Fax 2310-211.305
e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΕΝΩΣΗ ΕΚΔΟΤΩΝ ΒΙΒΛΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ:
Στοά του Βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5) - 105 64 ΑΘΗΝΑ • Τηλ.-Fax: 210-3211.097

ΑΠΟΘΗΚΗ ΑΘΗΝΩΝ - ΠΩΛΗΣΗ ΧΟΝΔΡΙΚΗ:
Ασκληπιού 60 - Εξάρχεια 114 71, Αθήνα • Τηλ.-Fax: 210-3816.650 • e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

“Η Φύση είναι μια συνέχεια απέραντη, χωρίς αρχή και τέλος, ένα αδιάκοπο γίγνεσθαι. Εκείνος που παρατηρεί, κάνει αναγκαστικά ένα κομμάτιασμα στη Φύση, ξεσηκώνει αυθαίρετα ένα κομμάτι και του βάζει ο ίδιος αρχή και τέλος.

Το φαινόμενο που το πήραμε έτσι χωριστά, το ειδικεύουμε, μπορούμε να το βάλουμε σε κάποιο γένος, να το θεωρήσουμε όμοιο με άλλα φαινόμενα.

Το ξεχώρισμα αυτό το τεχνητό επιτρέπει να το περιγράψουμε, να το ταξινομήσουμε, να του δώσουμε όνομα και να το μετρήσουμε.

Στη Φύση όμως τίποτε δεν είναι όμοιο, πολύ λιγότερο το ίδιο μ’ ένα άλλο. Τα πράγματα γίνονται όμοια αν κλείσουμε το μάτι στις διαφορές τους.

Η επιστήμη είναι μια γλώσσα που μας χρησιμεύει για να μεταφράσουμε σ’ αυτή τα φαινόμενα. Στη γλώσσα αυτή τίποτε δεν είναι κυριολεξία παρά όλα μεταφορές.

Το γεγονός είναι μεταφορά του δοσμένου, ο νόμος πάλι μεταφορά του πρώτου, δηλαδή μεταφορά μεταφοράς.”

Χ. ΘΕΟΔΩΡΙΔΗ, *“Εισαγωγή στη Φιλοσοφία”* (2η Έκδοση)
(Γνωσιοθεωρία - ΙΙ. Το πρόβλημα για τη δυνατότητα)
Εκδόσεις ΕΣΤΙΑΣ, Αθήνα, 1955

Αφιερώνεται

σ' όλους όσους αγωνίζονται
για το σεβασμό και την αλληλοκατανόηση
της διαφορετικότητας των λαών,
και τη διατήρηση της παγκόσμιας ειρήνης.

Πρόλογος

Τα φυσικά φαινόμενα συνήθως εκφράζονται καλύτερα με τις μερικές διαφορικές εξισώσεις, γι' αυτό και η γνώση τους, μετά τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, είναι απαραίτητες για τη μελέτη και την ανάλυση των προβλημάτων.

Στο βιβλίο αυτό παρουσιάζονται οι μαθηματικές μέθοδοι για τη μελέτη και την επίλυση των διαφόρων μορφών των μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Στο κεφάλαιο 1 αναφέρονται οι γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης, το πρόβλημα του Cauchy (το πρόβλημα της αρχικής τιμής), οι εξισώσεις ολικών διαφορικών και η μέθοδος του Charpit για τις μη γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης.

Στο κεφάλαιο 2 μελετώνται οι βασικές μορφές, οι ομογενείς και οι μη ομογενείς γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς και μη σταθερούς συντελεστές δεύτερης τάξης, η μέθοδος της αναγωγής στην κανονική μορφή, το πρόβλημα του Cauchy (το πρόβλημα της αρχικής τιμής) και η μέθοδος του διαχωρισμού των μεταβλητών.

Στο κεφάλαιο 3 γίνεται ταξινόμηση των γραμμικών συστημάτων μερικών διαφορικών εξισώσεων και αναπτύσσεται μέθοδος επίλυσης των ολικά υπερβολικών γραμμικών συστημάτων μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Στο κεφάλαιο 4 δίνονται αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης των μερικών διαφορικών εξισώσεων (μερικές εξισώσεις διαφορών, μέθοδοι πεπερασμένης διαφοράς, μέθοδος των χαρακτηριστικών).

Σε κάθε κεφάλαιο περιέχονται αρκετά παραδείγματα για την καλύτερη κατανόηση των μεθόδων που αναπτύσσονται και ασκήσεις.

Στο κεφάλαιο 5 παραθέτουμε λυμένα προβλήματα που αναφέρονται σ' όλη την ύλη των προηγούμενων κεφαλαίων και στο Κεφάλαιο 6 δίνονται ορισμένες χαρακτηριστικές εφαρμογές των μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Τέλος, ο τίτλος του βιβλίου είναι μετάφραση της αγγλικής ονομασίας "Partial Differential Equations".

Θεσσαλονίκη, 2009 Θ. Κυβεντιδης

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΛΥΜΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΜΕΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Βιβλία του συγγραφέα ΘΩΜΑ ΚΥΒΕΝΤΙΔΗ

Α. *Διακριτά Μαθηματικά*

1. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΚΑΙ ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ, (σελ. 552, 2001).
2. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΠΛΗΘΥΣΜΩΝ (*Διακριτά Μοντέλα*), (σελ. 164, 2001).

Β. *Διαφορικές Εξισώσεις*

1. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, *Τόμος Πρώτος*, (σελ. 480, 1987).
2. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ, *Τόμος Δεύτερος*, (σελ. 400, 1988).
3. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, *Τόμος Τρίτος*, (σελ. 478, 1991), (*Ποιοτική Θεωρία Διαφορικών Εξισώσεων*).
4. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ (*Ασκήσεις*), (σελ. 560, 1998).
5. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, (σελ. 512, 2007).
6. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΠΛΗΘΥΣΜΩΝ (*Συνεχή Μοντέλα*), (σελ. 128, 1993).
7. ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ, (σελ. 320, 1994).
8. ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, (σελ. 384, 2009).

Γ. *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*

1. ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
   Συναρτήσεων Μιας Πραγματικής Μεταβλητής,
   (*Τεύχος Πρώτο*, σελ. 640, 2001 – *Τεύχος Δεύτερο*, σελ. 312, 2001).
2. ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
   Συναρτήσεων Μιας Πραγματικής Μεταβλητής, (σελ. 624, 2005).
3. ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
   Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών, (σελ. 240, 2007).

Δ. *Σειρά Μαθηματικών*

1. ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, Τόμος Πρώτος, (σελ. 628, 2005).
   (Άλγεβρα, Αναλυτική Γεωμετρία, Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός)
2. ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, Τόμος Δεύτερος, (σελ. 616, 2006).
   (Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών)
3. ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, Τόμος Τρίτος, (σελ. 504, 2005).
   (Διανυσματική Ανάλυση, Σειρές Fourier, Μιγαδικές Συναρτήσεις, Διαφορικές Εξισώσεις, Εξισώσεις Διαφορών).

Ε. *Τοπολογία*

1. ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ (*Ασκήσεις*), (σελ. 400, 1977).
2. ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ ΜΕΤΡΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ (σελ. 336, 2009).

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1 Βασικές έννοιες και ορισμοί

Πολλά φυσικά φαινόμενα, όπως στον τομέα της δυναμικής των ρευστών, του ηλεκτρισμού, του μαγνητισμού, της οπτικής ή της διάδοσης της θερμότητας, μπορούν να περιγραφούν, γενικά, με μερικές διαφορικές εξισώσεις.

Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις συνήθως περιγράφουν με περισσότερη ακρίβεια τα φυσικά προβλήματα και η μελέτη τους παρουσιάζει μεγαλύτερες δυσκολίες από τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

Με την έκφραση *μερική διαφορική εξίσωση* (θα γράφουμε σύντομα ΜΔΕ) εννοούμε μια εξίσωση της μορφής

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \ldots\right)=0$$

όπου $u=u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, δηλαδή περιέχει τις ανεξάρτητες μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_n$, την άγνωστη συνάρτηση αυτών $u=u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και τις μερικές παραγώγους της μέχρι μιας ορισμένης τάξης.

Η μεγαλύτερη τάξη της παραγώγου της u λέγεται *τάξη* της μερικής διαφορικής εξίσωσης.

Λύση της ΜΔΕ είναι μια συνάρτηση

$$u=\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$$

που ικανοποιεί την εξίσωση

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}, \ldots\right)=0,$$

για κάθε $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$.

Π.χ. η ΜΔΕ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

όπου $u=u(x,y)$, είναι δεύτερης τάξης και μία λύση της είναι η συνάρτηση

$$u=x^2-2y\,,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad \text{που την επαληθεύει.}$$

Μερική λύση της ΜΔΕ είναι μία λύση της η οποία δεν εξαρτάται από αυθαίρετες σταθερές ή συναρτήσεις.

- Υπενθυμίζουμε εδώ την έννοια της μερικής παραγώγου συνάρτησης τριών μεταβλητών $u=u(x,y,z)$, $(x,y,z)\in D\subset\mathbb{R}^3$.

  Οι μερικές παράγωγοι ορίζονται από τα παρακάτω όρια

$$u_x=\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h,y,z)-u(x,y,z)}{h}\,,$$

$$u_y=\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{h\to 0}\frac{u(x,y+h,z)-u(x,y,z)}{h}\,,$$

$$u_z=\frac{\partial u}{\partial z}=\lim_{h\to 0}\frac{u(x,y,z+h)-u(x,y,z)}{h}\,.$$

  Ανάλογα, ορίζονται και οι μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\ \frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z},\ \ldots$$

  Π.χ. αν είναι $u=x^2y+y^2z$, $(x,y,z)\in D\subset\mathbb{R}^3$ τότε έχουμε

$$u_x=\frac{\partial u}{\partial x}=2xy \qquad u_y=\frac{\partial u}{\partial y}=x^2+2yz\,, \qquad u_z=\frac{\partial u}{\partial z}=y^2$$

$$u_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2y\,, \qquad u_{yy}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2z\,, \qquad u_{zz}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

$$u_{xy}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=2x\,, \qquad u_{yz}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=2y\,, \qquad u_{xz}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=0\,, \qquad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=2,\ \ldots$$

Πρακτικά, όταν παραγωγίζουμε ως προς μία μεταβλητή, θεωρούμε τις υπόλοιπες μεταβλητές ως σταθερές, και εφαρμόζουμε τους κανόνες παραγώγισης συνάρτησης μιας μεταβλητής.

Τα παραπάνω γενικεύονται, ανάλογα για συναρτήσεις της μορφής

$$u=u(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)\,, \qquad (x_1,x_2,\, \ldots,\, x_n)\in D\subset\mathbb{R}^n\,.$$

Η γενική λύση μιας ΜΔΕ εξαρτάται από αυθαίρετες συναρτήσεις και συνήθως υπάρχει αντιστοιχία μεταξύ της τάξης της ΜΔΕ και του πλήθους των αυθαίρετων συναρτήσεων.

Π.χ. η ΜΔΕ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=0$ έχει τη γενική λύση $u=f(x)+g(y)$, όπου f,g είναι αυθαίρετες συναρτήσεις, ενώ η ΜΔΕ $\dfrac{\partial u}{\partial y}=e^x$ έχει τη γενική λύση $u=ye^x+f(x)$, όπου f αυθαίρετη συνάρτηση.

Η παρουσία αυθαίρετων συναρτήσεων στην έκφραση της γενικής λύσης μιας ΜΔΕ δείχνει τις δυσκολίες που παρουσιάζονται στην μελέτη τους.

Τα βασικά ερωτήματα είναι:

α) Κάτω από ποιές προϋποθέσεις υπάρχει λύση του προβλήματος; (Πρόβλημα Ύπαρξης)

β) Αν υπάρχει λύση του προβλήματος, αυτή είναι μοναδική; (Πρόβλημα μοναδικότητας)

2 Ταξινόμηση μερικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης

Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις είναι γενικά περίπλοκες και δύσκολες στην αναζήτηση των λύσεών τους, ειδικά όταν η F δεν είναι γραμμική.

Αλλά η ποικιλία των ΜΔΕ που εμφανίζονται στα φυσικά προβλήματα και τις εφαρμογές είναι αρκετά περιορισμένη και μπορεί να συνοψισθεί στην *ημιγραμμική* ΜΔΕ δεύτερης τάξης

$$\alpha(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\beta(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\gamma(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f\left(x,y,z,\,\frac{\partial z}{\partial x}\,,\,\frac{\partial z}{\partial y}\right). \tag{1}$$

Όταν η συνάρτηση f είναι της μορφής

$$f\left(x,y,z,\,\frac{\partial z}{\partial x}\,,\,\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f_1(x,y)z+f_2(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+f_3(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}+f_4(x,y)$$

τότε η ΜΔΕ (1) λέγεται *γραμμική*.

Η ΜΔΕ (1) ταξινομείται στους παρακάτω τύπους:

- *υπερβολικού τύπου*, όταν ισχύει $\alpha^2 - 4\beta\gamma > 0$, $\forall (x,y) \in D_1 \subset \mathbb{R}^2$,
- *παραβολικού τύπου*, όταν ισχύει $\alpha^2 - 4\beta\gamma = 0$, $\forall (x,y) \in D_2 \subset \mathbb{R}^2$,
- *ελλειπτικού τύπου,* όταν ισχύει $\alpha^2 - 4\beta\gamma < 0$, $\forall (x,y) \in D_3 \subset \mathbb{R}^2$.

Ειδικά, όταν η ΜΔΕ (1) είναι γραμμική, μπορεί να μελετηθεί ως προς τον τύπο της και με τον παρακάτω τρόπο:

Αν υπάρχει $(x_0, y_0) \in D$ τέτοιο ώστε $\alpha(x_0, y_0) \neq 0$ ή $\beta(x_0, y_0) \neq 0$ ή $\gamma(x_0, y_0) \neq 0$ και λ_1, λ_2 είναι οι δύο πραγματικές ιδιοτιμές (χαρακτηριστικές τιμές) του πίνακα

$$\begin{bmatrix} \alpha(x_0, y_0) & \beta(x_0, y_0) \\ \beta(x_0, y_0) & \gamma(x_0, y_0) \end{bmatrix},$$

τότε η γραμμική ΜΔΕ (1) ταξινομείται ως εξής:

- αν $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$, είναι *υπερβολικού τύπου*
- αν $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$, είναι *παραβολικού τύπου*
- αν $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, είναι *ελλειπτικού τύπου*

σε κάποια ανοικτή περιοχή D, με $(x_0, y_0) \in D \subset \mathbb{R}^2$.

Π.χ. *η κυματική εξίσωση*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x,y), \quad c > 0$$

είναι υπερβολικού τύπου, ενώ *η εξίσωση της θερμικής αγωγιμότητας*

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \alpha^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x,y), \quad \alpha > 0$$

είναι παραβολικού τύπου.

Η *εξίσωση Laplace* $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ και *η εξίσωση Poisson* $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x,y)$, όπου $f(x,y)$ είναι το δυναμικό, είναι ελλειπτικού τύπου.

3 Εξισώσεις της Μαθηματικής Φυσικής

Οι μορφές των ΜΔΕ που εμφανίζονται στα φυσικά προβλήματα είναι ουσιαστικά τρεις. Η πλειοψηφία των φυσικών προβλημάτων μπορούν (με ακρίβεια ή προσεγγιστικά) να περιγραφούν με μία από τις παρακάτω ΜΔΕ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k^2 \nabla^2 u \quad , \qquad \text{η κυματική εξίσωση (υπερβολική)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \nabla^2 u \quad , \qquad \text{η εξίσωση θερμότητας (παραβολική)}$$

$$\nabla^2 u = 0 \quad , \qquad \text{η εξίσωση Laplace (ελλειπτική)}$$

$$\nabla^2 u = f(x, y, z) \ , \qquad \text{η εξίσωση Poisson (ελλειπτική)}$$

όπου $\nabla^2 u$ είναι η λαπλασιανή

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad u = u(x, y, z, t)$$

και k, λ είναι θετικές σταθερές.

Οι παραπάνω εξισώσεις είναι γραμμένες με τη χρήση διαφορικών τελεστών, αλλά για να λυθεί η ΜΔΕ πρέπει αυτή η μορφή τους να μετατραπεί σε κάποια άλλη σε δοσμένο σύστημα αναφοράς.

Οι βασικοί διαφορικοί τελεστές είναι: κλίση, απόκλιση, στροφή.

Α. Κλίση (gradient)

Αν $f(x, y, z)$ είναι πραγματική (βαθμωτή) συνάρτηση τότε η *κλίση* της δίνεται από τον τύπο

$$grad\, f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\overline{x}_0 + \frac{\partial f}{\partial y}\overline{y}_0 + \frac{\partial f}{\partial z}\overline{z}_0,$$

όπου $\overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{z}_0$ οι διανυσματικές μονάδες των αξόνων Ox, Oy, Oz, αντίστοιχα και ∇ είναι το σύμβολο *ανάδελτα*

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\overline{x}_0 + \frac{\partial}{\partial y}\overline{y}_0 + \frac{\partial}{\partial z}\overline{z}_0 .$$

Είναι $\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f$ («$\cdot$» εσωτερικό γινόμενο) η προβολή του διανύσματος

της κλίσης της f κατά τη διεύθυνση της παραγώγισης, και σε καρτεσιανό σύστημα $Oxyz$ γράφεται

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Β. Απόκλιση (divergence)

Αν είναι $u = u_1(x,y,z)\overline{x}_0 + u_2(x,y,z)\overline{y}_0 + u_3(x,y,z)\overline{z}_0 = (u_1, u_2, u_3)$ διανυσματική συνάρτηση λέμε *απόκλιση* της u τον αριθμό

$$div\, u = \nabla \cdot u = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z},$$

όπου «$\cdot$» σημαίνει εσωτερικό γινόμενο.

Αν είναι $u = \nabla f$ το διανυσματικό πεδίο u λέγεται *συντηρητικό* και η αριθμητική συνάρτηση f λέγεται *δυναμικό* του.

Γ. Στροφή (rotation)

Αν είναι $u = u_1(x,y,z)\overline{x}_0 + u_2(x,y,z)\overline{y}_0 + u_3(x,y,z)\overline{z}_0 = (u_1, u_2, u_3)$ διανυσματική συνάρτηση λέμε *στροφή* της u το διάνυσμα

$$rot\, u = \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}\right)\overline{x}_0 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x}\right)\overline{y}_0 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\overline{z}_0$$

που γράφεται $rot\, u = \nabla \times u$, όπου «$\times$» σημαίνει εξωτερικό γινόμενο.

Συμβολικά, η στροφή γράφεται

$$rot\, u = \nabla \times u = \begin{vmatrix} \overline{x}_0 & \overline{y}_0 & \overline{z}_0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

και θεωρούμε το ανάπτυγμα της ορίζουσας κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής. ■

Επομένως οι προηγούμενες βασικές μερικές διαφορικές εξισώσεις, γράφονται στο καρτεσιανό σύστημα $Oxyz$ με τις μορφές:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=k^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),\quad \text{η κυματική εξίσωση,}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\lambda\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),\quad \text{η εξίσωση θερμότητας,}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0\,,\quad \text{η εξίσωση Laplace,}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f(x,y,z)\,,\quad \text{η εξίσωση Poisson.}$$

- Ένα βασικό πρόβλημα είναι το πρόβλημα της μετάβασης από ένα καρτεσιανό σύστημα αναφοράς $Oxyz$ σ' ένα άλλο $Ox_1x_2x_3$.
  Θεωρούμε τη διανυσματική συνάρτηση

$$F=(f_1(x_1,x_2,x_3)\,,\ f_2(x_1,x_2,x_3)\,,\ f_3(x_1,x_2,x_3))$$

η οποία μεταφέρει το σύστημα αναφοράς $Oxyz$ στο $Ox_1x_2x_3$ με τις εξισώσεις.

$$x=f_1(x_1,x_2,x_3)\,,\quad y=f_2(x_1,x_2,x_3)\,,\quad z=f_3(x_1,x_2,x_3)\,.$$

Το τελευταίο σύστημα των τριών εξισώσεων έχει λύση της μορφής

$$x_1=g_1(x,y,z)\,,\quad x_2=g_2(x,y,z)\,,\quad x_3=g_3(x,y,z)$$

σε κάποιο τόπο $D\subset\mathbb{R}^3$, αν και μόνον αν η ιακωβιανή ορίζουσα

$$J=\frac{D(f_1,f_2,f_3)}{D(x_1,x_2,x_3)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\end{vmatrix}$$

είναι διάφορη του μηδενός στον τόπο $D\subset\mathbb{R}^3$.

Μετρικοί συντελεστές

Αν $Oxyz$ είναι το καρτεσιανό σύστημα αναφοράς και $Ox_1x_2x_3$ το σύστημα αναφοράς που μεταβαίνουμε με τη διανυσματική συνάρτηση

$$F=(f_1(x_1,x_2,x_3)\,,\ f_2(x_1,x_2,x_3)\,,\ f_3(x_1,x_2,x_3))=(x,y,z)\,,$$

τότε η στοιχειώδης απόσταση δύο σημείων (ευκλείδεια απόσταση) δίνεται από τη σχέση

$$ds^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2=g_{11}(dx_1)^2+g_{22}(dx_2)^2+g_{33}(dx_3)^2\,,$$

όπου τα g_{11},g_{22},g_{33} είναι οι *μετρικοί συντελεστές*

$$g_{11}=\left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2,\qquad g_{22}=\left(\frac{\partial x}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^2,$$

$$g_{33}=\left(\frac{\partial x}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x_3}\right)^2.$$

Θέτουμε $G=g_{11}\,g_{22}\,g_{33}$ και έχουμε τους τύπους:

- $\nabla f=\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\frac{\partial f}{\partial x_i}\overline{x}_i^0\,,$ όπου $\overline{x}_1^0,\overline{x}_2^0,\overline{x}_3^0$ τα μοναδιαία διανύσματα στο σύστημα αναφοράς $Ox_1x_2x_3\,,$
- $\nabla\cdot u=\frac{1}{\sqrt{G}}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{G}{g_{ii}}\right)^{\frac{1}{2}}u_i\,,$ όπου $u=(u_1,u_2,u_3)$ στο σύστημα αναφοράς $Ox_1x_2x_3\,,$
- $\nabla^2 f=\frac{1}{\sqrt{G}}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\sqrt{G}}{g_{ii}}\frac{\partial f}{\partial x_i}\right],$ όπου $f=f(x,y,z)\,,\ \ \nabla^2 f=\nabla\cdot\nabla f\,.$

Για παράδειγμα να γραφούν οι διαφορικοί τελεστές

$$\nabla\cdot f\,,\quad \nabla\cdot u\,,\quad \nabla^2 f$$

σε κυλινδρικές συντεταγμένες (ρ,θ,z), οι οποίες σχετίζονται με τις καρτεσιανές συντεταγμένες (x,y,z) με τους τύπους

$$x=\rho\,\sigma\upsilon\nu\,\theta\,,\quad y=\rho\,\sigma\upsilon\nu\,\theta,\quad z=z\,,\quad \rho\geq 0\,,\ \theta\in[0,2\pi]\,.$$

Εδώ είναι $F(\rho,\theta,z)=(\rho\,\sigma\upsilon\nu\,\theta,\ \rho\,\sigma\upsilon\nu\,\theta,\ z)$, οπότε είναι

$$x=f_1=\rho\,\sigma\upsilon\nu\,\theta,\quad y=f_2=\rho\,\eta\mu\,\theta,\quad z=f_3=z$$

και έχουμε τις μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial f_1}{\partial \rho}=\sigma\upsilon\nu\theta\ , \qquad \frac{\partial f_1}{\partial \theta}=-\rho\,\eta\mu\theta\ , \qquad \frac{\partial f_1}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \rho}=\eta\mu\theta\ , \qquad \frac{\partial f_2}{\partial \theta}=\rho\,\sigma\upsilon\nu\theta\ , \qquad \frac{\partial f_2}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial \rho}=0\ , \qquad \frac{\partial f_3}{\partial \theta}=0\ , \qquad \frac{\partial f_3}{\partial z}=1\,.$$

Άρα, η ιακωβιανή ορίζουσα είναι

$$J=\frac{D(f_1,\,f_2,\,f_3)}{D(\rho,\theta,z)}=\begin{vmatrix}\sigma\upsilon\nu\theta & -\rho\,\eta\mu\theta & 0\\ \eta\mu\theta & \rho\,\sigma\upsilon\nu\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\rho\neq 0, \quad \text{για} \quad \rho>0$$

οπότε η αλλαγή μεταβλητών μπορεί να γίνει.

Ακόμη, έχουμε

$$g_{11}=\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2=\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta=1\,,$$

$$g_{22}=\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2=\rho^2\sigma\upsilon\nu^2\theta+\rho^2\eta\mu^2\theta=\rho^2\,,$$

$$g_{33}=\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2=1^2=1\,,$$

και $G=g_{11}g_{22}g_{22}=\rho^2 \;\Rightarrow\; \sqrt{G}=\rho$.

Επομένως, οι διαφορικοί τελεστές γίνονται:

$$\nabla f=\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial f}{\partial \rho}\overline{\rho}_0+\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial f}{\partial \theta}+\overline{\theta}_0+\frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\frac{\partial f}{\partial z}\overline{z}_0=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial \rho}\overline{\rho}_0+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overline{\theta}_0+\frac{\partial f}{\partial z}\overline{z}_0\,,$$

όπου $\overline{\rho}_0,\,\overline{\theta}_0,\,\overline{z}_0$ οι διανυσματικές μονάδες στο καρτεσιανό σύστημα $O\rho\theta z$, και

$$\nabla\cdot u=\frac{1}{\sqrt{G}}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{g_{11}}}u_1\right]+\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{g_{22}}}u_2\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{g_{33}}}u_3\right]\right]=$$

$$=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{\rho}{1}u_1\right]+\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\rho}{\rho}u_2\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\rho}{1}u_3\right]\right]=$$

$$=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho u_1)+\frac{\partial}{\partial\theta}(u_2)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho u_3)\right]=$$

$$=\frac{1}{\rho}\left[u_1+\rho\frac{\partial u_1}{\partial\rho}+\frac{\partial u_2}{\partial\theta}+\rho\frac{\partial u_3}{\partial z}\right]=\frac{u_1}{\rho}+\frac{\partial u_1}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_2}{\partial\theta}+\frac{\partial u_3}{\partial z},$$

όπου $u=(u_1(\rho,\theta,z),\ u_2(\rho,\theta,z),\ u_3(\rho,\theta,z))$, και

$$\nabla^2 f=\frac{1}{\sqrt{G}}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{\sqrt{G}}{g_{11}}\frac{\partial f}{\partial\rho}\right]+\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\sqrt{G}}{g_{22}}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\sqrt{G}}{g_{33}}\frac{\partial f}{\partial z}\right]\right]=$$

$$=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right]+\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\rho\frac{\partial f}{\partial z}\right]\right]=$$

$$=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial f}{\partial\rho}+\rho\frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\rho\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right]=$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

1

ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Μια *μερική διαφορική εξίσωση* (θα γράφουμε στο εξής ΜΔΕ) πρώτης τάξης είναι μια εξίσωση που συνδέει δύο ή περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_n$ μια άγνωστη συνάρτηση αυτών $z = z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης της z.

Π.χ. οι ΜΔΕ

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = y.$$

Αν έχουμε τη ΜΔΕ $F\left(x, y, z, \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$, τότε μια συνάρτηση $z = z(x, y)$ είναι *λύση* της, αν την επαληθεύει ταυτοτικά.

Π.χ. η συνάρτηση $z = e^x(y - x)$ είναι λύση της ΜΔΕ

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z$$

γιατί έχουμε $\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^x(y-x) - e^x$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = e^x$ και ισχύει η ταυτότητα

$$e^x(y-x) - e^x + e^x \equiv e^x(y-x).$$

- Ορισμένες απλές μορφές ΜΔΕ μπορούν να λυθούν με απευθείας ολοκλήρωση ή με μεθόδους των συνήθων διαφορικών εξισώσεων.

  Π.χ. η ΜΔΕ $\dfrac{\partial z}{\partial x} = x^2 + y$, με ολοκλήρωση ως προς x, έχει τη λύση

$$z = \frac{1}{3}x^3 + xy + \varphi(y),$$

όπου $\varphi(y)$ είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση του y.

Η ΜΔΕ $\frac{\partial z}{\partial x} - yz = 1$ λύνεται ως γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης (η μεταβλητή y θεωρείται σαν σταθερή)

$$z = e^{y\int dx}\left[\int 1 e^{-y\int dx} dx + \varphi(y)\right] = e^{xy}\left[\int e^{-xy} dx + \varphi(y)\right] =$$

$$= e^{xy}\left[-\frac{1}{y}\int e^{-xy} d(-xy) + \varphi(y)\right] = -\frac{1}{y} + e^{xy}\varphi(y),$$

όπου $\varphi(y)$ είναι αυθαίρετη συνάρτηση του y.

Παρατηρείστε ότι, στη θέση των αυθαίρετων σταθερών, θέτουμε αυθαίρετες συναρτήσεις της μεταβλητής που θεωρούμε σαν σταθερή.

Η *γενική λύση* μιας ΜΔΕ πρώτης τάξης δίνεται από μία κατάλληλη αυθαίρετη συνάρτηση και κάθε λύση της που εξαρτάται από δύο αυθαίρετες σταθερές λέγεται *πλήρης λύση* της.

Κωνικό στοιχείο

Αν $z = \varphi(x, y)$ είναι η εξίσωση μιας επιφάνειας, τότε έχουμε

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = pdx + qdy, \quad \text{όπου} \quad p = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad q = \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

οπότε τα διανύσματα $[dx, dy, dz]$ (εφαπτόμενα στην επιφάνεια) και $N[p, q, -1]$ (κάθετα στην επιφάνεια) είναι κάθετα μεταξύ τους.

Σ' ένα σημείο $M(x, y, z)$ και ένα ζεύγος p, q, που επαληθεύουν τη ΜΔΕ

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \tag{1}$$

φέρουμε από το M το κάθετο διάνυσμα $N[p, q, -1]$ (από το M παράλληλα προς τον άξονα Ox παίρνουμε απόσταση p, παράλληλα προς τον άξονα Oy παίρνουμε απόσταση q και απόσταση -1 παράλληλα προς τον άξονα Oz).

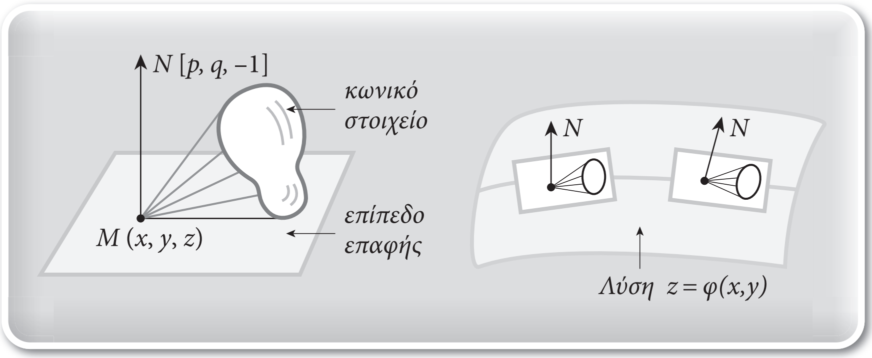
Στο σημείο M κατασκευάζουμε ένα μικρό τμήμα του καθέτου επιπέδου στο διάνυσμα N (που εξαρτάται από τα p, q), το οποίο το λέμε *επίπεδο επαφής*. Κρατώντας το M σταθερό, για όλα τα p, q που επαληθεύουν τη ΜΔΕ (1) δημιουργούμε τα επίπεδα επαφής στο σημείο M.

Κατασκευάζουμε τέτοια επίπεδα επαφής και στ' άλλα σημεία του χώρου όπου ορίζεται η ΜΔΕ (1), κι έτσι σχηματίζεται ένα *πεδίο επιπέδων επαφής*.

Η ΜΔΕ (1) σε κάθε σημείο $M(x, y, z)$ ορίζει μια μονοπαραμετρική οικογένεια επιπέδων επαφής. Από τη ΜΔΕ (1) έχουμε (λύνοντας ως προς q)

$$q = f(x, y, z, p), \tag{2}$$

οπότε σ' ένα δοσμένο σημείο $M(x, y, z)$, το p παίρνει αυθαίρετη τιμή και σε κάθε τέτοια τιμή του p, το q προσδιορίζεται από την εξίσωση (2).



Καθώς το p μεταβάλλεται κατά συνεχή τρόπο, το επίπεδο επαφής εφάπτεται συνέχεια μιας επιφάνειας και περνάει από το M, οπότε παράγεται μια κωνική επιφάνεια με κορυφή στο σημείο M, που λέγεται *κωνικό στοιχείο* του σημείου M.

Επομένως, η ικανή και αναγκαία συνθήκη, ώστε μια επιφάνεια $z = \varphi(x, y)$ να είναι λύση της ΜΔΕ (1) είναι σε κάθε σημείο της να εφάπτεται στο κωνικό στοιχείο του σημείου.

- Σημειώνουμε ότι, όταν η ΜΔΕ (1) είναι γραμμική πρώτης τάξης

$$A(x, y)p + B(x, y)q + \Gamma(x, y)z = \Delta(x, y)$$

τότε το επίπεδο επαφής σ' ένα σημείο, καθώς το p μεταβάλλεται περιστρέφεται γύρω από μια ευθεία και το κωνικό στοιχείο εκφυλίζεται σ' αυτήν την ευθεία. ■

Το αντίστροφο πρόβλημα είναι να βρεθεί η ΜΔΕ πρώτης τάξης της οποίας έχουμε μία πλήρη λύση της ή τη γενική λύση της.

Α) Απαλοιφή αυθαίρετων σταθερών

1. Να βρεθεί η ΜΔΕ που έχει πλήρη λύση τη συνάρτηση

$$z = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2, \quad \alpha, \beta \text{ αυθαίρετες σταθερές.}$$

➠ Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση z ως προς x και ως προς y, και έχουμε

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=2(x-\alpha), \qquad p=\frac{\partial z}{\partial y}=2(y-\beta)$$

(χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς $p=\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q=\dfrac{\partial z}{\partial y}$), απ' όπου παίρνουμε

$$\alpha=-\frac{p}{2}+x, \qquad \beta=-\frac{q}{2}+y.$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές των α,β στη δοσμένη συνάρτηση προκύπτει η ζητούμενη ΜΔΕ

$$z=\left(x+\frac{p}{2}-x\right)^2+\left(y+\frac{q}{2}-y\right)^2 \Rightarrow z=\frac{p^2}{4}+\frac{q^2}{4} \Rightarrow 4z=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

2. Να βρεθεί η ΜΔΕ που έχει ως λύση τη συνάρτηση

$$z=\alpha xy, \quad \alpha \text{ αυθαίρετη σταθερή.}$$

- Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση z ως προς x

  $$p=\frac{\partial z}{\partial x}=\alpha y \Rightarrow \alpha=\frac{p}{y}$$

  και αντικαθιστώντας στη συνάρτηση $z=\alpha xy$ παίρνουμε τη ΜΔΕ

  $$z=px \Rightarrow z=x\frac{\partial z}{\partial x}.$$

- Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση z ως προς y

  $$q=\frac{\partial z}{\partial y}=\alpha x \Rightarrow \alpha=\frac{q}{x}$$

  και αντικαθιστώντας στη συνάρτηση $z=\alpha xy$ παίρνουμε τη ΜΔΕ

  $$z=qy \Rightarrow z=y\frac{\partial z}{\partial y}.$$

- Εξισώνοντας τις δύο τιμές της αυθαίρετης σταθερής α παίρνουμε τη ΜΔΕ

  $$px-qy=0 \Rightarrow x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Σημείωση

Για να έχουμε *μία ακριβώς* ΜΔΕ τάξης $n \geq 1$, από απαλοιφή αυθαίρετων σταθερών, πρέπει στην πλήρη λύση να εμφανίζονται $\dfrac{n(n+3)}{2}$ αυθαίρετες σταθερές. Π.χ. για $n=1$ έχουμε $\dfrac{1(1+3)}{2}=2$ αυθαίρετες σταθερές.

Β) Απαλοιφή αυθαίρετης συνάρτησης

1. Να βρεθεί η ΜΔΕ που έχει γενική λύση

$\Phi(x-y+z\,,\, x^2-y^2-z^2)=0$, όπου Φ είναι αυθαίρετη συνάρτηση.

➠ Θέτουμε $u=x-y+z$, $v=x^2-y^2-z^2$.

Παραγωγίζουμε την Φ ως προς x και έχουμε

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial \Phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u}(1+p)+\frac{\partial \Phi}{\partial v}(2x-2zp)=0\,. \qquad \text{(i)}$$

Παραγωγίζουμε την Φ ως προς y και έχουμε

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{\partial \Phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u}(-1+q)+\frac{\partial \Phi}{\partial v}(-2y-2zq)=0\,. \qquad \text{(ii)}$$

Το σύστημα (i), (ii) έχει μη μηδενική λύση ως προς $\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}, \dfrac{\partial \Phi}{\partial v}$, όταν η ορίζουσα των συντελεστών του ισούται με μηδέν.

Μ' αυτόν τον τρόπο κάνουμε την απαλοιφή των $\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}, \dfrac{\partial \Phi}{\partial v}$, δηλαδή της αυθαίρετης συνάρτησης Φ.

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{vmatrix} 1+p & 2x-2zp \\ -1+q & -2y-2zq \end{vmatrix}=0 \;\Rightarrow\; (1+p)(-2y-2zq)-(-1+q)(2x-2zp)=0$$

$$\Rightarrow\ (1+p)(2y+2zq)+(-1+q)(2x-2zp)=0$$

$$\Rightarrow\ 2y+2zq+2yp+2zpq-2x+2zp+2xq-2zpq=0$$

$$\Rightarrow\ y+zq+yp-x+zp+xq=0\ \Rightarrow\ (y-x)+p(y+z)+q(z+x)=0\,.$$

Παρατήρηση

Η παραπάνω διαδικασία καταλήγει στον τύπο:

$$\begin{vmatrix} p & q & -1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix}=0\ \Rightarrow\ \begin{vmatrix} p & q & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2x & -2y & -2z \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\ p(2y+2z)-q(-2z-2x)+(-1)(-2y+2x)=0$$

$$\Rightarrow\ (y+z)p+(x+z)q+y-x=0\,.$$

2. Αν έχουμε τη συνάρτηση $x-y+z=f(x^2-y^2-z^2)$, όπου f είναι αυθαίρετη συνάρτηση, τότε γράφουμε

$$z=y-x+f(x^2-y^2-z^2)$$

και θέτουμε $v=x^2-y^2-z^2$.

Παραγωγίζοντας την z (που είναι $z=z(x,y)$) προς x και ως προς y, παίρνουμε

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=-1+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\ \Rightarrow\ p=-1+\frac{\partial f}{\partial v}(2x-2zp)\,,$$

$$q=\frac{\partial z}{\partial y}=1+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\ \Rightarrow\ q=1+\frac{\partial f}{\partial v}(-2y-2zq)\,.$$

Λύνουμε τις εξισώσεις αυτές ως προς $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ και τις εξισώνουμε

$$\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{p+1}{2x-2zp}=\frac{q-1}{-2y-2zq}$$

$$\Rightarrow\ -2yp-2zpq-2y-2zq=2xq-2zpq-2x+2zp$$

$$\Rightarrow\ (y+z)p+(x+z)q+y-x=0\,.$$

Ασκήσεις

Να βρεθούν οι η ΜΔΕ που έχουν:

α) την πλήρη λύση $z=\alpha x^2-\beta y^2$, α, β αυθαίρετες σταθερές,

β) τη γενική λύση $\Phi(x+y+z,\ xyz)=0$, Φ αυθαίρετη συνάρτηση,

γ) τη γενική λύση $z=-(x+y)+f(xyz)$, f αυθαίρετη συνάρτηση.

1 Γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

Η γενική μορφή της ΜΔΕ πρώτης τάξης είναι

$$F\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)=0 \tag{1}$$

και αν η (1) μπορεί να πάρει τη μορφή

$$P(x,\ y,\ z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,\ y,\ z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,\ y,\ z) \tag{1.1}$$

τότε λέγεται *σχεδόν γραμμική* ΜΔΕ πρώτης τάξης.

Αν η ΜΔΕ (1) μπορεί να πάρει τη μορφή

$$P(x,\ y)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,\ y)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,\ y,\ z) \tag{1.2}$$

τότε λέγεται *ημι-γραμμική* ΜΔΕ πρώτης τάξης, και αν μπορεί να πάρει τη μορφή

$$P(x,\ y)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,\ y)\frac{\partial z}{\partial y}+R(x,\ y)z=\Delta(x,\ y) \tag{1.3}$$

τότε λέγεται *γραμμική* ΜΔΕ πρώτης τάξης.

I) Μέθοδος των χαρακτηριστικών

Για τη γραμμική ΜΔΕ (1.3) θεωρούμε ότι οι συναρτήσεις P, Q, R και Δ είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις σ' έναν τόπο $D\subset\mathbb{R}^2$ και μία τουλάχιστον από τις συναρτήσεις P και Q δεν μηδενίζεται στο D, δηλαδή

$$P(x,y)\neq 0 \quad \text{ή} \quad Q(x,y)\neq 0\,,\quad \forall (x,y)\in D\,.$$

Θεωρώντας το διάνυσμα $\overline{\alpha}(x,y)=\big(P(x,y)\,,\,Q(x,y)\big)$ η (1.3) γράφεται

$$\nabla z\cdot\overline{\alpha}+R(x,y)z=\Delta(x,y)\,,\quad \text{με}\quad \nabla z=\left(\frac{\partial z}{\partial x},\,\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

όπου $\nabla z\cdot\overline{\alpha}$ (εσωτερικό γινόμενο) είναι η παράγωγος της $z=z(x,y)$ κατά τη διεύθυνση του διανύσματος $\overline{\alpha}$.

Αν έχουμε την καμπύλη $c_0:\ \overline{r}(s)=x(s)\overline{x}_0+y(s)\overline{y}_0\,,\ \ s\in I\subset\mathbb{R}$, όπου s είναι το αλγεβρικό μήκος τόξου της c_0, που μετριέται από ένα σταθερό σημείο της (φυσική παράμετρος), για την οποία ισχύει

$$\frac{d\overline{r}}{ds}=\frac{\overline{\alpha}}{|\overline{\alpha}|},$$

όπου $|\overline{\alpha}|$ το ευκλείδειο μήκος του διανύσματος $\overline{\alpha}$, τότε το διάνυσμα $\overline{\alpha}$ είναι εφαπτόμενο σε κάθε σημείο της καμπύλης c_0, και η c_0 λέγεται *χαρακτηριστική* της (1.3).

Άρα, θα έχουμε $\overline{\alpha}=|\overline{\alpha}|\dfrac{d\overline{r}}{ds}$, αφού $\dfrac{d\overline{r}}{ds}=\overline{\varepsilon}_0$ είναι το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης c_0.

Επομένως, έχουμε («$\cdot$» εσωτερικό γινόμενο)

$$\nabla z\cdot\overline{\alpha}=\nabla z\cdot|\overline{\alpha}|\frac{d\overline{r}}{ds}=|\overline{\alpha}|\,\nabla z\cdot\frac{d\overline{r}}{ds}=\overline{\alpha}\frac{dz}{ds}\,,$$

όπου $z=z(s)=z\big(x(s),\,y(s)\big)$ στα σημεία της χαρακτηριστικής, οπότε η ΜΔΕ (1) παίρνει τη μορφή

$$|\overline{\alpha}|\frac{dz}{ds}+R(x,y)z=\Delta(x,y)\,.$$

Από την ΜΔΕ (1.3) προκύπτει επίσης ότι ισχύει

$$|\overline{\alpha}|\frac{dz}{ds}=\nabla z\cdot\overline{\alpha}=P(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}\,,$$

ενώ είναι

$$\frac{dz}{ds}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{ds}=\nabla z\cdot\left(\frac{dx}{ds}\overline{x}_0+\frac{dy}{ds}\overline{y}_0\right)=\nabla z\cdot\frac{d\overline{r}}{ds}\,.$$

Έχουμε λοιπόν τις ισότητες

$$|\overline{\alpha}|\frac{dx}{ds}=P(x,y)\,,\qquad |\overline{\alpha}|\frac{dy}{ds}=Q(x,y)$$

απ' όπου παίρνουμε

$$\frac{dx}{P(x,y)}=\frac{dy}{Q(x,y)}=\frac{ds}{|\overline{\alpha}|} \Rightarrow P(x,y)dy=Q(x,y)dx$$

που είναι η *δ.ε. των χαρακτηριστικών* της ΜΔΕ (1.3).

Π.χ. να βρεθούν οι χαρακτηριστικές της ΜΔΕ

$$\alpha_1\frac{\partial z}{\partial x}+\alpha_2\frac{\partial z}{\partial y}=1, \quad \alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Η διαφορική εξίσωση των χαρακτηριστικών αυτής της ΜΔΕ είναι

$$\alpha_1 dy=\alpha_2 dx \Rightarrow \alpha_1\int dy=\alpha_2\int dx$$

$$\Rightarrow \alpha_1 y=\alpha_2 x+\alpha_3,\ \alpha_3 \text{ αυθαίρετη σταθερή} \Rightarrow y=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}x+\frac{\alpha_3}{\alpha_1}=\alpha x+\beta,$$

όπου $\alpha=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ (δοσμένη σταθερή) και $\frac{\alpha_3}{\alpha_1}=\beta$ αυθαίρετη σταθερή.

Άρα, οι χαρακτηριστικές της ΜΔΕ είναι οι ευθείες γραμμές με συντελεστή διεύθυνσης $\alpha=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$.

Παραδείγματα

1. Να λυθεί η ΜΔΕ

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=1. \tag{1}$$

➡ Βρίσκουμε τις χαρακτηριστικές της ΜΔΕ (1).

Η διαφορική εξίσωση των χαρακτηριστικών είναι

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y}=\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x}, \quad xy\neq 0$$

$$\Rightarrow \ln|y|=\ln|x|+\ln|\alpha| \Rightarrow y=\alpha x,\ \alpha \text{ αυθαίρετη σταθερή.}$$

Εκτελούμε την αλλαγή μεταβλητών (η επιλογή του ξ είναι αυθαίρετη)

$$\begin{array}{l}\xi=x\\ \eta=\dfrac{y}{x}\end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll}\dfrac{\partial\xi}{\partial x}=1, & \dfrac{\partial\xi}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial\eta}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2}, & \dfrac{\partial\eta}{\partial y}=\dfrac{1}{x}\end{array}, \quad \text{με } \frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x}\end{vmatrix}=\frac{1}{x}\neq 0, \ \text{για } x\neq 0$$

και με τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{1}{x}.$$

Αντικαθιστώντας στην ΜΔΕ (1) παίρνουμε

$$z\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)+\frac{y}{x}\frac{\partial z}{\partial \eta}=1 \Rightarrow \xi\frac{\partial z}{\partial \xi}=1$$

$$\Rightarrow \partial z=\frac{\partial \xi}{\xi}, \quad \xi\neq 0 \Rightarrow z=\ln|\xi|+f(\eta),$$

όπου f είναι αυθαίρετη συνάρτηση.

Άρα, η γενική λύση της ΜΔΕ (1) είναι

$$z=\ln|x|+f\left(\frac{y}{x}\right),$$

όπου f αυθαίρετη συνάρτηση.

2. Να λυθεί η ΜΔΕ

$$xy\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y}+xz=0, \quad x\in\mathbb{R},\ y>0. \tag{1}$$

➠ Η διαφορική εξίσωση των χαρακτηριστικών της ΜΔΕ (1) είναι

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y^2}{xy}, \quad x\neq 0$$

και έχει τις λύσεις

$$x\,dy+y\,dx=0 \Rightarrow d(xy)=0 \Rightarrow xy=\alpha, \quad \alpha \text{ αυθαίρετη σταθερή}$$

που είναι οι χαρακτηριστικές της (1).

Με το μετασχηματισμό $\xi=xy$, $\eta=y$ (η επιλογή του η είναι αυθαίρετη) έχουμε

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}=y, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y}=x, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y}=1, \quad \text{με} \quad \frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix} y & x \\ 0 & 1\end{vmatrix}=y>0,$$

και $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial \xi}y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial \xi}x+\dfrac{\partial z}{\partial \eta}$

οπότε η ΜΔΕ(1) γίνεται

$$\eta^3\frac{\partial z}{\partial \eta}+\xi z=0, \quad \xi\in\mathbb{R},\ \eta>0.$$

Η γενική λύση της τελευταίας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης είναι

$$z=z(\xi,\eta)=f_0(\xi)e^{-\int_1^\eta \frac{\xi}{t^3}dt}=f_0(\xi)e^{\frac{\xi}{2\eta^2}-\frac{\xi}{2}}, \quad \xi\in\mathbb{R},\ \eta>0$$

και αν θέσουμε $f(\xi)=f_0(\xi)e^{-\frac{\xi}{2}}$, $\xi\in\mathbb{R}$, τότε παίρνουμε τον τύπο

$$z(\xi,\eta)=f(\xi)e^{\frac{\xi}{2\eta^2}}, \quad \xi\in\mathbb{R},\ \eta>0.$$

Άρα, η γενική λύση της ΜΔΕ (1) δίνεται από τη σχέση

$$z(x,y)=f(xy)e^{\frac{x}{2y}}, \quad x\in\mathbb{R},\ y>0$$

όπου f είναι αυθαίρετη συνάρτηση.

3. Να λυθεί η ΜΔΕ

$$xy\frac{\partial z}{\partial x}-2x^2\frac{\partial z}{\partial y}+yz=0, \quad x>0,\ y>0. \tag{1}$$

➠ Η διαφορική εξίσωση των χαρακτηριστικών της ΜΔΕ (1) είναι

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x^2}{xy}=-\frac{2x}{y} \Rightarrow y\,dy+2x\,dx=0$$

και έχει τις λύσεις $y^2+2x^2=\alpha$, α αυθαίρετη σταθερή, που είναι οι χαρακτηριστικές της (1).

Με το μετασχηματισμό $\xi=x$, $\eta=y^2+2x^2$ (η επιλογή του ξ είναι αυθαίρετη) έχουμε

$$\begin{matrix}\dfrac{\partial \xi}{\partial x}=1, & \dfrac{\partial \xi}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x}=4x, & \dfrac{\partial \eta}{\partial y}=2y\end{matrix}, \quad \text{με} \quad \frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 4x & 2y\end{vmatrix}=2y>0, \quad \text{για } y>0,$$

και

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial \eta}4x\,, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \eta}2y\,.$$

Αντικαθιστώντας στη ΜΔΕ (1) παίρνουμε

$$\xi\frac{\partial z}{\partial \xi}+z=0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial z}{z}+\frac{\partial \xi}{\xi}=0\,, \quad z\neq 0$$

$$\Rightarrow\; \ln|z\xi|=\ln|f(\eta)| \;\Rightarrow\; z\xi=f(\eta)\,,$$

όπου f είναι αυθαίρετη συνάρτηση.

Άρα, η γενική λύση της ΜΔΕ (1) είναι $z=\dfrac{1}{x}f(y^2+2x^2)$, όπου f αυθαίρετη συνάρτηση.

II) Μέθοδος των πρώτων ολοκληρωμάτων

Θεωρούμε μια ΜΔΕ πρώτης τάξης σχεδόν γραμμική, δηλαδή της μορφής

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,y,z) \tag{1}$$

ή

$$P(x,y,z,u)\frac{\partial u}{\partial x}+Q(x,y,z,u)\frac{\partial u}{\partial y}+R(x,y,z,u)\frac{\partial u}{\partial z}=T(x,y,z,u) \tag{1$'$}$$

όπου τα P, Q, R, T είναι συναρτήσεις των ανεξάρτητων μεταβλητών τους και της άγνωστης συνάρτησης $z=z(x,y)$ για την (1) και $u=u(x,y,z)$ για την (1)′.

Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις P, Q, R, T δεν μηδενίζονται συγχρόνως σ' έναν τόπο $D\subset\mathbb{R}^3$ ή $D\subset\mathbb{R}^4$, αντίστοιχα, και είναι κλάσης C^1.

ΘΕΩΡΗΜΑ: *Αν ο συναρτήσεις $u_1(x,y,z)=\alpha$, $v_1(x,y,z)=\beta$ είναι δύο ανεξάρτητα πρώτα ολοκληρώματα του συστήματος ΔΕ*

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)} \tag{2}$$

τότε η αυθαίρετη συνάρτηση

$$\Phi(u_1(x,y,z)\,,\quad v_1(x,y,z)=0\,,\quad \mu\varepsilon\quad \frac{\partial \Phi}{\partial z}\neq 0\,,$$

είναι η γενική λύση της ΜΔΕ (1)

Απόδειξη

Από το σύστημα ΔΕ (2) έχουμε

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}=\lambda\neq 0 \;\;\Rightarrow\;\; dx=\lambda P\,,\quad dy=\lambda Q\,,\quad dz=\lambda R \qquad \text{(i)}$$

και διαφορίζοντας τα πρώτα ολοκληρώματα παίρνουμε

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}dx+\frac{\partial u_1}{\partial y}dy+\frac{\partial u_1}{\partial z}dz=0\,,$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x}dx+\frac{\partial v_1}{\partial y}dy+\frac{\partial v_1}{\partial z}dz=0\,.$$

Απ' αυτές τις εξισώσεις και τις σχέσεις (i) καταλήγουμε στο σύστημα των εξισώσεων (είναι $\lambda\neq 0$)

$$\begin{aligned} P\frac{\partial u_1}{\partial x}+Q\frac{\partial u_1}{\partial y}&=-R\frac{\partial u_1}{\partial z}\,,\\ P\frac{\partial v_1}{\partial x}+Q\frac{\partial v_1}{\partial y}&=-R\frac{\partial v_1}{\partial z}\,. \end{aligned} \qquad \text{(ii)}$$

Λύνουμε το (ii) ως γραμμικό σύστημα ως προς P, Q:

$$P=\frac{R\dfrac{D(u_1,v_1)}{D(y,z)}}{\dfrac{D(u_1,v_1)}{D(x,y)}}\,,\qquad Q=\frac{R\dfrac{D(u_1,v_1)}{D(z,x)}}{\dfrac{D(u_1,v_1)}{D(x,y)}}$$

με ιακωβιανή ορίζουσα

$$\frac{D(u_1,v_1)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u_1}{\partial x} & \dfrac{\partial u_1}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial v_1}{\partial x} & \dfrac{\partial v_1}{\partial y}\end{vmatrix}\neq 0\,,$$

απ' όπου τελικά παίρνουμε

$$\frac{P}{\frac{D(u_1,v_1)}{D((y,z)}}=\frac{Q}{\frac{D(u_1,v_1)}{D(z,x)}}=\frac{R}{\frac{D(u_1,v_1)}{D(x,y)}}=\mu\neq 0\,. \tag{iii}$$

Από τη σχέση $\Phi(u_1(x,y,z),\ v_1(x,y,z))=0$, με παραγώγιση ως προς x και y, παίρνουμε το σύστημα

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial z}p\right)+\frac{\partial\Phi}{\partial v_1}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial z}p\right)=0\,,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial u_1}{\partial z}q\right)+\frac{\partial\Phi}{\partial v_1}\left(\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial v_1}{\partial z}q\right)=0\,,$$

το οποίο έχει μη μηδενική λύση ως προς $\frac{\partial\Phi}{\partial u_1},\ \frac{\partial\Phi}{\partial v_1}$, όταν η ορίζουσα των συντελεστών του είναι μηδέν, δηλαδή όταν είναι

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial z}p & \frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial z}p \\ \frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial u_1}{\partial z}q & \frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial v_1}{\partial z}q \end{vmatrix}=0\,.$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα καταλήγουμε στην εξίσωση

$$p\frac{D(u_1,v_1)}{D(y,z)}+q\frac{D(u_1,v_1)}{D(z,x)}=\frac{D(u_1,v_1)}{D(x,y)}\,,$$

την οποία αν πολλαπλασιάσουμε με $\mu\ (\mu\neq 0)$, λόγω των σχέσεων (iii), παίρνουμε τη ΜΔΕ

$$P(x,y,z)p+Q(x,y,z)q=R(x,y,z)\,. \tag{1}$$

Άρα, η συνάρτηση $\Phi(u,v)=0$ είναι λύση της ΜΔΕ (1).

- Η συνθήκη $\frac{\partial\Phi}{\partial z}\neq 0$ εξασφαλίζει τον ορισμό των μερικών παραγώγων $p=\frac{\partial z}{\partial x},\ q=\frac{\partial z}{\partial y}$ από τις σχέσεις

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0\,.$$

- Η υπόθεση ότι οι συναρτήσεις P,Q,R είναι κλάσης C^1, δηλαδή είναι συνε-

χείς, με μερικές παραγώγους πρώτης τάξης συνεχείς, εξασφαλίζει τη μοναδικότητα των λύσεων του συστήματος ΔΕ (2) και την ύπαρξη των δύο ανεξάρτητων πρώτων ολοκληρωμάτων του (2). ■

Στο Κεφάλαιο 5, Λυμένο Πρόβλημα 1, αποδεικνύονται οι παρακάτω Προτάσεις 1 και 2.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1: *Αν* $z=z(x,y)$ *είναι λύση της ΜΔΕ (1), που περνάει από το σημείο* $M(x_0,y_0,z_0)$, *τότε αυτή περιέχει και τη λύση του συστήματος ΔΕ (2) που περνάει από το σημείο* M.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2: *Θεωρούμε την επιφάνεια* $F(x,y,z)=0$ *που είναι μια μονοπαραμετρική οικογένεια λύσεων του συστήματος ΔΕ (2).*

Αν η επιφάνεια $F(x,y,z)=0$, *έχει την ιδιότητα, το εφαπτόμενο επίπεδό της σε κάθε σημείο της δεν είναι παράλληλο προς τον άξονα* Oz, *τότε είναι λύση της ΜΔΕ (1).*

ΠΡΟΤΑΣΗ 3: *Κάθε επιφάνεια* $z=z(x,y)$ *που είναι λύση της ΜΔΕ (1), μπορεί να παραχθεί από μία μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων που είναι λύσεις του συστήματος ΔΕ (2).*

Απόδειξη

Θεωρούμε μια επιφάνεια $z=z(x,y)$ που είναι λύση της ΜΔΕ (1) και πάνω της μια καμπύλη c που δεν είναι λύση του συστήματος ΔΕ (2).

Η μονοπαραμετρική οικογένεια των λύσεων του (2) που είναι καμπύλες και τέμνουν την καμπύλη c, παράγουν τη δοσμένη επιφάνεια $z=z(x,y)$ που είναι λύση της ΜΔΕ (1) (Πρόταση 1).

Από τις εξισώσεις των δύο ανεξάρτητων πρώτων ολοκληρωμάτων του (2)

$$u_1(x,y,z)=\alpha\,,\quad v_1(x,y,z)=\beta\,,\qquad \alpha,\beta \text{ αυθαίρετες σταθερές,}$$

και από τις εξισώσεις της καμπύλης c απαλείφουμε τις μεταβλητές x,y,z και βρίσκουμε μία σχέση $\beta=\varphi(\alpha)$.

Επομένως, οι καμπύλες που είναι λύσεις του συστήματος ΔΕ (2) και τέμνουν την καμπύλη c δίνονται από τις εξισώσεις

$$u_1(x,y,z)=\alpha\,,\quad v_1(x,y,z)=\varphi(\alpha)\,,$$

όπου α είναι αυθαίρετη σταθερή (παράμετρος).

Σημειώσεις

α) Από το θεώρημα προκύπτει ότι η σχέση $u_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2$, όπου α_1, α_2 είναι αυθαίρετες σταθερές, είναι μια πλήρης λύση της ΜΔΕ (1).

β) Αν δύο λύσεις της ΜΔΕ (1) τέμνονται σ' ένα σημείο M, η τομή τους είναι λύση του συστήματος ΔΕ (2) που περνάει από το σημείο M, επειδή αυτό ανήκει και στις δύο επιφάνειες που είναι λύσεις της (1) (Πρόταση 1).

γ) Σύμφωνα με τις Προτάσεις 1, 2, 3, η λύση $z = z(x, y)$ της ΜΔΕ (1) είναι μια επιφάνεια που σχηματίζεται από τη συνένωση καμπύλων που είναι λύσεις του συστήματος ΔΕ (2). ■

- Για τη ΜΔΕ (1) το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)} \tag{2}$$

και για τη ΜΔΕ (1)′ το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{dx}{P(x,y,z,u)} = \frac{dy}{Q(x,y,z,u)} = \frac{dz}{R(x,y,z,u)} = \frac{du}{T(x,y,z,u)} \tag{2$'$}$$

λέγεται *χαρακτηριστικό σύστημα* της ΜΔΕ (1) και (1)′, αντίστοιχα.

- Σημειώνουμε ότι, οι λύσεις του συστήματος ΔΕ (2) (αντ. (2)′) λέγονται *χαρακτηριστικές καμπύλες* της ΜΔΕ (1) (αντ. (1)′), και οι προβολές τους στο επίπεδο Oxy λέγονται *χαρακτηριστικές* της ΜΔΕ (1) (αντ. (1)′).

Αναζητούμε πρώτα ολοκληρώματα του χαρακτηριστικού συστήματος (2) ή (2)′, τα οποία να είναι ανεξάρτητα σ' έναν τόπο $D \subset \mathbb{R}^3$ ή $D \subset \mathbb{R}^4$, αντίστοιχα.

- Αν $u_1(x,y,z) = \alpha$, $v_1(x,y,z) = \beta$, α, β αυθαίρετες σταθερές, είναι δύο ανεξάρτητα πρώτα ολοκληρώματα του συστήματος (2), τότε η γενική λύση της ΜΔΕ (1) δίνεται από τη σχέση

  $$\Phi(u_1(x,y,z),\ v_1(x,y,z)) = 0,$$

  όπου Φ είναι αυθαίρετη συνάρτηση, με $\dfrac{\partial \Phi}{\partial z} \neq 0$.

- Αν $u_1(x,y,z,u) = \alpha_1$, $u_2(x,y,z,u) = \alpha_2$, $u_3(x,y,z,u) = \alpha_3$, όπου α_1, α_2, α_3 αυθαίρετες σταθερές, είναι τρία ανεξάρτητα πρώτα ολοκληρώματα του συστήματος (2)′, τότε η γενική λύση της ΜΔΕ (1)′ δίνεται από τη σχέση

  $$F(u_1(x,y,z,u),\ \ u_2(x,y,z,u),\ \ u_3(x,y,z,u)) = 0,$$

όπου F είναι αυθαίρετη συνάρτηση, με $\dfrac{\partial F}{\partial u} \neq 0$.

Τα πρώτα ολοκληρώματα είναι ανεξάρτητα σ' έναν τόπο D όταν ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} & \dfrac{\partial u_1}{\partial y} & \dfrac{\partial u_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x} & \dfrac{\partial v_1}{\partial y} & \dfrac{\partial v_1}{\partial z} \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} & \dfrac{\partial u_1}{\partial y} & \dfrac{\partial u_1}{\partial z} & \dfrac{\partial u_1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x} & \dfrac{\partial u_2}{\partial y} & \dfrac{\partial u_2}{\partial z} & \dfrac{\partial u_2}{\partial u} \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x} & \dfrac{\partial u_3}{\partial y} & \dfrac{\partial u_3}{\partial z} & \dfrac{\partial u_3}{\partial u} \end{bmatrix}$$

έχει ορίζουσα 2×2 ή 3×3, αντίστοιχα, διάφορη του μηδενός στον τόπο $D\subset\mathbb{R}^3$ ή $D\subset\mathbb{R}^4$, αντίστοιχα.

Πώς θα βρούμε πρώτα ολοκληρώματα

Σημειώνουμε ότι *πρώτο ολοκλήρωμα* του συστήματος ΔΕ (2) ή (2)′ είναι μια επιφάνεια, από τα σημεία της οποίας περνάνε λύσεις του (καμπύλες) που βρίσκονται πάνω στην επιφάνεια.

Α) Στο αντίστοιχο χαρακτηριστικό σύστημα αναζητούμε ισότητες λόγων οι οποίες είναι ολοκληρώσιμες διαφορικές εξισώσεις.

Προσοχή! Καμία από τις μεταβλητές x, y, z του (2) ή x, y, z, u του (2)′ δεν μπορεί να θεωρηθεί σαν σταθερή.

Β) Μπορούμε να κάνουμε συνδυασμούς λόγων με σκοπό:

i) να μηδενίζεται ο παρονομαστής και ο αριθμητής να είναι ολικό διαφορικό κάποιας συνάρτησης,

ii) εξισώνοντας αυτόν το λόγο με έναν άλλο λόγο να δημιουργείται ολοκληρώσιμη διαφορική εξίσωση.

Γ) Αν κάποιο πρώτο ολοκλήρωμα που βρήκαμε είναι απλής μορφής μπορούμε ν' απαλείψουμε (λύνοντάς το ως προς μια μεταβλητή) από το χαρακτηριστικό σύστημα μια μεταβλητή έτσι ώστε να προκύψει ολοκληρώσιμη διαφορική εξίσωση.

Παραδείγματα

4. Να λυθεί η ΜΔΕ $\quad (y+zx)\dfrac{\partial z}{\partial x}-(x+yx)\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2-y^2$. (1)

➠ Σχηματίζουμε το αντίστοιχο χαρακτηριστικό σύστημα

$$\frac{dx}{y+zx}=\frac{dy}{-(x+yz)}=\frac{dz}{x^2-y^2} \tag{2}$$

απ' όπου κάνοντας συνδυασμούς των λόγων παίρνουμε:

$$\frac{x\,dx+y\,dy-z\,dz}{0}=\frac{d\left(\frac{1}{2}(x^2+y^2-z^2)\right)}{0} \Rightarrow u_1=x^2+y^2-z^2=\alpha$$

και

$$\frac{y\,dx+x\,dy}{-(x^2-y^2)}=\frac{dz}{x^2-y^2} \Rightarrow d(xy)+dz=0 \Rightarrow \upsilon_1=xy+z=\beta$$

τα δύο ανεξάρτητα, για $x\neq\pm y$, πρώτα ολοκληρώματα.

Άρα, η γενική λύση της ΜΔΕ (1) είναι $\Phi(x^2+y^2-z^2,\ xy+z)=0$, όπου Φ αυθαίρετη συνάρτηση.

5. Να λυθεί η ΜΔΕ
$$z\frac{\partial z}{\partial x}+z\frac{\partial z}{\partial y}=x+y\,. \tag{1}$$

➠ Από το αντίστοιχο χαρακτηριστικό σύστημα

$$\frac{dx}{z}=\frac{dy}{z}=\frac{dz}{x+y}\,, \quad z\neq 0\,, \quad x+y\neq 0 \tag{2}$$

παίρνουμε την ισότητα λόγων

$$\frac{dx}{z}=\frac{dy}{z} \Rightarrow dx=dy \Rightarrow u_1=y-x=\alpha\,,$$ α αυθαίρετη σταθερή, που είναι πρώτο ολοκλήρωμα.

Θέτοντας την τιμή $y=x+\alpha$ στην ισότητα λόγων

$$\frac{dx}{z}=\frac{dz}{x+y} \Rightarrow \frac{dx}{z}=\frac{dz}{2x+\alpha} \Rightarrow (2x+\alpha)dx=z\,dz$$

απ' όπου προκύπτει $\frac{z^2}{2}=x^2+\alpha x+\beta$, και επειδή $\alpha=y-x$, παίρνουμε το δεύτερο πρώτο ολοκλήρωμα

$$\upsilon_1=\frac{z^2}{2}-x^2-(y-x)x=\beta\,,$$ β αυθαίρετη σταθερή.

Το υ_1 μπορεί να γραφεί $\upsilon_1=z^2-2xy=\beta$ (θέσαμε πάλι β αντί 2β).

Τα πρώτα ολοκληρώματα $u_1 = y - x = \alpha$, $\upsilon_1 = z^2 - 2xy = \beta$ είναι ανεξάρτητα, για $x \neq 0$, οπότε η γενική λύση της ΜΔΕ (1) είναι

$$\Phi\,(y-x,\; z^2-2xy)=0\,,$$

όπου Φ αυθαίρετη συνάρτηση.

6. Να λυθεί η ΜΔΕ

$$2y(2-x)\frac{\partial z}{\partial x}+(x^2+z^2-4x)\frac{\partial z}{\partial y}+2yz=0\,. \tag{1}$$

➠ Από το αντίστοιχο χαρακτηριστικό σύστημα

$$\frac{dx}{2y(2-x)}=\frac{dy}{x^2+z^2-y^2-4x}=\frac{dz}{-2yz} \tag{2}$$

προκύπτουν οι ολοκληρώσιμες διαφορικές εξισώσεις

$$\frac{dx}{2-x}=\frac{dz}{-z},\quad x\neq 2,\; z\neq 0 \;\Rightarrow\; \frac{d(2-x)}{2-x}=\frac{dz}{z} \;\Rightarrow\; u_1=\frac{z}{2-x}=\alpha$$

και (για $z \neq 0$)

$$\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{-y(x^2+y^2+z^2)}=\frac{dz}{-2yz} \;\Rightarrow\; \frac{d(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}=\frac{dz}{z} \;\Rightarrow\; \upsilon_1=\frac{z}{x^2+y^2+z^2}=\beta\,,$$

όπου α, β είναι αυθαίρετες σταθερές.

Τα πρώτα ολοκληρώματα u_1, υ_1 είναι ανεξάρτητα, για $yz \neq 0$, $x \neq 2$, οπότε η γενική λύση της ΜΔΕ (1) δίνεται από τη σχέση

$$\Phi\left(\frac{z}{2-x}\,,\;\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)=0\,,$$

όπου Φ είναι αυθαίρετη συνάρτηση.

Εφαρμογή: ***Επιφάνειες ορθογώνιες σε μονοπαραμετρική οικογένεια επιφανειών.***

Δίνεται η μονοπαραμετρική οικογένεια επιφανειών

$$f(x,y,z)=c\,,\quad c \text{ παράμετρος} \tag{α}$$

και θέλουμε να βρούμε τις επιφάνειες που τέμνουν ορθογώνια κάθε επιφάνειά της.

Το κάθετο διάνυσμα σε σημείο $M(x, y, z)$ μιας επιφάνειας της οικογένειας (α) έχει τους αριθμούς διεύθυνσης

$$[P, Q, R]=\left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}\right]=\nabla f \quad \text{κλίση της } f .$$

Αν η επιφάνεια $z=z(x, y)$ τέμνει τις επιφάνειες της οικογένειας (α) ορθογώνια, τότε το κάθετο διάνυσμά της στο σημείο $M(x, y, z)$ έχει αριθμό διεύθυνσης

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\right]$$

και είναι κάθετο στο προηγούμενο διάνυσμα $[P, Q, R]$.

Επομένως, έχουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$[P, Q, R]\cdot\left[\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \; -1\right]=0 \;\Rightarrow\; P\frac{\partial z}{\partial x}+Q\frac{\partial z}{\partial y}=R$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{β}$$

Άρα, κάθε λύση της ΜΔΕ (β) τέμνει ορθογώνια τις επιφάνειες της οικογένειας (α), οπότε η γενική λύση της δίνει τις ζητούμενες ορθογώνιες επιφάνειες στις επιφάνειες (α).

Δηλαδή, οι ορθογώνιες επιφάνειες της οικογένειας (α) είναι οι επιφάνειες που σχηματίζονται από τη συνένωση των καμπύλων οι οποίες είναι λύσεις του συστήματος ΔΕ

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{dz}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

που είναι το αντίστοιχο χαρακτηριστικό σύστημα της ΜΔΕ (β).

Π.χ. να βρεθούν οι επιφάνειες οι οποίες τέμνουν ορθογώνια τις επιφάνειες της μονοπαραμετρικής οικογένειας των ελλειπτικών παραβολοειδών

$$x^2+y^2-2z=c, \quad c \text{ παράμετρος.}$$

➠ Εδώ είναι $f(x, y, z)=x^2+y^2-2z=c$ (α), οπότε έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z}=-2$$

και οι ζητούμενες επιφάνειες είναι λύσεις της ΜΔΕ

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad 2x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=-2$$

ή ακόμη
$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=-1 . \tag{β}$$

Σχηματίζουμε τ' αντίστοιχο χαρακτηριστικό σύστημα της ΜΔΕ (β)

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{-1}$$

απ' όπου βρίσκουμε τα δύο ανεξάρτητα πρώτα ολοκληρώματά του:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad x=\alpha y \quad \Rightarrow \quad u(x,y,z)=\frac{x}{y}=\alpha ,$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-1} \quad \Rightarrow \quad xe^{z}=\beta \quad \Rightarrow \quad v(x,y,z)=xe^{z}=\beta ,$$

όπου α, β είναι αυθαίρετες σταθερές.

Επομένως, οι ζητούμενες ορθογώνιες επιφάνειες στις επιφάνειες της οικογένειας (α) δίνονται από τη συνάρτηση

$$\Phi\left(\frac{x}{y}, xe^{z}\right)=0 ,$$

όπου Φ είναι αυθαίρετη συνάρτηση, με $\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\neq 0$. ■

1.1 Το πρόβλημα του Cauchy

Δίνονται η ΜΔΕ

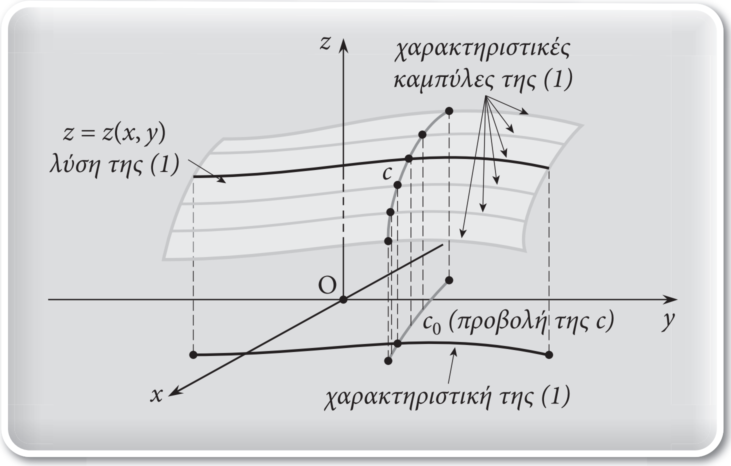
$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,y,z) \tag{1}$$

και η καμπύλη

$c: x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t), \quad t\in I\subset\mathbb{R}, \quad t$ παράμετρος

ή $\quad c: f_1(x,y,z)=0, \quad f_2(x,y,z)=0,$ ως τομή δύο επιφανειών.

Το πρόβλημα της εύρεσης της λύσης της ΜΔΕ (1) που περνάει από τη δοσμένη καμπύλη c είναι γνωστό ως *πρόβλημα του Cauchy* ή *πρόβλημα αρχικής τιμής*.



Η λύση $z=z(x,y)$ της ΜΔΕ (1) είναι μια επιφάνεια που σχηματίζεται από τη συνένωση χαρακτηριστικών καμπύλων της.

Το πρόβλημα έχει μοναδική λύση όταν ισχύει η σχέση

$$D=Q(x(t)\,,\,y(t)\,,\,z(t))\frac{dx}{dt}-P(x(t)\,,\,y(t)\,,\,z(t))\frac{dy}{dt}\neq 0\,,\quad \forall t\in I\,.$$

Για να βρούμε αυτήν τη λύση βρίσκουμε δύο ανεξάρτητα πρώτα ολοκληρώματα του αντίστοιχου χαρακτηριστικού συστήματος της ΜΔΕ (1)

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)}\,, \tag{2}$$

έστω τα $u_1(x,y,z)=\alpha$, $\upsilon_1(x,y,z)=\beta$ και εργαζόμαστε ως εξής:

α) Από τις εξισώσεις

$$u_1(x(t)\,,\,y(t)\,,\,z(t))=\alpha\,,\quad \upsilon_1(x(t)\,,\,y(t)\,,\,z(t))=\beta$$

απαλείφουμε την παράμετρο t και παίρνουμε τη σχέση $\rho(\alpha,\beta)=0$.
Η ζητούμενη λύση είναι $\rho(u_1(x,\,y,\,z)\,,\,\upsilon_1(x,y,z))=0$.

β) Από τις τέσσερις εξισώσεις

$$u_1(x,y,z)=\alpha\,,\quad \upsilon_1(x,y,z)=\beta\,,\quad f_1(x,y,z)=0\,,\quad f_2(x,y,z)=0$$

απαλείφουμε τις μεταβλητές x,y,z και παίρνουμε τη σχέση $\rho(\alpha,\beta)=0$.
Η ζητούμενη λύση είναι $\rho(u_1(x,y,z)\,,\,\upsilon_1(x,y,z))=0$.