ΘΩΜΑ ΚΥΒΕΝΤΙΔΗ

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει τη σφραγίδα του εκδότη

ΘΩΜΑΣ Α. ΚΥΒΕΝΤΙΔΗΣ

- Γεννήθηκε το 1947 στο Νέο Πετρίτσι του Ν. Σερρών.
- Το 1965 αποφοίτησε από το εξατάξιο Γυμνάσιο Σιδηροκάστρου του Ν. Σερρών και εγγράφηκε στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης.
- Πήρε το πτυχίο των Μαθηματικών το 1969.
- Αναγορεύτηκε διδάκτορας στο τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης το 1979 και από το 1972 μέχρι σήμερα εργάζεται σ' αυτό.

ISBN 960-431-963-9

www.ziti.gr

Φωτοστοιχειοθεσία Εκτύπωση **Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ**
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 23920 72222 (5 γραμ.) - Fax: 23920 72229
e-mail: info@ziti.gr

Βιβλιοπωλείο **ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ**
Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ. 2310 203720, Fax 2310 211305
e-mail: sales@ziti.gr

«Ἀλλά μήν καὶ κόσμοι ἄπειροί εἰσὶν, οἵ θ᾽ὅμοιοι τούτῳ καί ἀνόμοιοι, αἵ τε γάρ ἄτομοι ἄπειροι οὖσαι, ὡς ἄρτι ἀπεδείχθη, φέρονται καί πορρωτάτω, οὐ γάρ κατανήλωνται αἱ τοιαῦται ἄτομοι, ἐξ ὧν ἄν γένοιτο κόσμος ἤ ὑφ᾽ ὧν ἄν ποιηθείη, οὔτ᾽ εἰς ἕνα οὔτ᾽ εἰς πεπερασμένους, οὔθ᾽ ὅσοι τοιοῦτοι οὔθ᾽ ὅσοι διάφοροι τούτοις· ὥστε οὐδὲν τὸ ἐμποδοστατῆσόν ἐστί πρὸς τὴν ἀπειρίαν τῶν κόσμων.»

[*Μα και οι κόσμοι είναι άπειροι, και οι όμοιοι με τον δικό μας και οι ανόμοιοι. Καθώς τα άτομα είναι άπειρα, όπως δείξαμε πριν, διανύουν τις πιο μακρινές αποστάσεις. Και τα άτομα απ᾽ τα οποία θα μπορούσε να δημιουργηθεί ένας κόσμος, δεν εξαντλούνται σε ένα κόσμο ούτε σε ορισμένο αριθμό κόσμων, είτε μοιάζουν αυτοί οι κόσμοι με το δικό μας, είτε είναι αλλιώτικοι.*

Τίποτα, λοιπόν, δεν αποκλείει το να είναι άπειροι οι κόσμοι.]

ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ (341-270 π.Χ.)
Επιστολή προς Ηρόδοτο, 45

Αφιερώνεται
σ’ όσους αγωνίσθηκαν
και σ’ όσους αγωνίζονται
για την ελευθερία.

Πρόλογος

Η βασική θεωρία του ολοκληρώματος Riemann συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής αναπτύσσεται σ' αυτό το βιβλίο, με τρόπο ώστε να γίνεται κατανοητή μέσα από τη γραφική παράσταση και την απλή παρουσίαση του κειμένου.

Τα θεωρήματα παρουσιάζονται έτσι ώστε να μπορούν να είναι χρήσιμα στις εφαρμογές και δεν αφήνονται κρυμμένες δυσκολίες.

Γι' αυτό, όπου εμφανίζονται, αντιμετωπίζονται άμεσα και αναλύονται όσο το δυνατόν πιο απλά, χωρίς να θυσιάζεται η μαθηματική αυστηρότητα.

Έχει γίνει ιδιαίτερη προσπάθεια, ώστε η παρουσίαση του κειμένου να είναι αυστηρά μαθηματικά διατυπωμένη, και παράλληλα να μην δημιουργούνται κενά στον αναγνώστη.

Στο Κεφάλαιο 1 δίνονται η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος, θεωρήματα ύπαρξης, ιδιότητες των ολοκληρωμάτων, τα θεωρήματα της μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού και η έννοια της αρχικής.

Στο Κεφάλαιο 2 δίνονται η έννοια του αορίστου ολοκληρώματος και οι βασικές ιδιότητές του.

Στο Κεφάλαιο 3 αναπτύσσονται οι βασικές μέθοδοι της αντικατάστασης και της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες.

Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται, με συστηματικό τρόπο, οι τεχνικές της ολοκλήρωσης, δηλαδή οι τρόποι υπολογισμού αορίστων ολοκληρωμάτων, καθώς και ειδικές τεχνικές.

Στο Κεφάλαιο 5 δίνονται η έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης, η παραγώγιση και ολοκλήρωση όρο προς όρο ακολουθιών και σειρών (ιδιαίτερα δυναμοσειρών).

Στο Κεφάλαιο 6 αναπτύσσονται τα γενικευμένα ολοκληρώματα σε άπειρο διάστημα και μη φραγμένων συναρτήσεων, κριτήρια ύπαρξής τους και τα ολοκληρώματα που εξαρτώνται από παράμετρο.

Στο Κεφάλαιο 7 δίνονται εφαρμογές των ολοκληρωμάτων στη γεωμετρία (εμβαδόν χωρίου, μήκος τόξου, όγκοι και επιφάνεια από περιστροφή), στη μαθηματική ανάλυση και στα φυσικά προβλήματα.

Στο Κεφάλαιο 8 περιγράφονται οι κανόνες προσέγγισης (ορθογωνίων, τραπεζίων, Simpson, Tchebychev, αναπτύγματος του Taylor) ορισμένων ολοκληρωμάτων.

Σ' όλα τα κεφάλαια περιέχονται παραδείγματα και ασκήσεις των οποίων οι αναλυτικές απαντήσεις δίνονται στο τέλος του βιβλίου.

Θεσσαλονίκη, 2004 Θ. ΚΥΒΕΝΤΙΔΗΣ

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
ΟΙ ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΤΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5
ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ ΚΑΙ ΣΕΙΡΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6
ΤΟ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

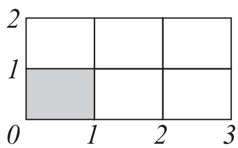
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8
ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

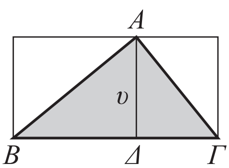
Ο υπολογισμός εμβαδών επιπέδων σχημάτων και όγκων σωμάτων είναι μια ανάγκη στη ζωή των ανθρώπων.

Η στοιχειώδης γεωμετρία «με τη βοήθεια κανόνα και διαβήτη» υπολογίζει τα εμβαδά των επιπέδων χωρίων που είναι τρίγωνα, ορθογώνια, κύκλοι, τομείς κύκλων κ.τ.λ. καθώς και όγκους σωμάτων που είναι κύβοι, κώνοι, κύλινδροι, σφαίρες, κ.τ.λ.

Σαν εμβαδόν E ενός επιπέδου χωρίου θεωρούμε τον αριθμό που προκύπτει όταν συγκρίνουμε το E με ένα τετράγωνο πλευράς *1*.



$E = 3 \cdot 2 = 6$



$E = \frac{1}{2}(ΒΔ) \cdot U + \frac{1}{2}(ΔΓ) \cdot U = \frac{1}{2}(ΒΓ) \cdot U$

Σε τυχαίο ορθογώνιο προσεγγίζουμε τις πλευρές του με ρητούς αριθμούς π.χ. με μια πεπερασμένη δεκαδική παράστασή τους.

Με απλή τεχνική βρίσκουμε επίσης τον τύπο για το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ (βλέπε σχήμα).

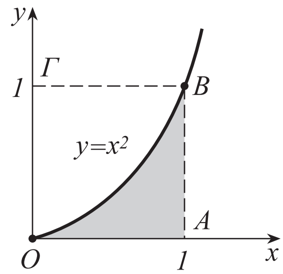
Βέβαια, δεν είναι πρακτικά εφαρμόσιμο να επινοεί κανείς κάθε φορά μια ειδική μέθοδο για κάθε σχήμα.

Η έννοια του ολοκληρώματος κάνει δυνατό τον υπολογισμό του εμβαδού και του όγκου τυχαίων σχημάτων, με αναλυτικές μεθόδους.

Οι αρχές της ολοκλήρωσης ανάγονται στη λεγόμενη «μέθοδο της εξάντλησης» που χρησιμοποιούσαν οι αρχαίοι Έλληνες για την εύρεση εμβαδών και όγκων.

Για παράδειγμα ο Αρχιμήδης (3^{ος} αιώνας π.Χ.) στον «τετραγωνισμό της παραβολής» αναπτύσσει τις βασικές έννοιες της ολοκλήρωσης.

«Το εμβαδόν του χωρίου *ΟΑΒ* μεταξύ της παραβολής $y = x^2$, του άξονα των *x* και της ευθείας *x=1*, ισούται με το $\frac{1}{3}$ του εμβαδού του ορθογωνίου *ΟΑΒΓ*.»



Στους *Newton* (1646-1727) και *Leibniz* (1644-1716) οφείλουμε τη σύνδεση μεταξύ παραγώγισης και ολοκλήρωσης, ενώ ο γερμανός μαθηματικός *Riemann* (1826-1866) διατύπωσε τη θεωρία ολοκλήρωσης με την οποία, κυρίως θ' ασχοληθούμε.

Το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης σ' ένα διάστημα ορίσθηκε ως το όριο (αν υπάρχει) των λεγόμενων αθροισμάτων *Riemann*, όταν η λεπτότητα της διαμέρισης του διαστήματος τείνει στο μηδέν.

Στον *Cauchy* (1789-1857) οφείλεται η επέκταση του ορισμού του ολοκληρώματος, στην περίπτωση μη φραγμένων συναρτήσεων.

Τον περασμένο αιώνα ο *Stiltjes* (1856-1894) έδωσε μια γενίκευση του ολοκληρώματος *Riemann* γνωστή ως ολοκλήρωμα *Riemann - Stiltjes*.

Με την εισαγωγή της έννοιας του μέτρου από τους *Borel* (1871-1938) και *Lebesgue* (1875-1941), η θεωρία της ολοκλήρωσης του *Riemann* γενικεύθηκε από τον *Lebesgue* με τη βοήθεια του μέτρου.

Αυτή η γενίκευση είναι γνωστή ως ολοκλήρωμα του *Lebesgue.*

1

ΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

1. Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος

Θα μελετήσουμε αρχικά, χρησιμοποιώντας τη σημερινή τεχνική των μαθηματικών, *«το πρόβλημα του τετραγωνισμού της παραβολής»* το οποίο απασχόλησε τον Αρχιμήδη τον 3^o αιώνα π.Χ.

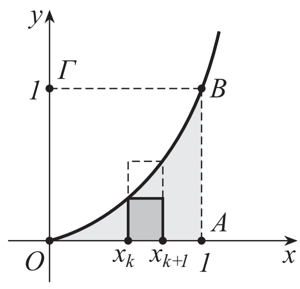
Θα δείξουμε ότι το εμβαδόν του χωρίου OAB μεταξύ της παραβολής $y = x^2$, του άξονα των x και της ευθείας $x=1$ ισούται με το $\frac{1}{3}$ του εμβαδού του ορθογωνίου $OAB\Gamma$.

Διαιρούμε το διάστημα $[0, 1]$ με τα σημεία $x_0, x_1, \ldots, x_n$ τέτοια ώστε

$$x_0 = 1 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_{n-1} < x_n = 1 .$$

Σε κάθε διάστημα $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ ισχύει

$$x_k^2 \le x^2 \le x_{k+1}^2 , \quad \text{για κάθε} \quad x \in [x_k, x_{k+1}] ,$$



οπότε το αντίστοιχο κομμάτι του εμβαδού που ζητάμε θα είναι μεγαλύτερο του εμβαδού του ορθογωνίου με βάση το διάστημα $[x_k, x_{k+1}]$ και ύψος το x_k^2 και μικρότερο από το εμβαδόν του ορθογωνίου με βάση πάλι το διάστημα $[x_k, x_{k+1}]$ και ύψος το x_{k+1}^2 (βλέπε το σχήμα).

Αν λοιπόν συμβολίσουμε με E το ζητούμενο εμβαδόν, θα έχουμε

$$K(x^2, \Delta) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) x_k^2 < E < A(x^2, \Delta) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) x_{k+1}^2$$

όπου το Δ αντιστοιχεί στη διαμέριση $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ του διαστήματος $[0, 1]$ που πήραμε.

Το σύνολο $\{K(x^2, \Delta) : \Delta \text{ διαμέριση του } [0, 1]\}$ είναι προφανώς μη κενό και

φραγμένο προς τα πάνω π.χ. από το E, οπότε υπάρχει το *supremum* του ([6], Εισαγωγή, §3).

Γράφουμε

$$sup\{K(x^2, \Delta) : \Delta \text{ διαμέριση του } [0, 1]\} = \underline{\int_0^1} x^2 dx$$

και ονομάζουμε το $\underline{\int_0^1} x^2 dx$

κάτω ολοκλήρωμα Darboux της συνάρτησης $y = x^2$ στο διάστημα [0, 1].

Ο *Darboux* (1842-1917) ήταν Γάλλος γεωμέτρης.

Ανάλογα, ορίζουμε το *πάνω ολοκλήρωμα Darboux*

$$\overline{\int_0^1} x^2 dx = inf\{A(x^2, \Delta) : \Delta \text{ διαμέριση του } [0, 1]\}$$

και προφανώς ισχύει

$$\underline{\int_0^1} x^2 dx \le E \le \overline{\int_0^1} x^2 dx .$$

Θα δείξουμε ότι

$$\underline{\int_0^1} x^2 dx = \overline{\int_0^1} x^2 dx$$

και αυτήν την κοινή τιμή την γράφουμε $\int_0^1 x^2 dx$ και θα την ονομάσουμε *ολοκλήρωμα Riemann* της συνάρτησης $y = x^2$ στο διάστημα [0, 1].

Για οποιαδήποτε Δ διαμέριση του $[0, 1]$ έχουμε

$$0 \le \overline{\int_0^1} x^2 dx - \underline{\int_0^1} x^2 dx \le A(x^2, \Delta) - K(x^2, \Delta) .$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι: για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε Δ διαμέριση του $[0, 1]$ τέτοια ώστε

$$A(x^2, \Delta) - K(x^2, \Delta) < \varepsilon .$$

Εκλέγουμε τη διαμέριση του διαστήματος $[0, 1]$

$$\Delta_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1\right\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

και έχουμε

$$K(x^2, \varDelta_n) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right)\frac{k^2}{n^2} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}k^2 \ ,$$

$$A(x^2, \varDelta_n) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right)\frac{(k+1)^2}{n^2} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2 \ .$$

Επομένως, ισχύει

$$A(x^2, \varDelta_n) - K(x^2, \varDelta_n) = \frac{1}{n^3}\cdot n^2 = \frac{1}{n}$$

οπότε, αρκεί να εκλέξουμε $n > \frac{1}{\varepsilon}$ για να έχουμε

$$A(x^2, \varDelta_n) - K(x^2, \varDelta_n) = \frac{1}{n} < \varepsilon \ .$$

Επειδή ισχύει ο τύπος

$$\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1}{6}$$

προκύπτουν οι ανισότητες

$$\frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n^2}{n^3} < E < \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{n} < E < \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right).$$

Οι ακολουθίες αριστερά και δεξιά του E, όταν το $n \to +\infty$, συγκλίνουν στο $\frac{1}{3}$, άρα είναι $E = \frac{1}{3}$.

Ο ορισμός του Darboux

Θεωρούμε το κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Ένα πεπερασμένο σύνολο $\varDelta = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ τέτοιο ώστε

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = \beta$$

λέγεται *διαμέριση* του $[\alpha, \beta]$.

Ο αριθμός $\quad d = max\{|x_{k+1} - x_k|, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1\}$

λέγεται *λεπτότητα* της διαμέρισης Δ.

Λέμε μια Δ_2 διαμέριση *διαδοχική* της Δ_1 διαμέρισης, όταν η Δ_2 διαμέριση περιέχει όλα τα σημεία της Δ_1 διαμέρισης και επιπλέον μερικά ακόμη σημεία.

Προφανώς, για τις αντίστοιχες λεπτότητες των διαμερίσεων Δ_1 και Δ_2, ισχύει η ανισότητα $d_2 \le d_1$.

Έχουμε λοιπόν τη χρήσιμη ιδιότητα:

Αν Δ_1, Δ_2 είναι δύο διαμερίσεις του διαστήματος $[\alpha, \beta]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τότε το σύνολο των σημείων $\Delta_1 \cup \Delta_2$ είναι μια διαδοχική διαμέριση και της Δ_1 και της Δ_2 διαμέρισης.

Το σύνολο των διαμερίσεων του διαστήματος $[\alpha, \beta]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ θα το συμβολίζουμε με $D([\alpha, \beta])$.

Μας ενδιαφέρουν ακολουθίες διαμερίσεων (Δ_n), $\Delta_n \in D([\alpha, \beta])$, $n \in \mathbb{N}$ διαδοχικές τέτοιες ώστε η ακολουθία των αντίστοιχων λεπτοτήτων τους (d_n), $n \in \mathbb{N}$ να είναι μηδενική ακολουθία, δηλαδή

$$d_n = max\{|x_{k+1} - x_k|; k = 0, 1, 2, \ldots, n-1\} \to 0, \quad \text{όταν} \quad n \to +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} d_n = 0.$$

Θεωρούμε τη *φραγμένη* συνάρτηση f που ορίζεται στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[\alpha, \beta]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Αν $\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ είναι διαμέριση του $[\alpha, \beta]$, τότε σε καθένα από τα υποδιαστήματα

$$[x_0, x_1], \ [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

η συνάρτηση f είναι φραγμένη και προς τα κάτω και προς τα πάνω, δηλαδή υπάρχουν $\lambda_k, \mu_k \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\lambda_k \le f(x) \le \mu_k, \quad \forall x \in [x_k, x_{k+1}]$$

για $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Συμβολίζουμε με

$$m_k = inf\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\}$$

$$M_k = sup\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

το *infimum* και το *supremum* των τιμών $f(x)$ στα διαστήματα $[x_k, x_{k+1}]$ ([6], Εισαγωγή, §3).

Για κάθε διαμέριση Δ του $[\alpha, \beta]$ ορίζουμε το κάτω και το πάνω άθροισμα *Darboux* της f με τους τύπους:

$$\text{κάτω άθροισμα Darboux} \quad K(f, \Delta) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) m_k \; ,$$

$$\text{πάνω άθροισμα Darboux} \quad A(f, \Delta) = \sum_{k=0}^{k-1} (x_{k+1} - x_k) M_k \; .$$

Προφανώς ισχύει η σχέση

$$K(f, \Delta) \le A(f, \Delta) \, , \quad \forall \, \Delta \in D([\alpha, \beta]) \, .$$

Σημείωση

Όλα τα αθροίσματα *Darboux* $K(f, \Delta)$ και $A(f, \Delta)$ που αντιστοιχούν στις Δ διαμερίσεις του διαστήματος $[\alpha, \beta]$ βρίσκονται μεταξύ των αριθμών $m(\beta - \alpha)$ και $M(\beta - \alpha)$, όπου

$$M = \sup\{f(x), \; x \in [\alpha, \beta]\} \, ,$$
$$m = \inf\{f(x), \; x \in [\alpha, \beta]\} \, .$$

Δηλαδή ισχύει

$$m(\beta - \alpha) \le K(f, \Delta) \le A(f, \Delta) \le M(\beta - \alpha) \, ,$$

για κάθε Δ διαμέριση του διαστήματος $[\alpha, \beta]$. ■

ΠΡΟΤΑΣΗ 1: *Αν* $\Delta_1, \; \Delta_2 \in D([\alpha, \beta])$ *τότε ισχύει*

$$K(f, \Delta_1) \le A(f, \Delta_2) \, .$$

Απόδειξη

Αρκεί να δείξουμε ότι: αν η Δ_2 είναι διαδοχική διαμέριση της Δ_1 τότε συνεπάγεται

$$K(f, \Delta_1) \le K(f, \Delta_2)$$

και $$A(f, \Delta_2) \le A(f, \Delta_1)$$

Πράγματι, τότε έχουμε

$$K(f,\Delta_1) \le K(f,\Delta_1 \cup \Delta_2) \le A(f,\Delta_1 \cup \Delta_2) \le A(f,\Delta_2)\,.$$

Αφού υποθέσαμε ότι η Δ_2 είναι διαδοχική της Δ_1 διαμέρισης σε κάθε διάστημα $[x_k, x_{k+1}]$, η Δ_2 διαμέριση έχει τα επιπλέον σημεία

$$x_k = y_{j_0} < y_{j_1} < \ldots < y_{j_\lambda} = x_{k+1}$$

σε πλήθος $\lambda+1$ (που εξαρτάται από k).

Άρα, στον τύπο του $K(f,\Delta_2)$, εκεί όπου το τύπος του $K(f,\Delta_1)$ είχε τον όρο $(x_{k+1}-x_k)m_k$, τώρα έχουμε το άθροισμα

$$\sum_{i=0}^{\lambda}[y_{j_{i+1}} - y_{j_i}]m_{j_i}\ ,$$

όπου

$$m_{j_i} = inf\{f(x) : x \in [y_{j_i}, y_{j_{i+1}}]\}\,.$$

Επειδή είναι $[y_{j_i}, y_{j_{i+1}}] \subset [x_k, x_{k+1}]$ ισχύει $m_k \le m_{j_i}$ και έχουμε

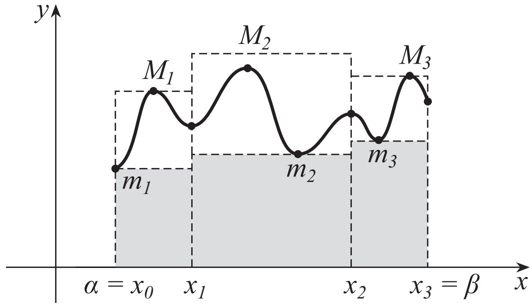
$$(x_{k+1}-x_k)m_k = \sum_{i=0}^{\lambda}(y_{j_{i+1}} - y_{j_i})m_k \le \sum_{i=0}^{\lambda}(y_{j_{i+1}} - y_{j_i})m_{j_i}\ .$$

Αν αυτές οι ανισότητες επαναληφθούν για κάθε $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ και αθροιστούν θα προκύψει η πρώτη ανισότητα.

Για τη δεύτερη ανισότητα εργαζόμαστε ανάλογα. ■

Γεωμετρική ερμηνεία

Η γεωμετρική ερμηνεία όσων είπαμε γίνεται άμεσα κατανοητή αν θεωρήσουμε επιπλέον ότι ισχύει $f(x) \ge 0$, $\forall\, x \in [a, \beta]$ και δούμε το πρόβλημα του εμβαδού κάτω από το γράφημα της συνάρτησης f.



Το

$$K(f,\Delta)=(x_1-x_0)m_1+(x_2-x_1)m_2+(x_3-x_2)m_3$$

είναι το εμβαδόν μιας ένωσης ορθογωνίων που «προσεγγίζει από κάτω» το ζητούμενο εμβαδό και το

$$A(f,\Delta)=(x_1-x_0)M_1+(x_2-x_1)M_2+(x_3-x_2)M_3$$

είναι το εμβαδόν μιας ένωσης ορθογωνίων που «προσεγγίζει από πάνω» το ζητούμενο εμβαδό κάτω από το γράφημα της συνάρτησης *f*. ■

Το σύνολο $\{K(f,\Delta),\ \Delta\in D([a,\beta])\}$ είναι προφανώς μη κενό και φραγμένο προς τα πάνω (τα $A(f,\Delta),\ \Delta\in D([\alpha,\beta])$ είναι πάνω φράγματά του), οπότε υπάρχει το *supremum* του ([6], Εισαγωγή §3).

Γράφουμε

$$\underline{\int_a^\beta} f(x)dx=\sup\{K(f,\Delta),\ \Delta\in D([a,\beta])\}$$

και το λέμε *κάτω ολοκλήρωμα Darboux* της συνάρτησης f στο $[a,\beta]$.

Το σύνολο $\{A(f,\Delta),\ \Delta\in D([a,\beta])\}$ είναι προφανώς μη κενό και φραγμένο προς τα κάτω (τα $K(f,\Delta),\ \Delta\in D([a,\beta])$ είναι κάτω φράγματά του), οπότε υπάρχει το *infimum* του ([6], Εισαγωγή, §3).

Γράφουμε

$$\overline{\int_a^\beta} f(x)dx=\inf\{A(f,\Delta),\ \Delta\in D([a,\beta])\}$$

και το λέμε *πάνω ολοκλήρωμα Darboux* της συνάρτησης f στο $[a,\beta]$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 (Darboux): *Μια φραγμένη συνάρτηση f, ορισμένη σ' ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα* $[a,\beta]$, *λέγεται* Riemann ολοκληρώσιμη *στο* $[a,\beta]$ *όταν ισχύει*

$$\underline{\int_a^\beta} f(x)dx=\overline{\int_a^\beta} f(x)dx\,.$$

Η κοινή τιμή λέγεται ολοκλήρωμα Riemann *της* f *και συμβολίζεται με*

$$\int_a^\beta f(x)dx \quad \text{ή} \quad \int_a^\beta f\,.$$

Ο ορισμός που δώσαμε και όλα όσα αναφέραμε προηγουμένως δίνουν άμεσα μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για την *Riemann* ολοκληρωσιμότητα μιας

φραγμένης συνάρτησης *f*.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1: *Μια φραγμένη συνάρτηση f ορισμένη στο κλειστό και φραγμένο διάστημα [α, β] είναι Riemann ολοκληρώσιμη:*

1) αν και μόνον αν, για κάθε ε>0 υπάρχει διαμέριση Δ του [α, β] τέτοια ώστε

$$A(f,\Delta)-K(f,\Delta)<\varepsilon.$$

ή 2) για κάθε ε>0, υπάρχει δ>0 τέτοιο ώστε

$$\forall\, \Delta\in D([\alpha,\beta]),\quad \text{με}\quad d<\delta \;\Rightarrow\; A(f,\Delta)-K(f,\Delta)<\varepsilon\,,$$

όπου d η λεπτότητα της Δ διαμέρισης του [α, β].

Απόδειξη

1) Υποθέτουμε ότι η f είναι *Riemann* ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$.
Θα έχουμε λοιπόν

$$\underline{\int_\alpha^\beta} f(x)dx=\overline{\int_\alpha^\beta} f(x)dx$$

και από τους ορισμούς του κάτω και του πάνω ολοκληρώματος *Darboux* προκύπτει η σχέση: για $\varepsilon>0$ ισχύει

$$A(f,\Delta_2)-\frac{\varepsilon}{2}<\overline{\int_\alpha^\beta} f(x)dx=\underline{\int_\alpha^\beta} f(x)dx<K(f,\Delta_1)+\frac{\varepsilon}{2}$$

για κάποιες Δ_1, Δ_2 διαμερίσεις του $[\alpha, \beta]$ (γιατί;).

Θεωρούμε τη διαμέριση $\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2$ του $[\alpha, \beta]$ η οποία είναι διαδοχική και της Δ_1 και της Δ_2.

Σύμφωνα λοιπόν με την προηγούμενη Πρόταση 1 ισχύουν οι ανισότητες

$$A(f,\Delta)\le A(f,\Delta_2),$$
$$K(f,\Delta_1)\le K(f,\Delta).$$

Επομένως, η παραπάνω ανισότητα γίνεται

$$A(f,\Delta)-\frac{\varepsilon}{2}<K(f,\Delta)+\frac{\varepsilon}{2}$$
$$\Rightarrow\; A(f,\Delta)-K(f,\Delta)<\varepsilon\,.$$

Αντίστροφα, αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει διαμέριση $\Delta \in D([\alpha, \beta])$ τέτοια ώστε

$$A(f, \Delta) - K(f, \Delta) < \varepsilon$$

τότε οι προφανείς ανισότητες

$$K(f, \Delta) \leq \underline{\int}_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq \overline{\int}_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq A(f, \Delta)$$

συνεπάγονται

$$0 \leq \overline{\int}_{\alpha}^{\beta} f(x)dx - \underline{\int}_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq A(f, \Delta) - K(f, \Delta) < \varepsilon \,,$$

απ' όπου προκύπτει η ισότητα

$$\underline{\int}_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \overline{\int}_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \,.$$

Άρα, η f είναι *Riemann* ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$.

2) Υποθέτουμε ότι η f είναι *Riemann* ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$.

Επομένως, υπάρχει διαμέριση Δ_1 του $[\alpha, \beta]$ τέτοια ώστε

$$A(f, \Delta_1) < I + \frac{\varepsilon}{4} \,,$$

και υπάρχει διαμέριση Δ_2 του $[\alpha, \beta]$ τέτοια ώστε

$$K(f, \Delta_2) > I - \frac{\varepsilon}{4}$$

όπου $\quad I = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \,.$

Έστω τυχαία διαμέριση Δ του $[\alpha, \beta]$ και Δ_0 κοινή διαδοχική διαμέριση των Δ και Δ_1.

Υπάρχουν διαστήματα $[x_k, x_{k+1}]$ της Δ διαμέρισης που έχουν στο εσωτερικό τους σημεία της Δ_1 π.χ. τα δύο σημεία y_1, y_2.

Θεωρούμε τα μήκη των διαστημάτων

$$\lambda = x_{k+1} - x_k \;, \quad \lambda_1 = y_1 - x_k \;, \quad \lambda_2 = y_2 - y_1 \;, \quad \lambda_3 = x_{k+1} - y_2$$

και τα *supremum* σ' αυτά

$$M_k = sup\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\},$$
$$M_1 = sup\{f(x) : x \in [x_k, y_1]\} \quad ,$$
$$M_2 = sup\{f(x) : x \in [y_1, y_2]\} \quad ,$$
$$M_3 = sup\{f(x) : x \in [y_2, x_{k+1}]\}.$$

Δείξτε ότι το M_k συμπίπτει μ' ένα από τα M_1, M_2, M_3.

Έστω ότι $M_k = M_2$ και θέτουμε $M_0 = min\{M_1, M_3\}$.

Επειδή ισχύει $\lambda - \lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_3$ έχουμε

$$M_k\lambda - (M_1\lambda_1 + M_2\lambda_2 + M_3\lambda_3) = M_k(\lambda - \lambda_2) - (M_1\lambda_1 + M_3\lambda_3)$$
$$\leq M_k(\lambda - \lambda_2) - M_0(\lambda_1 + \lambda_3) = (\lambda_1 + \lambda_3)(M_k - M_0) \leq d_\Delta(M_k - M_0).$$

Στο σχηματισμό του $A(f, \Delta)$ υπάρχει ο όρος $M_k\lambda$ και στο σχηματισμό $A(f, \Delta_0)$, αντί του $M_k\lambda$, υπάρχει το άθροισμα

$$M_1\lambda_1 + M_2\lambda_2 + M_3\lambda_3.$$

Σχηματίζουμε τη διαφορά

$$A(f, \Delta) - A(f, \Delta_0).$$

Για κάθε διάστημα της διαμέρισης Δ, που δεν έχει σημεία της διαμέρισης Δ_1, ο προσθετέος $M_k\lambda$ υπάρχει και στα δύο αθροίσματα $A(f, \Delta)$, $A(f, \Delta_0)$ και κατά την αφαίρεση απαλείφεται.

Έχουμε λοιπόν

$$O \leq A(f, \Delta) - A(f, \Delta_0) \leq \sum_{i=1}^{K_\Delta} d_\Delta(M_i - M_{i0})$$
$$\leq \sum_{i=1}^{K_\Delta} d_\Delta[sup\, f(x) - inf\, f(x), x \in [\alpha, \beta]],$$

όπου K_Δ ο αριθμός των διαστημάτων της Δ διαμέρισης που περιέχουν στο εσωτερικό τους σημεία της Δ_1.

Όταν η λεπτότητα d_Δ της Δ διαμέρισης του $[\alpha, \beta]$ μικραίνει, ο αριθμός K_Δ πλησιάζει το πλήθος των σημείων της Δ_1 διαμέρισης, παραμένοντας βέβαια ένας θετικός αριθμός.

Επομένως, προκύπτει ότι

$$\sum_{i=1}^{K_\Delta} d_\Delta\, [sup\, f(x) - inf(f(x), \quad x \in [\alpha, \beta]] = [M_{max} - M_{min}] \sum_{i=1}^{K_\Delta} d_\Delta\ ,$$

όπου $\quad M_{max} = sup\{f(x),\ x \in [\alpha, \beta]\}, \quad M_{min} = inf\{f(x),\ x \in [\alpha, \beta]\},$

οπότε $\quad A(f, \Delta) - A(f, \Delta_0) \to 0, \quad$ όταν $\quad d_\Delta \to 0$.

ή ισοδύναμα, αν πάρουμε τη λεπτότητα $d_\Delta < \delta,\ \delta > 0$ κατάλληλο, θα έχουμε

$$A(f, \Delta) - A(f, \Delta_0) < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{1}$$

Επειδή η Δ_0 είναι διαδοχική διαμέριση της Δ_1 ισχύει

$$K(f, \Delta_1) \le K(f, \Delta_0) \le A(f, \Delta_0) \le A(f, \Delta_1)$$

και επειδή

$$A(f, \Delta_1) < I + \frac{\varepsilon}{4},$$

προκύπτει ότι

$$A(f, \Delta_0) < I + \frac{\varepsilon}{4}. \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) συνεπάγεται ότι $\quad A(f, \Delta) - I < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ανάλογα, αποδεικνύεται ότι $K(f, \Delta) > I - \frac{\varepsilon}{2}$.

Από τις τελευταίες ανισότητες παίρνουμε

$$A(f, \Delta) - K(f, \Delta) < I + \frac{\varepsilon}{2} - I + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

που είναι η ζητούμενη ανισότητα.

Αντίστροφα, υποθέτουμε πως ισχύει η συνθήκη 2).

Επομένως, για $\varepsilon>0$ ορίζεται αριθμός $\delta>0$ τέτοιος ώστε, αν η Δ διαμέριση του $[\alpha, \beta]$ έχει λεπτότητα $d_\Delta < \delta$, να ισχύει

$$A(f, \Delta) - K(f, \Delta) < \varepsilon.$$

Αρκεί λοιπόν να κατασκευάσουμε μια τέτοια διαμέριση.

Παίρνουμε $n \in \mathbb{N}$ φυσικό αριθμό τέτοιο ώστε (Αρχιμήδεια ιδιότητα)

$$n\delta > \beta - \alpha \quad \text{(βλέπε [6], Εισαγωγή, §3)}$$

και ορίζουμε τα σημεία της Δ διαμέρισης ισαπέχοντα ανά δύο διαδοχικά.

Μ' αυτόν τον τρόπο το διάστημα $[\alpha, \beta]$ διαιρείται σε υποδιαστήματα με κοινό μήκος

$$d_{\Delta} = \frac{\beta - \alpha}{n} < \delta ,$$

οπότε ισχύει $$A(f, \Delta) - K(f, \Delta) < \varepsilon .$$

Αλλά, όπως είδαμε στην προηγούμενη περίπτωση 1), από την τελευταία ανισότητα συνεπάγεται η *Riemann* ολοκληρωσιμότητα της f στο $[\alpha, \beta]$. ■

Στη συνέχεια θα δώσουμε ένα παράδειγμα μιας φραγμένης συνάρτησης η οποία δεν είναι *Riemann* ολοκληρώσιμη.

Παράδειγμα 1

Η συνάρτηση του *Dirichlet*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \text{ ρητός αριθμός,} \\ 0, & \text{αν } x \text{ άρρητος αριθμός,} \end{cases}$$

περιορισμένη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ δεν είναι *Riemann* ολοκληρώσιμη.

➠ Πράγματι, για τυχαία διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, με

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = \beta$$

του διαστήματος $[a, \beta]$, είναι

$$M_k = sup\{f(x),\ x \in [x_k, x_{k+1}]\} = 1 ,$$

$$m_k = inf\{f(x),\ x \in [x_k, x_{k+1}]\} = 0 , \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

επειδή σε κάθε διάστημα $[x_k, x_{k+1}]$ υπάρχουν ρητοί και άρρητοι αριθμοί ([6], Εισαγωγή §5).

Έχουμε λοιπόν

$$K(f, \Delta) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \cdot 0 = (\beta - \alpha) \cdot 0 = 0 ,$$

$$A(f, \Delta) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \cdot 1 = (\beta - \alpha) 1 = \beta - \alpha$$

για κάθε Δ διαμέριση του $[\alpha, \beta]$.

Επομένως θα είναι

$$\underline{\int_{\alpha}^{\beta}} f(x)dx = sup\{K(f,\Delta),\quad \Delta\in D([\alpha,\beta])\} = 0$$

και

$$\overline{\int_{\alpha}^{\beta}} f(x)dx = inf\{A(f,\Delta),\quad \Delta\in D([\alpha,\beta])\} = \beta-\alpha\cdot$$

Άρα, για $\alpha<\beta$ έχουμε

$$\underline{\int_{\alpha}^{\beta}} f(x)dx = 0 < \beta-\alpha = \overline{\int_{\alpha}^{\beta}} f(x)dx\,,$$

δηλαδή η συνάρτηση *Dirichlet* f δεν είναι *Riemann* ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2: *Για τη φραγμένη συνάρτηση f στο $[\alpha,\beta]$ υπάρχει μια ακολουθία διαμερίσεων (Δ_n), $n\in\mathbb{N}$ του $[\alpha,\beta]$, με λεπτότητες d_n που τείνουν στο μηδέν όταν $n\to+\infty$, τέτοια ώστε*

α) $\lim\limits_{n\to+\infty} A(f,\Delta_n) = \overline{\int_{\alpha}^{\beta}} f(x)dx$, *β)* $\lim\limits_{n\to+\infty} K(f,\Delta_n) = \underline{\int_{\alpha}^{\beta}} f(x)dx$.

Απόδειξη

Σύμφωνα με την απόδειξη του Θεωρήματος 1 (περίπτωση 2)), για κάθε φυσικό αριθμό n θέτουμε $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$ και επιλέγουμε μια κατάλληλη διαμέριση Δ_n τέτοια ώστε

$$0\le \underline{\int_{\alpha}^{\beta}} f(x)dx - K(f,\Delta_n) < \frac{1}{n} \quad\text{και}\quad 0\le A(f,\Delta_n) - \overline{\int_{\alpha}^{\beta}} f(x)dx < \frac{1}{n}.$$

Επομένως, όταν το $n\to+\infty$ προκύπτουν οι ζητούμενες σχέσεις α) και β).

ΘΕΩΡΗΜΑ 2: *Η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η φραγμένη συνάρτηση f στο $[\alpha,\beta]$ Riemann ολοκληρώσιμη είναι να υπάρχει ακολουθία διαμερίσεων Δ_n, $n\in\mathbb{N}$ του διαστήματος $[\alpha,\beta]$, με λεπτότητες (d_n) που τείνουν στο μηδέν, όταν $n\to+\infty$, τέτοια ώστε*

$$\lim_{n\to+\infty} K(f,\Delta_n) = \lim_{n\to+\infty} A(f,\Delta_n).$$

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι η f είναι *Riemann* ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$.
Τότε προφανώς ισχύει (Ορισμός 1)

$$\underline{\int_{\alpha}^{\beta}} f(x)dx = \overline{\int_{\alpha}^{\beta}} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

και σύμφωνα με την Πρόταση 2 ισχύει η ζητούμενη ισότητα.

Αντίστροφα, όταν υπάρχει μια ακολουθία διαμερίσεων (Δ_n), $n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε

$$\lim_{n \to +\infty} A(f, \Delta_n) = \lim_{n \to +\infty} K(f, \Delta_n),$$

τότε ισχύει

$$\lim_{n \to +\infty} [A(f, \Delta_n) - K(f, \Delta_n)] = 0 .$$

Το τελευταίο όμως όριο σημαίνει: όταν δοθεί $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός $n_0(\varepsilon) > 0$ τέτοιος ώστε, για όλες τις Δ_n διαμερίσεις του $[\alpha, \beta]$, με $n \geq n_0$ να ισχύει

$$0 \leq A(f, \Delta_n) - K(f, \Delta_n) < \varepsilon$$

(βλέπε [6], Κεφ. 1, §1).

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 1 (περίπτωση 1)), συνεπάγεται ότι η φραγμένη συνάρτηση f στο $[\alpha, \beta]$ είναι *Riemann* ολοκληρώσιμη.

Ο ορισμός του Riemann

Θεωρούμε τη διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ του $[\alpha, \beta]$ και κάνουμε μια τυχαία επιλογή σημείων

$$\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\}$$

τέτοιων ώστε $\quad \xi_k \in [x_k, x_{k+1}], \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 .$

Σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S(f, \Delta, \Xi) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(\xi_k)$$

το οποίο λέγεται *άθροισμα του Riemann* της φραγμένης συνάρτησης f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Το άθροισμα αυτό εξαρτάται από τη διαμέριση Δ και τα επιλεγμένα σημεία

$\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$.

Πρακτικά, αν θεωρήσουμε επιπλέον ότι είναι $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$, περιμένουμε ότι: αν η λεπτότητα

$$d = max\{|x_{k+1} - x_k|,\ k = 0, 2, \dots, n-1\}$$

της Δ διαμέρισης τείνει προς το μηδέν, όταν $n \to +\infty$, τότε το άθροισμα

$$S(f, \Delta, \Xi)$$

θα τείνει στο εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από το γράφημα της f, τις ευθείες $x{=}\alpha$, $x{=}\beta$ και τον άξονα των x.

Από τον ορισμό τους τα τρία αθροίσματα ικανοποιούν τη σχέση

$$K(f, \Delta) \leq S(f, \Delta, \Xi) \leq A(f, \Delta)$$

για κάθε διαμέριση $\Delta \in D([\alpha, \beta])$.

Βέβαια, αν το άθροισμα $S(f, \Delta, \Xi)$ ήταν μια συνάρτηση της λεπτότητας d της διαμέρισης Δ θα μπορούσαμε να ορίσουμε ένα όριο της μορφής

$$\lim_{d \to 0} S(f, \Delta, \Xi),$$

αλλά το $S(f, \Delta, \Xi)$ δεν είναι τέτοια συνάρτηση.

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό το άθροισμα $S(f, \Delta, \Xi)$ εξαρτάται από τη διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ και από τους επιλεγμένους αριθμούς $\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}\}$, δηλαδή εξαρτάται από τις δύο n-άδες $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ και $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$, ενώ τα $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 (Riemann): *Μια φραγμένη συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ λέγεται ολοκληρώσιμη σ' αυτό, αν υπάρχει αριθμός I, που τον γράφουμε $I = \int_\alpha^\beta f(x)dx$, τέτοιος ώστε:*

$\forall \varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε, για κάθε διαμέριση Δ και για κάθε επιλογή σημείων Ξ, να ισχύει

$$d < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| S(f, \Delta, \Xi) - \int_\alpha^\beta f(x)dx \right| < \varepsilon$$

όπου d η λεπτότητα της διαμέρισης $\Delta \in D([\alpha, \beta])$.

Τον αριθμό $I = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ *τον ονομάζουμε* Riemann ολοκλήρωμα *της συνάρτησης* f *στο διάστημα* $[\alpha, \beta]$.

Ο ορισμός του *Riemann* υπήρξε ο πρώτος μαθηματικά ακριβής ορισμός του ολοκληρώματος. Ο ορισμός του *Riemann* και ο ορισμός του *Darboux*, που είναι εννοιολογικά απλούστερος, είναι ισοδύναμοι ορισμοί.

Αυτή η ισοδυναμία των ορισμών αποδεικνύεται στο Θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 3: *Μια φραγμένη συνάρτηση* f *στο* $[\alpha, \beta]$ *είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν ισχύει*

$$\underline{\int_{\alpha}^{\beta}} f(x)dx = \overline{\int_{\alpha}^{\beta}} f(x)dx \, .$$

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι *Riemann* ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με ολοκλήρωμα

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \, .$$

Σύμφωνα με τον ορισμό του *Riemann* θα ισχύει:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \, , \; \exists \delta > 0 : \forall\, \Delta \in D([\alpha, \beta]) \, , \quad \text{με} \quad d_{\Delta} < \delta$$

$$\Rightarrow \quad \left| S(f, \Delta, \Xi) - I \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

απ' όπου προκύπτει

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < S(f, \Delta, \Xi) < I + \frac{\varepsilon}{2} \, .$$

Τα αθροίσματα $S(f, \Delta, \Xi)$, καθώς εξαρτώνται από τα επιλεγμένα σημεία ξ_i, που μπορούν ν' αλλάζουν, σχηματίζουν ένα σύνολο S (τη διαμέριση Δ την κρατάμε σταθερή) το οποίο είναι φραγμένο.

Έχουμε λοιπόν το σύνολο

$$S = \{ S(f, \Delta, \Xi) : \Xi \quad \text{επιλεγμένα σημεία στη } \Delta \text{ διαμέριση} \}$$

και θα δείξουμε ότι ισχύει

$$K(f,\Delta)=\inf S \quad , \quad A(f,\Delta)=\sup S \, .$$

Για δοσμένο $\varepsilon>0$, από τον ορισμό του $K(f,\Delta)$ προκύπτει ότι σε κάθε διάστημα $[x_k , x_{k+1}]$ μπορεί να βρεθεί ξ_k τέτοιο ώστε

$$f(\xi_k)-m_k<\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha} \, .$$

Αλλά τότε θα είναι

$$0\le S(f,\Delta,\Xi)-K(f,\Delta)=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)(f(\xi_k)-m_k)$$

$$<\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\cdot\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}=\varepsilon \, .$$

Ανάλογα αποδεικνύεται η δεύτερη σχέση.

Επομένως, έχουμε (βλέπε ορισμό του *infimum*)

$$I-\frac{\varepsilon}{2}<S(f,\Delta,\Xi)<I+\frac{\varepsilon}{2} \;\Rightarrow\; I-\frac{\varepsilon}{2}\le K(f,\Delta)$$

$$\Rightarrow\; \left|I-K(f,\Delta)\right|\le\frac{\varepsilon}{2} \, .$$

Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 1 (περίπτωση 2)) βρίσκουμε ότι, όταν η λεπτότητα d της διαμέρισης Δ είναι μικρότερη από κατάλληλο $\delta_0>0$, τότε ισχύει

$$\left|\underline{\int_\alpha^\beta} f(x)dx-K(f,\Delta)\right|<\frac{\varepsilon}{2} \, .$$

Άρα, αν η λεπτότητα d της Δ διαμέρισης είναι μικρότερη του $\min\{\delta, \delta_0\}$ θα ισχύει

$$\left|I-\underline{\int_\alpha^\beta} f(x)dx\right|\le\left|I-K(f,\Delta)\right|+\left|K(f,\Delta)-\underline{\int_\alpha^\beta} f(x)dx\right|<\varepsilon \, .$$

Επειδή οι αριθμοί

$$I=\int_\alpha^\beta f(x)dx \qquad \text{και} \qquad \underline{\int_\alpha^\beta} f(x)dx$$

είναι δοσμένοι και η απόσταση μεταξύ τους είναι μικρότερη από οποιοδήποτε θετικό αριθμό $\varepsilon>0$, αυτοί θα πρέπει να συμπίπτουν.

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι ισχύει

$$I = \underline{\int_{\alpha}^{\beta}} f(x)dx = \overline{\int_{\alpha}^{\beta}} f(x)dx .$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ισχύει

$$I = \underline{\int_{\alpha}^{\beta}} f(x)dx = \overline{\int_{\alpha}^{\beta}} f(x)dx .$$

Θα δείξουμε ότι ο αριθμός I είναι το *Riemann* ολοκλήρωμα της συνάρτησης f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Από τους ορισμούς που δώσαμε στα προηγούμενα προκύπτει ότι

$$K(f, \Delta) \le \underline{\int_{\alpha}^{\beta}} f(x)dx \qquad \text{και} \qquad \overline{\int_{\alpha}^{\beta}} f(x)dx \le A(f, \Delta),$$

ενώ συγχρόνως ισχύει η ανισότητα

$$K(f,\Delta) \le S(f, \Delta, \Xi) \le A(f, \Delta) .$$

Από τις τρεις τελευταίες σχέσεις, εφόσον υποθέσαμε ότι

$$I = \underline{\int_{a}^{\beta}} f(x)dx = \overline{\int_{a}^{\beta}} f(x)dx ,$$

παίρνουμε

$$\left| S(f, \Delta, \Xi) - I \right| \le A(f, \Delta) - K(f, \Delta) .$$

Αλλά, εύκολα αποδεικνύεται ότι, για κάθε $\varepsilon >0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε Δ διαμέριση, με λεπτότητα $d <\delta$, να είναι

$$\overline{\int_{\alpha}^{\beta}} f(x)dx - \underline{\int_{\alpha}^{\beta}} f(x)dx \le A(f, \Delta) - K(f, \Delta) < \overline{\int_{\alpha}^{\beta}} f(x)dx - \underline{\int_{\alpha}^{\beta}} f(x)dx + \varepsilon .$$

Θα έχουμε λοιπόν εδώ

$$0 \le A(f,\Delta) - K(f, \Delta) < \varepsilon$$

και άρα, αν η λεπτότητα d της Δ διαμέρισης είναι μικρότερη του δ, τότε θα ισχύει

$$\left|S(f,\Delta,\Xi)-I\right|<\varepsilon,$$

πράγμα που σημαίνει πως η φραγμένη συνάρτηση f στο $[\alpha, \beta]$ είναι *Riemann* ολοκληρώσιμη με $I=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$. ■

ΟΡΙΣΜΟΣ 3

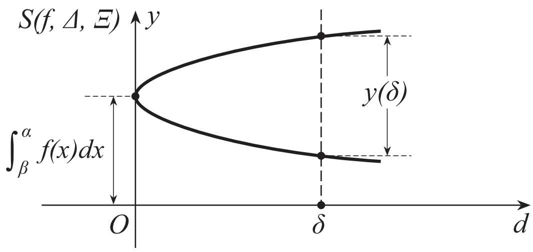
- *Αν* $\alpha=\beta$ *και η συνάρτηση* f *είναι ορισμένη στο* α, *θέτουμε*

$$\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx=0.$$

- *Αν* $\alpha>\beta$ *και η συνάρτηση* f *είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο* $[\beta, \alpha]$, *θέτουμε*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=-\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx.$$

Η διαδικασία εύρεσης του ολοκληρώματος *Riemann* δείχνεται γραφικά στο παρακάτω σχήμα.



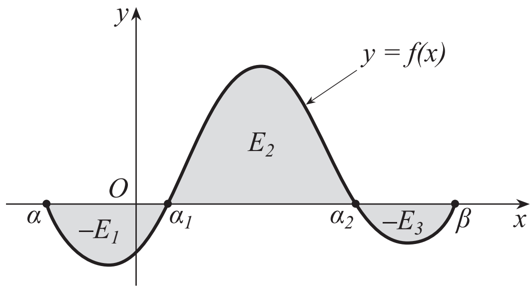
λεπτότητα διαμέρισης

Παρατηρούμε στο σχήμα ότι, όταν το ολοκλήρωμα *Riemann* υπάρχει, για δοσμένο $\delta>0$ τα αθροίσματα *Riemann* $S(f, \Delta, \Xi)$, με $\Xi=\{\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}\}$ σημεία στα διαστήματα $[x_k, x_{k+1}]$ της Δ διαμέρισης με λεπτότητα $d=\delta$, βρίσκονται στο ορισμένο διάστημα $y(\delta)$.

Όταν η λεπτότητα $d=\delta$ της Δ διαμέρισης τείνει στο μηδέν τότε τα διαστήματα $y(\delta)$ τείνουν επίσης στο μηδέν.

Γεωμετρική ερμηνεία

Έστω μια φραγμένη συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ που είναι *Riemann* ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και έχει την παρακάτω γραφική παράσταση.



Το *Riemann* ολοκλήρωμα της f στο $[\alpha, \beta]$ είναι το άθροισμα των εμβαδών $-E_1$, E_2 , $-E_3$, όπου $E_1 > 0$, $E_2 > 0$, $E_3 > 0$, δηλαδή

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = -E_1 + E_2 - E_3 \ .$$

Σημειώνουμε ότι τα εμβαδά που σχηματίζονται πάνω από τον άξονα των x (προς τα θετικά y) είναι με θετικό πρόσημο και τα εμβαδά που σχηματίζονται κάτω από τον άξονα των x (προς τα αρνητικά y) είναι με αρνητικό πρόσημο.

Εύκολα διαπιστώνεται πως ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|dx = E_1 + E_2 + E_3 \, .$$

Παράδειγμα 2

Αν η συνάρτηση f είναι *Riemann* ολοκληρώσιμη στο $[0, \alpha]$, $\alpha>0,$ τότε ισχύει

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{a}{n}\right) + f\left(\frac{2a}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{na}{n}\right) \right] = \frac{1}{a}\int_0^a f(x)dx \, .$$

➠ Θεωρούμε τη Δ_n διαμέριση του διαστήματος $[0, \alpha]$

$$\Delta_n : 0 = \frac{0a}{n} < \frac{a}{n} < \frac{2a}{n} < \ldots < \frac{na}{n} = a$$

και σχηματίζουμε το άθροισμα *Riemann* της f

$$\frac{a}{n} f\left(\frac{a}{n}\right) + \frac{a}{n} f\left(\frac{2a}{n}\right) + \ldots + \frac{a}{n} f\left(\frac{na}{n}\right) = S(f, \Delta_n, \Xi)\, ,$$

όπου ως σημεία ξ_k πήραμε τα άκρα της Δ διαμέρισης.

Όταν το $n \to +\infty$ η λεπτότητα $d_n = \dfrac{1}{n}$ της διαμέρισης Δ_n τείνει στο μηδέν, οπότε έχουμε (Θεώρημα 3): για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $d_n = \dfrac{1}{n} < \delta$, $\forall\, n \geq n_0$ να ισχύει

$$\left| \frac{a}{n} f\left(\frac{a}{n}\right) + \ldots + \frac{a}{n} f(a) - \int_0^{\alpha} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

πράγμα που αποδεικνύει το ζητούμενο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4: *Αν μια συνάρτηση f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ τότε είναι φραγμένη σ' αυτό το διάστημα.*

Απόδειξη

Υποθέτουμε πως η f δεν είναι φραγμένη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Θεωρούμε μια Δ διαμέριση του $[\alpha, \beta]$

$$\alpha = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = \beta$$

και σχηματίζουμε το αντίστοιχο άθροισμα *Riemann*

$$S(f, \Delta, \Xi) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(\xi_k)$$

με εκλογή των σημείων

$$\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\}, \quad \text{με} \quad \xi_k \in [x_k, x_{k+1}].$$

Αφού η συνάρτηση f δεν είναι φραγμένη στο $[\alpha, \beta]$ δεν θα είναι φραγμένη τουλάχιστον σ' ένα από τα διαστήματα

$$[x_k, x_{k+1}], \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

π.χ. στο διάστημα $[x_{k_0}, x_{k_0+1}]$.

Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} S(f, \Delta, \Xi) &= (x_{k_0+1} - x_{k_0}) f(\xi_{k_0}) + \sum (x_{k+1} - x_k) f(\xi_k) \\ &= (x_{k_0+1} - x_{k_0}) f(\xi_{k_0}) + A, \end{aligned}$$

όπου $A = \sum (x_{k+1} - x_k) f(\xi_k)$ και το άθροισμα $\sum$ δεν περιέχει τον όρο για $k = k_0$, δηλαδή

$$\sum = \sum_{k=0}^{n-1}, \quad k \neq k_0, \quad 0 \leq k_0 \leq n-1 .$$

Υπενθυμίζουμε πως τα σημεία $\xi_k, \ \ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ εκλέγονται αυθαίρετα μέσα στα διαστήματα $[x_k, x_{k+1}]$, αντίστοιχα.

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει

$$\left| S(f, \Delta, \Xi) \right| \geq \left| f(\xi_{k_0}) \right| (x_{k_0+1} - x_{k_0}) - |A| .$$

Επειδή όμως η συνάρτηση f δεν είναι φραγμένη στο διάστημα $[x_{k_0}, x_{k_0+1}]$, για οποιονδήποτε μεγάλο θετικό αριθμό M υπάρχει $\xi_{k_0} \in [x_{k_0}, x_{k_0+1}]$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\left| f(\xi_{k_0}) \right| > \frac{|A| + M}{x_{k_0+1} - x_{k_0}} \quad \Rightarrow \quad \left| f(\xi_{k_0}) \right| (x_{k_0+1} - x_{k_0}) - |A| > M > 0 .$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι, για οποιονδήποτε μεγάλο αριθμό $M>0$ και δοσμένη Δ διαμέριση του $[\alpha, \beta]$, υπάρχει κάποιο άθροισμα *Riemann*, με κατάλληλη επιλογή των σημείων

$$\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\}$$

και ειδικά του $\qquad \xi_{k_0} \in [x_{k_0}, x_{k_0+1}]$,

του οποίου η απόλυτη τιμή είναι μεγαλύτερη του M.

Αυτό όμως σημαίνει ότι η συνάρτηση f δεν είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

<u>Συμπέρασμα</u>

Για να μπορεί να είναι Riemann ολοκληρώσιμη μια συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ πρέπει να είναι φραγμένη στο $[\alpha, \beta]$.

Αλλ' όμως όλες οι φραγμένες συναρτήσεις δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμες π.χ. η συνάρτηση Dirichlet (Παράδειγμα 1)

$$f(x) = \begin{cases} 1 \ , & \text{αν} \quad x \in [\alpha, \beta] \quad \text{και} \ x \ \text{ρητός αριθμός}, \\ 0 \ , & \text{αν} \quad x \in [\alpha, \beta] \quad \text{και} \ x \ \text{άρρητος αριθμός}. \end{cases}$$

Οι συναρτήσεις f που δεν είναι φραγμένες στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμες σ' αυτό.

2. Θεωρήματα ύπαρξης ορισμένου ολοκληρώματος

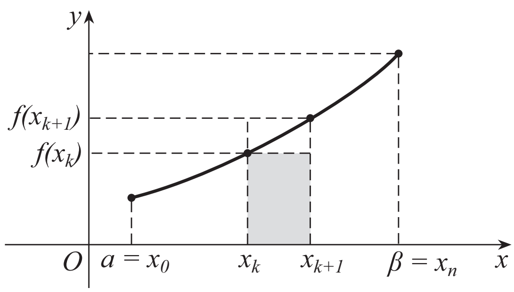
Τα κριτήρια που αναφέρονται στην προηγούμενη παράγραφο §1 θα μας βοηθήσουν να δείξουμε την *Riemann* ολοκληρωσιμότητα των μονότονων συναρτήσεων (αυξουσών ή φθινουσών) και των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Στη συνέχεια για απλότητα της έκφρασης, αντί *Riemann* ολοκληρωσιμότητα και *Riemann* ολοκλήρωμα, θα γράφουμε ολοκληρωσιμότητα και ολοκλήρωμα, αντίστοιχα.

I. Μονότονες συναρτήσεις

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι φραγμένη και αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$, οπότε είναι φανερό ότι ισχύουν (βλέπε σχήμα)

$$m_k = f(x_k)\,,\ M_k = f(x_{k+1})\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1\,.$$



Επιλέγουμε ως Δ διαμέριση του διαστήματος $[\alpha, \beta]$ αυτήν που χωρίζει το $[\alpha, \beta]$ σε n ίσα τμήματα, δηλαδή τη διαμέριση

$$\left\{\Delta = \alpha, \alpha + \frac{\beta-\alpha}{n}, \ldots, \alpha + k\frac{\beta-\alpha}{n}, \ldots, \alpha + n\frac{\beta-\alpha}{n} = \beta\right\}.$$

Μ' αυτήν την Δ διαμέριση του $[\alpha, \beta]$ έχουμε

$$A(f, \Delta) - K(f, \Delta) = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)(M_k - m_k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)(f(x_{k+1}) - f(x_k)) =$$

$$= \frac{(\beta-\alpha)}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(f(x_{k+1})-f(x_k)) =$$

$$= \frac{(\beta-\alpha)}{n}(f(\beta)-f(\alpha)).$$

Επομένως, για οποιοδήποτε $\varepsilon>0$ υπάρχει n φυσικός τέτοιος ώστε $n\varepsilon > (\beta-\alpha)(f(\beta)-f(\alpha))$ (βλέπε [6], Εισαγωγή, §3).

Άρα, για κάθε $\varepsilon>0$ επιλέγω

$$n > \frac{(\beta-\alpha)}{\varepsilon}(f(\beta)-f(\alpha))$$

και τη Δ διαμέριση, που χωρίζει το $[\alpha, \beta]$ σε n ίσα διαστήματα μήκους $\frac{(\beta-\alpha)}{n}$, για την οποία ισχύει:

$$A(f,\Delta)-K(f,\Delta)<\varepsilon .$$

Σύμφωνα λοιπόν με το Θεώρημα 1 (περίπτωση 1)) η φραγμένη και μονότονη συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$.

Παράδειγμα 1

Στο διάστημα $[0, 2]$ θεωρούμε τους όρους της ακολουθίας

$$\alpha_0 = 0\,,\quad \alpha_1 = 1\,,\quad \alpha_2 = 1+\frac{1}{2},\ldots,\alpha_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}},\ldots$$

που είναι τα μερικά αθροίσματα της γεωμετρικής προόδου

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}} = 2 = \lim_{n\to+\infty}\alpha_n .$$

➠ Ορίζουμε μια συνάρτηση f στο διάστημα $[0, 2]$ κλιμακωτή ως εξής:

$$f(x)=\begin{cases} 1\,, & \text{αν } x\in[0,1] \\ \dfrac{1}{2^n}\,, & \text{αν } x\in(\alpha_n,\alpha_{n+1}]\,,\ n=1,2,\ldots \end{cases}$$

Προφανώς, η συνάρτηση f είναι φθίνουσα στο $[0, 2]$, με σημεία ασυνέχειας τα $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\ldots$ δηλαδή σε αριθμήσιμο πλήθος.

Θεωρούμε τις Δ_n διαμερίσεις του $[0, 2]$ που περιέχουν τα σημεία

$\alpha_1, \alpha_2, \ \ldots, \alpha_n$ και άλλα ενδιάμεσα σημεία (όχι όμως δεξιά του α_n) έτσι ώστε οι λεπτότητές τους d_n να είναι $d_n = 2 - a_n$.

Αλλά είναι $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 2$, οπότε $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 2 - \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.

Τα διαστήματα $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ μήκους $\dfrac{1}{2^k}$ διαμερίζονται και με άλλα σημεία x_i και έχουμε άθροισμα μηκών

$$\sum_i \Delta x_i = \alpha_{k+1} - \alpha_k = \frac{1}{2^k},$$

με ελάχιστη τιμή της f σ' όλα αυτά το $\dfrac{1}{2^k}$.

Στο τελευταίο διάστημα $[\alpha_n, 2]$ θέτουμε την τιμή

$$1 = \max\{f(x)\ ,\ x \in [0, 2]\}.$$

Έχουμε λοιπόν

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2^k} \le K(f, \Delta_n) \le \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2^k} + (2 - \alpha_n)$$

και επειδή είναι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^2)^k} = \frac{4}{3} \quad (\text{γεωμετρική σειρά λόγου } \lambda = \frac{1}{4}),$$

συνεπάγεται ότι

$$\lim_{n\to+\infty} K(f, \Delta_n) = \int_0^2 f(x)dx = \frac{4}{3},$$

σύμφωνα με το Θεώρημα 2 της §1.

Παράδειγμα 2

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής και γνήσια αύξουσα στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν f^{-1} είναι η αντίστροφη συνάρτηση της f, να υπολογιστεί η παράσταση

$$I = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx.$$

Να γίνει γεωμετρική παρουσίαση του αποτελέσματος.

➠ Αφού η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα (είναι και συνεχής) στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ είναι ολοκληρώσιμη σ' αυτό.

Η f^{-1} είναι επίσης συνεχής και γνήσια αύξουσα στο $[f(\alpha), f(\beta)]$, άρα ολοκληρώσιμη σ' αυτό (βλέπε [6], Κεφ. 5, §5).

Θεωρούμε μια τυχαία Δ διαμερίσιμη του $[\alpha, \beta]$

$$\Delta : \alpha = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = \beta ,$$

και σχηματίζουμε το κάτω άθροισμα *Darboux*

$$K(f, \Delta) = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)m_k = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)f(x_k)$$

επειδή η f είναι γνήσια αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$ ισχύει

$$m_k = min\{f(x),\ x \in [x_k, x_{k+1}]\} = f(x_k)$$

Ανάλογα, έχουμε το πάνω άθροισμα *Darboux* για τη διαμέριση Δ_0 του διαστήματος $[f(\alpha), f(\beta)]$, που προκαλείται από την Δ διαμέριση,

$$\Delta_0 : f(\alpha) < f(x_1) < \ldots < f(x_{n-1}) < f(x_n) = f(\beta)$$

το οποίο είναι

$$A(f^{-1}, \Delta_0) = \sum_{k=0}^{n-1}(f(x_{k+1}) - f(x_k)) \cdot x_{k+1} ,$$

επειδή η f^{-1} είναι γνήσια αύξουσα στο $[f(\alpha), f(\beta)]$ ισχύει

$$M_k = max\{f^{-1}(y),\ y \in [f(x_k),\ f(x_{k+1})]\} = x_{k+1} .$$

Άρα, για τυχαία Δ διαμέριση του $[\alpha, \beta]$, η οποία προκαλεί μια επίσης τυχαία Δ_0 διαμέριση του $[f(\alpha), f(\beta)]$, έχουμε

$$K(f, \Delta) + A(f^{-1}, \Delta_0) = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)f(x_k) + \sum_{k=0}^{n-1}(f(x_{k+1}) - f(x_k))x_{k+1} =$$

$$= \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha) .$$

Όταν η λεπτότητα d της διαμέρισης Δ τείνει στο μηδέν, τότε και η λεπτότητα d_0 της διαμέρισης Δ_0 τείνει στο μηδέν, λόγω της συνέχειας της f στο $[\alpha, \beta]$ (μάλιστα ομοιόμορφης συνέχειας).

Αφού οι f και f^{-1} είναι ολοκληρώσιμες θα έχουμε

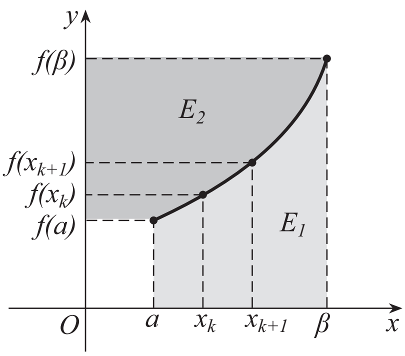
$$\lim_{d\to 0} K(f,\Delta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\,,\qquad \lim_{d_0\to 0} A(f^{-1},\Delta_0)=\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx$$

οπότε προκύπτει

$$I=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx+\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx=$$

$$=\lim_{d\to 0}[K(f,\Delta)+A(f^{-1},\Delta_0)]=$$

$$=\beta f(\beta)-\alpha f(\alpha)\,.$$



Η γεωμετρική ερμηνεία είναι ότι το I είναι το άθροισμα των εμβαδών E_1 και E_2,

$$I=E_1+E_2\,.$$

II. Συνεχείς συναρτήσεις

Μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$.

Είναι γνωστό ότι μια συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$:

i) είναι φραγμένη σ’ αυτό ([6], Κεφ. 5, §4),

ii) είναι ομοιόμορφα συνεχής σ’ αυτό ([6], Κεφ. 5, §3).

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας:

Για κάθε ε>0 υπάρχει $\delta(\varepsilon)>0$ τέτοιο ώστε

$$\forall\, x,y\in[\alpha,\beta]\,,\ \text{με}\ |x-y|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-f(y)|<\varepsilon\,.$$

Σημειώνουμε ότι οι ρητές, οι τετραγωνικές, οι υπερβολικές, οι λογαριθμικές, οι εκθετικές συναρτήσεις, καθώς και οι συνδυασμοί τους με απλές πράξεις ή συνθέσεις αυτών είναι παραγωγίσιμες στο σύνολο ορισμού τους και οι παράγωγοί τους είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Άρα, οι συνεχείς συναρτήσεις που ορίζονται στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ είναι φραγμένες και ομοιόμορφα συνεχείς σ’ αυτό, και όπως θα δείξουμε είναι ολοκληρώσιμες στο $[\alpha,\beta]$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Για να δείξουμε την ολοκληρωσιμότητα πρέπει, για κάθε $\varepsilon>0$ να βρούμε μια Δ διαμέριση του $[\alpha,\beta]$ τέτοια ώστε

$$A(f,\Delta)-K(f,\Delta)=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)(M_k-m_k)<\varepsilon,$$

σύμφωνα με το Θεώρημα 1 (περίπτωση 1)) της §1.

Επίσης είναι γνωστό ότι, επειδή η f είναι συνεχής στο $[x_k\,,x_{k+1}]$ υπάρχουν σημεία $\xi_k,\eta_k\in[x_k,x_{k+1}]$ τέτοια ώστε

$$m_k=f(\xi_k),\quad M_k=f(\eta_k)\qquad \text{([6], Κεφ. 5, §4).}$$

Έχουμε λοιπόν

$$A(f,\Delta)-K(f,\Delta)=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)(f(\eta_k)-f(\xi_k))$$

και επειδή η f είναι ομοιόμορφα συνεχής σε κάθε διάστημα $[x_k,x_{k+1}]$, $k=0,1,2,\dots,n-1$, για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta(\varepsilon)>0$ τέτοιο ώστε

αν $$|\xi_k-\eta_k|<\delta \quad \text{τότε} \quad |f(\xi_k)-f(\eta_k)|<\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}.$$

Επιλέγοντας λοιπόν τη Δ διαμέριση με λεπτότητα $d<\delta$ θα έχουμε:

$$A(f,\Delta)-K(f,\Delta)=\sum_{k=0}^{n-1}|f(\eta_k)-f(\xi_k)||x_{k+1}-x_k|<$$

$$<\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}(x_{x+1}-x_k)=\varepsilon. \qquad \blacksquare$$

Για παράδειγμα στο ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^{1}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\,dx$$

η συνάρτηση f δεν προσδιορίζεται στο σημείο $x=0$, ενώ είναι συνεχής για $x\neq 0$.

Αν όμως ορίσουμε την τιμή της

$$f(0)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{2x}=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{2}=\frac{1}{2},$$

αυτή γίνεται συνεχής στο διάστημα $[-1,1]$ και άρα ολοκληρώσιμη σ' αυτό.