ΘΩΜΑΣ ΚΥΒΕΝΤΙΔΗΣ

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στο βιβλίο αυτό παρουσιάζονται βασικά θέματα του ολοκληρωτικού λογισμού συναρτήσεων πολλών μεταβλητών και της διανυσματικής ανάλυσης .

Θεμελιώνονται οι ορισμοί του διπλού και του τριπλού ολοκληρώματος , και αναφέρονται οι βασικές ιδιότητές τους .

Περιγράφεται η μέθοδος της αλλαγής των μεταβλητών στο διπλό και στο τριπλό ολοκλήρωμα .

Αναπτύσσεται η έννοια του γενικευμένου πολλαπλού ολοκληρώματος (κυρίως του διπλού ολοκληρώματος) και δίνονται οι βασικές ιδιότητές τους.

Αναφέρονται θέματα της διανυσματικής ανάλυσης , οι τελεστές (κλίση , απόκλιση , στροφή) , τα επικαμπύλια ολοκληρώματα , τα συντηρητικά πεδία και ο τύπος του Green , τα επιεπιφάνεια ολοκληρώματα και οι τύποι του Gauss και του Stokes .

Στο βιβλίο περιέχονται αναλυτικά παραδείγματα και στο τέλος κάθε κεφαλαίου δίνονται ασκήσεις με τις απαντήσεις τους .

Στη δεύτερη έκδοση έχουν προστεθεί αρκετές θεωρητικές παρατηρήσεις , αποδείξεις ορισμένων Προτάσεων και Θεωρημάτων , πολλά παραδείγματα και μερικές επιπλέον ασκήσεις .

Θεσσαλονίκη , 2012 Θ. ΚΥΒΕΝΤΙΔΗΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή ……………………………………………………………………1

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΤΟ ΔΙΠΛΟ ΚΑΙ ΤΟ ΤΡΙΠΛΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

1. Ορισμός του διπλού ολοκληρώματος και οι ιδιότητές του ……….. 7
2. Υπολογισμός του διπλού ολοκληρώματος
   – Θεώρημα του *Fubini* ………………………………………….....31
3. Αλλαγή μεταβλητών στο διπλό ολοκλήρωμα ………………………53
4. Το τριπλό ολοκλήρωμα – Θεώρημα του *Fubini* ………………..... 68
5. Αλλαγή μεταβλητών στο τριπλό ολοκλήρωμα ………………….. 86
6. Ασκήσεις ……………………………………………………..... 102

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΤΟ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΠΟΛΛΑΠΛΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

1. Ορισμός του γενικευμένου διπλού (τριπλού) ολοκληρώματος … 111
2. Κριτήρια σύγκρισης …………………………………………...133
3. Ασκήσεις ……………………………………………….. .143

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΤΟ ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ
– ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ GREEN

1. Καμπύλη και μήκος τόξου καμπύλης ……………………………149
2. Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα αριθμητικής συνάρτησης …………... 153
3. Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα διανυσματικής συνάρτησης ……….. 161
   3.1. Διαφορικοί τελεστές (κλίση , απόκλιση , στροφή) ………… 170
   3.2. Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ανεξάρτητο της καμπύλης
   ολοκλήρωσης – Συντηρητικά πεδία ……………………….. 172
4. Θεώρημα του *Green* – Τύπος του *Green* ……………………… 186
5. Ασκήσεις ………………………………………………………208

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΤΟ ΕΠΙΕΠΙΦΑΝΕΙΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ
ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ GAUSS – ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ STOKES

1. Επιφάνειες με παραμετρική μορφή – Εμβαδόν επιφάνειας……215
2. Επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα αριθμητικής συνάρτησης ………... 230
3. Επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα διανυσματικής συνάρτησης ………241
4. Θεώρημα του *Gauss* – Τύπος του *Gauss* ………………….... 256
5. Θεώρημα του *Stokes* – Τύπος του *Stokes* ……………………278
6. Ασκήσεις ……………………………………………………301

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

I. Θεωρητικές Ασκήσεις ………………………………………... 309
II. Συνοπτική παρουσίαση βασικών εννοιών και τύπων ………… 313
III. Βασικές επιφάνειες δευτέρου βαθμού ……………………... 317
IV. Τυπολόγιο εφαρμογών ……………………………………...321

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ……………………………………………… 323
ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΡΩΝ ………………………………………… 324

Βιβλία του συγγραφέα ΘΩΜΑ ΚΥΒΕΝΤΙΔΗ

Α. *Διακριτά Μαθηματικά*

1. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΚΑΙ ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ, (σελ. 552, 2001).
2. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΠΛΗΘΥΣΜΩΝ (*Διακριτά Μοντέλα*), (σελ. 164, 2001).

Β. *Διαφορικές Εξισώσεις*

1. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, *Τόμος Πρώτος*, (σελ. 480, 1987).
2. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ, *Τόμος Δεύτερος*, (σελ. 400, 1988).
3. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, *Τόμος Τρίτος*, (σελ. 478, 1991), (*Ποιοτική Θεωρία Διαφορικών Εξισώσεων*).
4. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ (*Ασκήσεις*), (σελ. 560, 1998).
5. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, (σελ. 512, 2007).
6. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΠΛΗΘΥΣΜΩΝ (*Συνεχή Μοντέλα*), (σελ. 128, 1993).
7. ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ, (σελ. 320, 1994).
8. ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ (σελ. 384, 2009).

Γ. *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*

1. ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
   Συναρτήσεων Μιας Πραγματικής Μεταβλητής,
   (*Τεύχος Πρώτο*, σελ. 640, 2001 – *Τεύχος Δεύτερο*, σελ. 312, 2001).
2. ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
   Συναρτήσεων Μιας Πραγματικής Μεταβλητής, (σελ. 624, 2005).
3. ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
   Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών, (σελ. 336, 2012).

Δ. *Σειρά Μαθηματικών*

1. ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, Τόμος Πρώτος, (σελ. 628, 2005).
   (Άλγεβρα, Αναλυτική Γεωμετρία, Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός)
2. ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, Τόμος Δεύτερος, (σελ. 616, 2006).
   (Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών)
3. ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, Τόμος Τρίτος, (σελ. 504, 2005).
   (Διανυσματική Ανάλυση, Σειρές Fourier, Μιγαδικές Συναρτήσεις, Διαφορικές Εξισώσεις, Εξισώσεις Διαφορών)

Ε. *Τοπολογία*

1. ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ (*Ασκήσεις*), (σελ. 400, 1977).
2. ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ ΜΕΤΡΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ (σελ. 336, 2009).

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ιδέα της ολοκλήρωσης για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών είναι ίδια μ’ αυτήν των συνεχών συναρτήσεων μιας μεταβλητής ,αλλά η γενίκευσή του δεν είναι άμεση ούτε και για τις συναρτήσεις δύο μεταβλητών .

Πρέπει κανείς να έχει τη γνώση των εννοιών με ακρίβεια και όχι απλώς να γνωρίζει τις τεχνικές της ολοκλήρωσής τους .

Πρώτα απ’ όλα πρέπει να γνωρίζει την έννοια του απλού ολοκληρώματος *Riemann :*

Η συνάρτηση $f:[\alpha , \beta] \to \mathbb{R}$, αν είναι φραγμένη και συνεχής στο $[\alpha , \beta]$, εκτός ενός υποσυνόλου $B \subset [\alpha , \beta]$ το οποίο είναι *μηδενικού μέτρου Lebesgue* , τότε υπάρχει το απλό ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$.

Τα πεπερασμένου ή αριθμήσιμου πλήθους σημεία ασυνέχειας B αποτελούν σύνολα μηδενικού μέτρου *Lebesgue (* [3] , Κεφ. 1 , & 2) .

Κάθε φραγμένη συνάρτηση f στο $[\alpha , \beta]$ δεν είναι ολοκληρώσιμη .

Π.χ. η συνάρτηση *Dirichlet*

$$f(x) = \begin{cases} 1 \ , & \text{αν} \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0 ,1] \ \text{ρητός} \\ 0 \ , & \text{αν} \quad x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap [0 ,1] \ \text{άρρητος} \end{cases}$$

δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$.

Παρατηρείστε πως η συνάρτηση του *Dirichlet* είναι ασυνεχής σ’ όλο το $[0,1]$ το οποίο δεν είναι μηδενικού μέτρου *Lebesgue* .

Ακόμη , η έννοια του αορίστου ολοκληρώματος πρέπει να είναι ακριβής και νάχουμε υπόψη πως το αόριστο ολοκλήρωμα

$$F(x) + c \quad , \quad c \quad \text{αυθαίρετη σταθερή}$$

αναφέρεται σε κάποιο διάστημα $[\alpha , \beta]$ (δεν ορίζεται στο πουθενά), όπου και είναι *συνεχής* συνάρτηση .

Π.χ. να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int |\sigma\upsilon\nu\, x|\, dx$.

Πρώτον πρέπει να ορισθεί διάστημα $[\alpha, \beta]$ στο οποίο θ' αναφέρεται το αόριστο ολοκλήρωμα .

Αν πάρουμε το διάστημα $[0, 2\pi]$ θα έχουμε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int |\sigma\upsilon\nu\, x|\, dx \quad \text{στο διάστημα} \quad [0, 2\pi].$$

Η συνάρτηση $|\sigma\upsilon\nu x|$ στο ολοκλήρωμα είναι :

$$|\sigma\upsilon\nu x| = \sigma\upsilon\nu x \quad , \quad \text{αν} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] ,$$

$$|\sigma\upsilon\nu x| = -\sigma\upsilon\nu x \quad , \quad \text{αν} \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] ,$$

$$|\sigma\upsilon\nu x| = -\sigma\upsilon\nu x \quad , \quad \text{αν} \quad x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] ,$$

$$|\sigma\upsilon\nu x| = \sigma\upsilon\nu x \quad , \quad \text{αν} \quad x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] ,$$

οπότε έχουμε τ' αντίστοιχα αόριστα ολοκληρώματα

$$\int |\sigma\upsilon\nu\, x|\, dx = \int \sigma\upsilon\nu x\, dx = \eta\mu x + c_1 \quad , \quad \text{αν} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] ,$$

$$\int |\sigma\upsilon\nu\, x|\, dx = -\int \sigma\upsilon\nu x\, dx = -\eta\mu x + c_2 \quad , \quad \text{αν} \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] ,$$

$$\int |\sigma\upsilon\nu\, x|\, dx = -\int \sigma\upsilon\nu x\, dx = -\eta\mu x + c_3 \quad , \quad \text{αν} \quad x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] ,$$

$$\int |\sigma\upsilon\nu\, x|\, dx = \int \sigma\upsilon\nu x\, dx = \eta\mu x + c_4 \quad , \quad \text{αν} \quad x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] ,$$

όπου c_1 , c_2 , c_3 , c_4 είναι αυθαίρετες σταθερές .

Η συνάρτηση $f(x) = |\sigma\upsilon\nu x|$, $x \in [0, 2\pi]$ είναι συνεχής , άρα υπάρχει το αόριστο ολοκλήρωμά της στο διάστημα $[0, 2\pi]$ με *μία αυθαίρετη σταθερή* ([3] , Κεφ.2 , & 2) .

Η απάντηση

$$\int |\sigma\upsilon\nu\, x|\, dx = \left.\begin{cases} \eta\mu x + c \quad , & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ -\eta\mu x + c \quad , & x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \\ \eta\mu x + c \quad , & x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \end{cases}\right\} = F(x) + c ,$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή , δεν είναι σωστή .

Γνωρίζουμε ότι το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x)+c$ πρέπει να είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0\,,\,2\pi]$, αλλά παραπάνω έχουμε

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\eta\mu x + c) \neq \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(-\eta\mu x + c) \;\Rightarrow\; 1 + c \neq -1 + c$$
$$\Rightarrow\; 1 \neq -1$$

και το ίδιο συμβαίνει στο σημείο $\dfrac{3\pi}{2}$.

Άρα , το παραπάνω αόριστο ολοκλήρωμα

$$F(x)+c = \begin{cases} \eta\mu x + c \;, & x\in\left[0\,,\dfrac{\pi}{2}\right] \;\acute{\eta}\; x\in\left[\dfrac{3\pi}{2}\,,2\pi\right] \\ -\eta\mu x + c \;, & x\in\left[\dfrac{\pi}{2}\,,\dfrac{3\pi}{2}\right] \end{cases}$$

δεν είναι συνεχές στα σημεία $\dfrac{\pi}{2}$ και $\dfrac{3\pi}{2}$, οπότε η απάντηση είναι λάθος .

Ποιά όμως είναι η σωστή απάντηση ;

Έχουμε :

$$\int |\sigma\upsilon\nu\, x|\,dx = \begin{cases} \eta\mu x + c_1 \;, & x\in\left[0\,,\dfrac{\pi}{2}\right] \\ -\eta\mu x + c_2 \;, & x\in\left[\dfrac{\pi}{2}\,,\dfrac{3\pi}{2}\right] \\ \eta\mu x + c_3 \;, & x\in\left[\dfrac{3\pi}{2}\,,2\pi\right] \end{cases}$$

και πρέπει :

- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\eta\mu x + c_1) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(-\eta\mu x + c_2) \Rightarrow 1 + c_1 = -1 + c_2 \Rightarrow c_2 = 2 + c_1$,

- $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}^-}(-\eta\mu x + 2 + c_1) = \lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}^+}(\eta\mu x + c_3) \Rightarrow 1+2+c_1 = -1 + c_3 \Rightarrow c_3 = 4 + c_1$.

Επομένως , η σωστή απάντηση είναι

$$\int |\sigma\upsilon\nu\, x|\,dx = \begin{cases} \eta\mu x + c \;, & x\in\left[0\,,\dfrac{\pi}{2}\right] \\ -\eta\mu x + 2 + c \;, & x\in\left[\dfrac{\pi}{2}\,,\dfrac{3\pi}{2}\right] \\ \eta\mu x + 4 + c \;, & x\in\left[\dfrac{3\pi}{2}\,,2\pi\right] \end{cases}$$

όπου c αυθαίρετη σταθερή .

Υπολογίστε ανάλογα το $\displaystyle\int |\eta\mu\, x|\,dx$ στο διάστημα $[-2\pi\,,\,2\pi\,]$.

Τέλος , το περιεχόμενο του βιβλίου περιλαμβάνει τις ενότητες :

Α. Το διπλό και το τριπλό ολοκλήρωμα .

Β. Αλλαγή μεταβλητών στο ολοκλήρωμα .

Γ. Γενικευμένα διπλά (και τριπλά) ολοκληρώματα .

Δ. Επικαμπύλια ολοκληρώματα – Τύπος του Green .

Ε. Επιεπιφάνεια ολοκληρώματα – Τύπος του Gauss
– Τύπος του Stokes.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΤΟ ΔΙΠΛΟ ΚΑΙ ΤΟ ΤΡΙΠΛΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

1. Ορισμός του διπλού ολοκληρώματος και οι ιδιότητές του .. 7
2. Υπολογισμός του διπλού ολοκληρώματος – Θεώρημα του *Fubini* ……………………………………31
3. Αλλαγή μεταβλητών στο διπλό ολοκλήρωμα …………… 53
4. Το τριπλό ολοκλήρωμα – Θεώρημα του *Fubini* ……… .. 68
5. Αλλαγή μεταβλητών στο τριπλό ολοκλήρωμα ………….. 86
6. Ασκήσεις ……………………………………………………102

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΤΟ ΔΙΠΛΟ ΚΑΙ ΤΟ ΤΡΙΠΛΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

1. *Ορισμός του διπλού ολοκληρώματος και οι ιδιότητές του*

Για να κάνουμε μια γεωμετρικά κατανοητή εισαγωγή στο διπλό ολοκλήρωμα θεωρούμε μία συνάρτηση δύο μεταβλητών

$$f : \Pi \to \mathbb{R} \quad , \quad \text{όπου} \quad \Pi = [\alpha , \beta] \times [\gamma , \delta]$$

που είναι *συνεχής* και *θετική* στο ορθογώνιο Π.

Πώς υπολογίζεται ο όγκος V που βρίσκεται μεταξύ του ορθογωνίου Π και του γραφήματος (επιφάνεια) της f;

Το ζητούμενο όγκο V τον συμβολίζουμε

$$V = \iint_{\Pi} f(x , y)\, dx\, dy$$

και τον λέμε *διπλό ολοκλήρωμα* της πραγματικής συνάρτησης f στο ορθογώνιο Π.

Το πρόβλημα λοιπόν είναι :

i) να ορίσουμε την έννοια του διπλού ολοκληρώματος ,

ii) να υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα της f στο Π .

i) Εργαζόμαστε , όπως στις συναρτήσεις μιας μεταβλητής , με τα αθροίσματα *Riemann* .

Θεωρούμε δύο διαμερίσεις , μία του διαστήματος $[\alpha , \beta]$

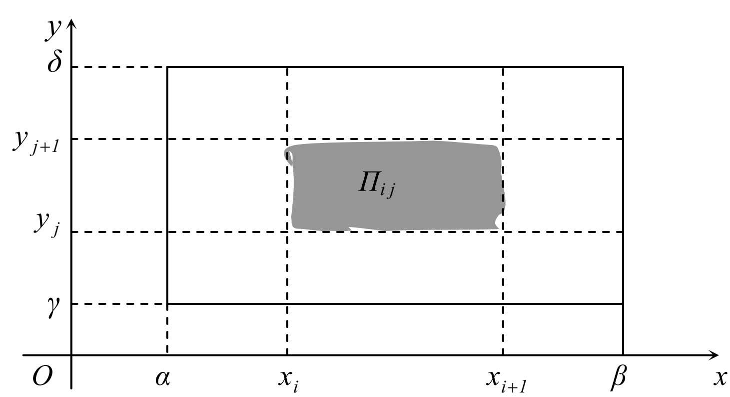
$$\Delta_1 : \ \alpha = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{n-1} < x_n = \beta$$

και μία του διαστήματος $[\gamma , \delta]$

$$\Delta_2 : \ \gamma = y_0 < y_1 < y_2 \ldots < y_{k-1} < y_k = \delta$$

που δίνουν μια διαμέριση Δ του ορθογωνίου $\Pi = [\alpha , \beta] \times [\gamma , \delta]$ με τα ορθογώνια

$$\Pi_{i\,j} = [\, x_i , x_{i+1} \,] \times [\, y_j , y_{j+1} \,] \quad , \ i = 0,1,2,\ldots,n-1 \quad , \quad j = 0,1,2,\ldots,k-1.$$



Για τη διαμέριση Δ του ορθογωνίου $\Pi = [\alpha , \beta] \times [\gamma , \delta]$ σχηματίζουμε *τα αθροίσματα Riemann* της συνάρτησης f

$$S(f, \Delta , \Xi) = \sum_{\substack{0 \le i \le n-1 \\ 0 \le j \le k-1}} f(\xi_i , \eta_j) E_{ij} \quad ,$$

όπου $\Xi = \{(\xi_i , \eta_j) : (\xi_i , \eta_j) \in \Pi_{ij} \ , \ i = 0,1,2,\ldots,n-1 \ , \ j = 0,1,2,\ldots,k-1\}$

και $E_{ij} = (x_{i+1} - x_i) \times (y_{j+1} - y_j)$ το εμβαδόν του Π_{ij} .

Καθώς *η λεπτότητα* της διαμέρισης Δ

$d = \max\limits_{i,j} d_{ij}$, όπου d_{ij} = διάμετρος του Π_{ij} (μήκος της διαγωνίου)

τείνει στο μηδέν , αν *τα αθροίσματα Riemann* $S(f, \Delta , \Xi)$ έχουν *“ όριο”* στο $\mathbb{R}$, τότε ορίζεται *το διπλό ολοκλήρωμα Riemann*

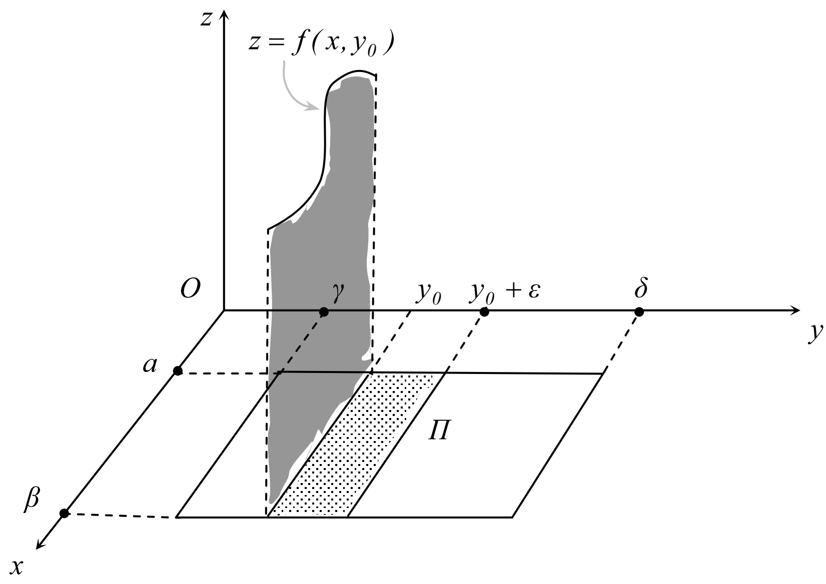
$$\iint_{\Pi} f(x , y)\, dx\, dy$$

της συνάρτησης f στο ορθογώνιο Π .

Θέτουμε “ όριο” γιατί δεν έχουμε μόνον τη λεπτότητα της διαμέρισης που τείνει στο μηδέν , αλλά και την επιλογή των σημείων οπότε δεν είναι μια καθαρή περίπτωση ορίου .

ii) *Υπολογισμός του διπλού ολοκληρώματος*

Αν σταθεροποιήσουμε το $y = y_0 \in [\gamma , \delta]$ τότε έχουμε το απλό ολοκλήρωμα *Riemann* $\int_{\alpha}^{\beta} f(x , y_0)\, dx$ που δίνει το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ του γραφήματος (καμπύλη) της συνάρτησης $z = f(x , y_0)$, $x \in [\alpha , \beta]$ και του διαστήματος $[\alpha , \beta]$.



Θεωρούμε την λωρίδα $[\alpha\,,\beta]\times[\,y_0\,,y_0+\varepsilon\,]$, $\varepsilon>0$ πολύ μικρό , του ορθογωνίου Π και υπολογίζουμε προσεγγιστικά τον όγκο V_ε πάνω από την λωρίδα (θεωρώντας την επιφάνεια πάνω απ' αυτήν να σχηματίζεται με μεταφορά της καμπύλης $z=f(x\,,y_0\,)\,,x\in[\alpha\,,\beta]$,για τα $y\in[\,y_0\,,y_0+\varepsilon]$).

Αν θέσουμε

$$F(\,y_0\,)=\int_\alpha^\beta f(x\,,y_0\,)\,dx \quad , \quad y_0\in[\gamma\,,\delta]\ ,$$

για πεπερασμένου πλήθους m σημεία y_0 , εκλέγουμε αντίστοιχα τα $\varepsilon_\nu>0$ και παίρνουμε με το άθροισμα των όγκων $V_{\varepsilon_\nu}=F(\,y_0\,)\varepsilon_\nu$ μια προσέγγιση V_0 του ζητούμενου όγκου V .

Καθώς παίρνουμε τα $\varepsilon_\nu\to 0$ *(όταν* $m\to+\infty$*)* , τ' αθροίσματα *Riemann*

$$\sum_{\nu=1}^{m}F(\,y_0\,)\varepsilon_\nu \qquad , \qquad y_0\in[\gamma\,,\delta]$$

τείνουν στο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_\gamma^\delta F(\,y\,)\,dy$ (που υποθέτουμε πως υπάρχει) , που δίνει τον ζητούμενο όγκο V .

Επομένως , παίρνουμε $\displaystyle V=\int_\gamma^\delta F(y)\,dy \;=\; \int_\gamma^\delta\left(\int_a^\beta f(x\,,y)\,dx\right)dy$,

δηλαδή για να υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα (αν υπάρχει)

$$\iint_\Pi f(x\,,y)\,dx\,dy$$

ολοκληρώνουμε την $f(\,x\,,y\,)$ πρώτα ως προς x , θεωρώντας το y *σταθερό* και στη συνέχεια ολοκληρώνουμε το αποτέλεσμα που βρίσκουμε ως προς y .

Εργαζόμενοι ανάλογα , θεωρώντας το x στη θέση του y (δηλαδή παίρνοντας $x_0\in[\alpha\ \beta]$ ως σταθερό αντί $y_0\in[\gamma\,,\delta]$) προκύπτει ότι

$$V=\iint_\Pi f(x\,,y)\,dx\,dy \;=\; \int_\alpha^\beta\left(\int_\gamma^\delta f(x\,,y)\,dy\right)dx$$

το οποίο (όπως και το προηγούμενο) λέγεται *επαναλαμβανόμενο ολοκλήρωμα* .

Προσοχή !

Για τις *ολοκληρώσιμες συναρτήσεις* f τα επαναλαμβανόμενα ολοκληρώματα

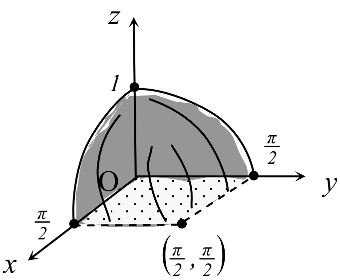
$$\int_\gamma^\delta\left(\int_a^\beta f(x\,,y)\,dx\right)dy \qquad , \qquad \int_\alpha^\beta\left(\int_\gamma^\delta f(x\,,y)\,dy\right)dx$$

είναι ίσα μεταξύ τους και δίνουν την τιμή του διπλού ολοκληρώματος

$$\iint_\Pi f(x\,,y)\,dx\,dy \quad , \quad \text{όπου} \quad \Pi=[\alpha\,,\beta]\times[\gamma\,,\delta].$$

Π.χ. να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα $\iint\limits_{\Pi} \sigma\upsilon\nu\, x \;\; \sigma\upsilon\nu y \, dx\, dy$,

όπου $\Pi = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.



Έχουμε $f(x,y) = \sigma\upsilon\nu x \; \sigma\upsilon\nu y \geq 0, \forall (x,y) \in \Pi$ και η f είναι συνεχής στο Π.

Ο ζητούμενος όγκος είναι

$$V = \iint\limits_{\Pi} \sigma\upsilon\nu\, x\, \sigma\upsilon\nu y \, dx\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x \;\, \sigma\upsilon\nu y \;\, dx \right) dy =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu y \;\, [\eta\mu x]_0^{\frac{\pi}{2}} \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu y \;\, dy = \eta\mu y \,|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Ανάλογα , χρησιμοποιώντας το άλλο επαναλαμβανόμενο ολοκλήρωμα βρίσκουμε

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x \;\, \sigma\upsilon\nu y \;\, dy \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x \;\, dx = \eta\mu x \,|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

- Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint\limits_{\Pi} (x^2 + y^2)\, dx\, dy \;, \text{ όπου } \; \Pi = [-1\,,\, 1] \times [0\,,\, 1]\,.$$

- Όπως είδαμε προηγουμένως, όταν η συνάρτηση $z = f(x,y)$ είναι θετική στο χωρίο $D \subset \mathbb{R}^2$, τότε το διπλό ολοκλήρωμα $\iint\limits_{D} f(x,y)\, dx\, dy$

δίνει τον όγκο του στερεού χωρίου που έχει κάτω επιφάνεια το επίπεδο χωρίο D και πάνω επιφάνεια την επιφάνεια $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$.

Επομένως , αν έχουμε δύο θετικές συναρτήσεις

$z_1 = f_1(x,y) \geq 0$, $z_2 = f_2(x,y) \geq 0$, με $f_1(x,y) \leq f_2(x,y)$, $(x,y) \in D$

τότε ο όγκος του στερεού χωρίου του $\mathbb{R}^3$ που περικλείεται από κάτω από την επιφάνεια $z = f_1(x,y) \geq 0$, $(x,y) \in D$ και από πάνω από την επιφάνεια $z = f_2(x,y) \geq 0$, $(x,y) \in D$ (παράλληλα προς τον άξονα Oz) δίνεται από το διπλό ολοκλήρωμα

$$V = \iint\limits_{D} [\, f_2(x,y) - f_1(x,y)]\, dx\, dy\,.$$

Το επίπεδο χωρίο $D \subset \mathbb{R}^2$ είναι η προβολή του στερεού χωρίου του χώρου $\mathbb{R}^3$ στο επίπεδο Oxy.

Για παράδειγμα, να βρεθεί ο όγκος του στερεού χωρίου του $\mathbb{R}^3$ ο οποίος

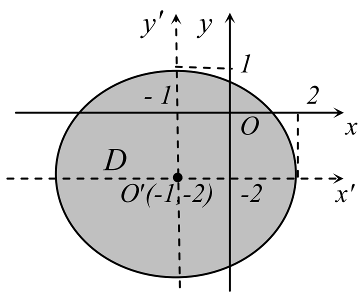
α) περικλείεται από το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$ και το επίπεδο $z = 4 - 2x - 2y$,

β) περικλείεται από το παραβολοειδές $z = 4 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$ και την κυλινδρική επιφάνεια $z = x^2$, $y \in \mathbb{R}$.

α) Αν D είναι η προβολή του στερεού χωρίου στο επίπεδο Oxy , η εξίσωση της καμπύλης που περιβάλλει το χωρίο $D \subset \mathbb{R}^2$ προκύπτει με απαλοιφή του z μεταξύ των εξισώσεων των δύο επιφανειών .

Έχουμε $z = x^2 + y^2 = 4 - 2x - 2y \;\Rightarrow\; (x+1)^2 + (y+2)^2 = 9$, οπότε η προβολή D του στερεού χωρίου του $\mathbb{R}^3$ στο επίπεδο Oxy είναι

$$D = \{ (x, y) : (x+1)^2 + (y+2)^2 \leq 3^2 \}.$$



Η κάτω επιφάνεια του στερεού χωρίου είναι η επιφάνεια του παραβολοειδούς

$$z = f_1(x, y) = x^2 + y^2 ,\ (x,y) \in D$$

και η πάνω επιφάνεια είναι το επίπεδο

$$z = f_2(x, y) = 4 - 2x - 4y ,\ (x,y) \in D.$$

Επομένως ο ζητούμενος όγκος δίνεται από το διπλό ολοκλήρωμα

$$V = \iint_D [\, f_2(x, y) - f_1(x, y)]\, dx\, dy$$

$$\Rightarrow\; V = \iint_D [4 - 2x - 4y - x^2 - y^2\,]\, dx dy = \iint_D [9 - (x+1)^2 + (y+2)^2\,]\, dx dy .$$

Με παράλληλη μεταφορά του συστήματος Oxy στο σύστημα $O'x'y'$:

$$x + 1 = x' \quad , \quad y + 2 = y'$$

και με αλλαγή μεταβλητών σε πολικές συντεταγμένες (βλέπε &3 , ΙΙ)

$$x' = x + 1 = \rho\ \sigma\upsilon\nu\theta \;\; , \;\; y' = y + 2 = \rho\ \eta\mu\theta \;\; , \;\; \rho > 0 \;\; , \;\; \theta \in [0,2\pi]$$

το χωρίο D μετασχηματίζεται στο καρτεσιανό επίπεδο $O\rho\theta$ στο χωρίο

$$D_0 = \{ (\rho ,\theta) : 0 \leq \rho \leq 3 \;,\; 0 \leq \theta \leq 2\pi \} .$$

Έχουμε $x = -1 + \rho\,\sigma\upsilon\nu\,\theta$, $y = -2 + \rho\,\eta\mu\,\theta$ και η ιακωβιανή ορίζουσα

$$J = \frac{D(x, y)}{D(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma\upsilon\nu\,\theta & -\rho\,\eta\mu\,\theta \\ \eta\mu\,\theta & \rho\,\sigma\upsilon\nu\,\theta \end{vmatrix} = \rho \geq 0$$

οπότε το διπλό ολοκλήρωμα γίνεται (βλέπε & 3 , II)

$$V = \iint_D [9 - (x+1)^2 - (y+2)^2]\, dx\, dy \;=\; \iint_{D_0} [9 - \rho^2]\, \rho\, d\rho\, d\theta$$

$$\Rightarrow\; V = \left[\int_0^{2\pi} d\theta\right]\left[\int_0^{3} (9\rho - \rho^3)\, d\rho\right] = 2\pi\left(9\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{81\pi}{2} \quad \text{κ.μ.αξόνων.}$$

β) Όπως στην α) περίπτωση βρίσκουμε ότι η προβολή του στερεού χωρίου του $\mathbb{R}^3$ στο επίπεδο Oxy είναι ο ελλειπτικός δίσκος

$$D(x,y) = \left\{ (x,y) : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} \le 1 \right\}.$$

Η κάτω επιφάνεια του στερεού χωρίου είναι η κυλινδρική επιφάνεια

$$z = f_1(x,y) = x^2 \;,\; (x,y) \in D$$

και η πάνω επιφάνειά του είναι η επιφάνεια του παραβολοειδούς

$$z = f_2(x,y) = 4 - x^2 - y^2 \;,\; (x,y) \in D.$$

Επομένως , ο ζητούμενος όγκος δίνεται από το διπλό ολοκλήρωμα

$$V = \iint_D [f_2(x,y) - f_1(x,y)]\, dx\, dy \;=\; \iint_D [4 - 2x^2 - y^2]\, dx\, dy$$

το οποίο θα το υπολογίσουμε με αλλαγή μεταβλητών (βλέπε & 3) .

Γενικά , στην περίπτωση του ελλειπτικού δίσκου $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} \le 1$ κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών $x = \alpha\,\rho\,\sigma\upsilon\nu\theta$, $y = \beta\,\rho\,\sigma\upsilon\nu\theta$, όπου έχουμε την ιακωβιανή ορίζουσα $J = \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \alpha\,\beta\,\rho$.

Εδώ είναι $a = \sqrt{2}$, $\beta = 2$ και το χωρίο D στο $\mathbb{R}^2$ μετασχηματίζεται στο χωρίο

$$D_0 = \{(\rho,\theta) : 0 \le \rho \le 1 \;,\; 0 \le \theta \le 2\pi\},$$

οπότε έχουμε

$$V = \iint_D [4 - 2x^2 - y^2]\, dx\, dy = \iint_{D_0} [4 - 2\cdot 2\,\rho^2\,\sigma\upsilon\nu^2\theta - 2^2\rho^2\,\eta\mu^2\theta]\, 2\sqrt{2}\,\rho d\rho d\theta$$

$$\Rightarrow\; V = 2\sqrt{2}\iint_{D_0} [4 - 4\rho^2]\, \rho\, d\rho\, d\theta \;=\; 8\sqrt{2}\iint_{D_9} (\rho - \rho^3)\, d\rho\, d\theta$$

$$\Rightarrow\; V = 8\sqrt{2}\left[\int_0^{2\pi} d\theta\right]\left[\int_0^{1} (\rho - \rho^3)\, d\rho\right] = 8\sqrt{2}\cdot 2\pi \cdot \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 =$$

$$= 8\sqrt{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4} = 4\pi\sqrt{2} \quad \text{κ.μ. αξόνων .}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΙΠΛΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

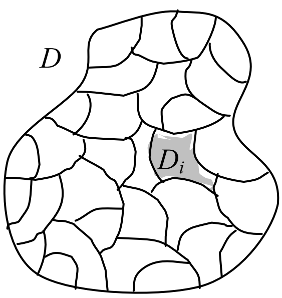
Θα ορίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$,

όπου $D \subset \mathbb{R}^2$ *φραγμένο σύνολο* και $f: D \to \mathbb{R}$ *φραγμένη* συνάρτηση .

Θεωρούμε μια διαμέριση $\Delta = \Delta(D_i)$ του D, μια άλλη διαμέριση $\Delta' = \Delta'(D_j)$ του D λέγεται *λεπτότερη* της Δ (*εκλέπτυνση* της Δ) αν ισχύει

$$D_i = D_{j_1} \cup D_{j_2} \cup \ldots \cup D_{j_k}$$

όπου $D_{j_1}, D_{j_2}, \ldots, D_{j_k} \in \Delta'(D_j)$, δηλαδή όταν για τα στοιχεία των διαμερίσεων $\Delta(D_i)$ και $\Delta'(D_j)$ ισχύει $D_j \subset D_i$ ή $D_j = D_i$.



Διαμέριση του D

Αν συμβολίσουμε με E_i το εμβαδόν του στοιχείου D_i της διαμέρισης $\Delta(D_i)$ του D , θέτουμε

$$K(f,\Delta(D_i)) = \sum_{D_i \in \Delta} m_i(f)\,E_i \qquad (\textit{κάτω άθροισμα Darboux}) ,$$

όπου $\quad m_i(f) = inf\{\, f(x,y) : (x,y) \in D_i \,\}$,

και $$A(f,\Delta(D_i)) = \sum_{D_i \in \Delta} M_i(f)\,E_i \qquad (\textit{πάνω άθροισμα Darboux}) ,$$

όπου $\quad M_i(f) = sup\{\, f(x,y) : (x,y) \in D_i \,\}$.

Για κάθε διαμέριση $\Delta = \Delta(D_i)$ του D έχουμε τ' αποτελέσματα :

- $K(f,\Delta) \le A(f,\Delta)$,
- $K(f,\Delta) \le \sup\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)\cdot E_D$,

  $\inf\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)\cdot E_D \le A(f,\Delta)$,

  όπου E_D το εμβαδόν του τόπου D .

Επομένως , υπάρχουν τα *sup* και *inf* :

$$\underline{I} = \sup_{\Delta} K(f,\Delta) = \underline{\iint_D} f(x,y)\,dx\,dy \qquad (\textit{κάτω ολοκλήρωμα Darboux}) ,$$

$$\overline{I} = \inf_{\Delta} A(f,\Delta) = \overline{\iint_D} f(x,y)\,dx\,dy \qquad (\textit{πάνω ολοκλήρωμα Darboux}).$$

Αν είναι $\underline{I} = \overline{I} = I$ λέμε ότι η συνάρτηση f έχει διπλό ολοκλήρωμα στο υποσύνολο $D \subset \mathbb{R}^2$ (*είναι ολοκληρώσιμη στο* D) και σημειώνουμε

$$I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \,.$$

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 1</u> . *Αν η διαμέριση* $\Delta' = \Delta'(D_j)$ *είναι λεπτότερη της διαμέρισης* $\Delta = \Delta(D_i)$, *τότε ισχύει*

$$K(f,\Delta) \le K(f,\Delta') \le A(f,\Delta') \le A(f,\Delta) .$$

<u>*Απόδειξη*</u>

Αν είναι $D_j \in \Delta'$, τότε $D_j \subset D_i$ (ή $D_j = D_i$) , με $D_i \in \Delta$, οπότε έχουμε

$$m_i(f) = \inf_{(x,y)\in D_i} f(x,y) \le \inf_{(x,y)\in D_j} f(x,y) = m_j(f) .$$

Επειδή είναι $D_i = D_{j_1} \cup D_{j_2} \cup \ldots \cup D_{j_k}$ έχουμε

$$\begin{aligned} m_i(f)E_i &= m_i(f)[E_{j_1} + E_{j_2} + \ldots + E_{j_k}] \\ &\le m_{j_1}(f)E_{j_1} + \ldots + m_{j_k}(f)E_{j_k} \,, \end{aligned}$$

όπου E_i , E_j τ' αντίστοιχα εμβαδά των D_i , D_j .

Αθροίζοντας παίρνουμε την ανισότητα

$$K(f,\Delta) = \sum_{D_i\in\Delta} m_i(f)E_i \le \sum_{D_j\in\Delta'} m_j(f)E_j = K(f,\Delta') \,.$$

Η μεσαία ανισότητα στην Πρόταση 1 είναι προφανής , ενώ η δεξιά ανισότητα αποδεικνύεται με ανάλογο τρόπο . ■

Παρατηρούμε ότι καθώς η διαμέριση Δ γίνεται η λεπτότερη Δ' ισχύουν οι ανισότητες

$$K(f,\Delta) \le K(f,\Delta') \quad \text{και} \quad A(f,\Delta') \le A(f,\Delta) \,.$$

Επομένως , για δύο τυχαίες διαμερίσεις Δ_1 και Δ_2 του D , αν θεωρήσουμε την λεπτότερη διαμέριση Δ' των Δ_1 και Δ_2 (εκλέπτυνση των Δ_1 και Δ_2) , σύμφωνα με την Πρόταση 1 θα ισχύουν οι ανισότητες

$$K(f,\Delta_2) \le A(f,\Delta_1) \quad \text{και} \quad K(f,\Delta_1) \le A(f,\Delta_2) \,.$$

Θα διατυπώσουμε παρακάτω τρία βασικά θεωρήματα .

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 1</u> . *Μια φραγμένη συνάρτηση* $f : D \to \mathbb{R}$, *όπου* $D \subset \mathbb{R}^2$ *φραγμένο σύνολο , είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο* D *αν και μόνο αν , για κάθε* $\varepsilon > 0$, *υπάρχει διαμέριση* $\Delta(D_i)$ *του* D *τέτοια ώστε να ισχύει* $A(f,\Delta) - K(f,\Delta) < \varepsilon$.

Απόδειξη

Υποθέτουμε πως ισχύει η ανισότητα .

Άρα , για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση Δ_0 τέτοια ώστε

$$inf\ A(f,\Delta) \le A(f,\Delta_0) < K(f,\Delta_0) + \varepsilon \le sup\, K(f,\Delta) + \varepsilon$$

σύμφωνα με τους ορισμούς των sup και inf.

Έχουμε λοιπόν

$$inf\ A(f,\Delta) - sup\, K(f,\Delta) < \varepsilon \quad , \quad \forall \varepsilon > 0$$

οπότε ισχύει η ισότητα

$$\overline{I} = inf\ A(f,\Delta) = sup\, K(f,\Delta) = \underline{I}$$

και η συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη .

Αντίστροφα , υποθέτουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη .

Επομένως , ισχύει η παραπάνω ισότητα $\overline{I} = \underline{I}$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν διαμερίσεις Δ_1 και Δ_2 του D τέτοιες ώστε

$$A(f,\Delta_1) - K(f,\Delta_2) < \varepsilon \ .$$

Αν επιλέξουμε διαμέριση Δ_0 που είναι εκλέπτυνση των διαμερίσεων Δ_1 και Δ_2 , οπότε ισχύουν $\Delta_1 \subset \Delta_0$, $\Delta_2 \subset \Delta_0$ θα έχουμε

$$K(f,\Delta_2) \le K(f,\Delta_0) \quad \text{και} \quad A(f,\Delta_0) \le A(f,\Delta_1)$$

αφού τα πάνω αθροίσματα *Darboux* $A(f,\Delta)$ φθίνουν και τα κάτω αθροίσματα *Darboux* αυξάνουν ως προς λεπτότερες διαμερίσεις Δ του D.

Έχουμε λοιπόν τις σχέσεις

$$A(f,\Delta_0) - K(f,\Delta_0) \le A(f,\Delta_1) - K(f,\Delta_2) < \varepsilon \ ,$$

που είναι η ζητούμενη ανισότητα . ■

Παραδείγματα

1. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 \quad , \quad \text{αν} \quad x \in \left[0,\dfrac{1}{2}\right] \quad , \quad y \in [0,1] \\ \\ 1 \quad , \quad \text{αν} \quad x \in \left(\dfrac{1}{2},1\right] \quad , \quad y \in [0,1] \end{cases}$$

είναι ολοκληρώσιμη και είναι

$$\iint_{\Pi} f(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{2} \quad , \quad \text{όπου} \quad \Pi = [0,1] \times [0,1].$$

Έστω Δ μια διαμέριση του $\Pi = [0,1] \times [0,1]$ που αποτελείται από μία διαμέριση Δ_1 του $\Pi_1 = \left[0,\dfrac{1}{2}\right] \times [0,1]$ και μία διαμέριση Δ_2

του $\Pi_2 = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times [0,1]$, δηλαδή είναι $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$.

Έχουμε λοιπόν

$$A(f,\Delta) = \sum_{D_i \in \Delta} M_i(f) E_i = \sum_{D_i \in \Delta_1} M_i(f) E_i + \sum_{D_j \in \Delta_2} M_j(f) E_j =$$

$$= 0 + \sum_{D_j \in \Delta_2} E_j = \text{εμβαδόν του } \Pi_2 = \frac{1}{2} .$$

Εργαζόμενοι ανάλογα βρίσκουμε

$$K(f,\Delta) = \text{εμβαδόν του } \Pi_2 = \frac{1}{2} .$$

Άρα , προφανώς είναι

$$A(f,\Delta) - K(f,\Delta) = 0 < \varepsilon \quad , \quad \forall \varepsilon > 0$$

οπότε η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο Π και είναι

$$\underline{I} = \overline{I} = \iint_{\Pi} f(x,y)\, dx\, dy = \frac{1}{2} .$$

2. Θεωρούμε τη συνάρτηση *Dirichlet*

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 \;, & \text{αν} \quad (x,y) \in \mathbb{Q}^2 \;, \\ \\ 0 \;, & \text{αν} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2 . \end{cases}$$

Δείξτε ότι η f δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $\Pi = [0,1] \times [0,1]$.

Έστω Δ μια διαμέριση του Π . Σε κάθε στοιχείο D_i της Δ υπάρχει σημείο $(x_1, y_1) \in D_i$, με $(x_1, y_1) \in \mathbb{Q}^2$, οπότε είναι $f(x_1, y_1) = 1$ και υπάρχει σημείο $(x_2, y_2) \in D_i$, με $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$, οπότε είναι $f(x_2, y_2) = 0$.

Αυτά συμβαίνουν επειδή οι ρητοί αριθμοί $\mathbb{Q}$ και οι άρρητοι αριθμοί $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ είναι σύνολα πυκνά στο $\mathbb{R}$ (πραγματικοί αριθμοί) , άρα ισχύουν οι σχέσεις $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R} - \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ (η παύλα σημαίνει τα σημεία περιβλήματος του συνόλου) .

Έχουμε λοιπόν

$$M_i(f) = \sup_{(x,y) \in D_i} f(x,y) = 1 \qquad , \qquad m_i(f) = \inf_{(x,y) \in D_i} f(x,y) = 0$$

οπότε είναι

$$A(f,\Delta)=\sum_{D_i\in\Delta} M_i(f)E_i = 1\sum_{D_i\in\Delta} E_i = 1\cdot(\text{εμβαδόν του } \Pi) = 1\cdot 1 = 1,$$

$$K(f,\Delta)=\sum_{D_i\in\Delta} m_i(f)E_i = 0\sum_{D_i\in\Delta} E_i = 0\cdot(\text{εμβαδόν του } \Pi) = 0\cdot 1 = 0 .$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$A(f,\Delta) - K(f,\Delta) = 1$$

που δεν είναι μικρότερο του $\varepsilon > 0$, όταν είναι $0<\varepsilon<1$.
Επομένως , η συνάρτηση f δεν είναι ολοκληρώσιμη στο Π (Θεώρημα 1) , αν και είναι φραγμένη συνάρτηση στο Π (και γενικά στο $\mathbb{R}^2$) .

Αθροίσματα Riemann

Αν Δ είναι διαμέριση του υποσυνόλου $D\subset\mathbb{R}^2$, όπου D φραγμένο σύνολο , και $(\xi_i,\eta_i)\in D_i$, $\forall D_i\in\Delta(D_i)$, τότε σχηματίζεται *το άθροισμα Riemann*

$$S(f,\Delta,\Xi) = \sum_{D_i\in\Delta} f(\xi_i,\eta_i)E_i ,$$

όπου E_i είναι το εμβαδόν του στοιχείου D_i .

Θέτουμε $d=\max\limits_{D_i\in\Delta} d_i$, όπου d_i = διάμετρος του D_i =

$$= \sup_{p_1, p_2\in D_i} \| P_1 - P_2 \| ,$$

το οποίο λέγεται *λεπτότητα* της διαμέρισης Δ του D .

> ΘΕΩΡΗΜΑ 2 . *Η φραγμένη συνάρτηση* $f: D\to\mathbb{R}$, $D\subset\mathbb{R}^2$ *φραγμένο σύνολο είναι ολοκληρώσιμη στο* D *, αν και μόνο αν τα αθροίσματα Riemann* $S(f,\Delta,\Xi)$ *, όταν το* $d\to 0$ *, έχουν “ όριο ”* $I\in\mathbb{R}$.
> *Το “όριο” αυτό* I *είναι η τιμή του διπλού ολοκληρώματος*
> $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = I .$$

Η γενικότερη κλάση των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων θα προσδιοριστεί με το θεώρημα του *Lebesgue* (ΘΕΩΡΗΜΑ 3) που θα διατυπωθεί παρακάτω .

Αρχικά θ’ αναφερθούμε σε συναρτήσεις συνεχείς και φραγμένες στο σύνολο ορισμού τους $D\subset\mathbb{R}^2$.

> ΠΡΟΤΑΣΗ 2. *Αν η συνάρτηση* $f: D\to\mathbb{R}$, $D\subset\mathbb{R}^2$ *συμπαγές σύνολο , είναι συνεχής στο* D *, τότε η* f *είναι ολοκληρώσιμη στο* I .

Απόδειξη

Αφού η f είναι συνεχής στο συμπαγές σύνολο $D \subset \mathbb{R}^2$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο D, οπότε ισχύει :

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{τέτοιο ώστε}$$

$$d_2[(x_i, y_i), (x_j, y_j)] < \delta(\varepsilon) \ \Rightarrow \ | f(x_i, y_i) - f(x_j, y_j) | < \varepsilon$$

όπου $(x_i, y_i), (x_j, y_j) \in D$ και d_2 είναι η ευκλείδεια απόσταση στο $\mathbb{R}^2$.

Θεωρούμε μια διαμέριση Δ του D, με λεπτότητα $d < \delta$, οπότε έχουμε

$$| f(x_i, y_i) - f(x_j, y_j) | < \varepsilon \ , \quad \forall \ (x_i, y_i), (x_j, y_j) \in D_i$$

επειδή είναι

$$d_2[(x_i, y_i), (x_j, y_j)] \le d_i \le d < \delta(\varepsilon) \ .$$

Επομένως ισχύει $\sup\limits_{(x,y)\in D_i} f(x,y) - \inf\limits_{(x,y)\in D_i} f(x,y) < \varepsilon$

και είναι $A(f,\Delta) - K(f,\Delta) = \sum\limits_{D_i \in \Delta} [M_i(f) - m_i(f)] E_i$

$$< \varepsilon \sum_{D_i \in \Delta} E_i = \varepsilon \cdot (\text{εμβαδόν του } D) \ .$$

Άρα , σύμφωνα με το Θεώρημα 1 η f είναι ολοκληρώσιμη στο συμπαγές σύνολο $D \subset \mathbb{R}^2$ όπου είναι συνεχής . ■

• Η Πρόταση 2 γενικεύεται για συνάρτηση f που είναι ασυνεχής σ' ένα υποσύνολο $A \subset D$ με μηδενικό εμβαδόν (βλέπε Πρόταση 3) .

Σημείωση

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και *θετική* στο συμπαγές σύνολο $D \subset \mathbb{R}^2$, τότε ο όγκος V που περικλείεται μεταξύ του τόπου D και της επιφάνειας $z = f(x,y), (x,y) \in D$, δίνεται από το διπλό ολοκλήρωμα

$$V = \iint_D f(x,y)\, dx\, dy \ .$$

Πράγματι , για κάθε διαμέριση Δ του D ισχύει

$$K(f,\Delta) \le V \le A(f,\Delta) \ ,$$

οπότε προκύπτει η ζητούμενη ισότητα .

• Ειδικά , όταν είναι $f(x,y) = 1$, $\forall (x,y) \in D$, παίρνουμε το εμβαδόν του τόπου D , δηλαδή έχουμε

$$\text{Εμβαδόν του } D = \iint_D dx\, dy \quad \text{σε τ.μ. αξόνων} \ .$$

Το μέτρο του Jordan

Για να μπορεί να ορισθεί το διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης f στο χωρίο $D \subset \mathbb{R}^2$ πρέπει :

i) η f να είναι φραγμένη στο χωρίο $D \subset \mathbb{R}^2$,

ii) το χωρίο D να είναι *τετραγωνίσιμο* , δηλαδή να έχει *μέτρο Jordan* (οπότε είναι και φραγμένο) .

Λέμε *πολυγωνικό χωρίο* του $\mathbb{R}^2$ κάθε ένωση πεπερασμένου πλήθους φραγμένων πολυγώνων .

Ένα χωρίο $D \subset \mathbb{R}^2$ είναι *τετραγωνίσιμο* (έχει *μέτρο Jordan*) αν και μόνο αν , για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχουν πολυγωνικά χωρία Π_1 και Π_2 τέτοια ώστε $\Pi_1 \subset D \subset \Pi_2$ και

$$[\text{ Εμβαδόν του } \Pi_2 \,] - [\text{ Εμβαδόν του } \Pi_1 \,] < \varepsilon .$$

Προφανώς τα τετραγωνίσιμα χωρία είναι φραγμένα και έχουν εμβαδόν .

Σύνολα μηδενικού μέτρου Jordan

Ένα φραγμένο υποσύνολο $A \subset \mathbb{R}^2$ λέμε ότι είναι *μηδενικού μέτρου Jordan* (μηδενικού εμβαδού) όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους υποσύνολα $A_1, A_2, ..., A_\nu$ του $\mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε

$$A \subset A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_\nu \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^{\nu} (\text{εμβαδόν του } A_i) < \varepsilon .$$

Προφανώς , κάθε καμπύλη με πεπερασμένο μήκος είναι μηδενικού μέτρου *Jordan* .

- Κάθε επίπεδο χωρίο $D \subset \mathbb{R}^2$ είναι τετραγωνίσιμο , αν και μόνο αν το σύνορό του ∂D είναι μηδενικού μέτρου *Jordan* .
- Κάθε επίπεδο χωρίο $D \subset \mathbb{R}^2$, που περικλείεται από ένα πεπερασμένο πλήθος καμπύλων που έχουν πεπερασμένο μήκος , είναι τετραγωνίσιμο .
- Τα τετραγωνίσιμα χωρία είναι φραγμένα , αλλά κάθε φραγμένο χωρίο δεν είναι τετραγωνίσιμο (με μέτρο *Jordan*) .

  Π.χ. τα σημεία (x, y) του τετραγώνου $\Pi = [0,1] \times [0,1]$, με τα $x, y \in \mathbb{Q}$ ρητούς αριθμούς , είναι ένα αριθμήσιμο και φραγμένο σύνολο A, αλλά δεν είναι τετραγωνίσιμο .

  Παρατηρείστε ότι είναι $\overset{\circ}{A} = \varnothing$ (εσωτερικό του A) , $\overline{A} = \Pi$ (περίβλημα του A), οπότε το σύνολο A δεν έχει μέτρο του *Jordan* (δεν έχει εμβαδόν). Ακόμη το σύνορό του $\partial A = \Pi$ δεν είναι μηδενικού μέτρου *Jordan* , οπότε δεν είναι τετραγωνίσιμο χωρίο .

Επομένως έχουμε τ' αποτελέσματα :

α) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και φραγμένη σ' ένα τετραγωνίσιμο χωρίο D, τότε είναι ολοκληρώσιμη σ' αυτό .

β) Αν μια συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη σ' ένα τετραγωνίσιμο χωρίο D τότε είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε τετραγωνίσιμο υποσύνολο του D .

γ) Κάθε φραγμένη συνάρτηση f σε σύνολο μηδενικού μέτρου *Jordan* έχει ολοκλήρωμα μηδέν σ' αυτό .

δ) Σ' ένα χωρίο που δεν έχει μέτρο *Jordan* (δεν είναι τετραγωνίσιμο) δεν μπορεί να ορισθεί ολοκλήρωμα .

Π.χ. αν είναι $f(x,y)=0$, $\forall (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ τότε είναι

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 0$$

μόνον όταν το D έχει μέτρο *Jordan* , διαφορετικά δεν ορίζεται το ολοκλήρωμα .

Σύνολα μηδενικού μέτρου Lebesgue

Ένα σύνολο $B \subset \mathbb{R}^2$ είναι *μηδενικού μέτρου Lebesgue* αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει αριθμήσιμη κάλυψη $B_1, B_2, ..., B_i ...$, δηλαδή

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i ,$$

τέτοια ώστε $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} E_i \leq \varepsilon$, όπου E_i το εμβαδόν του B_i .

Π.χ. κάθε αριθμήσιμο σύνολο $B=\{\beta_1,\beta_2,...,\beta_k,...\}$ του $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ είναι μηδενικού μέτρου *Lebesgue* .

Πράγματι , για κάθε $\varepsilon > 0$ καλύπτουμε κάθε σημείο β_k με ορθογώνιο B_k εμβαδού $\dfrac{\varepsilon}{2^k}$ (το β_k είναι το κέντρο του B_k) , οπότε έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \varepsilon \quad .$$

Από τη γεωμετρική πρόοδο έχουμε $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$.

- Αποδεικνύεται , ανάλογα , ότι κάθε αριθμήσιμη ένωση συνόλων μηδενικού μέτρου *Lebesgue* έχει μηδενικό μέτρο *Lebesgue* .

  Πράγματι , αν είναι

$$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \ ,$$

τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε i έχουμε την αριθμήσιμη κάλυψη

$$A_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_i^j \ , \quad \text{με} \quad \sum_{j=1}^{\infty} E_i^j \le \frac{\varepsilon}{2^i} \ ,$$

οπότε παίρνουμε

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} E_i^j\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon \ .$$

Έχουμε τ' αποτελέσματα :

α) Κάθε πεπερασμένο σύνολο ή πεπερασμένη ένωση συνόλων μηδενικού μέτρου *Lebesgue* είναι σύνολα μηδενικού μέτρου *Lebesgue* .
β) Κάθε υποσύνολο συνόλου μηδενικού μέτρου *Lebesgue* είναι μηδενικού μέτρου *Lebesgue* .
γ) Κάθε υποσύνολο $B \subset \mathbb{R}^n$, με διάσταση μικρότερη ή ίση του $n-1$, $n \ge 2$, είναι μηδενικού μέτρου *Lebesgue* στο $\mathbb{R}^n$. Π.χ. ο $\mathbb{R}$ στους $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$, και ο $\mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{R}^3$ είναι μέτρου *Lebesgue* μηδέν . Ακόμη , μια πεπερασμένου μήκους καμπύλη (ανοικτή ή κλειστή) ή μια ευθεία του $\mathbb{R}^2$ έχουν μηδενικό μέτρο *Lebesgue* .

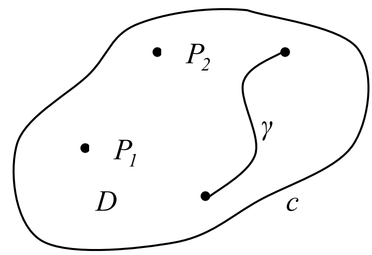
Προσοχή ! Να γίνεται διάκριση μεταξύ του μέτρου *Jordan* και του μέτρου *Lebesgue* . Π.χ. τα ρητά σημεία του διαστήματος $[0,1]$ δεν έχουν μέτρο *Jordan* , αλλά είναι μηδενικού μέτρου *Lebesgue* (ως αριθμήσιμου πλήθους σημεία) .

Όταν όμως υπάρχει το μέτρο του *Jordan* , τότε αυτό ισούται με το μέτρο του *Lebesgue* . ■

ΠΡΟΤΑΣΗ 3 . *Μια συνάρτηση* $f : D \to \mathbb{R}$, *όπου* $D \subset \mathbb{R}^2$ *έχει μέτρο Jordan (είναι τετραγωνίσιμο) και είναι κλειστό σύνολο , η οποία είναι φραγμένη και συνεχής στο χωρίο D, εκτός από τα σημεία ενός υποσυνόλου* $A \subset D$ *με μηδενικό μέτρο Jordan (μηδενικό εμβαδόν) όπου είναι ασυνεχής, είναι ολοκληρώσιμη στο D .*

Απόδειξη

Για παράδειγμα , αν η συνάρτηση f είναι ασυνεχής στα σημεία P_1, P_2 και στα σημεία της καμπύλης γ του χωρίου D που περιβάλλεται από μια καμπύλη c κλάσης C^1 , τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο D .



Παίρνουμε $\varepsilon > 0$ αυθαίρετο (πολύ μικρό) και Π ανοικτό πολυγωνικό χωρίο (ανοικτό σύνολο) , με $A \subset \Pi$ και (εμβαδόν του Π) $< \varepsilon$.

Άρα , το χωρίο $D - \Pi$ έχει μέτρο *Jordan* και είναι κλειστό σύνολο .

Επειδή το χωρίο $D - \Pi$ έχει μέτρο *Jordan* είναι φραγμένο σύνολο , και αφού το $D - \Pi$ είναι κλειστό και φραγμένο σύνολο του $\mathbb{R}^2$ είναι συμπαγές., οπότε η f είναι συνεχής στο $D - \Pi$ και άρα (Πρόταση 2) είναι ολοκληρώσιμη στο χωρίο $D - \Pi$.

Θεωρούμε μια διαμέριση Δ' του χωρίου $D - \Pi = \bigcup_{i=1}^{\nu} D_i$ τέτοια ώστε

$$A(f, \Delta') - K(f, \Delta') < \varepsilon \ , \ (\text{ Θεώρημα } 1)$$

και παίρνουμε τη διαμέριση Δ του χωρίου $D = \sum_{i=1}^{\nu} D_i \cup \Pi_0$, όπου

$\Pi_0 = \Pi \cap D$.

Θέτουμε $M = sup\{ f(x, y) , (x,y) \in \Pi_0 \}$, $m = inf\{ f(x,y) , (x,y) \in \Pi_0 \}$ και έχουμε

$$\begin{aligned} A(f, \Delta) - K(f, \Delta) &= A(f, \Delta') - K(f, \Delta') + (M - m) \ (\text{εμβαδόν του } \Pi_0) \\ &< \varepsilon + 2\Lambda\varepsilon = \eta , \end{aligned}$$

όπου $| f(x, y) | \le \Lambda$, $\forall (x, y) \in D$ και $M - m \le M + m \le 2\Lambda$.

Αλλά ο αριθμός $\eta > 0$ μπορεί να γίνει οσονδήποτε μικρός , με κατάλληλη εκλογή του $\varepsilon > 0$, και επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 1, η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο χωρίο $D \subset \mathbb{R}^2$. ■

Το παρακάτω θεώρημα 3 προσδιορίζει τη γενικότερη κλάση των ολοκληρώσιμων κατά *Riemann* συναρτήσεων .

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 (*Κριτήριο του Lebesgue)*

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη και φραγμένη σ' ένα τετραγωνίσιμο (με μέτρο Jordan) σύνολο $D \subset \mathbb{R}^2$. Η f είναι ολοκληρώσιμη στο D , αν και μόνο αν το σύνολο $B = \{ (x, y) \in D : \eta \ f$ είναι ασυνεχής στο $(x ,y) \}$, των ασυνεχειών της στο D είναι μηδενικού μέτρου Lebesgue .

Απόδειξη

Από την τοπολογία είναι γνωστό ότι το περίβλημα $\overline{D} = D \cup \partial D$.

Επειδή το D είναι τετραγωνίσιμο είναι φραγμένο,άρα το $\overline{D}$ είναι κλειστό και φραγμένο (άρα συμπαγές) και το σύνορό του ∂D είναι μηδενικού μέτρου *Jordan* , οπότε το διπλό ολοκλήρωμα στο ∂D ισούται με μηδέν .

Επομένως , το διπλό ολοκλήρωμα στο D ισούται μ' αυτό στο $\overline{D}$, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε στην απόδειξη ότι είναι το $D = \overline{D}$ συμπαγές .

Υποθέτουμε ότι το σύνολο $B \subset D$ είναι μηδενικού μέτρου *Lebesgue ,* ενώ η συνάρτηση f είναι φραγμένη στο κλειστό και φραγμένο (άρα συμπαγές) χωρίο $D \subset \mathbb{R}^2$, με εμβαδόν E_D = εμβαδόν του $D > 0$.

Αν το σημείο $(x,y) \in D - B$, η f είναι συνεχής στο σημείο (x,y) :

$\forall \varepsilon > 0$, υπάρχει ανοικτή περιοχή $U = B((x,y), \delta)$, $\delta(\varepsilon)>0$, τέτοια ώστε

$$\sup_{(x,y)\in U} f(x,y) - \inf_{(x,y)\in U} f(x,y) \leq \varepsilon$$ (από τον ορισμό της συνέχειας) .

Από την τοπολογία είναι γνωστή η σχέση $D \subset \overline{D} = \overset{\circ}{D} \cup \partial D$, ενώ εδώ είναι $E_{\partial D} = 0$ (το $\overset{\circ}{D}$ είναι τα εσωτερικά σημεία του D) .

Από τον ορισμό του μέτρου *Lebesgue* μηδέν για το σύνολο B έχουμε :

$\forall \varepsilon > 0$, υπάρχει μια *ανοικτή* κάλυψη του B

A_n , $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτά σύνολα , τέτοια ώστε $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$,

και E_{A_n} = εμβαδόν του $A_n \leq \dfrac{\varepsilon}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, με $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_{A_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$.

Τα ανοικτά σύνολα A_n και οι ανοικτές περιοχές U των σημείων $(x,y) \in D - B$, αποτελούν μια *ανοικτή* κάλυψη του συμπαγούς χωρίου $D \subset \mathbb{R}^2$, οπότε υπάρχει μια πεπερασμένη υποκάλυψή του με τα σύνολα

$$A_{i_1} , A_{i_2} , \dots , A_{i_v} , U_1 , U_2 , \dots , U_k .$$

Αν λοιπόν πάρουμε μια διαμέριση Δ του D μ' αυτά τα σύνολα τομή με το D , έχουμε

$$A(f,\Delta) - K(f,\Delta) \leq \sum_{m=1}^{v} [M_{j_m}(f) - m_{j_m}(f)] E_{A_{j_m}} + \sum_{i=1}^{k} [M_i(f) - m_i(f)] E_{U_i} ,$$

όπου $M_j(f) = \sup_{(x,y)\in A_j} f(x,y)$, $m_j(f) = \inf_{(x,y)\in A_j} f(x,y)$,

$M_i(f) = \sup_{(x,y)\in U_i} f(x,y)$, $m_i(f) = \inf_{(x,y)\in U_i} f(x,y)$,

$E_{A_{j_m}}$ = εμβαδόν του A_{j_m} , E_{U_i} = εμβαδόν του U_i .

Επομένως , γι' αυτήν τη διαμέριση Δ του D , έχουμε

$$A(f,\Delta)-K(f,\Delta) \leq 2 \sup_{(x,y)\in D} |f(x,y)| \sum_{m=1}^{\nu} E_{A_{j_m}} + \varepsilon \sum_{i=1}^{k} E_{U_i}$$
$$< 2M\varepsilon + \varepsilon E_D = M_1 \varepsilon \;,\; \forall \varepsilon > 0$$

όπου $M = sup\{ \,|f(x,y)|\, : (x,y)\in D \}$, $M_1 = 2M + E_D$, $\varepsilon = min\{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, ...\varepsilon_k \}$ και ο $\varepsilon_i > 0$, $i = 1,2,...,k$ αντιστοιχεί στην περιοχή U_i , $i = 1,2,...,k$.

Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα 1, η f είναι ολοκληρώσιμη στο χωρίο D .

Αντίστροφα , υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο χωρίο D . Θα δείξουμε ότι το σύνολο των ασυνεχειών της f

$$B = \{ (x,y)\in D \;:\; \eta \;\; f \;\; \text{ασυνεχής στο} \;(x,y)\; \} \subset D$$

έχει μέτρο *Lebesgue* μηδέν .

Θεωρούμε την *αιώρηση* της συνάρτησης f σ' ένα σημείο (x_0, y_0) :

$$\omega((x_0,y_0), f) = \lim_{\delta\to 0} [\, sup\, f(x,y) - inf\, f(x,y)] ,$$

όπου $U = B((x_0,y_0),\delta)$, $\delta > 0$ ανοικτή σφαιρική περιοχή του $\mathbb{R}^2$.

Προφανώς, η f είναι συνεχής στο σημείο (x_0, y_0) , αν και μόνο αν ισχύει

$$\omega((x_0,y_0), f) = 0 \;,$$

και στα σημεία (x,y) όπου η f είναι ασυνεχής η αιώρησή της είναι θετική .

Επομένως , θα έχουμε

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n ,$$

όπου $B_n = \{ (x,y)\in D \,:\, \omega((x,y), f) \geq \frac{1}{n} \}$, $n\in\mathbb{N}$.

Αρκεί να δείξουμε ότι τα σύνολα $B_n, \forall n\in\mathbb{N}$ είναι μηδενικού μέτρου *Lebesgue* . Επειδή η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη , σύμφωνα με το Θεώρημα 1 , για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση Δ του D τέτοια ώστε

$$A(f,\Delta) - K(f,\Delta) < \frac{\varepsilon}{n} \;,\; n\in\mathbb{N} .$$

Συμβολίζουμε με D_n τα υποσύνολα D_i της διαμέρισης Δ για τα οποία ισχύει $D_i \cap B_n \neq \varnothing$ και το D_i περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο $(x,y)\in B_n$ ως εσωτερικό σημείο του , και

$$B_n \subset \left(\bigcup_{D_i\in D_n} D_i \right) \cup \left(\bigcup_{D_i\in \Delta} \partial D_i \right)$$

δηλαδή $D_n = \{ D_i \in \Delta \,:\, \mathring{D}_i \cap B_n \neq \varnothing \}$, όπου $\mathring{D}_i$ το εσωτερικό του συνόλου D_i .