ΘΩΜΑΣ ΚΥΒΕΝΤΙΔΗΣ

ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ
ΜΕΤΡΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει τη σφραγίδα του εκδότη

Θωμας Α. Κυβεντιδης

- Γεννήθηκε το 1947 στο Νέο Πετρίτσι του Ν. Σερρών.
- Το 1965 αποφοίτησε από το εξατάξιο Γυμνάσιο Σιδηροκάστρου του Ν. Σερρών και εγγράφηκε στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης.
- Πήρε το πτυχίο των Μαθηματικών το 1969.
- Αναγορεύτηκε διδάκτορας στο τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης το 1979 και από το 1972 μέχρι σήμερα εργάζεται σ' αυτό.

ISBN 978-960-456-177-3

Διορθωμένη ανατύπωση 1/2010

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση
Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσσαλονίκης - Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ:
Αρμενοπούλου 27 - 546 35 Θεσσαλονίκη • Τηλ.: 2310-203.720 • Fax 2310 211.305
e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΕΝΩΣΗ ΕΚΔΟΤΩΝ ΒΙΒΛΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ:
Στοά του Βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5) - 105 64 ΑΘΗΝΑ • Τηλ.-Fax: 210-3211.097

ΑΠΟΘΗΚΗ ΑΘΗΝΩΝ - ΠΩΛΗΣΗ ΧΟΝΔΡΙΚΗ:
Ασκληπιού 60 - Εξάρχεια 114 71, Αθήνα • Τηλ.-Fax: 210-3816.650 • e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

«Μίζερη των θνητών γενιά,
που έβαλες τέτοιους θεούς στο κεφάλι σου
και ρήμαξες την ίδια τη ζωή σου»

ΛΟΥΚΡΗΤΙΟΣ
(98-55 π.Χ.)
Ρωμαίος Ποιητής - Επικούρειος

Αφιερώνεται στη μνήμη
του θείου μου
Βασίλη Σ. Παπαδόπουλου

Πρόλογος

Η Μαθηματική Ανάλυση στην ανάπτυξη των διαφόρων κλάδων της (Λογισμοί, Διαφορικές Εξισώσεις, Μιγαδική και Πραγματική Ανάλυση, Συναρτησιακή Ανάλυση) γίνεται πολύπλοκη και παρουσιάζει ιδιαίτερες δυσκολίες.

Γι' αυτό είναι ανάγκη να διατυπωθούν οι θεμελιώδεις αρχές πάνω στις οποίες βασίζεται η Μαθηματική Ανάλυση, κι' αυτό κάνει η Τοπολογία.

Οι βασικές αρχές της Τοπολογίας, και ειδικά των μετρικών χώρων, είναι απαραίτητες για τη μελέτη πολλών επιστημονικών κλάδων.

Το βιβλίο αυτό αναφέρεται στους μετρικούς τοπολογικούς χώρους και νορμικούς τοπολογικούς χώρους. Η ανάπτυξη των εννοιών γίνεται αναλυτικά και με μαθηματική αυστηρότητα, χωρίς όμως αυτό να δυσκολεύει την κατανόηση του κειμένου.

Στο πρώτο κεφάλαιο αναπτύσσεται η τοπολογία μετρικών (νορμικών) χώρων και οι βασικές έννοιές της.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι έννοιες της σύγκλισης και της συνέχειας, καθώς και οι έννοιες της ακολουθίας Cauchy και του πλήρους χώρου.

Στο τρίτο κεφάλαιο αναφέρονται οι συμπαγείς χώροι και οι ιδιότητές τους και στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι συναφείς χώροι και οι ιδιότητές τους.

Σε κάθε κεφάλαιο περιέχονται αρκετά παραδείγματα για την καλύτερη κατανόηση των εννοιών του και ασκήσεις.

Τέλος, στο πέμπτο κεφάλαιο παραθέτουμε τα λυμένα προβλήματα που αναφέρονται σ' όλη την ύλη των προηγούμενων κεφαλαίων.

Θεσσαλονίκη, 2009 ΘΩΜΑΣ ΚΥΒΕΝΤΙΔΗΣ

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΣΥΜΠΑΓΕΙΣ ΜΕΤΡΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΜΕΤΡΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΛΥΜΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Βιβλία του συγγραφέα ΘΩΜΑ ΚΥΒΕΝΤΙΔΗ

Α. *Διακριτά Μαθηματικά*

1. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΚΑΙ ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ, (σελ. 552, 2001).
2. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΠΛΗΘΥΣΜΩΝ (*Διακριτά Μοντέλα*), (σελ. 164, 2001).

Β. *Διαφορικές Εξισώσεις*

1. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, *Τόμος Πρώτος*, (σελ. 480, 1987).
2. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ, *Τόμος Δεύτερος*, (σελ. 400, 1988).
3. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, *Τόμος Τρίτος*, (σελ. 478, 1991), (*Ποιοτική Θεωρία Διαφορικών Εξισώσεων*).
4. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ (*Ασκήσεις*), (σελ. 560, 1998).
5. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, (σελ. 512, 2007).
6. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΠΛΗΘΥΣΜΩΝ (*Συνεχή Μοντέλα*), (σελ. 128, 1993).
7. ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ, (σελ. 320, 1994).
8. ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ (σελ. 384, 2009).

Γ. *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*

1. ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
   Συναρτήσεων Μιας Πραγματικής Μεταβλητής,
   (*Τεύχος Πρώτο*, σελ. 640, 2001 – *Τεύχος Δεύτερο*, σελ. 312, 2001).
2. ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
   Συναρτήσεων Μιας Πραγματικής Μεταβλητής, (σελ. 624, 2005).
3. ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
   Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών, (σελ. 240, 2007).

Δ. *Σειρά Μαθηματικών*

1. ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, Τόμος Πρώτος, (σελ. 628, 2005).
   (Άλγεβρα, Αναλυτική Γεωμετρία, Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός)
2. ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, Τόμος Δεύτερος, (σελ. 616, 2006).
   (Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών)
3. ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, Τόμος Τρίτος, (σελ. 504, 2005).
   (Διανυσματική Ανάλυση, Σειρές Fourier, Μιγαδικές Συναρτήσεις, Διαφορικές Εξισώσεις, Εξισώσεις Διαφορών)

Ε. *Τοπολογία*

1. ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ (*Ασκήσεις*), (σελ. 400, 1977).
2. ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ ΜΕΤΡΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ (σελ. 336, 2009).

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η Μαθηματική Ανάλυση καταλαμβάνει μεγάλη έκταση στο χώρο της Μαθηματικής Επιστήμης με πολλούς ειδικούς κλάδους, και κατά την ανάπτυξή της γίνεται όλο και πιο περίπλοκη, με τη χρήση πολλών ορισμών και θεωρημάτων.

Για να αμβλυνθούν αυτές οι δυσχέρειες έγινε προσπάθεια να αποκαλυφθούν οι θεμελιώδεις αρχές πάνω στις οποίες βασίζεται η Μαθηματική Ανάλυση. Αυτό συνετέλεσε στη δημιουργία και στην ανάπτυξη της Τοπολογίας ως βασικού εισαγωγικού κλάδου της, πάνω στην οποία στηρίχθηκαν πολλές αποδείξεις των θεωρημάτων της. Κατορθώθηκε έτσι να δοθούν απλούστερες αποδείξεις και βαθύτερες ερμηνείες τους, καθώς τα θεωρήματα διατυπώνονταν σε γενικότερες μορφές.

Ειδικότερα, δόθηκε μεγαλύτερη ανάλυση του χώρου των πραγματικών και μιγαδικών αριθμών, που αποτελούν τον πυρήνα της Μαθηματικής Ανάλυσης, η οποία βασικά ενδιαφέρεται για την έννοια του ορίου και της συνέχειας.

Ιστορικά οι έννοιες αυτές τέθηκαν από του αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς στην προσπάθειά τους να ορίσουν την έννοια του αριθμού.

Τον 19$^{\text{ο}}$ αιώνα οι Cauchy, Abel και Riemann έθεσαν αναλυτικά τις έννοιες της σύγκλισης ακολουθίας και σειράς, του χώρου πολλών διαστάσεων και του χώρου των συναρτήσεων.

Η βαθειά γνώση της πραγματικής ευθείας (τομές Dedekind), των πραγματικών συναρτήσεων (Riemann, Weierstrass), βοήθησαν ώστε η μαθηματική γλώσσα να γίνει ακριβής και γενική (Cantor).

Η μελέτη των γραμμικών συναρτήσεων συνετέλεσε στη δημιουργία της Συναρτησιακής Ανάλυσης (Ascoli, Hilbert).

Οι μετρικοί χώροι διευκολύνουν τη μελέτη της ομοιόμορφης συνέχειας και της ομοιόμορφης σύγκλισης, καθώς και τις έννοιες του ορίου και της συνέχειας συνάρτησης.

Πράγματι, το όριο και η συνέχεια συνάρτησης, αντίστοιχα,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \ , \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

προϋποθέτουν ότι οι τιμές x πλησιάζουν την τιμή x_0 και οι τιμές $f(x)$ πλησιάζουν κάποιον αριθμό ή τον $f(x_0)$, αντίστοιχα.

Αλλ' όμως η φράση «πλησιάζω κάτι» εμπεριέχει την έννοια της απόστασης και συνήθως θεωρούμε ως τέτοια την ευκλείδεια απόσταση (π.χ. στην πραγματική ευθεία είναι η απόλυτη τιμή της διαφοράς δύο αριθμών).

Εξαρτάται λοιπόν το όριο και η συνέχεια από την απόσταση που χρησιμοποιούμε στο χώρο; Ναι, όταν οι αποστάσεις δεν είναι τοπολογικά ισοδύναμες.

Βέβαια, οι έννοιες «σύγκλιση ακολουθίας», «συνέχεια συνάρτησης», γενικεύονται σε τοπολογικούς χώρους (που δεν είναι μετρικοί χώροι), με τη χρησιμοποίηση των «ανοικτών συνόλων» και των «ανοικτών περιοχών ενός σημείου», αντί των «ανοικτών σφαιρικών περιοχών» των μετρικών χώρων.

Υπάρχουν όμως αποτελέσματα που δεν ισχύουν, π.χ. η μοναδικότητα του ορίου συγκλίνουσας ακολουθίας, το οριακό σημείο ακολουθίας ως όριο υπακολουθίας της και η συνέχεια συνάρτησης σε σημείο με τη χρήση ακολουθιών.

Ακόμη οι έννοιες «ομοιόμορφη συνέχεια», «πλήρης μετρικός χώρος», επειδή εξαρτώνται από τη μετρική, δεν μπορούν να γενικευθούν σε τοπολογικούς χώρους (που δεν είναι μετρικοί χώροι).

Βέβαια, με την αντικατάσταση της ακολουθίας με την έννοια του φίλτρου και του δικτύου, και την κατάλληλη ανάπτυξη θεωρίας ειδικών χώρων (π.χ. οι ομοιόμορφοι χώροι), είναι δυνατή η γενίκευση της ομοιόμορφης συνέχειας και της πληρότητας.

Σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών (όπως π.χ. η Γεωμετρία) είναι χρήσιμο να ορίζεται μια κατάλληλη μετρική (απόσταση) η οποία να εκφράζεται σε στοιχεία αφηρημένων χώρων.

Ο σκοπός του βιβλίου είναι μια βασική ανάπτυξη των τοπολογικών μετρικών χώρων, η οποία βοηθάει και στη μελέτη των τοπολογικών δομών, γενικότερα.

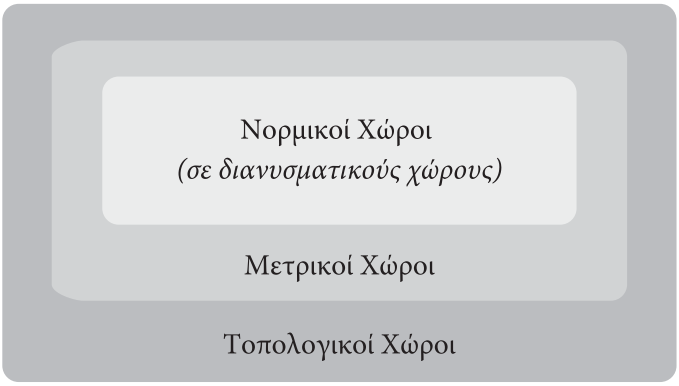
Βασικό κεφάλαιο είναι το πρώτο, γι' αυτό η πλήρης γνώση των εννοιών του είναι απαραίτητη για τα επόμενα κεφάλαια.

Υπάρχουν πολλά αξιόλογα βιβλία Τοπολογίας, αλλά εδώ θ' αναφερθώ σ' αυτά της βιβλιογραφίας του βιβλίου.

Μια λεπτομερής παρουσίαση των θεμάτων της Τοπολογίας γίνεται στα Ελληνόγλωσσα βιβλία [1], [7], [9], [11], [12], [14], όπου το [9] είναι βιβλίο λυμένων ασκήσεων (σε πολλά θέματα της Τοπολογίας), και τα ξενόγλωσσα βιβλία [2], [3], [10], [13].

Πιο προχωρημένα είναι τα βιβλία [4], [5], [6], [8].

ΣΧΕΔΙΑΓΡΑΜΜΑ



Βασική διαίρεση των τοπολογικών χώρων

Μια κλάση τ υποσυνόλων ενός χώρου X λέγεται *τοπολογία στο* X, αν γι' αυτήν ισχύουν:

i) το κενό σύνολο $\varnothing$ και το X ανήκουν στην τ,

ii) η τομή πεπερασμένου πλήθους συνόλων της τ ανήκει στην τ,

iii) η ένωση οσωνδήποτε συνόλων της τ ανήκει στην τ.

Το ζεύγος (X,τ) λέγεται *τοπολογικός χώρος* και τα σύνολα της τ είναι *τα ανοικτά* σύνολά του.

Ένας τοπολογικός χώρος (X,τ) λέγεται *μετρικοποιήσιμος*, αν υπάρχει μία τουλάχιστον μετρική d στο X τέτοια ώστε $\tau=\tau_d$.

Αν έχουμε δύο τοπολογίες τ_1 και τ_2 στο χώρο X για τις οποίες ισχύει $\tau_1 \subset \tau_2$, $(\tau_1 \neq \tau_2)$, τότε η τ_1 λέγεται *ασθενέστερη* της τ_2 και η τ_2 λέγεται *ισχυρότερη* της τ_1.

Η τοπολογία $\tau=\{\varnothing, X\}$ είναι η ασθενέστερη όλων των τοπολογιών και η τοπολογία $\tau_o=P(X)=\{$σύνολο όλων των υποσυνόλων του $X\}$, που λέγεται *διακεκριμένη τοπολογία*, είναι η ισχυρότερη όλων των τοπολογιών στο χώρο X.

Μια σύντομη παρουσίαση της *Γενικής Τοπολογίας* γίνεται στα βιβλία [7], Κεφ. 8, [14], Μέρος ΙΙ, ενώ μια αναλυτική παρουσίασή της γίνεται στα βιλία [4], [5], [6], [8].

1

ΜΕΤΡΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ
ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ ΜΕΤΡΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ

1 Μετρικοί χώροι – Νορμικοί χώροι

Θεωρούμε ένα χώρο X του οποίου τα στοιχεία τα λέμε *σημεία* και τα συμβολίζουμε π.χ. $x, y, z \in X$.

Για να έχει νόημα η έκφραση «το x τείνει στο x_0», δηλαδή το x πλησιάζει το x_0, πρέπει στο χώρο X να είναι ορισμένη μια απόσταση (ή μετρική) μεταξύ των σημείων του.

Θα δώσουμε λοιπόν τον ορισμό της μετρικής (ή απόστασης) σ' έναν χώρο X.

Μία συνάρτηση

$$d : X \times X \to \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

όπου $\mathbb{R}$ οι πραγματικοί αριθμοί, είναι μια *μετρική* (ή *απόσταση*) στο χώρο X όταν ικανοποιεί τα παρακάτω τρία αξιώματα:

$[M_1]$ $\quad d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$,

$[M_2]$ $\quad d(x, y) = d(y, x)$, $\quad \forall x, y \in X$ $\quad$ (συμμετρική ιδιότητα),

$[M_3]$ $\quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, $\quad \forall x, y, z \in X$ $\quad$ (τριγωνική ανισότητα).

Ανισότητα του Minkowski

Για την απόδειξη του αξιώματος $[M_3]$ χρησιμοποιείται πολλές φορές η *ανισότητα του Minkowski* (Παράρτημα, §5)

$$\Big[|\alpha_1 + \beta_1|^p + \ldots + |\alpha_n + \beta_n|^p\Big]^{\frac{1}{p}} \leq \Big[|\alpha_1|^p + \ldots + |\alpha_n|^p\Big]^{\frac{1}{p}} + \Big[|\beta_1|^p + \ldots + |\beta_n|^p\Big]^{\frac{1}{p}},$$

όπου $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ ή $\mathbb{C}^n$ και $p \geq 1$.

Ευκλείδειες μετρικές (ή αποστάσεις)

Στους πραγματικούς αριθμούς $\mathbb{R}$ η ευκλείδεια απόσταση είναι η απόλυτη τιμή της διαφοράς δύο αριθμών $x, y \in \mathbb{R}$:

$$d(x, y) = |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Η ευκλείδεια απόσταση δύο σημείων $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ του επιπέδου $\mathbb{R}^2$ είναι

$$d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2,$$

ενώ δύο σημείων $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ του χώρου $\mathbb{R}^3$ είναι

$$d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3.$$

- Γενικότερα, η *ευκλείδεια απόσταση* δύο σημείων

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

του χώρου $\mathbb{R}^n$ είναι

$$d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Όταν λέμε *ο ευκλείδειος χώρος* $\mathbb{R}^n$ εννοούμε ότι ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^n$ είναι εφοδιασμένος με την ευκλείδεια απόσταση d_2 που ορίσαμε πιο πάνω.

Στο χώρο $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ ορίζονται συνήθως και οι παρακάτω αποστάσεις (ή μετρικές):

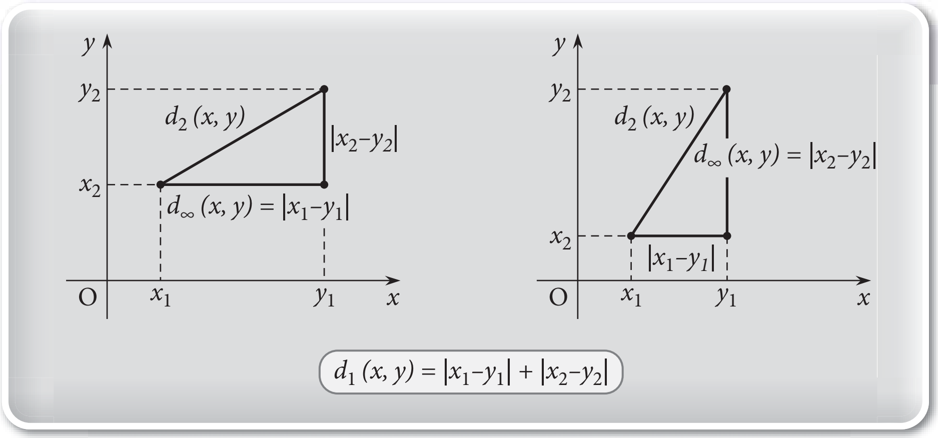
$$d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \ldots + |x_n - y_n|,$$
$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \ldots, |x_n - y_n|\},$$

για κάθε $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ του $\mathbb{R}^n$.

Για $n = 1$ και οι τρεις μετρικές d_2, d_1, d_∞ συμπίπτουν με τη μετρική

$$d(x, y) = |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Οι πραγματικοί αριθμοί $\mathbb{R}$ μ' αυτήν τη μετρική λέγονται *πραγματική ευθεία* $\mathbb{R}$.



Οι μετρικές $d_2,\ d_1,\ d_\infty$ *στο επίπεδο* $\mathbb{R}^2 (n=2)$

Γενικότερα, με τη βοήθεια της ανισότητας του Minkowski, αποδεικνύεται ότι η απεικόνιση

$$\begin{array}{l} x=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n), \\ y=(y_1, y_2,\ \ldots,\ y_n)\in\mathbb{R}^n \end{array} \quad \to \quad d_p(x,\ y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p\geq 1$$

ορίζει μετρική στο $\mathbb{R}^n$.

Απ' αυτήν τη μετρική, για $p=1$, $p=2$ και $p \to +\infty$, προκύπτουν οι προηγούμενες μετρικές

$$d_1(x,\ y),\quad d_2(x,\ y),\quad d_\infty(x,\ y)=\lim_{p\to+\infty} d_p(x,\ y)\,.$$

(Ισχύει $d_\infty(x,\ y)\leq d_p(x,\ y)\leq n^{\frac{1}{p}} d_\infty(x,\ y)$ και πάρτε $p \to +\infty$.)

Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις $d_2,\ d_1,\ d_\infty$ ικανοποιούν τα τρία αξιώματα της μετρικής. (Για την d_2 και το αξίωμα $[M_3]$ χρησιμοποιείστε την ανισότητα του Minkowski, για $p=2$). ■

Όταν ο χώρος X είναι επί πλέον *διανυσματικός χώρος* στο σώμα $K=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, δηλαδή ισχύουν οι ιδιότητες

$$\forall x,\ y \in X \quad \Rightarrow \quad x+y \in X$$
$$\forall \lambda \in K,\ \forall x \in X \quad \Rightarrow \quad \lambda x \in X$$

τότε η συνάρτηση $p\colon X \to \mathbb{R}^{+} = \{x \in \mathbb{R}\colon x \geq 0\}$ που ικανοποιεί τα τρία αξιώματα:

[N_1] $p(x)=0 \Leftrightarrow x=O$, O μηδενικό στοιχείο του X,

[N_2] $p(\lambda x)=|\lambda|\, p(x)$, $\forall \lambda \in K$, $\forall x \in X$ (ομοθεσία),

[N_3] $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$, $\forall x, y \in X$ (ανισότητα κυρτότητας),

λέγεται *νορμική* στο διανυσματικό χώρο X.

Συνήθως γράφουμε $p(x)=\|x\|$, $\forall x \in X$.

Μια χρήσιμη διπλή ανισότητα της νορμικής είναι

$$\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x-y\| \leq \|x\| + \|y\|, \qquad \forall x, y \in X$$

και προκύπτει από τα αξιώματα [N_2], [N_3].

- Στους πραγματικούς αριθμούς $\mathbb{R}$ ορίζεται η νορμική

$$x \to p(x)=|x|, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \textit{(απόλυτη τιμή)},$$

στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ ορίζεται η νορμική

$$x \to p_2(x)=\|x\|_2=\sqrt{x_1^2+x_2^2}, \qquad x=(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

στο χώρο $\mathbb{R}^3$ ορίζεται η νορμική

$$x \to p_2(x)=\|x\|_2=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}, \qquad x=(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

και στο χώρο $\mathbb{R}^n$ ορίζεται η νορμική (ευκλείδεια νορμική)

$$x \to p_2(x)=\|x\|_2=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}, \qquad x=(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Φυσική απόσταση (ή μετρική)

Όταν ορίζεται μια νορμική σ' ένα διανυσματικό χώρο X τότε απ' αυτήν στο χώρο X παράγεται *η φυσική απόσταση (ή μετρική)* από τη σχέση

$$d(x,y)=\|x-y\|, \quad \forall x,\ y \in X.$$

Από μια νορμική προκύπτει πάντοτε μια μετρική στο διανυσματικό χώρο X, αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε.

- Από μία μετρική d σε διανυσματικό χώρο προκύπτει μια νορμική όταν αυτή ικανοποιεί τις παρακάτω δύο ιδιότητες:

  i) $d(x+z,\ y+z)=d(x,\ y)$ (αμεταβλητότητα ως προς τη μεταφορά),

  ii) $d(\lambda x,\ \lambda y)=|\lambda| d(x,\ y)$ (ομοθεσία ως προς αριθμητική παράμετρο).

Πράγματι, τότε η συνάρτηση

$$x \to d(O, x)=\|x\|, \quad \forall x \in X$$

ορίζει μία νορμική, οπότε η μετρική d είναι φυσική απόσταση επειδή γράφεται

$$d(x,\ y)=d(x-x,\ y-x)=d(O,\ y-x)=d(O,\ x-y)=\|x-y\|$$

για κάθε $x,\ y \in X$. ■

- Στο χώρο $\mathbb{R}^n$ ορίζονται συνήθως και οι παρακάτω νορμικές

$$\|x\|_1=|x_1|+|x_2|+\ \dots\ +|x_n|$$

$$\|x\|_\infty=\max\{|x_1|,\ |x_2|,\ \dots,\ |x_n|\}$$

για κάθε $x=(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)\in\mathbb{R}^n$.

- Παρατηρούμε ότι από τις νορμικές

$$|x|(n=1), \quad \|x\|_2, \quad \|x\|_1, \quad \|x\|_\infty, \qquad x\in\mathbb{R}^n,\ n\geq 1,$$

προκύπτουν οι μετρικές που ορίσαμε προηγουμένως

$$d(x,\ y)=|x-y|(n=1),\ d_1(x,\ y),\ d_2(x,y),\ d_\infty(x,y), \quad \forall x,\ y\in\mathbb{R}^n,$$

οπότε αυτές είναι φυσικές αποστάσεις (μετρικές) στο $\mathbb{R}^n$, $n\geq 1$.
Γενικότερα, με τη βοήθεια της ανισότητας του Minkowski αποδεικνύεται ότι η απεικόνιση

$$x=(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)\in\mathbb{R}^n \ \to\ \|x\|_p=\left[\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}, \qquad p\geq 1$$

ορίζει μία νορμική στο $\mathbb{R}^n$.
Απ' αυτήν τη νορμική, για $p=1$, $p=2$ και $p\to+\infty$, προκύπτουν οι προηγούμενες νορμικές

$$\|x\|_1,\ \|x\|_2,\ \|x\|_\infty=\lim_{p\to+\infty}\|x\|_p.$$

(Ισχύει $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$ και πάρτε $p \to +\infty$.)

Παρατηρήσεις

α) Μια μετρική d ορίζεται σε τυχαίο χώρο X και ο χώρος X μαζί με τη μετρική d λέγεται *(τοπολογικός) μετρικός χώρος* και σημειώνεται (X, d).

Μια νορμική $\|\cdot\|$ ορίζεται *σε διανυσματικό χώρο* X και ο διανυσματικός χώρος X μαζί με τη νορμική $\|\cdot\|$ λέγεται *νορμικός χώρος* και σημειώνεται $(X, \|\cdot\|)$.

Επομένως, οι διανυσματικοί νορμικοί χώροι αποτελούν ένα γνήσιο υποσύνολο του συνόλου των μετρικών χώρων.

β) Αν είναι (X, d) μετρικός χώρος και $Y \subset X$, τότε η συνάρτηση

$$d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}^+, \quad \text{με} \quad d_Y(x, y) = d(x, y), \quad \forall x, y \in Y$$

ορίζει μετρική στο Y που λέγεται *επαγόμενη της* d.

Ο μετρικός χώρος (Y, d_Y) λέγεται *υποχώρος* του (X, d).

Προσοχή! Αν $(X, \|\cdot\|)$ είναι νορμικός χώρος και $Y \subset X$ τότε ορίζεται, όπως προηγουμένως, μετρικός χώρος στο Y με τη φυσική μετρική

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad \forall x, y \in Y,$$

αλλά για να ορισθεί νορμικός υποχώρος $(Y, \|\cdot\|)$, πρέπει ο Y να είναι διανυσματικός υποχώρος του X.

γ) ***Διακεκριμένος μετρικός χώρος***

Σε κάθε μη κενό σύνολο X μπορεί να ορισθεί η μετρική

$$\forall x, y \in X, \quad d_0(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = y, \\ 1, & \text{αν } x \neq y, \end{cases}$$

που λέγεται *διακεκριμένη μετρική.*

Άρα, κάθε μη κενός χώρος X γίνεται μετρικός χώρος (X, d_0) που λέγεται *διακεκριμένος μετρικός χώρος.*

- Όταν ο X είναι επιπλέον διανυσματικός χώρος (π.χ. $X = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$), τότε για το μετρικό χώρο (X, d_0) ισχύει

$$\forall x \neq y \quad \text{και} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \text{με} \quad \lambda \neq 0, \ \lambda \neq \pm 1$$

$$d_0(\lambda x, \lambda y) = 1 \neq |\lambda| d(x, y) = |\lambda| .$$

Επομένως, η διακεκριμένη μετρική d_0 δεν είναι φυσική απόσταση, δηλαδή δεν προκύπτει από κάποια νορμική στο διανυσματικό χώρο X.

Ψευδομετρική

Σε σύνολο X με παραπάνω από ένα στοιχεία, η συνάρτηση

$$d' : X \times X \to \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

που πληροί τα αξιώματα:

$$\begin{array}{lll} [M_1'] & d'(x,x) = 0 , & \forall x \in X \\ [M_2] & d'(x, y) = d'(y, x) , & \forall x, y \in X \\ [M_3] & d'(x, z) \leq d'(x, y) + d'(y, z) , & \forall x, y, z \in X \end{array}$$

λέγεται *ψευδομετρική* στο X.

Η διαφορά από την έννοια της μετρικής είναι:
η ψευδομετρική d' μπορεί να μηδενίζεται σε δύο διαφορετικά σημεία, δηλαδή μπορεί να υπάρχουν σημεία $x \neq y$, με $d'(x, y) = 0$.

Για παράδειγμα, αν έχουμε $f : X \to \mathbb{R}$ μια πραγματική συνάρτηση, τότε η απεικόνιση

$$d' : X \times X \to \mathbb{R}^+ ,$$

όπου $d'(x, y) = |f(x) - f(y)|$, $\forall x, y \in X$, ορίζει μια ψεδομετρική στο X, επειδή μπορεί να υπάρχουν σημεία $x_0, y_0 \in X$, με $x_0 \neq y_0$, τέτοια ώστε

$$f(x_0) = f(y_0) ,$$

οπότε είναι $d'(x_0, y_0) = 0$, με $x_0 \neq y_0$.

- Όταν όμως η συνάρτηση f είναι αμφιμονότιμη, τότε η d' ορίζει μετρική στο χώρο X.

Επεκτεταμένη πραγματική ευθεία

Θεωρούμε το επεκτεταμένο σύνολο $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ των πραγματικών αριθμών, όπου $\mathbb{R}$ είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Η απεικόνιση $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, όπου

$$\forall x, y \in \mathbb{R} , \quad d(x, y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|$$

ορίζει μια μετρική στο $\mathbb{R}$.

Πράγματι, η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$, $x\in\mathbb{R}$ είναι αμφιμονότιμη (γνήσια αύξουσα) συνάρτηση του $\mathbb{R}$ επί του ανοικτού διαστήματος $(-1,\ +1)$.

Παρατηρείστε ότι

$$f'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}>0\,,\quad \forall x\geq 0 \quad \text{και} \quad f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}>0\,,\quad \forall x\leq 0\,,$$

ενώ είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$.

$[M_1]$ Θα δείξουμε ότι $d(x,\,y)=0 \Leftrightarrow x=y$.

Έχουμε

$$d(x,\,y)=0 \Leftrightarrow \frac{x}{1+|x|}-\frac{y}{1+|y|}=0 \Leftrightarrow x(1+|y|)=y(1+|x|)$$

και η τελευταία ισότητα ισχύει μόνον όταν οι $x,\ y$ είναι ομόσημοι $(xy>0)$.

Άρα, έχουμε

$$x(1+y)=y(1+x)\,,\quad \text{αν} \quad x>0\,,\ y>0$$
$$x(1-y)=y(1-x)\,,\quad \text{αν} \quad x<0\,,\ y<0$$

απ' όπου προκύπτει η ισότητα $x=y$. (Άρα, η f είναι αμφιμονότιμη).

Το αντίστροφο είναι προφανές.

$[M_2]$ $d(x,\,y)=d(y,\,x)$, από την ιδιότητα της απόλυτης τιμής $|-\alpha|=|\alpha|$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

$[M_3]$ $d(x,\,z)\leq d(x,\,y)+d(y,\,z)$, από την ιδιότητα $|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Θα δείξουμε ότι η f είναι επί απεικόνιση, δηλαδή $f(\mathbb{R})=(-1,\ 1)$.

Προφανώς ισχύει $f(0)=0$.

Αν είναι

$$y=f(x)>0 \quad \Rightarrow y=\frac{x}{1+|x|}\,,\quad x>0 \Rightarrow y=\frac{x}{1+x}\,,\quad x>0$$
$$\Rightarrow x=\frac{y}{1-y}=\frac{y}{1-|y|}\,,\quad y\in(0,1)\,.$$

Αν είναι

$$y=f(x)<0 \quad \Rightarrow y=\frac{x}{1+|x|}\,,\quad x<0 \Rightarrow y=\frac{x}{1-x}\,,\quad x<0$$

$$\Rightarrow \ x=\frac{y}{1+y}=\frac{y}{1-|y|}, \quad y\in(-1, 0).$$

Επεκτείνουμε το σύνολο $\mathbb{R}$ σ' ένα νέο σύνολο $\overline{\mathbb{R}}$ συμπεριλαμβάνοντας στο $\mathbb{R}$ τα δύο νέα επ' άπειρον σημεία $-\infty$ και $+\infty$, δηλαδή $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$.

Για να είναι και το νέο σύνολο $\overline{\mathbb{R}}$ ολικά διατεταγμένο θέτουμε

$$\forall x\in\mathbb{R}: \ -\infty<x<+\infty.$$

Επεκτείνουμε τη συνάρτηση f σε μια απεικόνιση του $\overline{\mathbb{R}}$ επί του $[-1, +1]$, αν ορίσουμε τις τιμές της f στα επ' άπειρον σημεία

$$f(-\infty)=-1, \quad f(+\infty)=1,$$

οπότε η f παραμένει μια γνήσια αύξουσα (αμφιμονότιμη) συνάρτηση του $\overline{\mathbb{R}}$ επί του κλειστού διαστήματος $[-1, +1]$.

Άρα η μετρική d επεκτείνεται και στο $\overline{\mathbb{R}}$, με τιμές

$$d(-\infty, +\infty)=2, \qquad d(x, -\infty)=\left|\frac{x}{1+|x|}+1\right|, \qquad d(x, +\infty)=\left|\frac{x}{1+|x|}-1\right|$$

που προκύπτουν ως όρια, όταν

$$(x\to-\infty, x\to+\infty), \quad (y\to-\infty), \quad (y\to+\infty),$$

αντίστοιχα, και σημειώνεται με $\overline{d}$.

Ο μετρικός χώρος $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{d})$ λέγεται *επεκτεταμένη πραγματική ευθεία* $\overline{\mathbb{R}}$.

Ο μετρικός χώρος $(\mathbb{R}, d)$ δεν είναι η πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$, αλλά μετρικός χώρος τοπολογικά ισοδύναμος μ' αυτήν (Κεφ. 1, §4, Παράδειγμα 1, β) και Κεφ. 2, §2.4).

- Μπορεί να χρησιμοποιηθεί αντί της συνάρτησης f η αμφιμονότιμη (γνήσια αύξουσα) συνάρτηση

$$g(x)=\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}, \qquad x\in\mathbb{R}.$$

- Παρατηρείστε ότι η ευκλείδεια μετρική $d(x,y)=|x-y|$, $\forall x, y\in\mathbb{R}$ δεν μπορεί να επεκταθεί στα επ' άπειρον σημεία $-\infty$ και $+\infty$.

  Π.χ. πόσο θα είναι η απόσταση $d(-\infty, +\infty)$, μ' αυτήν τη μετρική;

Παραδείγματα

1. Αν (X, d) είναι μετρικός χώρος, δείξτε ότι οι συναρτήσεις

α) $d_1(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$, $\quad x, y \in X$

β) $d_2(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1+d(x, y)}$, $\quad x, y \in X$

ορίζουν επίσης μετρικές στο χώρο X.

➠ Θα δείξουμε ότι επαληθεύονται τα τρία αξιώματα της μετρικής.

α) $[M_1]$: Έχουμε $\quad d_1(x, x) = 0 \quad$ και $\quad d_1(x, y) = 0 \Rightarrow d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$.

$[M_2]$: Είναι $\quad d_1(x, y) = \min\{(1, d(x, y)\} = \min\{1, d(y, x)\} = d_1(y, x)$.

$[M_3]$: Παρατηρούμε ότι ισχύουν οι ανισότητες

$$d_1(x, z) = \min\{1, d(x, z)\} \le 1 \tag{1}$$

και

$$d_1(x, z) = \min\{1, d(x, z)\} \le d(x, z) \tag{2}$$

για κάθε $x, z \in X$.
Επομένως,

i) αν είναι $\quad d(x, y) \ge 1 \quad$ ή $\quad d(y, z) \ge 1$, $\quad$ λόγω της (1), ισχύει η σχέση

$$d_1(x, z) \le d_1(x, y) + d_1(y, z),$$

ii) αν είναι $\quad d(x, y) < 1 \quad$ και $\quad d(y, z) < 1$, $\quad$ λόγω της (2), ισχύει

$$d_1(x, z) \le d_1(x, y) + d_1(y, z),$$

επειδή εδώ είναι $\quad d_1(x, y) = d(x, y)$, $\ d_1(y, z) = d(y, z) \quad$ και

$$d_1(x, z) \le d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z), \qquad \forall x, y, z \in X.$$

β) $[M_1]$, $[M_2]$: Ισχύουν επειδή

$$d(x, x) = 0 \quad \text{και} \quad d(x,y) = d(y, x), \quad \forall x, y \in X,$$

αφού η d είναι μετρική στο χώρο X.
$[M_3]$: Έχουμε

$$d_2(x, z) = \frac{d(x, z)}{1+d(x, z)} \le \frac{d(x, y)+d(y, z)}{1+d(x, y)+d(y, z)}, \qquad \forall x, y, z \in X$$

επειδή η συνάρτηση $\varphi(x)=\dfrac{x}{1+x}$, $x\geq 0$ είναι γνήσια αύξουσα στο $[0,\ +\infty)$ (είναι $\varphi(0)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=1$ και $\varphi'(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}>0$, $\forall x\geq 0$).

Προφανώς όμως ισχύει η ανισότητα

$$\frac{d(x,\ y)+d(y,\ z)}{1+d(x,\ y)+d(y,\ z)}\leq\frac{d(x,\ y)}{1+d(x,\ y)}+\frac{d(y,\ z)}{1+d(y,\ z)}\,,\qquad \forall x,\ y,\ z\in X$$

πράγμα που αποδεικνύει το αξίωμα $[M_3]$ για τη μετρική d_2.

2. Επί του χώρου X έχουμε τις μετρικές $d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_n$. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις που ορίζονται από τις σχέσεις:

α) $D_1(x,\ y)=\max\{d_1(x,\ y),\ \ldots,\ d_n(x,\ y)\}$,

β) $D_2(x,\ y)=d_1(x,\ y)+\ \ldots\ +d_n(x,\ y)$,

γ) $D_3(x,\ y)=[d_1^2(x,\ y)+\ \ldots\ +d_n^2(x,\ y)]^{\frac{1}{2}}$,

για κάθε $x,\ y\in X$, ορίζουν μετρικές στο X.

α) $[M_1]$, $[M_2]$ είναι προφανή.

$[M_3]$: Επειδή από κάθε πεπερασμένο πλήθος πραγματικών αριθμών μπορούμε να προσδιορίσουμε το μέγιστο (και το ελάχιστο), έχουμε (m ένα από τα $1,\ 2,\ \ldots,\ n$)

$$\begin{aligned}D_1(x,\ z)=d_m(x,\ z)&\leq d_m(x,\ y)+d_m(y,\ z)\\&\leq\max\{d_1(x,y),\ \ldots,\ d_n(x,y)\}+\max\{d_1(y,z),\ \ldots,\ d_n(y,z)\}\\&\leq D_1(x,y)+D_1(y,z)\,.\end{aligned}$$

β) $[M_1]$, $[M_2]$ είναι προφανή.

$[M_3]$: Έχουμε

$$\begin{aligned}D_2(x,z)&=\sum_{i=1}^{m}d_i(x,z)\leq\sum_{i=1}^{n}[d_i(x,y)+d_i(y,z)]\\&=\sum_{i=1}^{n}d_i(x,\ y)+\sum_{i=1}^{n}d_i(y,z)=D_2(x,y)+D_2(y,z)\,.\end{aligned}$$

γ) $[M_1]$, $[M_2]$ είναι προφανή

$[M_3]$: Έχουμε

$$D_3(x,z)=\left[\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x,z)\right]^{\frac{1}{2}} \le \left[\sum_{i=1}^{n}\left[d_i(x,y)+d_i(y,z)\right]^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\le \left[\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x,y)\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{i=1}^{n} d_i^2(y,z)\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= D_3(x,\ y)+D_3(y,\ z)$$

σύμφωνα με την ανισότητα του Minkowski (για $p=2$).

- Επειδή η ανισότητα του Minkowski ισχύει για $p \ge 1$ και η γενικότερη συνάρτηση

$$D_p(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{n}(d_i(x,y))^p\right]^{\frac{1}{p}}, \quad p \ge 1$$

ορίζει επίσης μετρική στο χώρο X.

3. *Νορμικές σε χώρους ακολουθιών*

Θεωρούμε τους παρακάτω χώρους που τα στοιχεία τους (σημεία) είναι ακολουθίες (x_n) πραγματικών αριθμών:

i) l_1 είναι το σύνολο όλων των πραγματικών ακολουθιών, με $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|<+\infty$ (άρα είναι μηδενικές ακολουθίες),

ii) l_∞ είναι το σύνολο όλων των *φραγμένων* πραγματικών ακολουθιών,

iii) l_p $(p \ge 1)$ είναι το σύνολο όλων των πραγματικών ακολουθιών (x_n), με

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<+\infty .$$

➡ Τα σύνολα c_0 των μηδενικών ακολουθιών,
c των συγκλινουσών ακολουθιών
l_∞ των φραγμένων ακολουθιών

γίνονται όλα διανυσματικοί χώροι (γραμμικοί χώροι) με τις πράξεις της πρόσθε-

σης και του πολ/σμού με αριθμό:

$x=(x_n)$, $y=(y_n)$, τότε $x+y=(x_n+y_n)$,

$\lambda\in\mathbb{R}$, $x=(x_n)$, τότε $\lambda x=(\lambda x_n)$,

έχουμε

$$\forall x,\, y\in X \;\Rightarrow\; x+y\in X,$$

$$\forall\lambda\in\mathbb{R},\;\forall x\in X \Rightarrow \lambda x\in X$$

όπου X είναι το c_0 ή το c ή το l_∞.

Το σύνολο $l_p(p\geq 1)$ είναι επίσης διανυσματικός χώρος, επειδή για $\lambda\in\mathbb{R}$, $x=(x_n)$, $y=(y_n)$, $x,\, y\in l_p$ ισχύουν

$$\forall n\in\mathbb{N},\; |x_n+y_n|^p \leq (|x_n|+|y_n|)^p\leq 2^p(\max\{|x_n|,\,|y_n|\})^p\leq$$
$$\leq 2^p(|x_n|^p+|y_n|^p)$$

άρα $x+y\in l_p$ και προφανώς $\lambda x\in l_p$.

- Ο c_0 είναι διανυσματικός υποχώρος του c και ο c είναι διανυσματικός υποχώρος του l_∞.
  Επίσης, ο $l_p(p\geq 1)$ είναι διανυσματικός υποχώρος των $c_0,\, c,\, l_\infty$.
  Επομένως, σ' όλους αυτούς τους διανυσματικούς χώρους
  $$l_p,\; c_0,\; c,\; l_\infty$$
  μπορούν να ορισθούν νορμικές και απ' αυτές να παραχθούν οι αντίστοιχες φυσικές μετρικές.

- Δείξτε ότι οι απεικονίσεις:

  α) $\|\cdot\|_\infty : l_\infty \to \mathbb{R}^+$, όπου $\|x\|_\infty=\sup\{|x_n|,\; n\in\mathbb{N}\}$

  β) $\|\cdot\|_p : l_p \to \mathbb{R}^+$, $p\geq 1$, όπου $\|x\|_p=\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right]^{\frac{1}{p}}$

  ορίζουν νορμικές στους αντίστοιχους διανυσματικούς χώρους.

➠ **α)** Επειδή οι ακολουθίες (x_n) του l_∞ είναι φραγμένες το sup των $|x_n|$, $n\in\mathbb{N}$ υπάρχει, άρα είναι καλά ορισμένη η νορμική.

Οι ιδιότητες $[N_1]$, $[N_2]$ είναι προφανείς

Για την $[N_3]$ παρατηρούμε ότι, για $x=(x_n)$, $y=(y_n)\in l_\infty$, επειδή ισχύει

$$|x_n+y_n| \leq |x_n|+|y_n|, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

προκύπτει ότι $\|x+y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty, \quad \forall x, y \in l_\infty$.

β) Η απεικόνιση $\|x\|_p$, $x \in l_p$ είναι καλά ορισμένη νορμική αφού συγκλίνει η σειρά (από τον ορισμό του l_p, $p \geq 1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty .$$

Τα αξιώματα $[N_1]$, $[N_2]$ είναι προφανή (βλέπε τις ιδιότητες των σειρών θετικών όρων) και για το $[N_3]$ χρησιμοποιούμε τη γενικευμένη ανισότητα του Minkowski (για σειρές)

$$\left[\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i+\beta_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{i=1}^{\infty} |\beta_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1 .$$

- Από τις παραπάνω νορμικές προκύπτουν οι αντίστοιχες φυσικές μετρικές:

$$d_p(x, y) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x_n-y_n|^p\right]^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1$$

  στο χώρο l_p και

$$d_\infty(x, y) = \sup\{|x_n-y_n|, \ n \in \mathbb{N}\}$$

  στο χώρο l_∞.

- Για $p=2$ προκύπτει η μετρική

$$d_2(x, y) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x_n-y_n|^2\right]^{\frac{1}{2}}, \quad x, y \in l_2$$

  και ο μετρικός χώρος (l_2, d_2) λέγεται *χώρος του Hilbert*.

4. Να δειχθεί ότι, στο σύνολο S των πραγματικών ακολουθιών $x=(x_n)$, $x_n \in \mathbb{R}$, η απεικόνιση

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}, \quad \forall x, y \in S$$

ορίζει μετρική η οποία δεν προκύπτει από νορμική στο S.

Να δειχθεί επίσης ότι $\sup\{d(x,y)\,,\ x,y\in S\}=1$.

➠ Επειδή ισχύει

$$\frac{1}{2^n}\,\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}\le\frac{1}{2^n}\,,\qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ συγκλίνει (γεωμετρική σειρά), σύμφωνα με το κριτήριο σύγκρισης του Weierstrass και η δοσμένη σειρά συγκλίνει.

Άρα, η μετρική $d(x,y)$ είναι καλά ορισμένη.

Τα αξιώματα $[M_1]$, $[M_2]$ είναι προφανή.

Το $[M_3]$ προκύπτει από την ανισότητα (βλέπε Παρ. 1, β))

$$\begin{aligned}\frac{|x_n-z_n|}{1+|x_n-z_n|}&\le\frac{|x_n-y_n|+|y_n-z_n|}{1+|x_n-y_n|+|y_n-z_n|}=\\&=\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|+|y_n-z_n|}+\frac{|y_n-z_n|}{1+|x_n-y_n|+|y_n-z_n|}\\&\le\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}+\frac{|y_n-z_n|}{1+|y_n-z_n|}\,,\qquad\forall n\in\mathbb{N}\end{aligned}$$

απ' όπου παίρνουμε (από τις ιδιότητες των συγκλινουσών σειρών)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n-z_n|}{1+|x_n-z_n|}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|y_n-z_n|}{1+|y_n-z_n|}$$

δηλαδή $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)\,,\quad\forall x,y,z\in S$.

Αν θεωρήσουμε τις δύο ακολουθίες $x=(x_n)$, $y=(y_n)$, όπου είναι $x_n=2$, $y_n=0$, $\forall n\in\mathbb{N}$ και $\lambda=2$ τότε έχουμε

$$d(2x,\ 2y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|4-0|}{1+|4-0|}=\frac{4}{5}\,,$$

ενώ

$$2d(x,y)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|2-0|}{1+|2-0|}=\frac{4}{3}\,,$$

οπότε $d(2x,2y)\ne 2d(x,y)$.

Άρα, η μετρική αυτή δεν είναι φυσική μετρική, δηλαδή δεν προκύπτει από νορμική στο σύνολο S.

- Έχουμε την προφανή ανισότητα

$$d(x, y) \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 , \quad \forall x, y \in S$$

οπότε είναι $\sup\{d(x, y),\ x, y \in S\} \le 1$.

Αλλά για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\alpha \ge \frac{1}{\varepsilon} - 1$ και υπάρχουν $x', y' \in S$ τέτοια ώστε

$$|x'_n - y'_n| = \alpha , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

οπότε

$$d(x', y') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x'_n - y'_n|}{1 + |x'_n - y'_n|} = \frac{\alpha}{1+\alpha} .$$

Από την ανισότητα $\alpha \ge \frac{1}{\varepsilon} - 1$ προκύπτει ότι

$$1 - \varepsilon \le \frac{\alpha}{1+\alpha} = d(x', y') ,$$

οπότε είναι (από τον ορισμό του supremum)

$$\sup\{d(x, y),\ x, y \in S\} = 1 .$$

5. *Νορμικές σε χώρους συναρτήσεων*

α) Θεωρούμε το σύνολο $X = C([\alpha, \beta])$ όλων των πραγματικών συνεχών συναρτήσεων που ορίζονται στο $[\alpha, \beta]$.

Δείξτε ότι οι απεικονίσεις από το X στο $\mathbb{R}^+$:

i) $\|f\| = \sup\{|f(x)|,\ x \in [\alpha, \beta]\}$, $\quad f \in X$

ii) $\|f\|_p = \left[\int_\alpha^\beta |f(x)|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}}$, $\quad p \ge 1$, $f \in X$

ορίζουν νορμικές στο χώρο $X = C([\alpha, \beta])$.

β) Θεωρούμε το σύνολο $Y = C^1([\alpha, \beta])$ όλων των πραγματικών συνεχών συναρτήσεων, με συνεχή πρώτη παράγωγο στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Δείξτε ότι η απεικόνιση από το Y στο $\mathbb{R}^+$.

$$\|g\| = \sup\{|g(x)|,\ x \in [\alpha, \beta]\} + \sup\{|g'(x)|,\ x \in [\alpha, \beta]\}$$

ορίζει νορμική στο χώρο $Y = C^1([\alpha, \beta])$.

(Δείξτε ότι οι χώροι X, Y είναι διανυσματικοί χώροι.)

- Επειδή το διάστημα $[\alpha, \beta]$ είναι κλειστό και φραγμένο (συμπαγές) και οι συναρτήσεις f, g, g' συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ όλες οι παραπάνω νορμικές είναι καλά ορισμένες.
  Πράγματι, όλα τα supremum υπάρχουν και ορίζονται τα ολοκληρώματα στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

α) Θα δείξουμε ότι ικανοποιούνται τα τρία αξιώματα.

$[N_1]$ $\|O\|=0$, όπου $O\colon [\alpha, \beta] \to \{0\}$, ενώ $\|f\|=0 \Rightarrow f(x)=0$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$

οπότε $f=O$ με το μηδενικό στοιχείο του διανυσματικού χώρου $X=C([\alpha, \beta])$.

$$[N_2]\colon \|\lambda f\| = \sup\{|\lambda f(x)|,\ x\in[\alpha,\beta]\} = \sup\{|\lambda||f(x)|,\ x\in[\alpha,\beta]\} =$$

$$= |\lambda| \sup\{|f(x)|,\ x\in[\alpha,\beta]\} = |\lambda|\|f\|,\quad \lambda\in\mathbb{R}, f\in X.$$

$$[N_3]\colon \|f_1+f_2\| = \sup\{|f_1(x)+f_2(x)|,\ x\in[\alpha,\beta]\} = |f_1(x_0)+f_2(x_0)|$$

για κάποιο $x_0 \in [\alpha, \beta]]$ (Θεώρημα Weierstrass), επειδή η συνάρτηση $|f_1+f_2|$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

Άρα, έχουμε

$$\|f_1+f_2\| = |f_1(x_0)+f_2(x_0)| \le |f_1(x_0)| + |f_2(x_0)|$$

$$\le \sup\{|f_1(x)|,\ x\in[\alpha,\beta]\} + \sup\{|f_2(x)|,\ x\in[\alpha,\beta]\} = \|f_1\|+\|f_2\|.$$

ii) Οι συναρτήσεις $|f|^p$ είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$, οπότε είναι ολοκληρώσιμες στο $[\alpha, \beta]$.

$$[N_1]\colon \|O\|=0 \quad \text{και} \quad \|f\|=0 \Rightarrow \int_\alpha^\beta |f(x)|^p\,dx = 0.$$

Αν η $F(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$ είναι αρχική της $|f|^p$ θα έχουμε

$$\int_\alpha^t |f(x)|^p\,dx = F(t)-F(\alpha), \qquad \forall t\in[\alpha,\beta]$$

και επειδή ισχύει

$$0 \le \int_\alpha^t |f(x)|^p\,dx \le \int_\alpha^t |f(x)|^p\,dx + \int_t^\beta |f(x)|^p\,dx = \int_\alpha^\beta |f(x)|^p\,dx = 0, \qquad t\in[\alpha,\beta],$$

προκύπτει $\int_\alpha^t |f(x)|^p\,dx = 0$, $t\in[\alpha,\beta] \Rightarrow F(t)=F(\alpha)$, $\forall t\in[\alpha,\beta]$.

Άρα, η F είναι σταθερή στο $[\alpha,\beta]$, οπότε η $|f|^p$ είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν στο $[\alpha,\beta]$, δηλαδή $f=O$ το μηδενικό στοιχείο του διανυσματικού χώρου X.

$[N_2]$: Είναι προφανής.

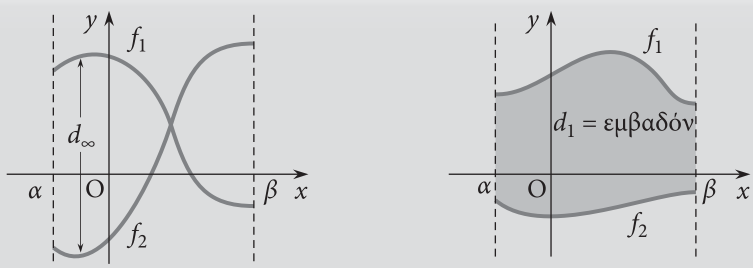
$[N_2]$: Χρησιμοποιούμε τη *γενικευμένη ανισότητα του Minkowski για τα ολοκληρώματα*: αν οι συναρτήσεις f_1, f_2 ανήκουν στο χώρο $C([\alpha,\beta])$ και είναι $p\geq 1$, τότε ισχύει η ανισότητα

$$\left[\int_\alpha^\beta |f_1(x)+f_2(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int_\alpha^\beta |f_1(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_\alpha^\beta |f_2(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}}, \qquad p\geq 1\,.$$

Το $[N_3]$ είναι λοιπόν άμεση συνέπεια αυτής της ανισότητας

Ειδικά, για $p=1$ προκύπτει η νορμική στο $C([\alpha,\beta])$

$$\|f\|_1 = \int_\alpha^\beta |f(x)|dx\,.$$



$d_\infty(f_1, f_2) = sup\{|f_1(x)-f_2(x)|,\ x\in[\alpha,\beta]\}$
(μέγιστη απόσταση μεταξύ των καμπύλων)

$d_1(f_1, f_2) = \int_\alpha^\beta |f_1(x)-f_2(x)|\,dx$
(εμβαδόν μεταξύ των καμπύλων)

- Απ' αυτές τις νορμικές προκύπτουν οι φυσικές μετρικές στο χώρο $X=C([\alpha,\beta])$:

$$d_\infty(f_1,f_2)=\sup\{|f_1(x)-f_2(x)|,\ x\in[\alpha,\beta]\} \quad , \qquad \forall f_1,f_2\in X\,,$$

$$d_p(f_1,f_2)=\left[\int_\alpha^\beta |f_1(x)-f_2(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}},\quad p\geq 1 \quad , \qquad \forall f_1,f_2\in X\,.$$

β) Τα $[N_1]$, $[N_2]$ αποδεικνύονται ανάλογα όπως στην περίπτωση α), i).

$[N_3]$: Σύμφωνα με το Θεώρημα του Weierstrass έχουμε

$$\begin{aligned}\|g_1+g_2\| &= |g_1(x_0)+g_2(x_0)|+|g_1'(x_1)+g_2'(x_1)| \le \\ &\le |g_1(x_0)|+|g_2(x_0)|+|g_1'(x_1)|+|g_2'(x_1)| \\ &= \left(|g_1(x_0)|+|g_1'(x_1)|\right)+\left(|g_2(x_0)|+|g_2'(x_1)|\right) \\ &\le \|g_1\|+\|g_2\| .\end{aligned}$$

Από τη νορμική αυτή προκύπτει η φυσική μετρική

$$\begin{aligned} d(g_1, g_2) = \sup\{|g_1(x)-g_2(x)|,\ x\in[\alpha,\beta]\} \\ + \sup\{|g_1'(x)-g_2'(x)|,\ x\in[\alpha,\beta]\}\end{aligned}$$

$\forall\, g_1, g_2 \in Y = C^1([\alpha,\beta])$.

6. Συμβολίζουμε με l το σύνολο όλων των πραγματικών ακολουθιών $x=(x_n)$ για τις οποίες η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει. Δείξτε ότι ο χώρος l είναι διανυσματικός (γραμμικός) και ότι η απεικόνιση

$$x\in l \;\to\; \|x\| = \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right|,\ n\in\mathbb{N}\right\}$$

ορίζει νορμική στο χώρο l.

➡ Αν έχουμε τις πραγματικές ακολουθίες $x=(x_n)$, $y=(y_n)$, $x_n, y_n\in\mathbb{R}$, με τις πράξεις $x+y=(x_n+y_n)$ και $\lambda x=(\lambda x_n)$, για $x,y\in l$ και $\lambda\in\mathbb{R}$ ο χώρος l γίνεται διανυσματικός.

Πράγματι, αν οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

συγκλίνουν, τότε επειδή ισχύει

$$|x_n+y_n| \le |x_n|+|y_n|\,, \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n+y_n)$ συγκλίνει, άρα είναι $x+y\in l$.

Προφανώς, $\lambda x \in l$ επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda x_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει επίσης.

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει σημαίνει ότι συγκλίνει η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων (S_n), όπου $S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, με $\lim_{x \to +\infty} S_n = \alpha$ και η ακολουθία των απολύτων τιμών $(|S_n|)$ συγκλίνει (ισχύει $\left| |S_n| - |\alpha| \right| \le |S_n - \alpha|$, $\forall n \in \mathbb{N}$), οπότε έχουμε

$$\lim_{n \to +\infty} |S_n| = |\alpha| \in \mathbb{R}^+, \quad \text{όπου} \quad |S_n| = |x_1 + x_2 + \ldots + x_n|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Επομένως, η ακολουθία $(|S_n|)$ είναι φραγμένη, οπότε υπάρχει το

$$\sup\{|S_n|,\ n \in \mathbb{N}\} = \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right|,\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

και ανήκει στο $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} :\ x \ge 0\}$, άρα η νορμική είναι καλά ορισμένη.

Θα δείξουμε ότι ικανοποιούνται τα τρία αξιώματα της νορμικής. $[N_1]$: $\|O\| = 0$, όπου $O = (0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ και

$$\|x\| = 0 \ \Rightarrow\ \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right|,\ n \in \mathbb{N}\right\} = 0$$

άρα

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

και επαγωγικά προκύπτει $x_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, οπότε $x = O$.

$[N_2]$: Είναι προφανής.

$[N_3]$: Έχουμε

$$\|x + y\| = \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)\right|,\ n \in \mathbb{N}\right\} < \left|\sum_{i=1}^{n_0} (x_i + y_i)\right| + \varepsilon, \qquad \varepsilon > 0$$

επειδή, σύμφωνα με τον ορισμό του supremum: $\forall \varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\|x + y\| - \varepsilon < \left|\sum_{i=1}^{n_0} (x_i + y_i)\right|.$$

Επομένως, ισχύουν οι ανισότητες

$$\begin{aligned}\|x+y\| &< \left|\sum_{i=1}^{n_0}(x_i+y_i)\right|+\varepsilon=\left|\sum_{i=1}^{n_0}x_i+\sum_{i=1}^{n_0}y_i\right|+\varepsilon \\ &\le \left|\sum_{i=1}^{n_0}x_i\right|+\left|\sum_{i=1}^{n_0}y_i\right|+\varepsilon \\ &\le \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}x_i\right|,\ n\in\mathbb{N}\right\}+\sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}y_i\right|,\ n\in\mathbb{N}\right\}+\varepsilon \\ &\Rightarrow \|x+y\|<\|x\|+\|y\|+\varepsilon, \quad \forall\varepsilon>0\end{aligned}$$

όπου το n_0 εξαρτάται κάθε φορά από την επιλογή του $\varepsilon>0$.

Άρα, θεωρώντας το $\varepsilon\to 0$, προκύπτει η τριγωνική ανισότητα

$$\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|, \quad \forall x,\, y\in l.$$

2 Ανοικτά και κλειστά σύνολα

Θεωρούμε το μετρικό χώρο (X, d), όπου $X\neq\varnothing$ και d μία μετρική στο χώρο X.

- *Ανοικτή σφαιρική περιοχή* κέντρου $\alpha\in X$ και ακτίνας $\varepsilon>0$ είναι το σύνολο των σημείων του X που έχουν απόσταση από το σημείο α μικρότερη του $\varepsilon>0$. Σημειώνεται $B(\alpha,\varepsilon)=\{x\in X,\ d(\alpha,x)<\varepsilon\}$.
- *Κλειστή σφαιρική περιοχή* κέντρου $\alpha\in X$ και ακτίνας $\varepsilon>0$ είναι το σύνολο των σημείων του X που έχουν απόσταση από το σημείο α μικρότερη ή ίση του $\varepsilon>0$. Σημειώνεται $\overline{B}(\alpha,\varepsilon)=\{x\in X,\ d(\alpha,x)\le\varepsilon\}$.
- *Σφαιρική επιφάνεια* κέντρου $\alpha\in X$ και ακτίνας $\varepsilon>0$ είναι το σύνολο των σημείων X που έχουν απόσταση από το σημείο α ίση με $\varepsilon>0$. Σημειώνεται $S(\alpha,\varepsilon)=\{x\in X,\ d(\alpha,x)=\varepsilon\}$.

Παρατήρηση

Γενικά, οι σφαιρικές περιοχές και οι σφαιρικές επιφάνειες σε τυχαίο μετρικό χώρο (X, d) δεν έχουν τις γεωμετρικές ιδιότητες των αντίστοιχων σφαιρικών περιοχών και σφαιρικών επιφανειών των Ευκλείδειων χώρων.

Ο όρος «σφαιρικές» προέκυψε από τον ευκλείδειο χώρο $(\mathbb{R}^3, d_2)$, όπου οι σφαιρικές περιοχές είναι σφαίρες.

Για τις σφαιρικές επιφάνειες, γενικά, δεν μπορούμε να πούμε ότι δεν είναι κενό σύνολο ούτε ότι δύο σφαιρικές επιφάνειες διαφορετικών κέντρων δεν είναι δυνατό να συμπίπτουν σε τυχαίο μετρικό χώρο (όχι νορμικό χώρο).

Παραδείγματα

1. Αν (X, d_0) είναι ο διακεκριμένος μετρικός χώρος (§1) με τη μετρική

$$d_0(x, y) = 0, \text{ αν } x = y \quad \text{και} \quad d(x, y) = 1, \text{ αν } x \neq y$$

τότε, για $0 < \varepsilon < 1$ και $\alpha \in X$, έχουμε τις σφαιρικές περιοχές

$$B(\alpha, \varepsilon) = \{x \in X,\ d(\alpha, x) < \varepsilon\} = \{x \in X,\ d(\alpha, x) = 0\} = \{\alpha\},$$

$$\overline{B}(\alpha, \varepsilon) = \{x \in X,\ d(\alpha, x) \leq \varepsilon\} = \{x \in X,\ d(\alpha, x) = 0\} = \{\alpha\},$$

ενώ $S(\alpha, \varepsilon) = \{x \in X,\ d(\alpha, x) = \varepsilon\} = \varnothing$, και

$$S(\alpha, 1) = \{x \in X :\ d(\alpha, x) = 1\} = X - \{\alpha\},$$

και για $\varepsilon > 1$ και $\alpha \in X$, έχουμε τις σφαιρικές περιοχές

$$B(\alpha, \varepsilon) = \{x \in X,\ d(\alpha, x) < \varepsilon\} = \{x \in X,\ d(\alpha, x) = 0 \text{ ή } d(\alpha, x) = 1\} = X,$$

ενώ $\overline{B}(\alpha, \varepsilon) = \{x \in X,\ d(\alpha, x) \leq \varepsilon\} = \{x \in X,\ d(\alpha, x) = 0 \text{ ή } d(\alpha, x) = 1\} = X$, για $\varepsilon \geq 1$ και $S(\alpha, \varepsilon) = \{x \in X,\ d(\alpha, x) = \varepsilon\} = \varnothing$, για $\varepsilon > 1$.

2. Θεωρούμε στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ τους ευκλείδειους μετρικούς χώρους (§1)

$$(\mathbb{R}^2, d_2), \quad (\mathbb{R}^2, d_1), \quad (\mathbb{R}^2, d_\infty).$$

Αν είναι $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ και ο αριθμός $\varepsilon > 0$, να σχεδιασθούν οι σφαιρικές περιοχές και οι σφαιρικές επιφάνειες στους παραπάνω ευκλείδειους χώρους.

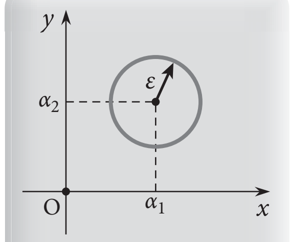
➠ Έχουμε λοιπόν τις ανοικτές σφαιρικές περιοχές

$$B_{d_2}(\alpha, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^2 :\ d_2(\alpha, x) = \sqrt{(x_1 - \alpha_1)^2 + (x_2 - \alpha_2)^2} < \varepsilon\}$$

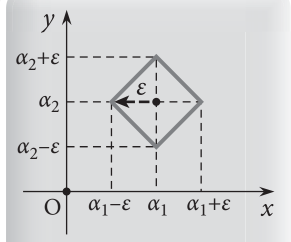
$$B_{d_1}(\alpha, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^2 :\ d_1(\alpha, x) = |x_1 - \alpha_1| + |x_2 - \alpha_2| < \varepsilon\}$$

$$B_{d_\infty}(\alpha, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^2 :\ d_\infty(\alpha, x) = \max\{|x_1 - \alpha_1|,\ |x_2 - \alpha_2|\} < \varepsilon\}$$

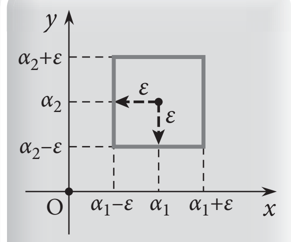
οι οποίες παριστούν γεωμετρικά κύκλους, ρόμβους και τετράγωνα, αντίστοιχα.



$B_{d_2}(\alpha, \varepsilon)$:
$(x_1-\alpha_1)^2 + (x_2-\alpha_2)^2 < \varepsilon^2$
Κύκλος (εσωτερικό)



$B_{d_1}(\alpha, \varepsilon)$:
$|\alpha_1-x_1| + |\alpha_2-x_2| < \varepsilon$
Ρόμβος (εσωτερικό)



$B_{d_\infty}(\alpha, \varepsilon)$:
$|\alpha_1-x_1| < \varepsilon, |\alpha_2-x_2| < \varepsilon$
Τετράγωνο (εσωτερικό)

Ανάλογα, σχεδιάζονται οι κλειστές σφαιρικές περιοχές

$$\overline{B}_{d_2}(\alpha, x): \text{κύκλος}, \quad \overline{B}_{d_1}(\alpha, \varepsilon): \text{ ρόμβος}, \quad \overline{B}_{d_\infty}(\alpha, \varepsilon): \text{ τετράγωνο.}$$

Οι αντίστοιχες σφαιρικές επιφάνειες είναι

$$S_{d_2}(\alpha, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^2 :\ d_2(\alpha, x) = \sqrt{(x_1-\alpha_1)^2 + (x_2-\alpha_2)^2} = \varepsilon\},$$

$$S_{d_1}(\alpha, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^2 :\ d_1(\alpha, x) = |x_1-\alpha_1| + |x_2-\alpha_2| = \varepsilon\},$$

$$S_{d_\infty}(\alpha, \varepsilon) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 :\ d_\infty(\alpha, x) = \max\{|x_1-\alpha_1|,\ |x_2-\alpha_2|\} = \varepsilon\right\}$$

και γεωμετρικά είναι

$S_{d_2}(\alpha, \varepsilon)$: περιφέρεια κύκλου, $S_{d_1}(\alpha, x)$: περίμετρος ρόμβου και

$S_{d_\infty}(\alpha, x)$: περίμετρος τετραγώνου.

3. Θεωρούμε το μετρικό χώρο (X, d), όπου $X = C([\alpha, \beta])$ το σύνολο των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων στο $[\alpha, \beta]$, και τη μετρική d στο X

$$d(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)|,\ x \in [\alpha, \beta]\}, \quad \forall f, g \in X.$$

Αν $f_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$, να ορισθούν η ανοικτή $B(f_0, \varepsilon)$ και η κλειστή $\overline{B}(f_0, \varepsilon)$ σφαιρική περιοχή, και η σφαιρική επιφάνεια $S(f_0, \varepsilon)$.

➠ Έχουμε

$$B(f_0, \varepsilon) = \{f \in X :\ \max\{|f_0(x) - f(x)|,\ x \in [\alpha, \beta]\} < \varepsilon\} =$$

$$= \{f \in X :\ \forall x \in [\alpha, \beta],\ f_0(x) - \varepsilon < f(x) < f_0(x) + \varepsilon\},$$

οπότε η ανοικτή σφαιρική περιοχή περιέχει τις συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις f στο $[\alpha,\beta]$, των οποίων οι γραφικές παραστάσεις περιέχονται ανάμεσα στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

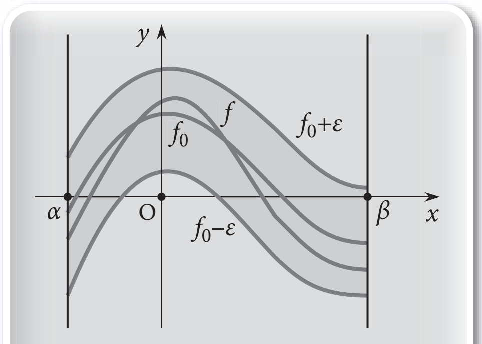
$$y=f_0(x)-\varepsilon\,,\quad y=f_0(x)+\varepsilon\,,\quad x\in[\alpha,\beta]$$

με τις οποίες δεν έχουν κοινά σημεία.

Η κλειστή σφαιρική περιοχή $\overline{B}(f_0,\varepsilon)$ αναλύεται ανάλογα και περιέχει τις συναρτήσεις $f\in X$ των οποίων οι γραφικές παραστάσεις μπορούν να έχουν κοινά σημεία με τις συναρτήσεις

$$y=f_0(x)-\varepsilon\,,\quad y=f_0(x)+\varepsilon\,,\quad x\in[\alpha,\beta]$$

Η σφαιρική επιφάνεια $S(f_0,\varepsilon)=\{f\in X,\ d(f_0,f)=\varepsilon\}$ αποτελείται από τα γραφήματα των δύο συναρτήσεων $f_0(x)-\varepsilon$, $f_0(x)+\varepsilon$, $x\in[\alpha,\beta]$.



Περιοχές $B(f_0,\varepsilon)$, $\overline{B}(f_0,\varepsilon)$
Επιφάνεια $S(f_0,\varepsilon)$

■

- Αν έχουμε $(X,\|\cdot\|)$ ένα νορμικό χώρο (οπότε το σύνολο X είναι διανυσματικός χώρος) τότε οι σφαιρικές περιοχές και οι σφαιρικές επιφάνειες ορίζονται όπως προηγουμένως, με τη φυσική μετρική

$$d(x,y)=\|x-y\|\,,\quad \forall x,\,y\in X\,.$$

Στους νορμικούς χώρους οι σφαιρικές περιοχές και επιφάνειες έχουν κάποιες επιπλέον ιδιότητες (που δεν ισχύουν σε τυχαίους μετρικούς χώρους).

α) Οι ανοικτές και κλειστές σφαιρικές περιοχές είναι άπειρα σύνολα, ενώ οι σφαιρικές επιφάνειες δεν είναι κενά σύνολα (περιέχουν τουλάχιστον δύο σημεία).

Αν πάρουμε $\alpha, \beta \in X$ τότε έχουμε τα σημεία της ευθείας

$$x = \alpha + t(\beta - \alpha), \quad t \in \mathbb{R}$$

που περνάει από τα σημεία α (για $t = 0$) και β (για $t = 1$).

Άρα, έχουμε $\qquad x - \alpha = t(\beta - \alpha) \Rightarrow \|x - \alpha\| = |t| \|\beta - \alpha\|$,

οπότε για το $\varepsilon > 0$ προκύπτει

$$\|x - \alpha\| \le \varepsilon \Leftrightarrow -\frac{\varepsilon}{\|\beta - \alpha\|} \le t \le \frac{\varepsilon}{\|\beta - \alpha\|}.$$

Επομένως, γι' αυτά τα άπειρα t τ' αντίστοιχα άπειρα σημεία της ευθείας βρίσκονται μέσα στην κλειστή σφαιρική περιοχή $\overline{B}(\alpha, \varepsilon)$.

Ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει για την ανοικτή σφαιρική περιοχή $B(\alpha, \varepsilon)$, ενώ για τη σφαιρική επιφάνεια $S(\alpha, \varepsilon)$ παρατηρούμε ότι περιέχει τουλάχιστον δύο σημεία, για $t = (\pm\varepsilon / \|\beta - \alpha\|)$.

Σημείωση

Αυτήν την ιδιότητα μπορεί να την έχουν και μετρικοί χώροι.
Για παράδειγμα ο μετρικός χώρος $(\mathbb{R}, d_1)$, όπου

$$d_1(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}, \quad \text{και} \quad d(x, y) = |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

έχει αυτήν την ιδιότητα, επειδή για $0 < \varepsilon \le 1$ και $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$B_{d_1}(\alpha, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : d_1(\alpha, x) < \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} : |\alpha - x| < \varepsilon\} = B_d(\alpha, \varepsilon),$$

$$\overline{B}_{d_1}(\alpha, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : d_1(\alpha, x) \le \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} : |\alpha - x| \le \varepsilon\} = \overline{B}_d(\alpha, \varepsilon).$$

Αλλ' όμως οι σφαιρικές περιοχές $B_d(\alpha, \varepsilon)$, $\overline{B}_d(\alpha, \varepsilon)$ είναι του νορμικού χώρου $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ (πραγματική ευθεία), οπότε είναι άπειρα σύνολα.

Προφανώς, για $\varepsilon > 1$ οι σφαιρικές περιοχές περιέχουν τις προηγούμενες σφαιρικές περιοχές με $0 < \varepsilon \le 1$, οπότε είναι επίσης άπειρα σύνολα.

Οι σφαιρικές επιφάνειες $S(\alpha, \varepsilon)$ στο μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, d_1)$, για $0 < \varepsilon \le 1$ περιέχουν τουλάχιστον δύο σημεία, αλλά για $\varepsilon > 1$ είναι κενά σύνολα.

Η μετρική d_1 δεν είναι φυσική μετρική, δηλαδή δεν προκύπτει από μία νορμική στο $\mathbb{R}$, επειδή για $\lambda > 1$ και $x = n$, $y = 0$, $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$d_1(\lambda n, \lambda \cdot 0) = d_1(\lambda n, 0) = \min\{1, \lambda n\} = 1 \ne \lambda = \lambda d_1(n, 0).$$

β) Σε νορμικό χώρο οι ανοικτές $B(\alpha, \varepsilon)$ και οι κλειστές $\overline{B}(\alpha, \varepsilon)$ σφαιρικές περιοχές, όπου, $\varepsilon > 0$ είναι κυρτά σύνολα.

Ένα σύνολο A νορμικού χώρου $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται *κυρτό*, αν για κάθε ζεύγος σημείων x και y του A το ευθύγραμμο τμήμα

$$[x, y] = x + t(y - x) = (1-t)x + ty\,, \quad t \in [0, 1]$$

περιέχεται ολόκληρο στο σύνολο A.

Θεωρούμε λοιπόν δύο σημεία $x, y \in B(\alpha, \varepsilon)$ και τα σημεία του ευθυγράμμου τμήματος

$$[x, y]:\ z = x + t(y - x) = (1-t)x + ty\,, \quad t \in [0, 1]\,.$$

Είναι

$$\begin{aligned} \|z - \alpha\| &= \|(1-t)x + ty - \alpha\| = \|(1-t)x - \alpha + t\alpha - t\alpha + ty\| = \\ &= \|(1-t)(x - \alpha) + t(y - \alpha)\| \leq \\ &\leq (1-t)\|x - \alpha\| + t\|y - \alpha\| < (1-t)\varepsilon + t\varepsilon = \varepsilon\,, \quad t \in [0, 1]\,, \end{aligned}$$

οπότε $z \in B(\alpha, \varepsilon)$, δηλαδή το $B(\alpha, \varepsilon)$ είναι κυρτό σύνολο.

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι και η κλειστή σφαιρική περιοχή $\overline{B}(\alpha, \varepsilon)$ είναι κυρτό σύνολο.

γ) Για κάθε σφαιρική περιοχή $B(O, \varepsilon_1)$ της αρχής O και κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, υπάρχει σφαιρική περιοχή $B(O, \varepsilon_2) \subset \lambda B(O, \varepsilon_1)$, αρκεί να είναι $\varepsilon_2 < |\lambda| \varepsilon_1$.

Αν $\alpha \in X$, κάθε περιοχή $B(\alpha, \varepsilon) = \alpha + B(O, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Παράδειγμα 4

Σε νορμικό χώρο $(X, \|\cdot\|)$ θεωρούμε δύο σημεία $x, y \in X$, με $x \neq y$.
Δείξτε ότι, για δύο σφαιρικές περιοχές $B(x, \varepsilon_1)$, $B(y, \varepsilon_2)$ τέτοιες ώστε

$$\|x - y\| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2\,, \quad \text{ισχύει} \quad B(x, \varepsilon_1) \cap B(x, \varepsilon_2) \neq \varnothing\,.$$

Αυτό ισχύει σε οποιονδήποτε μετρικό χώρο;

➡ Στο νορμικό χώρο $(X, \|\cdot\|)$ τα σημεία του ευθυγράμμου τμήματος $[x, y]$ δίνονται από τη σχέση (για $t = 0$ είναι $z = y$ και για $t = 1$ είναι $z = x$):

$$z = tx + (1-t)y\,, \quad t \in [0, 1]\,. \tag{1}$$

Έχουμε $\|x-y\|<\varepsilon_1+\varepsilon_2$ και θα δείξουμε πως υπάρχει σημείο z τέτοιο ώστε

$$\|z-x\|<\varepsilon_1 \quad \text{και} \quad \|z-y\|<\varepsilon_2 . \tag{2}$$

Οι σχέσεις (2) λόγω της (1) γίνονται

$$(1-t)\|x-y\|<\varepsilon_1 \quad \text{και} \quad t\|x-y\|<\varepsilon_2 \tag{3}$$

και αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $t_0 \in [0, 1]$ για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις (3).

Πράγματι, υπάρχει το $t_0 = \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \in [0, 1]$ για το οποίο ισχύουν οι (3), επειδή είναι

$$\left(1-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\right)\|x-y\|<\varepsilon_1 \Leftrightarrow \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\|x-y\|<\varepsilon_1 \Leftrightarrow \|x-y\|<\varepsilon_1+\varepsilon_2$$

και

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\|x-y\|<\varepsilon_2 \Leftrightarrow \|x-y\|<\varepsilon_1+\varepsilon_2 ,$$

αλλά η ανισότητα $\|x-y\|<\varepsilon_1+\varepsilon_2$ δίνεται από την υπόθεση.

Τα σημεία του ευθυγράμμου τμήματος $[x, y]$ μπορούμε να τα γράψουμε και $z = x + t(y-x)$, $t \in [0, 1]$, οπότε θα υπάρχει το

$$t_0 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \in [0, 1] .$$

Αυτό το αποτέλεσμα δεν ισχύει σε οποιονδήποτε μετρικό χώρο.

Π.χ. στο διακεκριμένο μετρικό χώρο (X, d_0), αν πάρουμε

$$\varepsilon_1 = \frac{2}{3}, \quad \varepsilon_2 = \frac{2}{3} \quad \text{και} \quad x,\ y \in X ,$$

με $x \neq y$, θα έχουμε

$$d_0(x, y) = 1 < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{4}{3}$$

και επειδή είναι

$$B(x, \varepsilon_1) = B\left(x,\ \frac{2}{3}\right) = \{z \in X\ ,\ d_0(x, z) = 0\} = \{x\} ,$$

$$B(y, \varepsilon_1) = B\left(y,\ \frac{2}{3}\right) = \{z \in X\ ,\ d_0(y, z) = 0\} = \{y\}$$

προκύπτει $B(x, \varepsilon_1) \cap B(y, \varepsilon_2) = \varnothing$, με $d_0(x, y) < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.