Μιχ. Γ. Μαριάς

Μαθήματα

Αρμονικής Ανάλυσης

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Περιεχόμενα

Πρόλογος

στην αρμονική Πόλυ

Το βιβλίο αυτό είναι μία πρώτη προσπάθεια να σχεδιαστεί ένα εισαγωγικό μάθημα Αρμονικής ανάλυσης για τους φοιτητές του 4ου έτους και ίσως περισσότερο γι' αυτούς που ξεκινούν τα μεταπτυχιακά τους στα καθαρά Μαθηματικά. Φαίνεται πως σύντομα θ' αρχίσει η λειτουργία του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών και στο Τμήμα μας, το Τμήμα Μαθηματικών του ΑΠΘ.

Τα τελευταία χρόνια, τα μεταπτυχιακά προγράμματα φυτρώνουν σαν μανιτάρια. Οι φοιτητές μας αντιδρούν περίπου υστερικά. Αν δεν φύγουν έξω, προσπαθούν να 'τρυπώσουν' οπωσδήποτε σε κάποιο εγχώριο μεταπτυχιακό πρόγραμμα. Φαίνεται πως μπήκαμε ήδη στο περίφημο 3-5-8 της Μπολώνια, και μάλιστα τροποποιημένο σε 4-6-9. Οι πρώτοι που το κατάλαβαν είναι οι φοιτητές, που είναι και οι άμεσα ενδιαφερόμενοι.

Τα τελευταία χρόνια, τα Μαθηματικά στη χώρα μας βρίσκονται σε ανοδική τροχιά. Απόδειξη είναι η σταθερή και αξιοπρεπής παρουσία της ερευνητικής παραγωγής που γίνεται στην Ελλάδα, σε πολύ καλά περιοδικά του εξωτερικού. Η κατάσταση αυτή δικαιολογεί, και με το παραπάνω, την δημιουργία μεταπτυχιακών στο Τμήμα μας. Έτσι το ανά χείρας εγχειρίδιο έρχεται να υποστηρίξει αυτή την προσπάθεια.

Αποφάσισα να παρουσιάσω ορισμένα θέματα της Αρμονικής ανάλυσης κατ' ευθείαν στον $\mathbb{R}^n$, χωρίς να ασχοληθώ με τον κλασικό κύκλο και τις σειρές Fourier. Κατά κάποιο τρόπο ξεκινούμε με το 2ο τεύχος!

Στο πρώτο μέρος του βιβλίου παρουσιάζονται οι έννοιες της Πραγματικής ανάλυσης που αποτελούν το φόντο της Αρμονικής ανάλυσης που ακολουθεί:

Χώροι L^p και οι αντίστοιχοι ασθενείς, θεωρήματα παρεμβολής και λίγο πιο κάτω μια γρήγορη εισαγωγή στον μετασχηματισμό Fourier. Η παρουσίαση είναι σχεδόν πλήρης και η ενασχόληση με τις αποδείξεις που δίδονται είναι μιας πρώτης τάξεως ευκαιρία για τον φοιτητή να εξοικοιωθεί με τις έννοιες, που θα είναι κατά κάποιο τρόπο, η καθημερινότητά του.

Στο δεύτερο μέρος παρουσιάζονται ορισμένα κλασικά θέματα της Αρμονικής ανάλυσης. Οι αρμονικές συναρτήσεις και οι θαυμαστές ιδιότητές τους, ο πυρήνας της θερμότητας και ο παράγωγός του πυρήνας του Poisson. Έτσι γίνεται και μια πρώτη γνωριμία με τις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους, τις θεμελιώδεις λύσεις τους και τις συνοριακές τους τιμές.

Ορισμένες έννοιες, ιδέες και αποτελέσματα που παρουσιάζονται σ' αυτό το μέρος, (πυρήνες της θερμότητας και Poisson, ανισότητα Harnack), έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στην ανάπτυξη της σύγχρονης Αρμονικής ανάλυσης.

Στο τρίτο και τελευταίο μέρος αποφάσισα να κάνω μια πρώτη παρουσίαση της θεωρίας των Calderón-Zygmund για τους ιδιάζοντες ολοκληρωτικούς τελεστές. Η θεωρία ξεκινά στις αρχές του περασμένου αιώνα (δύσκολο να το συνηθίσουμε!) με τον μετασχηματισμό Hilbert για τις συζυγείς αρμονικές και με μεθόδους της μιγαδικής ανάλυσης. Αυτονομείται από τις μιγαδικές μεθόδους και περνά στον $\mathbb{R}^n$. Με μεθόδους καθαρά πραγματικές μελετώνται οι μετασχηματισμοί Riesz, η πολυδιάσταση εκδοχή του Hilbert, και οι τελεστές συνέλιξης. Ο χώρος Hardy H^1 και η συζυγεία του με τον BMO, είναι παιδιά των μετασχηματισμών Riesz.

Τα 'Μαθήματα' αντλούν υλικό από πολλές πηγές. '*Τα λόγια μας είναι παιδιά πολλών ανθρώπων*', για να θυμηθούμε τον Γ. Σεφέρη. Από τα βιβλία του Stein, [12], [11], [10], των Stein και Weiss, [13], για την Αρμονική ανάλυση και τον Rudin για την Πραγματική ανάλυση, [8]. Οδηγός για την επιλογή του υλικού που παρουσιάζεται, στάθηκαν οι Πανεπιστημιακές σημειώσεις του Βαρόπουλου, το βιβλίο του Sogge, [9] και το άρθρο επισκόπησης του Carbery, [2].

Πρέπει να ευχαριστήσω πολλούς φίλους. Τον σεβαστό Ν. Θ. Βαρόπουλο και τον Γ. Αλεξόπουλο, που κοντά τους έμαθα αρκετά για την Αρμονική ανάλυση. Τους Ν. Μαντούβαλο, Ν. Δανίκα, Σ. Καλπαζίδου, Β. Νεστορίδη, Σ. Παπαδοπούλου, για την σταθερή τους βοήθεια. Τους Α. Συσκάκη και Μ. Κατσοπρινάκη που ενθάρρυναν την προσπάθεια και την Γ. Κυρέζη που μου παραχώρησε τις υπέροχες πανεπιστημιακές της σημειώσεις.

Τους Π. Καϊμάκη, που πάντα χτενίζει τα ελληνικά μου και Γ. Πέρρο, που

φροντίζει το λογισμικό του κομπιούτερα μου.

Θα ήταν παράλειψη αν ξεχνούσα τους άλλους φίλους, αυτούς που δεν έχουν σχέση με την Αρμονική ανάλυση και τα Μαθηματικά. Αυτούς που μας ανέχονται στα δύσκολα, όταν δεν βγαίνει το θεώρημα ή όταν οι αναποδιές περισσεύουν. Η ζεστή συντροφιά τους είναι το καλύτερο αντίβαρο στην επίπονη και αποσταθεροποιητική ενασχόληση με τα Μαθηματικά.

Μιχ. Γ. Μαριάς,

Θεσσαλονίκη, Νοέμβριος 2001.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Μάθημα πρώτο

Στο πρώτο αυτό μάθημα θα θίξουμε ορισμένα θέματα της Αρμονικής ανάλυσης που σχεδιάζουμε να διαπραγματευτούμε στο μάθημα.

1.1.1 Αρμονικές συναρτήσεις στο επίπεδο

Ας θυμηθούμε την πρώτη μας συνάντηση με τις αρμονικές συναρτήσεις. Αν $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ είναι μια ολόμορφη συνάρτηση τότε

$$F = \operatorname{Re} F + i \operatorname{Im} F = u + iv, \tag{1.1}$$

και οι u, v ικανοποιούν τις συνθήκες των Cauchy-Riemann:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_x u & = & \partial_y v, \\ \\ \partial_y u & = & -\partial_x v. \end{array} \right. \tag{1.2}$$

Συνεπώς

$$\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = \partial_{xy}^2 v - \partial_{yx}^2 v = 0,$$

δηλαδή η u είναι αρμονική. Προφανώς το ίδιο ισχύει και για την v. Οι u και v που ορίζονται από την (1.1) λέγονται *συζυγείς* αρμονικές.

Είδαμε στο μάθημα των μιγαδικών (ή και στην Διανυσματική Ανάλυση με Green) ότι οι αρμονικές συναρτήσεις έχουν αξιοσημείωτες ιδιότητες:

1. *Την ιδιότητα του μέσου όρου*: αν η u είναι αρμονική στο ανοικτό Ω, τότε για κάθε $(x_0, y_0) \in \Omega$ και για κάθε περιφέρεια $S((x_0, y_0), r)$ που περιέχεται στο Ω, ισχύει
$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{S((x_0,y_0),r)} u. \tag{1.3}$$
Η ιδιότητα του μέσου όρου χαρακτηρίζει τις αρμονικές, δηλαδή αν μία συνεχής συνάρτηση ικανοποεί την (1.3), τότε είναι αρμονική.

2. *Την αρχή του μεγίστου*: αν u αρμονική στο ανοικτό Ω, τότε
$$\sup_{\Omega} u < \sup_{\partial\Omega} u.$$
Κατά συνέπεια, άν το μέγιστο της u πιάνεται σε εσωτερικό σημείο του Ω, η u είναι σταθερή.

3. *Το θεώρημα του Liouville*: αν η u αρμονική σ' όλο τον $\mathbb{R}^2$ και φραγμένη, τότε είνα σταθερή.

1.1.2 Συζυγείς αρμονικές και Μετασχηματισμός Hilbert

Ας είναι $F = u + iv$ ολόμορφη στον άνω ημίχωρο $\mathbb{R}^2_+ = \{x \in \mathbb{R},\, y > 0\}$. Οι u και v συνδέονται με τις σχέσεις Cauchy-Riemann. Ας υποθέσουμε ότι οι u, v έχουν συνοριακές τιμές τις
$$f(x) = \lim_{y\to 0} u(x, y) \quad \text{και} \quad g(x) = \lim_{y\to 0} v(x, y).$$
Ποιά η σχέση των συνοριακών τιμών f, g;

Για να απαντήσουμε, χρειάζεται πρώτα να θυμηθούμε ότι η αρμονική επέκταση στον άνω ημίχωρο μιας συνάρτησης $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, δίνεται από την συνέλιξή της με τον πυρήνα του Poisson
$$Q_y(x) = c\frac{y}{x^2 + y^2}.$$
Αν λοιπόν η f είναι η συνοριακή τιμή της αρμονικής u, τότε
$$\begin{aligned} u(x, y) = (Q_y * f)(x) &= \int_{\mathbb{R}} Q_y(x - x') f(x') dx' \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{cy}{(x - x')^2 + y^2} f(x') dx', \end{aligned} \tag{1.4}$$

και όμοια για τις v και g.

Παίρνοντας τον μετασχηματισμό Fourier της $u(x,y)$ ως προς την μεταβλητή x και θυμίζοντας ότι ο Fourier μετασχηματίζει την συνέλιξη σε γινόμενο, συνάγεται ότι

$$\hat{u}(\xi,y) = (\widehat{Q_y * f})(\xi) = \hat{Q}_y(\xi)\hat{f}(\xi) = e^{-2\pi y|\xi|}\hat{f}(\xi), \tag{1.5}$$

αφού

$$\hat{Q}_y(\xi) = e^{-2\pi y|\xi|}.$$

Επίσης

$$\widehat{\partial_x u}(\xi,y) = -2\pi i\xi e^{-2\pi y|\xi|}\hat{f}(\xi) \tag{1.6}$$

αφού για κάθε καλή φ

$$\widehat{\partial_x \varphi}(\xi) = 2\pi i\xi\hat{\varphi}(\xi).$$

Από τις (1.5), (1.6) και την πρώτη σχέση των (1.2), έχουμε ότι

$$\partial_x u = \partial_y v,$$

ή

$$2\pi i\xi e^{-2\pi y|\xi|}\hat{f}(\xi) = -2\pi\,|\xi|\,e^{-2\pi y|\xi|}\hat{g}(\xi),$$

δηλαδή

$$\hat{g}(\xi) = i\frac{\xi}{|\xi|}\hat{f}(\xi) = i\,\mathrm{sign}(\xi)\hat{f}(\xi). \tag{1.7}$$

Θα δούμε αργότερα ότι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $\xi \to i\,\mathrm{sign}(\xi)$ είναι η $x \to \frac{c}{x}$ και συνεπώς η (1.7), με ανάποδο Fourier, δίνει

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{c}{x-x'} f(x')dx',$$

δηλαδή τη συνέλιξη της f με τον πυρήνα $K(x) = \frac{c}{x}$. Γράφουμε:

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{c}{x-x'} f(x')dx' = \int_{\mathbb{R}} K(x-x')f(x')dx' \\ &= \int_{\mathbb{R}} K(x')f(x-x')dx' = Hf(x) \end{aligned} \tag{1.8}$$

αφού μετασχηματισμός αυτός λέγεται μετασχηματισμός Hilbert.

Η διαδικασία που μόλις περιγράψαμε πάει και ανάποδα, δηλαδή αν

$$f, g \in L^2(\mathbb{R}) \text{ και } g = H(f),$$

τότε οι αρμονικές τους επεκτάσεις $u = Q_y(f)$ και $v = Q_y(g)$ είναι συζυγείς αρμονικές και η $F := u + iv$ είναι ολόμορφη στον άνω ημίχωρο.

Μερικές παρατηρήσεις επί του μετασχηματισμού Hilbert επιβάλονται. Πρώτον, επειδή ο πυρήνας $K(x)$ δεν ορίζεται στο $x = 0$, για να αποφύγουμε τις κακοτοπιές και να έχει νόημα το ολοκλήρωμα (1.8) για $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, πρέπει να πάρουμε όρια:

$$Hf(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x'| \geq \varepsilon} \frac{1}{x'} f(x - x') dx'.$$

(είναι αυτό που λέμε συνήθως principal value).

Τώρα, από την (1.7) και την ισομετρία του Plancherel, (αν $f \in L^2(\mathbb{R})$, τότε $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ και $\left\|\hat{f}\right\|_2 = \|f\|_2$), έχουμε

$$\begin{aligned}
\|Hf\|_2 = \left\|\widehat{Hf}\right\|_2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{Hf}(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} \left|i \operatorname{sign}(\xi) \hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\|\hat{f}\right\|_2 = \|f\|_2,
\end{aligned}$$

δηλαδή ο μετασχηματισμός Hilbert είναι συνεχής επί του $L^2(\mathbb{R})$.

Εδώ πρέπει να επισημάνουμε ότι οι χώροι της Αρμονικής ανάλυσης είναι οι χώροι $L^p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$. Για $p \in [1, \infty)$, η $f \in L^p(\mathbb{R})$ αν ειναι μετρήσιμη και

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Ο $L^\infty(\mathbb{R})$ είναι οι μετρήσιμες και φραγμένες συναρτήσεις (εκτός ίσως από ένα σύνολο μέτρου 0) και η νόρμα του είναι ως συνήθως το $\sup |f| = \|f\|_\infty$.

Ένα *ερώτημα* που τίθεται φυσιολογικά είναι το ακόλουθο: *Για ποιά $p \geq 1$, ο μετασχηματισμός Hilbert είναι συνεχής επί του $L^p(\mathbb{R})$;*

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό, ξεκινούμε με την ακόλουθη επισήμανση. Αν ο πυρήνας $K(x)$ ήταν ολοκληρώσιμος (δηλ. $K \in L^1(\mathbb{R})$), τότε για κάθε $f \in L^\infty(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}|Hf(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |K(y)f(x-y)|\,dy \\ &\leq \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |K(y)|\,dy = \|f\|_\infty \|K\|_1 < \infty,\end{aligned}$$

και συνεπώς $Hf \in L^\infty(\mathbb{R})$, και επιπλέον ο H θα ήταν συνέχης στον $L^\infty(\mathbb{R})$. Κατόπιν, με παρεμβολή και συμμετρία θα είχαμε την συνέχεια επί των $L^p(\mathbb{R})$ για όλα τα $p \geq 1$. Αλλά τα πράγματα δεν είναι έτσι:

$$\int_{\mathbb{R}} |K(x)|\,dx = 2c \int_0^\infty \frac{dx}{x} = 2c\,[\log x]_0^\infty = \infty,$$

άρα ο πυρήνας δεν είναι ολοκληρώσιμος.

Σ' αυτή την περίπτωση, για ν' απαντηθεί το ερώτημα της συνέχειας του μετασχηματισμού Hilbert επί των $L^p(\mathbb{R})$, έχουμε ανάγκη της θεωρίας των Calderón-Zygmund. Έτσι καταφέρνουμε να δείξουμε ότι ο H είναι συνεχής από τον $L^1(\mathbb{R})$ σε κάποιον μεγαλύτερο χώρο (τον $L^1_{weak}(\mathbb{R})$) για τον οποίο τα γενικά θεωρήματα της παρεμβολής ισχύουν. Έτσι μπορούμε να δείξουμε τελικά την συνέχεια του μετασχηματισμού Hilbert επί των $L^p(\mathbb{R})$ για όλα τα $p \in (1,\infty)$:

$$\|Hf\|_p \leq c(p)\,\|f\|_p\,, \quad \forall p \in (1,\infty). \tag{1.9}$$

Στον μοναδιαίο δίσκο έχουμε τα αντίστοιχα φαινόμενα και η (1.9) είναι ένα παλιό αποτέλεσμα του M. Riesz. Τον υπολογισμό της βέλτιστης σταθεράς στην (1.9) την έκανε ο αείμνηστος Στέλιος Πηχωρίδης στην διατριβή του.

1.1.3 Πέρασμα σε περισσότερες διαστάσεις.

Οι αρμονικές συναρτήσεις μπορούν να οριστούν στον $\mathbb{R}^n$ για κάθε $n \geq 2$, σαν λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$\Delta u = \partial^2_{x_1} u + \partial^2_{x_2} u + \ldots + \partial^2_{x_n} u = 0.$$

Μπορούμε μάλιστα να δείξουμε τις ιδιότητες του μέσου όρου, της αρχής του μεγίστου και το θεώρημα Liouville, χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα του Green

χωρίς δηλαδή την χρήση της μιγαδικής δομής που άλλωστε δεν είναι και διαθέσιμη για $n = 2p + 1$.

Ας δούμε πως μπορούμε να ορίσουμε τις συζυγείς αρμονικές στον άνω ημίχωρο

$$\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) : x_{n+1} > 0\}.$$

Ας είναι $u_1, ..., u_{n+1}$ αρμονικές στον $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Τις λέμε συζυγείς αν ικανοποιούν τις συνθήκες των Cauchy-Riemann:

$$\partial_{x_1} u_1 + \cdots + \partial_{x_n} u_n + \partial_{x_{n+1}} u_{n+1} = 0,$$

και

$$\partial_{x_j} u_k = \partial_{x_k} u_j,$$

για κάθε $j \neq k$, [12].

Αν τώρα οι $f_1, ..., f_{n+1}$ είναι οι συνοριακές τιμές των $u_1, ..., u_{n+1}$, τίθεται το ίδιο ερώτημα με πρίν: *Ποιά η σχέση μεταξύ των* $f_1, ..., f_{n+1}$.

Η απάντηση δίνεται όπως και στην διάσταση 1, παίρνοντας τον Fourier των $u_1, ..., u_{n+1}$ ως προς την μεταβλητή $x = (x_1, ..., x_n)$. Έτσι έχουμε για κάθε $j = 1, 2, ..., n$,

$$\hat{f}_j(\xi) = \frac{i\xi_j}{\|\xi\|} \hat{f}_1(\xi), \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Γράφουμε

$$\hat{f}_j(\xi) = \widehat{R_j f}_1(\xi),$$

και με ανάποδο Fourier, έχουμε

$$f_j(x) = R_j f_1(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{c_n y_j}{\|y\|^{n+1}} f_1(x - y) dy.$$

Οι ως άνω μετασχηματισμοί R_j, ονομάζονται μετασχηματισμοί Riesz και είναι η γενίκευση του μετασχηματισμού Hilbert στις πολλές διαστάσεις.

Περνώντας στις σφαιρικές συντεταγμένες, έχουμε

$$\int_{B(0,1)} \frac{|y_j|}{\|y\|^{n+1}} dy \sim \int_0^1 \frac{r}{r^{n+1}} r^{n-1} dr = \log r|_0^1 = \infty,$$

και επομένως ο πυρήνας των R_j δεν είναι ολοκληρώσιμος.