ΑΜΑΛΙΑΣ ΜΕΪΜΑΡΙΔΟΥ
ΛΕΚΤΟΡΟΣ ΠΑΝ/ΜΙΟΥ ΘΡΑΚΗΣ

ΙΩΑΝΝΟΥ ΧΡ. ΣΧΟΙΝΑ
ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΠΑΝ/ΜΙΟΥ ΘΡΑΚΗΣ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ
ΚΑΙ
ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ
ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

Π Ρ Ο Λ Ο Γ Ο Σ

Το βιβλίο αυτό περιέχει τα Κεφάλαια: Παράγωγοι, Ολοκληρώματα, Σειρές και Σειρές Δυνάμεων, Στοιχεία Διαφορικών Εξισώσεων και Μερικές Παράγωγοι, που αποτελούν τη διδακτέα ύλη των Μαθηματικών πρώτου εξαμήνου των σπουδαστών Πολυτεχνικών Σχολών.

Κατά τη συγγραφή του βιβλίου καταβλήθηκε προσπάθεια για την απλή και διδακτική παρουσίαση της ύλης. Για το σκοπό αυτό δόθηκε περισσότερη προσοχή στις εφαρμογές της θεωρίας στη λύση αντιπροσωπευτικών παραδειγμάτων μετά από κάθε ενότητα. Στο τέλος κάθε Κεφαλαίου δίνονται πολλά προβλήματα και ασκήσεις με τα αποτελέσματά τους.

Θεωρώ υποχρέωσή μου να ευχαριστήσω τα μέλη του Ε.Δ.Τ.Π. του Τομέα Λ. Αλεξίου, Σ. Πόπε και Μ. Τσομακίδου για την προσεκτική δακτυλογράφηση του κειμένου.

Ξάνθη Σεπτέμβριος 1985

Γιάννης Σχοινάς
Αμαλία Μεϊμαρίδου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

1. Παραγώγιση Πραγματικών Συναρτήσεων Πραγματικής Μεταβλητής

1.1 Η έννοια της παραγώγου

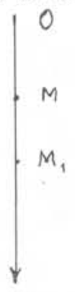
Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε το πρόβλημα της ελεύθερης πτώσης σώματος στο κενό και το πρόβλημα της μεταβολής της θερμότητας σώματος. Στα προβλήματα αυτά εισάγονται τα φυσικά μεγέθη της ταχύτητας και ειδικής θερμότητας, αντίστοιχα, που οδηγούν με απλό τρόπο στην έννοια του ρυθμού μεταβολής των συναρτήσεων, δηλαδή στην έννοια της παραγώγου.

Αρχίζουμε με το παράδειγμα της ελεύθερης πτώσης ενός σώματος στο κενό.

Αν ο χρόνος t, σε δευτερόλεπτα, μετριέται από την αρχή της πτώσης, η απόσταση s που διανύεται, σε μέτρα, δίνεται από το γνωστό τύπο

$$s = \frac{gt^2}{2}, \qquad (1)$$

όπου $g = 9{,}81\ m/sec^2$. Θεωρούμε ότι τη χρονική στιγμή t το σώμα βρίσκεται στη θέση M (Σχ. 1), οπότε τη χρονική στιγμή $t + \Delta t$ το σώμα βρίσκεται στη θέση M_1, όπου Δt μικρό χρονικό διάστημα. Η μεταβολή MM_1 της απόστασης που καλύφτηκε στο χρονικό διάστημα Δt, συμβολίζεται με Δs.



Σχ. 1

Στο σημείο M_1 (από την (1)), έχουμε

$$s + \Delta s = \frac{g}{2}(t \div \Delta t)^2,$$

οπότε

$$\Delta s = \frac{g}{2}(2t\Delta t \div (\Delta t)^2)$$

Αν διαιρέσουμε το Δs με Δt έχουμε τη μέση ταχύτητα του σώματος στο

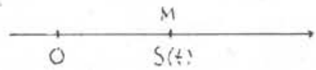
τμήμα MM_1,

$$u_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = gt + \frac{g}{2}\,\Delta t.$$

Στιγμιαία ταχύτητα u ενός σώματος λέγεται το όριο, αν υπάρχει, της μέσης ταχύτητας u_m, όταν $\Delta t \to 0$, δηλ.

$$u = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = gt.$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζεται η ταχύτητα u στη γενική περίπτωση της ευθύγραμμης κίνησης ενός κινητού. Η θέση του κινητού Μ (Σχ. 2) καθορίζεται από μια συνάρτηση του χρόνου $s(t)$, δηλαδή η κίνηση είναι τελείως ορισμένη όταν είναι γνωστή η εξίσωση της κίνησης $s = s(t)$. Τότε, το διανυόμενο διάστημα μεταξύ των χρονικών στιγμών t_0 και t είναι $s(t) - s(t_0)$ και η μέση ταχύτητα στο ίδιο χρονικό διάστημα είναι



Σχ. 2

$$u_m(t) = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Η στιγμαία ταχύτητα τη χρονική στιγμή t είναι

$$u = \lim_{\Delta t \to 0} u_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Ας πάρουμε, επίσης, ένα άλλο απλό παράδειγμα από τη φυσική. Υποθέτουμε ότι θερμαίνουμε ένα στερεό και έστω Τ η θερμοκρασία αυτού ανά πάσα χρονική στιγμή. Η θερμοκρασία του σώματος αυξάνεται με τη θέρμανση, μέχρι να φθάσει το σημείο τήξης. Η θερμοκρασία τώρα παραμένει σταθερή με επιπλέον θέρμανση, μέχρι το σημείο που όλη η ουσία θα μετατραπεί στην υγρή κατάσταση. Θεωρούμε τη θερμότητα Q που μεταδίδεται στην ουσία ως συνάρτηση της θερμοκρασίας Τ. Έστω ΔT και ΔQ οι αντίστοιχες αυξήσεις της θερμοκρασίας και της ποσότητας της θερμότητας. Ακριβείς μετρήσεις δείχνουν ότι το ΔQ δεν είναι ανάλογο προς το ΔT, και ο λόγος $\frac{\Delta Q}{\Delta T}$ δίνει τη μέση ειδική θερμότητα του σώματος από T^0 έως $T^0 + \Delta T$, ενώ το όριο του λόγου όταν $\Delta T \to 0$, δίνει την ειδική θερμότητα του σώματος στη θερμοκρασία Τ. Τα όρια των ποσοστιαίων μεταβολών των παραπάνω παραδειγμάτων

μας οδηγούν στην έννοια της παραγώγου μιας συνάρτησης, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

1.2 Παράγωγος αριθμός και παράγωγος συνάρτηση

Θεωρούμε συνάρτηση $f:E\to\mathbb{R}\,(E\subseteq\mathbb{R})$ και $x_0\in E$.

Ορισμός 1. Η συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο x_0 αν υπάρχει το όριο του λόγου $\lambda(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πεπερασμένο, δηλαδή αν

$$\exists\lambda_0\in\mathbb{R},\quad \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lambda_0$$

Το όριο λ_0 λέγεται παράγωγος αριθμός ή, απλά, παράγωγος της f στο x_0 και παριστάνεται συνήθως με τους συμβολισμούς $f'(x_0)$ και $\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x_0}$.

Ένας ισοδύναμος με τον ορισμό 1 είναι ο παρακάτω:

Ορισμός 2. Η συνάρτηση $y=f(x)$ λέγεται παραγωγίσιμη στο $x\in E$ αν

$$\exists\lambda_0\in\mathbb{R},\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lambda(x+\Delta x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lambda_0,$$

όπου Δx, Δy είναι οι αντίστοιχες μεταβολές των μεταβλητών x, y και Δx τέτοια ώστε $(x+\Delta x)\in E$.

Ορισμός 3. Μια συνάρτηση λέγεται παραγωγίσιμη σ' ένα σύνολο, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του συνόλου.

Έστω τώρα E' το σύνολο των $x\in E$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Υποθέτουμε ότι $E'\neq\emptyset$. Αν σε κάθε $x_0\in E'$ αντιστοιχίσουμε τον παράγωγο αριθμό της f στο x_0, τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση $g:E'\to\mathbb{R}$, όπου

$$\forall x\in E',\quad g(x)=f'(x),$$

η οποία λέγεται παράγωγος συνάρτηση ή, απλά, παράγωγος της f και παριστάνεται με τους συμβολισμούς f', $f'(x)$ και $\dfrac{df}{dx}$.

Θεώρημα 1. Έστω $f:A\to\mathbb{R}$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο $x_0\in A$, τότε η f είναι συνεχής στο x_0.

Απόδειξη

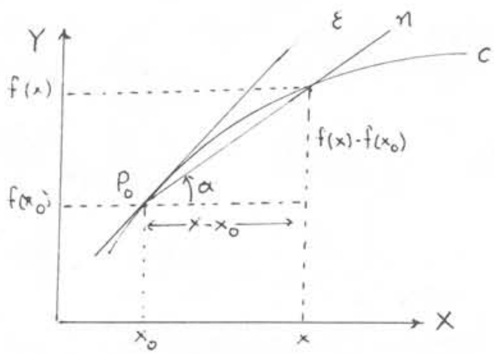
Για $x\neq x_0$ είναι $\displaystyle\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)] = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}(x-x_0) =$

$= f'(x_0)$. Συνεπώς, $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

Παρατήρηση. Το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης δεν ισχύει. Π.χ. η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο $x = 0$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, όπως θα δούμε παρακάτω.

1.3 Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου

Έστω η συνάρτηση $f: E \to \mathbb{R}$ $(E \subseteq R)$ που είναι συνεχής σε ένα διάστημα I και c η γραφική παράστασή της στο I (Σχ. 3). Αν $P(x_0, f(x_0))$ είναι ένα σταθερό σημείο της c και $P(x, f(x))$ ένα άλλο σημείο της c, είναι γνωστό (από την Αναλυτική Γεωμετρία) ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας η που ορίζεται από τα σημεία P_0, P είναι



Σχ. 3

$$\lambda(x) = \varepsilon\varphi\, a = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Αν υποθέσουμε τώρα ότι το σημείο $P(x, f(x))$ κινείται πάνω στην καμπύλη c, είναι φανερό ότι σχηματίζεται η συνάρτηση $F: E - \{x_0\} \to \mathbb{R}$, όπου $\forall x \in \{E - \{x_0\}\}$

$$F(x) = \lambda(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Καθώς το σημείο P πλησιάζει το P_0, η κλίση της ε πλησιάζει την κλίση της η. Αν, επιπλέον, υποθέσουμε ότι υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} F(x)$, τότε η ευθεία ε που περνά από το σημείο P_0 και έχει συντελεστή διεύθυνσης το

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda_0 \in \mathbb{R}$ λέγεται εφαπτόμενη της καμπύλης c στο σημείο P_0 και έχει εξίσωση $y - f(x_0) = \lambda_0(x - x_0)$, όπου $\lambda_0 = f'(x_0)$.

Ορισμός. Εφαπτόμενη της καμπύλης c μιας συνάρτησης f στο σημείο P_0 της c είναι η οριακή θέση, εφόσον υπάρχει, της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία P_0, P, όταν το σημείο P της καμπύλης, το οποίο κινείται πάνω στη c, τείνει στο P_0.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 3x + 5$.

'Εστω τυχόν $x_0 \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x \neq x_0$ έχουμε

$$\lambda(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 + 3x + 5 - x_0^2 - 3x_0 - 5}{x - x_0} = x + x_0 + 3$$

και $\lim_{x \to x_0} \lambda(x) = 2x_0 + 3$. Συνεπώς $f'(x_0) = 2x_0 + 3$. Επειδή το x είναι τυχόν σημείο του $\mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ και έχει παράγωγο f' με $f'(x) = 2x + 3$.

2. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x-2}$ στα σημεία x = 1 και x = 3. Να δειχθεί ότι η παράγωγος δεν υπάρχει στο σημείο x = 2, όπου η συνάρτηση είναι ασυνεχής.

'Εστω $x \neq 2$. Τότε έχουμε

$$\lambda(x + \Delta x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{-1}{(x + \Delta x - 2)(x - 2)}$$

και $\lim_{\Delta x \to 0} \lambda(x + \Delta x) = f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}$.

Επομένως, για x = 1, $f'(1) = -\frac{1}{(1-2)^2} = -1$ και

για x = 3, $f'(3) = -\frac{1}{(3-2)^2} = -1$.

Στο σημείο x = 2 η παράγωγος $f'(2)$ δεν υπάρχει, καθόσον ούτε η f(x) ορίζεται για x = 2, αφού ο παρονομαστής της μηδενίζεται.

1.4 Παράγωγος συνάρτησης από δεξιά ή αριστερά

Έστω $f:E \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση και $x \in E$.

Ορισμός. Η συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη από αριστερά (αντίστ. από δεξιά) στο x , όταν $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}$ ώστε

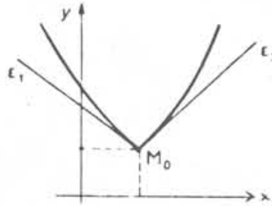
$$\lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda_0 \text{ (αντίστ. } \exists \lambda \in \mathbb{R}, \ \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda),$$

δηλαδή όταν υπάρχει το όριο από αριστερά (αντίστ. από δεξιά) του λόγου μεταβολής της f και είναι πεπερασμένο. Το όριο αυτό είναι η τιμή της παραγώγου από αριστερά (αντίστ. από δεξιά) και συμβολίζεται με $f'_-(x_0)$ (αντίστ. $f'_+(x_0)$). Οι ημιευθείες (Σχ. 4)

$y - f(x_0) = f'_-(x_0)(x - x_0)$, $x \leq x_0$,

$y - f(x_0) = f'_+(x_0)(x - x_0)$, $x \geq x_0$,

λέγονται, αντίστοιχα, ημιεφαπτόμενες από αριστερά ή από δεξιά της καμπύλης c στο σημείο P_0.



Σχ.4

Προφανώς ισχύει ότι μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν υπάρχουν οι αριθμοί $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ και είναι ίσοι μεταξύ τους.

Παρατήρηση. Αν μια συνεχής συνάρτηση δίνεται αποκλειστικά σε ένα διάστημα με άκρα τα σημεία a και b, μπορούμε να πάρουμε μόνο την παράγωγο $f'_+(a)$ στο αριστερό άκρο $x = a$, και μόνο την παράγωγο $f'_-(b)$ στο δεξιό άκρο $x = b$, ενώ στα άλλα σημεία του διαστήματος ορίζονται όλες οι παράγωγοι.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι $\lambda(x) = \dfrac{|x| - |0|}{x - 0} = \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{αν } x > 0 \\ -1, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$.

Επομένως, στο σημείο 0, θα είναι

$$\lim_{x \to 0_+} \lambda(x) = 1, \quad \lim_{x \to 0_-} \lambda(x) = -1.$$

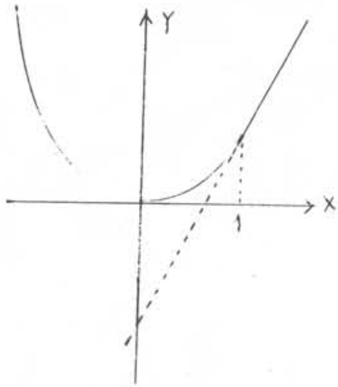
Επειδή $\lim_{x \to 0_+} \lambda(x) \neq \lim_{x \to 0_-} \lambda(x)$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Για κάθε $x \neq 0$ η f είναι παραγωγίσιμη γιατί σε κάθε διάστημα $(-\infty, 0)$ ή $(0, \infty)$ ο λόγος μεταβολής παραμένει σταθερός με τιμή -1 ή +1, αντίστοιχα.

2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x < 1 \\ 2x-1, & \text{αν } x \quad 1 \end{cases},$$

είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$.



Παρατηρούμε ότι

$$\lambda(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x < 1 \\ 2, & \text{αν } x \quad 1 \end{cases}$$

Έτσι θα είναι $\lim\limits_{x \to 1_+} \lambda(x) = 2$ και $\lim\limits_{x \to 1_-} \lambda(x) = 2$, δηλαδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x = 1$ (παραπάνω σχήμα).

1.5 Παράγωγος στοιχειωδών συναρτήσεων

I. $f(x) = b$ (σταθερή).

Έστω τυχόν $x_0 \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{b - b}{x - x_0} = 0,$$

δηλαδή η σταθερή συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη $\forall x \in \mathbb{R}$ και $f'(x) = 0$.

II. $f(x) = x$ (ταυτοτική).

Έστω τυχόν $x_0 \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1,$$

δηλαδή η ταυτοτική συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη $\forall x \in \mathbb{R}$ και $f'(x) = (x)' = 1$.

III. $f(x) = x^n$ (n θετικός ακέραιος).

Έστω τυχόν $x_0 \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + x_0^{n-1}) = nx_0^{n-1},$$

δηλαδή η συνάρτηση x^n (n θετικός ακέραιος) είναι παραγωγίσιμη $\forall x \in \mathbb{R}$, και $(x^n)' = n\,x^{n-1}$.

Παρόμοια αποδεικνύεται ότι $(x^n)' = n\,x^{n-1}$, όταν $n = \frac{1}{\kappa}$, όπου κ θετικός ακέραιος.

IV. $f(x) = \eta\mu\, x$.

Έστω τυχόν $x_0 \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\eta\mu x - \eta\mu x_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{2\eta\mu \frac{x - x_0}{2}\, \sigma\upsilon\nu \frac{x + x_0}{2}}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{\eta\mu \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \cdot \lim_{x\to x_0} \sigma\upsilon\nu \frac{x + x_0}{2} = 1.\sigma\upsilon\nu x_0,$$

δηλαδή η ημιτονική συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη $\forall x \in \mathbb{R}$, και $(\eta\mu\, x)' = \sigma\upsilon\nu\, x$.

V. $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$.

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{-2\eta\mu \frac{x - x_0}{2}\, \eta\mu \frac{x + x_0}{2}}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{\eta\mu \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \cdot \lim_{x\to x_0} \eta\mu \frac{x + x_0}{2} = -\eta\mu\, x_0,$$

δηλαδή η συνημιτονική συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη $\forall x \in \mathbb{R}$ και $(\sigma\upsilon\nu\, x)' = -\eta\mu\, x$.

VI. $f(x) = \ln x \quad (x > 0)$.

$$\text{Είναι } f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{x} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x},$$

γιατί για $\Delta x \to 0$, $\alpha = \frac{\Delta x}{x}$ τείνει επίσης στο μηδέν και $\lim_{\alpha\to 0} \ln\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right) = 1$ (γνωστό από τη θεωρία του ορίου). Συνεπώς η λογαριθμική συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη $\forall x > 0$, $x \in \mathbb{R}$ και

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

VII. $f(x) = e^x$.

Είναι $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x$

γιατί $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{e^{\alpha} - 1}{\alpha} = 1$ (γνωστό από τη θεωρία του ορίου). Συνεπώς $(e^x)' = e^x$.

1.6 Ιδιότητες των παραγώγων

Θεώρημα 1. Αν οι συναρτήσεις $f: A \to \mathbb{R}$ και $g: B \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο σημείο $x_0 \in E = A \cap B$, τότε οι συναρτήσεις

$$f + g : E \to \mathbb{R}$$
$$fg : E \to \mathbb{R}$$

είναι επίσης παραγωγίσιμες στο x_0 και μάλιστα

(i) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

(ii) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

Απόδειξη:

(i) Αν $\varphi = f + g$, τότε, για κάθε $x \in E - \{x_0\}$, είναι

$$\varphi'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} =$$
$$= f'(x_0) + g'(x_0)$$

(ii) Αν $\varphi = fg$, τότε, για κάθε $x \in E - \{x_0\}$, είναι

$$\varphi'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} g(x) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} +$$
$$+ \lim_{x \to x_0} f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Πόρισμα. Αν οι συναρτήσεις $f, f_1, f_2, \ldots, f_\kappa$ είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα E, και λ οποιαδήποτε σταθερή, κ θετικός ακέραιος, τότε οι συναρτήσεις $f_1 + \ldots + f_\kappa$, $f_1 f_2 \ldots f_\kappa$, λf, $f + \lambda$, f^κ είναι παραγωγίσιμες στο E και είναι:

1. $(f_1 + f_2 + \ldots + f_\kappa)' = f_1' + f_2' + \ldots + f_\kappa'$
2. $(f_1 \ldots f_\kappa)' = \sum\limits_{i=1}^{\kappa} (f_1 \ldots f_{i-1} f_i' f_{i+1} \ldots f_\kappa)$

3. $(\lambda f)' = \lambda f'$

4. $(f + \lambda)' = f'$

5. $(f^{\kappa})' = \kappa f^{\kappa-1} f'$

Θεώρημα 2. Αν οι συναρτήσεις $f:A \to \mathbb{R}$, $g:B \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο σημείο $x_0 \in E = A \cap B$ και $g(x\ ) \neq 0$, τότε οι συναρτήσεις $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και

$$\text{(i)} \quad \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

$$\text{(ii)} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Απόδειξη.

(i) Αν $\varphi = \frac{1}{g}$, τότε, $\forall x \in B - \{x_0\}$ και $g(x_0) \neq 0$, έχουμε

$$\varphi'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = -\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} =$$

$$= -\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

(ii) Αν $\varphi = f\,\frac{1}{g}$ τότε από τον κανόνα παραγώγισης γινομένου παραγωγίσιμων συναρτήσεων έχουμε

$$\varphi'(x_0) = f'(x_0)\left(\frac{1}{g(x_0)}\right) + f(x_0)\left(\frac{1}{g(x_0)}\right)' = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να δειχθεί ότι η πολυωνυμική συνάρτηση $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$ είναι παραγωγίσιμη, $\forall x \in \mathbb{R}$ και να υπολογιστεί η παράγωγός της.

Από την παράγραφο 1.5 έχουμε $(x)' = 1$, $(x^n)' = nx^{n-1}$, n θετικός ακέραιος, $\forall x \in \mathbb{R}$ και επομένως (Πόρισμα § 1.6) η συνάρτηση $p(x)$ είναι παραγωγίσιμη, $\forall x \in \mathbb{R}$ και

$$(p(x))' = \alpha_1 + \alpha_2 x + \dots + n_n \alpha_n x^{n-1}.$$

2. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση εφx είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και να υπολογιστεί η παράγωγός της.