

**ΑΜΑΛΙΑΣ ΜΕΪΜΑΡΙΔΟΥ**  
ΛΕΚΤΟΡΟΣ ΠΑΝ/ΜΙΟΥ ΘΡΑΚΗΣ

**ΙΩΑΝΝΟΥ ΧΡ. ΣΧΟΙΝΑ**  
ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΠΑΝ/ΜΙΟΥ ΘΡΑΚΗΣ

# **ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ**



## Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ I

	Σελ.
1. Παραγωγή Πραγματικών Συναρτήσεων Πραγματικής Μεταβλητής	
1.1 Η έννοια της παραγώγου	1
1.2 Παράγωγος αριθμός και παράγωγος συνάρτηση	3
1.3 Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου	4
1.4 Παράγωγος συνάρτησης από δεξιά ή αριστερά	5
1.5 Παράγωγος στοιχειωδών συναρτήσεων	7
1.6 Ιδιότητες των παραγώγων	9
1.7 Παραγωγή σύνθετης συνάρτησης	11
1.8 Παραγωγή αντίστροφης συνάρτησης	14
1.9 Παραγωγή συνάρτησης που ορίζεται παραμετρικά	17
1.10 Παραγωγή πεπλεγμένων συναρτήσεων	18
1.11 Η έννοια του διαφορικού	22
1.12 Παράγωγοι ανώτερης τάξης	27
1.13 Διαφορικά ανώτερης τάξης	30
2. Εφαρμογές των παραγώγων	
2.1 Ακρότατα συνάρτησης	33
2.2 Θεώρημα της μέσης τιμής των παραγώγων	37
2.3 Τύπος του Taylor	47
2.3.1 Τύπος του Taylor για ένα πολυώνυμο	47
2.3.2 Τύπος του Taylor για αυθαίρετη συνάρτηση	49
2.4. Μελέτη της συμπεριφοράς των συναρτήσεων	55
2.4.1 Αύξουσες και φθίνουσες συναρτήσεις	55
2.4.2 Εύρεση μεγίστων ή ελαχίστων μιας συνάρτησης	59
2.4.3 Κόιλα της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης, σημεία καμψής	67
2.4.4 Ασύμπτωτη	73
2.4.5 Γραφική παράσταση της καμπύλης μιας συνάρτησης f	74
2.5 Υπολογισμός απροσδιόριστων μορφών	79
2.5.1 Απροσδιόριστες μορφές τύπου $\frac{0}{0}$	79
2.5.2 Απροσδιόριστες μορφές τύπου $\frac{\infty}{\infty}$	83
2.5.3 Άλλοι τύποι απροσδιόριστων μορφών	85

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

	Σελ.
1. Ολοκλήρωση	
1.1 Η έννοια του αόριστου ολοκληρώματος	89
1.2 Μηχανική ερμηνεία του αόριστου ολοκληρώματος	90
1.3 Γεωμετρική ερμηνεία του αόριστου ολοκληρώματος	91
1.4 Ιδιότητες του αόριστου ολοκληρώματος	92
1.5 Μέθοδοι ολοκλήρωσης	95
1.5.1 Ολοκλήρωση κατά παράγοντες	95
1.5.2 Ολοκλήρωση με αλλαγή της μεταβλητής ή μέθοδος αντικατάστασης	98
1.5.3 Ολοκλήρωση απλών ρητών παραστάσεων	100
1.5.4 Ολοκλήρωση ρητής συνάρτησης	102
1.5.5 Ολοκλήρωση ρητής παράστασης του $\eta\mu x$ και $\sigma\upsilon\nu x$	106
1.5.6 Ολοκλήρωση ρητής συνάρτησης του $e^{\mu x}$	108
1.5.7 Ολοκλήρωση της συνάρτησης $e^{\mu x}R(x)$ , $R(x)$ ρητή συνάρτηση του $x$	109
1.5.8 Ολοκλήρωση ρητής παράστασης του (και δυνάμεων του)	
$\frac{ax+\beta}{\gamma x+\delta}$ με εκθέτες ρητούς	110
1.5.9 Ολοκλήρωση του διώνυμου διαφορικού	112
1.5.10 Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων του $x$ και της $\sqrt{a^2-x^2}$	115
1.5.11 Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων του $x$ και της $\sqrt{a^2+x^2}$	115
1.5.12 Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων του $x$ και της $\sqrt{ax^2+bx+\gamma}$	116
1.5.13 Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων του $x$ , $\sqrt{ax+\delta}$ , $\sqrt{\gamma x+\delta}$	120
1.5.14 Ελλειπτικά ολοκληρώματα	121
1.6 Το ορισμένο ολοκλήρωμα ως όριο αθροίσματος	122
1.7 Σχέση μεταξύ του ορισμένου και του αόριστου ολοκληρώματος	125
1.8 Κλάσεις ολοκληρώσιμων συναρτήσεων	128
1.9 Ιδιότητες των ορισμένων ολοκληρωμάτων	129
1.10 Κανόνες ολοκλήρωσης ορισμένου ολοκληρώματος	136
1.11 Προσεγγιστικός υπολογισμός των ολοκληρωμάτων	139
1.12 Ασυνέχεια της ολοκληρωτέας συνάρτησης	143
1.13 Εφαρμογές των ορισμένων ολοκληρωμάτων	146
1.13.1 Υπολογισμός εμβαδών	146
1.13.2 Μήκος τόξου καμπύλης	150

	Σελ.
1.13.3 Όγκος και εμβαδό επιφάνειας στερεών από περιστροφή	154
1.13.4 Παραγωγή και ολοκλήρωση διανυσματικής συνάρτησης. Έργο δύναμης	158
2. Πίεση ρευστών πάνω σε επίπεδη επιφάνεια	163
3. Εφαρμογή των ορισμένων ολοκληρωμάτων στις πιθανότητες	164
4. Μετάδοση της θερμότητας	165
5. Κόστος θέρμανσης ενός σπιτιού	166
6. Κόστος κατασκευής ενός δρόμου	166
7. Καταναλούμενη ηλεκτρική ενέργεια	166

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

1. Σειρές πραγματικών αριθμών	
1.1 Γενικά	179
1.2 Κριτήρια σύγκρισης για τη σύγκλιση	181
1.3 Κριτήριο του λόγου και κριτήριο της ρίζας	184
1.4 Σειρές εναλλασσόμενων (θετικών και αρνητικών) όρων	187
2. Σειρές δυνάμεων	
2.1 Γενικά	193
2.2 Ακτίνα σύγκλισης	194
3. Παραγωγή και ολοκλήρωση	
3.1 Γενικά	198
3.2 Παραγωγή και Ολοκλήρωση σειρών δυνάμεων	199
4. Σειρές Taylor	
4.1 Γενικά	202
4.2 Παραδείγματα	205

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

1. Γενικευμένα Ολοκληρώματα	
1.1 Ορισμοί	217
1.2 Γενικευμένα ολοκληρώματα πρώτου είδους	218
1.3 Σύγκλιση υπό συνθήκη	222
1.4 Γενικευμένα ολοκληρώματα δευτέρου είδους και μικτού τύπου	226

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ V</u>	Σελ.
1. Διαφορικές Εξισώσεις	
1.1 Ορισμός	231
1.2 Διαφορικές εξισώσεις 1 <sup>ης</sup> τάξης	231
1.3 Εφαρμογές	236
1.4 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 2 <sup>ης</sup> τάξης	238
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI</u>	
1. Μερικές παράγωγοι	
1.1 Συνέχεια συναρτήσεων περισσότερων μεταβλητών	247
1.2 Μερικές παράγωγοι	248
1.3 Ολικά διαφορικά. Παραγωγή συνθέτων συναρτήσεων	250
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII</u>	
1. Ολοκληρώματα εξαρτώμενα από παράμετρο	
1.1 Όριο συνάρτησης ομοιόμορφα ως προς μια μεταβλητή	257
1.2 Όριο υπό το ολοκλήρωμα. Παραγωγή υπό το ολοκλήρωμα	258

---

## Π Ρ Ο Λ Ο Γ Ο Σ

Το βιβλίο αυτό περιέχει τα Κεφάλαια: Παράγωγοι, Ολοκληρώματα, Σειρές και Σειρές Δυνάμεων, Στοιχεία Διαφορικών Εξισώσεων και Μερικές Παράγωγοι, που αποτελούν τη διδακτέα ύλη των Μαθηματικών πρώτου εξαμήνου των σπουδαστών Πολυτεχνικών Σχολών.

Κατά τη συγγραφή του βιβλίου καταβλήθηκε προσπάθεια για την απλή και διδακτική παρουσίαση της ύλης. Για το σκοπό αυτό δόθηκε περισσότερη προσοχή στις εφαρμογές της θεωρίας στη λύση αντιπροσωπευτικών παραδειγμάτων μετά από κάθε ενότητα. Στο τέλος κάθε Κεφαλαίου δίνονται πολλά προβλήματα και ασκήσεις με τα αποτελέσματά τους.

Θεωρώ υποχρέωσή μου να ευχαριστήσω τα μέλη του Ε.Δ.Τ.Π. του Τομέα Λ. Αλεξίου, Σ. Πόπε και Μ. Τσομακίδου για την προσεκτική δακτυλογράφηση του κειμένου.

Ξάνθη Σεπτέμβριος 1985

Γιάννης Σχοινάς  
Αμαλία Μείμαρίδου

# Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο Ι

## ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

### 1. Παραγωγή Πραγματικών Συναρτήσεων Πραγματικής Μεταβλητής

#### 1.1 Η έννοια της παραγώγου

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε το πρόβλημα της ελεύθερης πτώσης σώματος στο κενό και το πρόβλημα της μεταβολής της θερμότητας σώματος. Στα προβλήματα αυτά εισάγονται τα φυσικά μεγέθη της ταχύτητας και ειδικής θερμότητας, αντίστοιχα, που οδηγούν με απλό τρόπο στην έννοια του ρυθμού μεταβολής των συναρτήσεων, δηλαδή στην έννοια της παραγώγου.

Αρχίζουμε με το παράδειγμα της ελεύθερης πτώσης ενός σώματος στο κενό.

Αν ο χρόνος  $t$ , σε δευτερόλεπτα, μετριέται από την αρχή της πτώσης, η απόσταση  $s$  που διανύεται, σε μέτρα, δίνεται από το γνωστό τύπο

$$s = \frac{gt^2}{2}, \quad (1)$$

όπου  $g = 9,81 \text{ m/sec}^2$ . Θεωρούμε ότι τη χρονική στιγμή  $t$  το σώμα βρίσκεται στη θέση  $M$  (Σχ. 1), οπότε τη χρονική στιγμή  $t + \Delta t$  το σώμα βρίσκεται στη θέση  $M_1$ , όπου  $\Delta t$  μικρό χρονικό διάστημα. Η μεταβολή  $MM_1$  της απόστασης που καλύφθηκε στο χρονικό διάστημα  $\Delta t$ , συμβολίζεται με  $\Delta s$ .

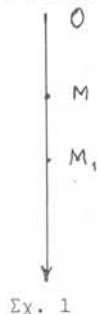
Στο σημείο  $M_1$  (από την (1)), έχουμε

$$s + \Delta s = \frac{g}{2} (t + \Delta t)^2,$$

οπότε

$$\Delta s = \frac{g}{2} (2t\Delta t + (\Delta t)^2)$$

Αν διαιρέσουμε το  $\Delta s$  με  $\Delta t$  έχουμε τη μέση ταχύτητα του σώματος στο



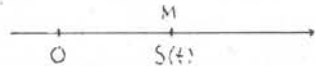
τμήμα  $MM_1$ ,

$$u_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = gt + \frac{g}{2} \Delta t.$$

Στιγμιαία ταχύτητα  $u$  ενός σώματος λέγεται το όριο, αν υπάρχει, της μέσης ταχύτητας  $u_m$ , όταν  $\Delta t \rightarrow 0$ , δηλ.

$$u = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = gt.$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζεται η ταχύτητα  $u$  στη γενική περίπτωση της ευθύγραμμης κίνησης ενός κινητού. Η θέση του κινητού  $M$  (Σχ. 2) καθορίζεται από μια συνάρτηση του χρόνου  $s(t)$ , δηλαδή η κίνηση είναι τελείως ορισμένη όταν είναι γνωστή η εξίσωση της κίνησης  $s = s(t)$ . Τότε, το διανυόμενο διάστημα μεταξύ των χρονικών στιγμών  $t_0$  και  $t$  είναι  $s(t) - s(t_0)$  και η μέση ταχύτητα στο ίδιο χρονικό διάστημα είναι



Σχ. 2

$$u_m(t) = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Η στιγμιαία ταχύτητα τη χρονική στιγμή  $t$  είναι

$$u = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} u_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Ας πάρουμε, επίσης, ένα άλλο απλό παράδειγμα από τη φυσική. Υποθέτουμε ότι θερμαίνουμε ένα στερεό και έστω  $T$  η θερμοκρασία αυτού ανά πάσα χρονική στιγμή. Η θερμοκρασία του σώματος αυξάνεται με τη θέρμανση, μέχρι να φθάσει το σημείο τήξης. Η θερμοκρασία τώρα παραμένει σταθερή με επιπλέον θέρμανση, μέχρι το σημείο που όλη η ουσία θα μετατραπεί στην υγρή κατάσταση. Θεωρούμε τη θερμότητα  $Q$  που μεταδίδεται στην ουσία ως συνάρτηση της θερμοκρασίας  $T$ . Έστω  $\Delta T$  και  $\Delta Q$  οι αντίστοιχες αυξήσεις της θερμοκρασίας και της ποσότητας της θερμότητας. Ακριβείς μετρήσεις δείχνουν ότι το  $\Delta Q$  δεν είναι ανάλογο προς το  $\Delta T$ , και ο λόγος  $\frac{\Delta Q}{\Delta T}$  δίνει τη μέση ειδική θερμότητα του σώματος από  $T^0$  έως  $T^0 + \Delta T$ , ενώ το όριο του λόγου όταν  $\Delta T \rightarrow 0$ , δίνει την ειδική θερμότητα του σώματος στη θερμοκρασία  $T$ . Τα όρια των ποσοστιαίων μεταβολών των παραπάνω παραδειγμάτων



μας οδηγούν στην έννοια της παραγώγου μιας συνάρτησης, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

## 1.2 Παράγωγος αριθμός και παράγωγος συνάρτηση

Θεωρούμε συνάρτηση  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  ( $E \subseteq \mathbb{R}$ ) και  $x_0 \in E$ .

Ορισμός 1. Η συνάρτηση  $f$  λέγεται παραγωγίσιμη στο  $x_0$  αν υπάρχει το όριο του λόγου  $\lambda(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  και είναι πεπερασμένο, δηλαδή αν

$$\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \lambda(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda_0$$

Το όριο  $\lambda_0$  λέγεται παράγωγος αριθμός ή, απλά, παράγωγος της  $f$  στο  $x_0$  και παριστάνεται συνήθως με τους συμβολισμούς  $f'(x_0)$  και  $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0}$ .

Ένας ισοδύναμος με τον ορισμό 1 είναι ο παρακάτω:

Ορισμός 2. Η συνάρτηση  $y = f(x)$  λέγεται παραγωγίσιμη στο  $x \in E$  αν

$$\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lambda(x + \Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lambda_0,$$

όπου  $\Delta x, \Delta y$  είναι οι αντίστοιχες μεταβολές των μεταβλητών  $x, y$  και  $\Delta x$  τέτοια ώστε  $(x + \Delta x) \in E$ .

Ορισμός 3. Μια συνάρτηση λέγεται παραγωγίσιμη σ' ένα σύνολο, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του συνόλου.

Έστω τώρα  $E'$  το σύνολο των  $x \in E$  στα οποία η  $f$  είναι παραγωγίσιμη. Υποθέτουμε ότι  $E' \neq \emptyset$ . Αν σε κάθε  $x_0 \in E'$  αντιστοιχίσουμε τον παράγωγο αριθμό της  $f$  στο  $x_0$ , τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση  $g: E' \rightarrow \mathbb{R}$ , όπου

$$\forall x \in E', \quad g(x) = f'(x),$$

η οποία λέγεται παράγωγος συνάρτηση ή, απλά, παράγωγος της  $f$  και παριστάνεται με τους συμβολισμούς  $f', f'(x)$  και  $\frac{df}{dx}$ .

Θεώρημα 1. Έστω  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ . Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0 \in A$ , τότε η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

Απόδειξη

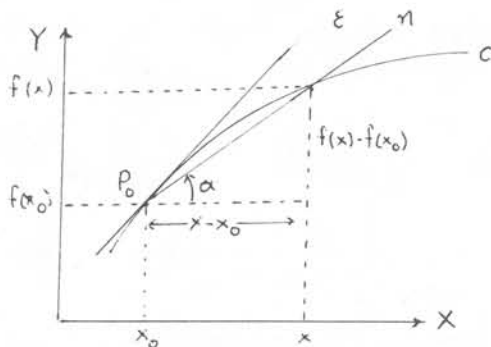
$$\text{Για } x \neq x_0 \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) =$$

$= f'(x_0)$ . Συνεπώς,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , δηλαδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

Παρατήρηση. Το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης δεν ισχύει. Π.χ. η συνάρτηση  $f(x) = |x|$  είναι συνεχής στο  $x = 0$  αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, όπως θα δούμε παρακάτω.

### 1.3 Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου

Έστω η συνάρτηση  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  ( $E \subseteq \mathbb{R}$ ) που είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $I$  και  $c$  η γραφική παράστασή της στο  $I$  (Σχ. 3). Αν  $P(x_0, f(x_0))$  είναι ένα σταθερό σημείο της  $c$  και  $P(x, f(x))$  ένα άλλο σημείο της  $c$ , είναι γνωστό (από την Αναλυτική Γεωμετρία) ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας  $\eta$  που ορίζεται από τα σημεία  $P_0, P$  είναι



Σχ. 3

$$\lambda(x) = \epsilon \phi \alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Αν υποθέσουμε τώρα ότι το σημείο  $P(x, f(x))$  κινείται πάνω στην καμπύλη  $c$ , είναι φανερό ότι σχηματίζεται η συνάρτηση  $F: E - \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , όπου  $\forall x \in \{E - \{x_0\}\}$

$$F(x) = \lambda(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Καθώς το σημείο  $P$  πλησιάζει το  $P_0$ , η κλίση της  $\epsilon$  πλησιάζει την κλίση της  $\eta$ . Αν, επιπλέον, υποθέσουμε ότι υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x)$ , τότε η ευθεία  $\epsilon$  που περνά από το σημείο  $P_0$  και έχει συντελεστή διεύθυνσης το

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda_0 \in \mathbb{R}$  λέγεται εφαπτόμενη της καμπύλης  $c$  στο σημείο  $P_0$  και έχει εξίσωση  $y - f(x_0) = \lambda_0(x - x_0)$ , όπου  $\lambda_0 = f'(x_0)$ .

Ορισμός. Εφαπτόμενη της καμπύλης  $c$  μιας συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $P_0$  της  $c$  είναι η οριακή θέση, εφόσον υπάρχει, της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία  $P_0, P$ , όταν το σημείο  $P$  της καμπύλης, το οποίο κινείται πάνω στη  $c$ , τείνει στο  $P_0$ .

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης  $f(x) = x^2 + 3x + 5$ .

Έστω τυχόν  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Για κάθε  $x \neq x_0$  έχουμε

$$\lambda(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 + 3x + 5 - x_0^2 - 3x_0 - 5}{x - x_0} = x + x_0 + 3$$

και  $\lim_{x \rightarrow x_0} \lambda(x) = 2x_0 + 3$ . Συνεπώς  $f'(x_0) = 2x_0 + 3$ . Επειδή το  $x$  είναι τυχόν σημείο του  $\mathbb{R}$  η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και έχει παράγωγο  $f'$  με  $f'(x) = 2x + 3$ .

2. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης  $f(x) = \frac{1}{x-2}$  στα σημεία  $x = 1$  και  $x = 3$ . Να δειχθεί ότι η παράγωγος δεν υπάρχει στο σημείο  $x = 2$ , όπου η συνάρτηση είναι ασυνεχής.

Έστω  $x \neq 2$ . Τότε έχουμε

$$\lambda(x + \Delta x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{-1}{(x + \Delta x - 2)(x - 2)}$$

$$\text{και } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lambda(x + \Delta x) = f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}.$$

$$\text{Επομένως, για } x = 1, f'(1) = -\frac{1}{(1-2)^2} = -1 \text{ και}$$

$$\text{για } x = 3, f'(3) = -\frac{1}{(3-2)^2} = -1.$$

Στο σημείο  $x = 2$  η παράγωγος  $f'(2)$  δεν υπάρχει, καθώς ούτε η  $f(x)$  ορίζεται για  $x = 2$ , αφού ο παρονομαστής της μηδενίζεται.

### 1.4 Παράγωγος συνάρτησης από δεξιά ή αριστερά

Έστω  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση και  $x \in E$ .

Ορισμός. Η συνάρτηση  $f$  λέγεται παραγωγίσιμη από αριστερά (αντίστ. από δεξιά) στο  $x$ , όταν  $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}$  ώστε

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda_0 \quad (\text{αντίστ. } \exists \lambda \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda),$$

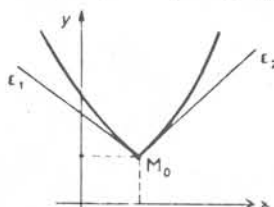
δηλαδή όταν υπάρχει το όριο από αριστερά (αντίστ. από δεξιά) του λόγου μεταβολής της  $f$  και είναι πεπερασμένο. Το όριο αυτό είναι η τιμή της παραγώγου από αριστερά (αντίστ. από δεξιά) και συμβολίζεται με  $f'_-(x_0)$  (αντίστ.  $f'_+(x_0)$ ). Οι ημιευθείες (Σχ. 4)

$$y - f(x_0) = f'_-(x_0)(x - x_0), \quad x \leq x_0,$$

$$y - f(x_0) = f'_+(x_0)(x - x_0), \quad x \geq x_0,$$

λέγονται, αντίστοιχα, ημιεφαπτόμενες από αριστερά ή από δεξιά της καμπύλης  $c$  στο σημείο  $P_0$ .

Σχ. 4



Προφανώς ισχύει ότι μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν υπάρχουν οι αριθμοί  $f'_-(x_0)$ ,  $f'_+(x_0)$  και είναι ίσοι μεταξύ τους.

Παρατήρηση. Αν μια συνεχής συνάρτηση δίνεται αποκλειστικά σε ένα διάστημα με άκρα τα σημεία  $a$  και  $b$ , μπορούμε να πάρουμε μόνο την παράγωγο  $f'_+(a)$  στο αριστερό άκρο  $x = a$ , και μόνο την παράγωγο  $f'_-(b)$  στο δεξιό άκρο  $x = b$ , ενώ στα άλλα σημεία του διαστήματος ορίζονται όλες οι παράγωγοι.

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση  $f(x) = |x|$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ .

$$\text{Παρατηρούμε ότι } \lambda(x) = \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{αν } x > 0 \\ -1, & \text{αν } x < 0 \end{cases}.$$

Επομένως, στο σημείο 0, θα είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \lambda(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \lambda(x) = -1.$$

Επειδή  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \lambda(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \lambda(x)$  η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Για κάθε  $x \neq 0$  η  $f$  είναι παραγωγίσιμη γιατί σε κάθε διάστημα  $(-\infty, 0)$  ή  $(0, \infty)$  ο λόγος μεταβολής παραμένει σταθερός με τιμή  $-1$  ή  $+1$ , αντίστοιχα.

2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , με

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x < 1 \\ 2x-1, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases},$$

είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0 = 1$ .

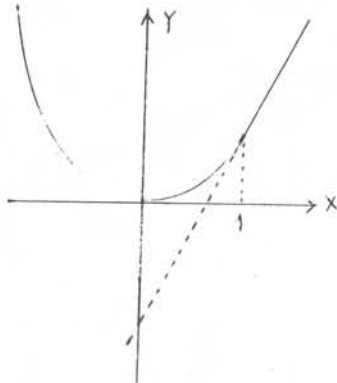
Παρατηρούμε ότι

$$\lambda(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x < 1 \\ 2, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

Έτσι θα είναι  $\lim_{x \rightarrow 1+} \lambda(x) = 2$  και

$\lim_{x \rightarrow 1-} \lambda(x) = 2$ , δηλαδή η συνάρτηση

$f$  είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $x = 1$  (παραπάνω σχήμα).



### 1.5 Παράγωγος στοιχειωδών συναρτήσεων

I.  $f(x) = b$  (σταθερή).

Έστω τυχόν  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , είναι

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{b - b}{x - x_0} = 0,$$

δηλαδή η σταθερή συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη  $\forall x \in \mathbb{R}$  και  $f'(x) = 0$ .

II.  $f(x) = x$  (ταυτοτική).

Έστω τυχόν  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1,$$

δηλαδή η ταυτοτική συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη  $\forall x \in \mathbb{R}$  και  $f'(x) = (x)' = 1$ .

III.  $f(x) = x^n$  ( $n$  θετικός ακέραιος).

Έστω τυχόν  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x_0^{n-1}) = nx_0^{n-1},$$

δηλαδή η συνάρτηση  $x^n$  ( $n$  θετικός ακέραιος) είναι παραγωγίσιμη  $\forall x \in \mathbb{R}$ , και  $(x^n)' = nx^{n-1}$ .

Παρόμοια αποδεικνύεται ότι  $(x^n)' = nx^{n-1}$ , όταν  $n = \frac{1}{k}$ , όπου  $k$  θετικός ακέραιος.

IV.  $f(x) = \eta\mu x$ .

Έστω τυχόν  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , είναι

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\eta\mu x - \eta\mu x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2\eta\mu \frac{x-x_0}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{x+x_0}{2}}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\eta\mu \frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu \frac{x+x_0}{2} = 1 \cdot \sigma\upsilon\nu x_0, \end{aligned}$$

δηλαδή η ημιτονική συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη  $\forall x \in \mathbb{R}$ , και  $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$ .

V.  $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ .

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-2\eta\mu \frac{x-x_0}{2} \eta\mu \frac{x+x_0}{2}}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\eta\mu \frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu \frac{x+x_0}{2} = -\eta\mu x_0, \end{aligned}$$

δηλαδή η συνημιτονική συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη  $\forall x \in \mathbb{R}$  και  $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$ .

VI.  $f(x) = \ln x$  ( $x > 0$ ).

$$\begin{aligned} \text{Είναι } f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x}, \end{aligned}$$

γιατί για  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $a = \frac{\Delta x}{x}$  τείνει επίσης στο μηδέν και  $\lim_{a \rightarrow 0} \ln\left(\frac{1+a}{a}\right) = 1$  (γνωστό από τη θεωρία του ορίου). Συνεπώς η λογαριθμική συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη  $\forall x > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

**VII.**  $f(x) = e^x$ .

$$\text{Είναι } f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x$$

γιατί  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{e^\alpha - 1}{\alpha} = 1$  (γνωστό από τη θεωρία του ορίου). Συνεπώς  $(e^x)' = e^x$ .

### 1.6 Ιδιότητες των παραγώγων

Θεώρημα 1. Αν οι συναρτήσεις  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  και  $g: B \rightarrow \mathbb{R}$  είναι παραγωγίσιμες στο σημείο  $x_0 \in E = A \cap B$ , τότε οι συναρτήσεις

$$f + g : E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$fg : E \rightarrow \mathbb{R}$$

είναι επίσης παραγωγίσιμες στο  $x_0$  και μάλιστα

$$(i) \quad (f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$(ii) \quad (fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Απόδειξη:

(i) Αν  $\varphi = f + g$ , τότε, για κάθε  $x \in E - \{x_0\}$ , είναι

$$\begin{aligned} \varphi'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= f'(x_0) + g'(x_0) \end{aligned}$$

(ii) Αν  $\varphi = fg$ , τότε, για κάθε  $x \in E - \{x_0\}$ , είναι

$$\begin{aligned} \varphi'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \\ &+ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \end{aligned}$$

Πόρισμα. Αν οι συναρτήσεις  $f, f_1, f_2, \dots, f_n$  είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα  $E$ , και  $\lambda$  οποιαδήποτε σταθερή,  $\kappa$  θετικός ακέραιος, τότε οι συναρτήσεις  $f_1 + \dots + f_n, f_1 f_2 \dots f_n, \lambda f, f + \lambda, f^\kappa$  είναι παραγωγίσιμες στο  $E$  και είναι:

$$1. (f_1 + f_2 + \dots + f_n)' = f_1' + f_2' + \dots + f_n'$$

$$2. (f_1 \dots f_n)' = \sum_{i=1}^n (f_1 \dots f_{i-1} f_i' f_{i+1} \dots f_n)$$

$$3. (\lambda f)' = \lambda f'$$

$$4. (f + \lambda)' = f'$$

$$5. (f^k)' = kf^{k-1} f'$$

Θεώρημα 2. Αν οι συναρτήσεις  $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g:B \rightarrow \mathbb{R}$  είναι παραγωγίσιμες στο σημείο  $x_0 \in E = A \cap B$  και  $g(x) \neq 0$ , τότε οι συναρτήσεις  $\frac{1}{g}$ ,  $\frac{f}{g}$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$  και

$$(i) \quad \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

$$(ii) \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Απόδειξη.

(i) Αν  $\varphi = \frac{1}{g}$ , τότε  $\forall x \in B - \{x_0\}$  και  $g(x_0) \neq 0$ , έχουμε

$$\begin{aligned} \varphi'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = -\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} = \\ &= -\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}. \end{aligned}$$

(ii) Αν  $\varphi = f \frac{1}{g}$  τότε από τον κανόνα παραγωγίσιμου γινομένου παραγωγίσιμων συναρτήσεων έχουμε

$$\varphi'(x_0) = f'(x_0)\left(\frac{1}{g(x_0)}\right) + f(x_0)\left(\frac{1}{g(x_0)}\right)' = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να δειχθεί ότι η πολυωνυμική συνάρτηση  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  είναι παραγωγίσιμη,  $\forall x \in \mathbb{R}$  και να υπολογιστεί η παράγωγός της.

Από την παράγραφο 1.5 έχουμε  $(x)' = 1$ ,  $(x^n)' = nx^{n-1}$ ,  $n$  θετικός ακέραιος,  $\forall x \in \mathbb{R}$  και επομένως (Πόρισμα § 1.6) η συνάρτηση  $p(x)$  είναι παραγωγίσιμη,  $\forall x \in \mathbb{R}$  και

$$(p(x))' = a_1 + a_2x + \dots + n_n a_n x^{n-1}.$$

2. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση  $e^{fx}$  είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και να υπολογιστεί η παράγωγός της.