Φωτεινή Κολυβά - Μαχαίρα

Ευθυμία Μπόρα - Σέντα

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Θεωρία - Εφαρμογές

2η Έκδοση

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ISBN 978-960-456-350-0

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση
Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσσαλονίκης - Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ:
Αρμενοπούλου 27 - 546 35 Θεσσαλονίκη • Τηλ.: 2310-203.720 • Fax 2310-211.305
e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΕΝΩΣΗ ΕΚΔΟΤΩΝ ΒΙΒΛΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ:
Στοά του Βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5) - 105 64 ΑΘΗΝΑ • Τηλ.-Fax: 210-3211.097

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ - ΑΠΟΘΗΚΗ ΑΘΗΝΩΝ:
Χαριλάου Τρικούπη 22 - Τ.Κ. 106 79, Αθήνα • Τηλ.-Fax: 210-3816.650
e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

Πρόλογος

Από τις αρχές του εικοστού αιώνα παρατηρείται μια συνεχώς αυξανόμενη χρήση της Στατιστικής σ' όλες τις επιστήμες.

Είναι λοιπόν ουσιαστικό για τους φοιτητές των περισσοτέρων τμημάτων να αποκτήσουν κάποιες γνώσεις στις βασικές αρχές και στις τεχνικές της στατιστικής ανάλυσης.

Κύριος στόχος του βιβλίου αυτού είναι να δώσει με μαθηματική αυστηρότητα λύσεις σε στατιστικά προβλήματα, χωρίς όμως ο αναγνώστης να επιβαρυνθεί με εξειδικευμένες θεωρητικές αποδείξεις. Απευθύνεται σε μαθηματικούς και μη μαθηματικούς. Υπάρχουν παράγραφοι και εφαρμογές (που σημειώνονται με ❖) που η κατανόησή τους απαιτεί μαθηματική σκέψη και άλλες που απευθύνονται κυρίως σε χρήστες στατιστικής.

Τα περισσότερα παραδείγματα είναι αντιπροσωπευτικά πραγματικών προβλημάτων που συναντώνται σε πειραματικές επιστήμες.

Το βιβλίο αυτό αποτελείται από εννέα κεφάλαια που το καθένα περιλαμβάνει θεωρία, εφαρμογές και προτεινόμενες ασκήσεις και συνοδεύεται από τυπολόγιο. Στο τέλος του βιβλίου υπάρχει μια συλλογή με τίτλο "*Γενικές Ασκήσεις*" για εξοικείωση του αναγνώστη με απλά θέματα ανάλυσης δεδομένων και μια συλλογή στατιστικών πινάκων που θεωρούνται απαραίτητοι για τη λύση των ασκήσεων.

Πιστεύουμε ότι καλύπτει όλα τα θέματα της στατιστικής εκτός από τα πολύ προχωρημένα και εξειδικευμένα.

Η παρούσα δεύτερη έκδοση είναι βελτιωμένη και επαυξημένη και προέκυψε τόσο από την ανάγκη επικαιροποίησης των θεμάτων, όσο και από την ανάγκη διευκρίνησης και βελτίωσης κάποιων σημείων που η πολυετής διδασκαλία του μαθήματος της Στατιστικής ανέδειξε.

Τέλος ευχαριστούμε τις εκδόσεις Ζήτη για την άψογη συνεργασία και για την προσεγμένη έκδοση του παρόντος συγγράμματος.

Απρίλιος 2013

Φ. Κολυβά - Μαχαίρα
Ε. Μπόρα - Σέντα

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 4: **Εκτιμητική**

Κεφάλαιο 5: **Εκτιμητική**

Κεφάλαιο 6: **Δοκιμασία X^2**

Κεφάλαιο 7: **Γραμμική παλινδρόμηση – Συσχέτιση**

Κεφάλαιο 8: **Ανάλυση διασποράς**

Κεφάλαιο 9: **Μη Παραμετρικές Δοκιμασίες**

Κεφάλαιο 1

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

1.1 Εισαγωγή

Η Στατιστική είναι μια εφαρμοσμένη μαθηματική επιστήμη που σκοπό έχει να βοηθήσει στη μελέτη και κατανόηση των φαινομένων ή των ιδιοτήτων των πληθυσμών, χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες που δίνει ένα τυχαία επιλεγμένο μέρος μόνο του πληθυσμού ή του φαινομένου (**δείγμα** - sample). Επειδή ούτε η μελέτη του συνόλου του πληθυσμού ούτε η εξ ολοκλήρου παρακολούθηση της εξέλιξης ενός φαινομένου είναι δυνατή, καταφεύγουμε στο **πείραμα** (experiment) αν πρόκειται για μελέτη φαινομένου ή στη **δειγματοληψία** (sampling) αν πρόκειται για πληθυσμό. Για να είναι αξιόπιστα τα συμπεράσματα, θα πρέπει το δείγμα να είναι τυχαίο και αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού από τον οποίο προέρχεται.

Ορισμός 1.1

Όλα τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος αποτελούν το δειγματοχώρο (sample space) που συμβολίζεται με S ή με Ω. Κάθε δυνατό αποτέλεσμα του πειράματος, δηλαδή κάθε σημείο του δειγματοχώρου, λέγεται **απλό γεγονός** ή **ενδεχόμενο** (simple event). Οι δειγματοχώροι που έχουν πεπερασμένο ή αριθμήσιμο πλήθος σημείων λέγονται **διακριτοί** (discrete), ενώ αυτοί που έχουν μη αριθμήσιμο πλήθος στοιχείων λέγονται **μη διακριτοί** ή **συνεχείς** (continuous).

Π.χ. ο αριθμός των παιδιών σε μια οικογένεια είναι ένα απλό γεγονός ενός διακριτού δειγματοχώρου, ενώ το ύψος των ατόμων δημιουργεί ένα συνεχή δειγματοχώρο.

Ορισμός 1.2

Κάθε διαδικασία που εκτελείται ή παρατηρείται και στην οποία το αποτέλεσμα είναι τυχαίο, ονομάζεται **πείραμα τύχης** (random enperiment).

Ορισμός 1.3

Κάθε δείγμα το οποίο επιλέγεται με τέτοιο τρόπο ώστε οποιοδήποτε άλλο δείγμα του ίδιου μεγέθους να έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί, λέγεται τυχαίο (random sample).

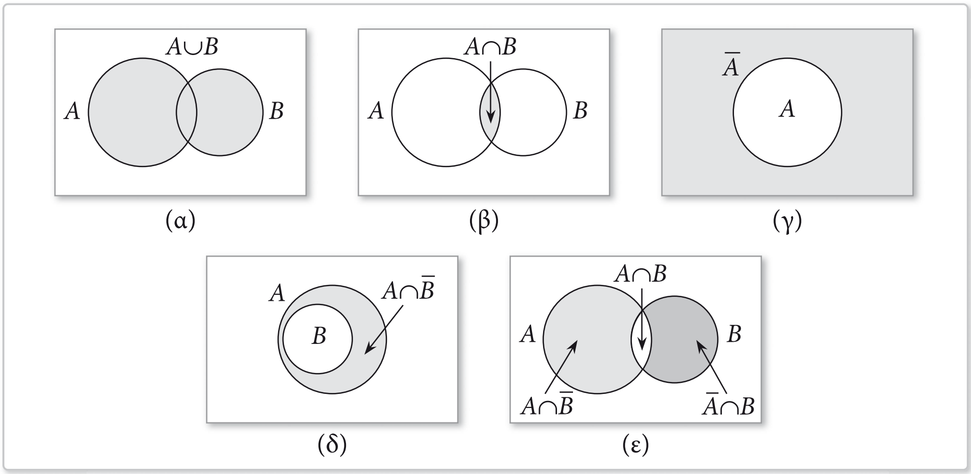
Για να μελετηθούν οι ιδιότητες ή τα φαινόμενα, θα πρέπει να εκφρασθούν μαθηματικά, ώστε να γίνουν μαθηματικά προβλήματα τα οποία θα επιλυθούν και θα δώσουν τα αποτελέσματα. Έτσι λοιπόν θα πρέπει να υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των ιδιοτήτων ή των φαινομένων και κάποιων μαθηματικών εκφράσεων. Η απλούστερη αντιστοιχία επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της **θεωρίας συνόλων**.

Η αντιστοιχία μεταξύ των συνόλων, των γεγονότων και των πράξεών τους, δίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Γεγονότα	**Σύνολα**
δειγματοχώρος S ή Ω (βέβαιο γεγονός)	σύνολο αναφοράς S ή Ω
αδύνατο γεγονός	σύνολο $\varnothing$
απλό γεγονός	σύνολο A
δεν συμβαίνει το γεγονός A	σύνολο $\Gamma = \overline{A} = S - A$
τα γεγονότα A και B συμβαίνουν ταυτόχρονα	σύνολο $\Gamma = A \cap B = AB$
τουλάχιστον ένα από τα γεγονότα A, B συμβαίνει	σύνολο $\Gamma = A \cup B = A + B$

(Στη θεωρία των πιθανοτήτων χάριν απλότητας, η ένωση συνόλων $A \cup B$ συμβολίζεται με $A + B$ και η τομή τους $A \cap B$ συμβολίζεται με AB).

Οι πράξεις μεταξύ των συνόλων δίνονται με τα παρακάτω διαγράμματα:



Σχήμα 1.1

Ορισμός 1.4

Δύο γεγονότα A και B ονομάζονται **ασυμβίβαστα** ή **ξένα** όταν η πραγματοποίηση του ενός γεγονότος αποκλείει την πραγματοποίηση του άλλου. Αυτό σημαίνει ότι:

$$A, B \text{ ασυμβίβαστα} \Leftrightarrow A \cap B = AB = \varnothing$$

Π.χ. το να γεννηθεί αγόρι ή κορίτσι είναι δύο γεγονότα ασυμβίβαστα.

Ορισμός 1.5

Δύο γεγονότα A και B λέγονται (**στοχαστικά**) **ανεξάρτητα** (stochastically independent) όταν η πραγματοποίηση του γεγονότος A δεν επηρεάζει την πραγματοποίηση του γεγονότος B και αντίστροφα.

Π.χ. το φύλο του πρώτου παιδιού είναι ανεξάρτητο από το φύλο του δεύτερου παιδιού σε μια οικογένεια. Πρέπει να σημειωθεί ότι δύο γεγονότα που είναι ασυμβίβαστα δεν είναι αναγκαστικά και ανεξάρτητα όπως και δύο ανεξάρτητα γεγονότα δεν είναι αναγκαστικά και ασυμβίβαστα.

Ένας από τους στόχους της θεωρίας των πιθανοτήτων είναι ο υπολογισμός της πιθανότητας με την οποία συμβαίνουν τα διάφορα γεγονότα. Έχουν δοθεί διάφοροι ορισμοί της πιθανότητας ενός γεγονότος. Επικρατέστεροι είναι οι δύο παρακάτω:

Ορισμός 1.6: Η πιθανότητα σαν όριο της σχετικής συχνότητας

Αν στις n επαναλήψεις ενός πειράματος ένα γεγονός A εμφανίσθηκε n_A φορές, τότε το πηλίκο $f_A = n_A / n$ ονομάζεται (**σχετική**) **συχνότητα** του γεγονότος A. Όσο το n μεγαλώνει τόσο η σχετική συχνότητα σταθεροποιείται γύρω από έναν αριθμό. Το όριο της σχετικής συχνότητας του $n \to \infty$ ονομάζεται **πιθανότητα του γεγονότος A** και συμβολίζεται με $P(A)$.

Π.χ. αν θέλουμε την πιθανότητα να γεννηθεί κορίτσι, τότε το πείραμα που θα μας βοηθήσει να την υπολογίσουμε είναι να καταγράψουμε το φύλο του νεογέννητου σε μία σειρά γεννήσεων. Πρόσφατα παρατηρήθηκε ότι στα 1000 παιδιά που γεννήθηκαν, τα 489 ήταν κορίτσια. Έτσι σύμφωνα με τον ορισμό 1.6 η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P = \frac{n_A}{n} = \frac{489}{1000} = 0,489 .$$

Ορισμός 1.7: Αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας (Kolmogorov, 1930)

Η πιθανότητα ορίζεται ως μια συνολοσυνάρτηση που ικανοποιεί τα παρακάτω αξιώματα:

i) $P(S)=1$

ii) $0 \leq P(A) \leq 1 \quad \forall A \subseteq S$

iii) $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k)$ για όλα τα γεγονότα $A_i \subseteq S$ για τα οποία $A_i \cap A_j = \varnothing$, $\forall i \neq j$ δηλαδή τα γεγονότα $A_1, \ldots, A_k$ είναι ανά δύο **ασυμβίβαστα**.

Στην πράξη η πιθανότητα του γεγονότος A ορίζεται ως

$$P(A) = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}}$$

Το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων είναι το πλήθος όλων των απλών ενδεχομένων που πραγματοποιούν το γεγονός A, ενώ πλήθος δυνατών περιπτώσεων είναι το πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων.

Αποδεικνύεται ότι οι ιδιότητες i, ii και iii που ικανοποιούνται βάσει του αξιωματικού ορισμού της πιθανότητας, ισχύουν και για την περίπτωση του ορισμού της πιθανότητας ως όριο της σχετικής συχνότητας και ως ο λόγος ευνοϊκών δια δυνατών περιπτώσεων.

Π.χ. Η πιθανότητα να γεννηθεί αγόρι είναι $\frac{1}{2}$ διότι τα δυνατά αποτελέσματα σε κάθε γέννηση (πλήθος δυνατών περιπτώσεων) είναι δύο (αγόρι-κορίτσι) και οι ευνοϊκές περιπτώσεις μία (αγόρι).

Η πιθανότητα να φέρουμε άθροισμα 4 με δύο ζάρια είναι $\frac{3}{36}$ διότι οι δυνατές περιπτώσεις είναι 36 (όσο και το πλήθος των διατεταγμένων ζευγών που παράγονται από τους αριθμούς 1, 2, …, 6) ενώ το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων είναι τρία (διότι άθροισμα 4 φέρνουμε με τα ζεύγη (1, 3), (3, 1), (2, 2)).

Σύμφωνα με τα αξιώματα του ορισμού 1.7 μπορεί να δειχθεί ότι:

α) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

β) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ όταν τα γεγονότα Α, Β δεν είναι ασυμβίβαστα

Απόδειξη

α) Εξ ορισμού ισχύει $A \cup \overline{A} = S$ και $A \cap \overline{A} = \varnothing$ οπότε σύμφωνα με τις ιδιότητες (i) και (iii) του αξιωματικού ορισμού της πιθανότητας, έχουμε:

$$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = P(S) = 1 \Leftrightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

β) Το γεγονός $A \cup B$ μπορεί να γραφεί σαν ένωση τριών γεγονότων ξένων μεταξύ τους ανά δύο όπως φαίνεται και στα σχήματα 1.1(α) και 1.1(ε).

$$A \cup B = A\overline{B} + \overline{A}B + AB \Rightarrow P(A \cup B) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) + P(AB) \tag{1.1}$$

Εξάλλου κάθε γεγονός A μπορεί να γραφεί σαν ένωση δύο ξένων μεταξύ τους γεγονότων ως εξής:

$$\left.\begin{aligned} A = AS = A(B \cup \overline{B}) = AB + A\overline{B} \Rightarrow P(A) = P(AB) + P(A\overline{B}) \\ B = BS = B(A \cup \overline{A}) = AB + \overline{A}B \Rightarrow P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A) + P(B) = P(AB) + P(A\overline{B}) + P(AB) + P(\overline{A}B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A) + P(B) - P(AB) = P(A\overline{B}) + P(AB) + P(\overline{A}B) \tag{1.2}$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (1.1) και (1.2) αποδεικνύεται ότι:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)\,.$$

Η παραπάνω σχέση επεκτείνεται για τρία γεγονότα A, B, Γ ως εξής:

$$P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(AB) - P(A\Gamma) - P(B\Gamma) + P(AB\Gamma)$$

και γενικά για n γεγονότα

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1<i<j<n} P(A_i A_j) +$$

$$+ \sum_{1<i<j<k<n} P(A_i A_j A_k) - \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

(θεώρημα *Poincare*).

1.2 Δεσμευμένη πιθανότητα – Τύπος του Bayes

Πολλές φορές, μετά την εκτέλεση του πειράματος, η πληροφορία που παίρνουμε από το γεγονός A μπορεί να μας κάνει να αναθεωρήσουμε την πιθανότητα $P(B)$ που έχουμε για ένα άλλο γεγονός B.

Ορισμός 1.8

Η πιθανότητα του B όταν έχει συμβεί το A, ονομάζεται **δεσμευμένη πιθανότητα** του B ως προς A και συμβολίζεται

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

Αν ισχύει $P(B/A)=P(B)$, δηλαδή η πληροφορία για το A δεν αλλάζει την πιθανότητα $P(B)$, τότε τα γεγονότα A και B λέγονται (**στοχαστικά**) **ανεξάρτητα** και ισχύει:

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

Πράγματι αν $P(B)=P(B/A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$.

Για να διαπιστώσουμε αν τρία γεγονότα A, B, Γ είναι ανεξάρτητα θα πρέπει να εξετάσουμε αν:

$$P(AB)=P(A)P(B),\quad P(A\Gamma)=P(A)P(\Gamma),\quad P(B\Gamma)=P(B)P(\Gamma)$$

και $$P(AB\Gamma)=P(A)P(B)P(\Gamma)$$

και γενικά n γεγονότα θα λέγονται ανεξάρτητα, αν είναι ανεξάρτητα ανά δύο, ανά τρία,… , ανά $n-1$ και

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$$

Θεώρημα 1.1 (Bayes)

Αν A και B είναι δύο γεγονότα με $P(B)>0$ τότε

$$P(A/B)=\frac{P(A)P(B/A)}{P(B)}$$

Απόδειξη

$$\left.\begin{aligned}P(A/B)&=\frac{P(AB)}{P(B)}\\ P(B/A)&=\frac{P(AB)}{P(A)}\end{aligned}\right\}\Rightarrow P(A/B)=\frac{P(A)P(B/A)}{P(B)}$$

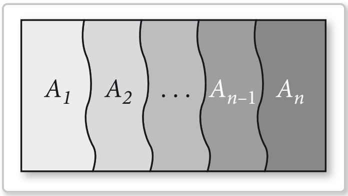
Πόρισμα 1.1

Αν $B\subseteq S$, $S=A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n$, $P(A_k)>0\ \forall k=1,\ldots,n$ και $A_iA_j=\varnothing\ \forall i\neq j$ τότε μπορεί να δεχθεί ότι:

$$P(A_k/B)=\frac{P(A_kB)}{P(B)}=\frac{P(A_k)\cdot P(B/A_k)}{P(A_1)\cdot P(B/A_1)+\ldots+P(A_n)\cdot P(B/A_n)}$$

Ο παραπάνω τύπος λέγεται **τύπος του Bayes** και μας δίνει την εκ των υστέρων (posterior) πιθανότητα του A_k γνωρίζοντας ότι έχει συμβεί το B. Πριν την εκτέλεση του πειράματος γνωρίζουμε την εκ των προτέρων (**prior**) πιθανότητα $P(A_k)$.

Θα πρέπει να τονισθεί ότι τα γεγονότα A_i, $i = 1, 2, \dots, n$ αποτελούν μια **διαμέριση** του δειγματοχώρου S, δηλαδή είναι ξένα μεταξύ τους ανά δύο και η ένωσή τους δίνει το S.



Σχήμα 1.2

Στη θεωρία Πιθανοτήτων ορίζεται επίσης και η δεσμευμένη, της δεσμευμένης Πιθανότητας.

Ορισμός 1.9

Αν A, B και $Γ$ τρία γεγονότα με $P(BΓ) > 0$, η δεσμευμένη πιθανότητα του γεγονότος A όταν έχει συμβεί το γεγονός B και όταν έχει συμβεί το γεγονός $Γ$, συμβολίζεται με $P(A/B/Γ)$ και ορίζεται από τη σχέση

$$P(A/B/Γ) = \frac{P(AΓ/B)}{P(Γ/B)}$$

Αποδεικνύεται ότι: $P(A/B/Γ) = P(A/Γ/B) = P(A/BΓ)$.

1.3 Στοιχεία από τη συνδυαστική

1.3.1 Διατάξεις

Όταν έχουμε n διαφορετικά αντικείμενα και επιλέγουμε r από αυτά με τη σειρά, τότε έχουμε μία **διάταξη** των r αντικειμένων. Το πλήθος όλων των διαφορετικών διατάξεων r αντικειμένων από τα n, συμβολίζεται με $(n)_r$ και είναι:

$$(n)_r = n(n-1)\dots(n-r+1)$$

Αν $r = n$, τότε έχουμε τις **μεταθέσεις** (permutations) των n διαφορετικών

αντικειμένων, που το πλήθος τους είναι:

$$(n)_n = n(n-1)\ldots\ 2\cdot 1 = n!$$

Π.χ. με τα ψηφία 1,3, 5 μπορούμε να κάνουμε $3! = 6$ διαφορετικούς τριψήφιους αριθμούς, ενώ με τα ψηφία 1, 3, 4, 5 $(4)_2 = 12$ διαφορετικούς διψήφιους αριθμούς.

1.3.2 Διατάξεις με επανάληψη

Όταν καθένα από τα n αντικείμενα μπορεί σε κάθε διάταξη να επαναληφθεί περισσότερες από μία φορές, τότε έχουμε διατάξεις με επανάληψη (r αντικειμένων από τα n) και το πλήθος τους είναι:

$$n\times n\times\ \ldots\ \times n = n^r$$

Π.χ. το πλήθος των στηλών που μπορούμε να συμπληρώσουμε στο ΠΡΟ-ΠΟ είναι 3^{13}.

1.3.3 Συνδυασμοί

Αν από τα n διαφορετικά αντικείμενα πάρουμε r χωρίς να μας ενδιαφέρει η διάταξή τους (δηλ. η σειρά με την οποία επιλέγονται) αλλά μόνο ποια αντικείμενα πήραμε, τότε έχουμε τους **συνδυασμούς** (combinations) των n αντικειμένων ανά r. Το πλήθος αυτών των συνδυασμών συμβολίζεται με $\binom{n}{r}$ και είναι:

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Π.χ. το πλήθος των εξάδων που μπορούμε να συμπληρώσουμε στο ΛΟΤΤΟ είναι $\binom{49}{6}$.

1.3.4 Μεταθέσεις με όμοια αντικείμενα ή μεταθέσεις με επανάληψη

Αν τα n αντικείμενα δεν είναι διαφορετικά αλλά υπάρχουν μόνον k διαφορετικά

αντικείμενα, τα $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ και υπάρχουν r_1 αντικείμενα όμοια με το ω_1, r_2 αντικείμενα όμοια με το $\omega_2, \ldots, r_k$ αντικείμενα όμοια με το ω_k, όπου $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n$, τότε οι διαφορετικές μεταθέσεις των n αντικειμένων είναι:

$$\frac{n!}{r_1!\,r_2!\ldots r_k!}$$

Π.χ. με τους αριθμούς 1, 3, 3 μπορούμε να κάνουμε $\frac{3!}{2!\,1!} = 3$ διαφορετικούς τριψήφιους αριθμούς ενώ υπάρχουν $\frac{4!}{2!\ 2!} = 6$ τρόποι να τοποθετήσουμε τα αντικείμενα A, A, B, B σε 4 κελιά.

1.3.5 Διαταράξεις

Εάν σε μια μετάθεση n διαφορετικών αντικειμένων κανένα από τα αντικείμενα δε βρίσκεται στη «σωστή» σειρά (όπου «σωστή» σειρά θεωρείται μια αρχική σειρά), τότε η μετάθεση αυτή λέγεται **διατάραξη**. Το πλήθος των διαταράξεων των n αντικειμένων είναι:

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ \ldots\ + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

1.3.6 Επαναληπτικοί συνδυασμοί

Εάν κατά την επιλογή r αντικειμένων από n διαφορετικά, δε μας ενδιαφέρει η διάταξη επιτρέπεται όμως η επιλογή του ίδιου αντικειμένου μέσα σε κάθε r-άδα, περισσότερες από μία φορές, τότε έχουμε έναν **επαναληπτικό συνδυασμό** των n αντικειμένων ανά r. Το πλήθος αυτών των επαναληπτικών συνδυασμών είναι:

$$\mathscr{E}_n^r = \binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}$$

1.4 Δειγματοληψία

Όταν έχουμε n στοιχεία και θέλουμε να πάρουμε από αυτά ένα δείγμα μεγέθους r, μπορούμε να το πραγματοποιήσουμε με τους εξής τρόπους:

i) Παίρνουμε ένα-ένα στοιχείο, το εξετάζουμε και το επανατοποθετούμε εκεί από όπου το πήραμε πριν πάρουμε το επόμενο στοιχείο.
Συνεχίζουμε αυτήν τη διαδικασία μέχρι να πάρουμε r στοιχεία.
Στην περίπτωση αυτή δείγματα που αποτελούνται από τα ίδια στοιχεία τα οποία όμως πάρθηκαν με διαφορετική σειρά θεωρούνται διαφορετικά. Η δειγματοληψία αυτή ονομάζεται **δειγματοληψία με επανάθεση** (sampling with replacement) και υπάρχουν n^r τέτοια δείγματα.

ii) Παίρνουμε ένα-ένα στοιχείο, το εξετάζουμε και **δεν** το επανατοποθετούμε εκεί απ' όπου το πήραμε. Συνεχίζουμε μέχρι να πάρουμε r στοιχεία. Όπως και προηγουμένως επειδή και εδώ τα στοιχεία λαμβάνονται ένα-ένα, διαφορετική διάταξη ορίζει διαφορετικά δείγματα στα οποία όμως το ίδιο στοιχείο εμφανίζεται μία μόνο φορά. Η δειγματοληψία αυτή ονομάζεται **δειγματοληψία χωρίς επανάθεση** (sampling without replacement) και υπάρχουν $(n)_r = n(n-1)\ldots(n-r+1)$ τέτοια δείγματα.

iii) Παίρνουμε r στοιχεία μαζί. Στην περίπτωση αυτή ούτε διάταξη μπορεί να ορισθεί ούτε το ίδιο στοιχείο να εμφανιστεί περισσότερες από μία φορές σε κάθε δείγμα. Το πλήθος τέτοιων δειγμάτων είναι: $\binom{n}{r}$.

iv) Αν έχουμε δειγματοληψία με επανάθεση, το κάθε στοιχείο που παίρνουμε το εξετάζουμε ως προς το είδος του, το επανατοποθετούμε αλλά στο τελικό δείγμα μεγέθους r που φτιάχνουμε δε μας ενδιαφέρει η διάταξη των στοιχείων, τότε υπάρχουν $\mathscr{E}_n^r$ τέτοια δείγματα.

Συνοπτικά, στις περιπτώσεις **i)** και **iv)** μπορεί να εμφανιστεί στο δείγμα το ίδιο στοιχείο μέχρι r φορές ενώ στις **(ii)** και **(iii)** όλα τα στοιχεία του δείγματος είναι διαφορετικά.

Αν στις περιπτώσεις **(i)** και **(ii)** δεν εξετάζουμε το στοιχείο τη στιγμή που το παίρνουμε αλλά εξετάζουμε τα r στοιχεία στο τέλος της δειγματοληψίας, τότε είναι όπως οι περιπτώσεις **(iv)** και **(iii)** αντίστοιχα.

Οι μεταθέσεις, διατάξεις κ.λπ. βοηθούν πολύ στον υπολογισμό των ευνοϊκών και των δυνατών περιπτώσεων οι οποίες χρειάζονται για να βρεθεί η πιθανότητα ενός γεγονότος θεωρούνται δε από τα πιο δύσκολα μαθηματικά προβλήματα.

1.5 Εφαρμογές – Λυμένες Ασκήσεις

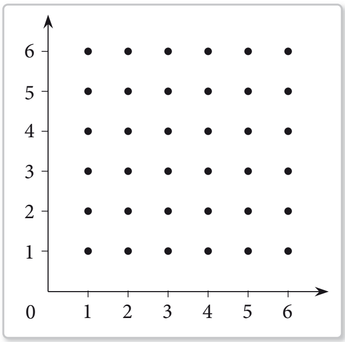
Άσκηση 1.1

Ρίχνονται δύο ζάρια. Να παρασταθεί γραφικά ο δειγματοχώρος των 36 αποτελεσμάτων σ' ένα σύστημα ορθογωνίων καρτεσιανών συντεταγμένων. Με τη βοήθεια αυτού να δοθούν τα αποτελέσματα και το πλήθος για τα παρακάτω ενδεχόμενα:

A ={Το άθροισμα να είναι διαιρετό δια 4}
B = {Και οι δύο αριθμοί να είναι άρτιοι}
C = {Οι αριθμοί να είναι ίσοι}
D = {Οι αριθμοί να διαφέρουν τουλάχιστον κατά 4}
$E = A \cap B, \quad C \cup D, \quad B - A, \quad \overline{A \cup B}$

Λύση

$\Omega = \{1,1), (1,2), \ldots, (1,6), (2,1), \ldots, (6,6)\}$



$A = \{(1,3), (3,1), (2,2), (3,5), (4,4), (5,3), (2,6), (6,2), (6,6)\}$, $\quad n_A = 9$

$B = \{(2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)\}$, $\quad n_B = 9$

$C = \{1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$, $\quad n_C = 6$

$D = \{1,5), (1,6), (2,6), (5,1), (6,1), (6,2)\}$, $\quad n_D = 6$

$A \cap B = \{(2,2), (2,6), (4,4), (6,2), (6,6)\}$, $\quad n_{A \cap B} = 5$

$C \cup D = \{(1,1), \ldots, (6,6), (1,5), (1,6), (2,6), (5,1), (6,1), (6,2)\}$ $\quad n_{C \cup D} = 12$

$B - A = \{(2,4), (4,2), (4,6), (6,4)\}$, $\quad n_{B-A} = 4$

$\overline{A \cup B} = \{(1,1), (1,2), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,3), (2,5),$
$(3,2), (3,3), (3,4), (3,6), (4,1), (4,3), (4,5),$
$(5,1), (5,2), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,3), (6,5)\}$, $\quad n_{\overline{A \cup B}} = 23$.

Άσκηση 1.2

Τρεις παίκτες A, B και C ρίχνουν κατά σειρά ένα ζάρι. Ο A θα κερδίσει όταν πετύχει 5 ή 6. Ο B όταν πετύχει άρτιο αριθμό και ο C θα κερδίσει όταν πετύχει περιττό αριθμό. Να βρεθεί η πιθανότητα ώστε:

α) Να κερδίσει τελικά ο A

β) » » » B

γ) » » » C

δ) Ο C να ρίξει το ζάρι τουλάχιστον τρεις φορές.

Λύση

$A_i =$ {Ο παίκτης A φέρνει 5 ή 6 στην i ρίψη}

$B_i =$ {Ο παίκτης B φέρνει άρτιο αριθμό στην i ρίψη}

$C_i =$ {Ο παίκτης C φέρνει περιττό αριθμό στην i ρίψη}

$$P(A_i)=\frac{1}{3},\quad P(B_i)=\frac{1}{2},\quad P(C_i)=\frac{1}{2}$$

$A =$ {κερδίζει ο A}

$B =$ {κερδίζει ο B}

$C =$ {κερδίζει ο C}

α) $A = A_1 + \overline{A}_1\overline{B}_1\overline{C}_1A_2 + \overline{A}_1\overline{B}_1\overline{C}_1\overline{A}_2\overline{B}_2\overline{C}_2A_3 + \ldots$

$$P(A)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{3}+\left[\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^2\frac{1}{3}+\ \ldots\ =\frac{1}{3}\left[1+\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{6}\right)^2+\ \ldots\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{6}}=\frac{2}{5}$$

β) $B = \overline{A}_1B_1 + \overline{A}_1\overline{B}_1\overline{C}_1\overline{A}_2B_2 + \ldots$

$$P(B)=\frac{2}{3}\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^2\frac{1}{2}+\ldots\ =\frac{1}{3}\left[1+\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{6}\right)^2+\ldots\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{2}{5}\quad \text{και}$$

γ) $C = \overline{A}_1\overline{B}_1C_1 + \overline{A}_1\overline{B}_1\overline{C}_1\overline{A}_2\overline{B}_2C_2 + \ldots$

$$P(C)=\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right)^2+\ldots\ =\frac{1}{6}\left[1+\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{6}\right)^2+\ldots\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(C)=\frac{1}{6}\frac{6}{5}=\frac{1}{5}$$

δ) Αν $D=\{$ο C ρίχνει τουλάχιστον τρεις φορές$\}$ και

$\overline{D}=\{$ο C ρίχνει το πολύ δύο φορές τα ζάρια$\}$ $\Rightarrow$

$$\overline{D}=A_1+\overline{A}_1B_1+\overline{A}_1\overline{B}_1C_1+\overline{A}_1\overline{B}_1\overline{C}_1A_2+\overline{A}_1\overline{B}_1\overline{C}_1\overline{A}_2B_2+\overline{A}_1\overline{B}_1\overline{C}_1\overline{A}_2\overline{B}_2C_2+$$
$$+\overline{A}_1\overline{B}_1\overline{C}_1\overline{A}_2\overline{B}_2\overline{C}_2A_3+\overline{A}_1\overline{B}_1\overline{C}_1\overline{A}_2\overline{B}_2\overline{C}_2\overline{A}_3B_3\Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(\overline{D})=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right)\frac{2}{3}\frac{1}{2}+$$
$$+\left(\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right)^2\frac{2}{3}\frac{1}{2}=\frac{107}{108}=0,99074$$

$P(D)=1-P(\overline{D})=1-0,99074=0,00926$.

Άσκηση 1.3

Δύο φίλοι ρίχνουν ζάρια. Ο A ρίχνει τρία ζάρια μία φορά. Ο B ρίχνει τέσσερα ζάρια μία φορά.

i) Ποια η πιθανότητα να φέρει ο A άθροισμα 9;

ii) Ποια η πιθανότητα να φέρει ο B άθροισμα 12;

iii) Ο A παίζει μέχρι να φέρει άθροισμα 9 για πρώτη φορά. Ποια η πιθανότητα να σταματήσει στο τρίτο παιχνίδι (έφερε άθροισμα 9);

iv) Ο B παίζει τρία παιχνίδια. Ποια η πιθανότητα να φέρει άθροισμα 12 μία φορά; (σε κάθε παιχνίδι ρίχνει 4 ζάρια μία φορά).

Λύση

Ορίζουμε τα γεγονότα: $A=\{$ο A να φέρει άθροισμα 9 με τρία ζάρια$\}$

$B=\{$ο B να φέρει άθροισμα 12 με τέσσερα ζάρια$\}$

Οι δυνατές περιπτώσεις είναι 6^3 για τον A και 6^4 για τον B. Για τις ευνοϊκές περιπτώσεις αρκεί να υπολογίσουμε το πλήθος των τριάδων που πραγματοποιούν το γεγονός A δηλαδή φέρνουν άθροισμα 9 και το πλήθος των τετράδων που πραγματοποιούν το γεγονός B δηλαδή φέρνουν άθροισμα 12.

i) Άθροισμα 9 με τις ενδείξεις ζαριών (1, 6, 2) φέρνουν $n_1=\dfrac{3!}{1!\,1!\,1!}=6$ τριάδες.

Ομοίως ενδείξεις

(1, 5, 3) $\quad n_2=\dfrac{3!}{1!\,1!\,1!}=6$ τριάδες

(1, 4, 4) $n_3 = \frac{3!}{1!\,2!} = 3$ τριάδες

(2, 2, 5) $n_4 = \frac{3!}{1!\,2!} = 3$ »

(2, 4, 3) $n_5 = \frac{3!}{1!\,1!\,1!} = 6$ »

(3, 3, 3) $n_6 = \frac{3!}{3!} = 1$ τριάδα

$P(A) = \frac{25}{6^3} = 0{,}12$

ii) (1, 1, 5, 5) $n_1 = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$

(1, 1, 4, 6) $n_2 = \frac{4!}{2!\,1!\,1!} = 12$

(1, 2, 3, 6) $n_3 = \frac{4!}{1!\,1!\,1!\,1!} = 24$

(1, 2, 4, 5) $n_4 = \frac{4!}{1!\,1!\,1!\,1!} = 24$

(1, 3, 4, 4) $n_5 = \frac{4!}{1!\,1!\,2!} = 12$

(1, 3, 5, 3) $n_6 = \frac{4!}{1!\,1!\,2!} = 12$

(2, 2, 6, 2) $n_7 = \frac{4!}{3!\,1!} = 4$

(2, 2, 5, 3) $n_8 = \frac{4!}{2!\,1!\,1!} = 12$

(2, 2, 4, 4) $n_9 = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$

(2, 3, 4, 3) $n_{10} = \frac{4!}{2!\,1!\,1!} = 12$

(3, 3, 3, 3) $n_{11} = \frac{4!}{4!} = 1$

$P(B) = \frac{125}{6^4} = 0{,}09$

iii) $A_k = \{$Ο A φέρνει άθροισμα 9 στο k παιχνίδι$\}$.

Το αποτέλεσμα του κάθε παιχνιδιού είναι ανεξάρτητο από τα αποτελέσματα των άλλων παιχνιδιών δηλαδή τα γεγονότα $A_1, A_2, A_3, \ldots$ είναι ανεξάρτητα.

$$P(A_3) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3) = \left(1-\frac{25}{6^3}\right)^2\frac{25}{6^3} = 0,093$$

iv) $B_{3,1} = \{$Ο Β φέρνει άθροισμα 12 σε 1 από τα 3 παιχνίδια$\}$

$B_k = \{$Ο Β φέρνει άθροισμα 12 στο k παιχνίδι$\}$

$$P(B_{3,1}) = P(B_1\overline{B}_2\overline{B}_3 + \overline{B}_1B_2\overline{B}_3 + \overline{B}_1\overline{B}_2B_3) = 3\cdot 0,09\cdot(0,91)^2 = 0,22$$

Άσκηση 1.4

Ρίχνουμε τρία ζάρια μία φορά. Να βρεθεί:

i) Η πιθανότητα να φέρουμε άθροισμα 7.

ii) Ποιο είναι πιθανότερο: άθροισμα 9 ή 11;

Λύση

Ο δειγματοχώρος έχει 6^3 σημεία.

A = {άθροισμα 7},
B = {άθροισμα 9},
Γ = {άθροισμα 11}.

Επειδή όλα τα απλά ενδεχόμενα του δειγματοχώρου είναι ισοπίθανα, οι πιθανότητες των γεγονότων A, B και Γ, βρίσκονται υπολογίζοντας το πλήθος των αποτελεσμάτων που τα πραγματοποιούν.

i) Για το γεγονός A: (1, 1, 5) $\quad n_1 = \dfrac{3!}{2!\,1!} = 3$

(1, 2, 4) $\quad n_2 = \dfrac{3!}{1!\,1!\,1!} = 6$

(1, 3, 3) $\quad n_3 = \dfrac{3!}{1!\,2!} = 3$

(2, 2, 3) $\quad n_4 = \dfrac{3!}{2!\,1!} = 3$

$$P(A) = \frac{15}{6^3} = 0,07$$

ii) Για το γεγονός B :

(1, 2, 6)	$n_1 = 6$
(1, 3, 5)	$n_2 = 6$
(1, 4, 4)	$n_3 = 3$
(2, 2, 5)	$n_4 = 3$
(2, 3, 4)	$n_5 = 6$
(3, 3, 3)	$n_6 = 1$

$$P(B) = \frac{25}{6^3} = 0{,}12$$

Για το γεγονός $Γ$:

(1, 4, 6)	$n_1 = 6$
(1, 5, 5)	$n_2 = 3$
(2, 3, 6)	$n_3 = 6$
(2, 4, 5)	$n_4 = 6$
(3, 4, 4)	$n_5 = 3$
(3, 5, 3)	$n_6 = 3$

$$P(Γ) = \frac{27}{6^3} = 0{,}125$$

Συνεπώς: $P(Γ) > P(B)$

δηλαδή ρίχνοντας τρία ζάρια, είναι πιθανότερο να φέρουμε άθροισμα 11 από άθροισμα 9.

Άσκηση 1.5

Ένα κουτί περιέχει 10 άσπρα, 4 μαύρα και 2 κόκκινα μπαλάκια. Εάν πάρουμε δύο μπαλάκια χωρίς επανάθεση από το κουτί να υπολογισθεί η πιθανότητα, ώστε:

α) Και τα δύο να είναι άσπρα
β) Και τα δύο κόκκινα
γ) Τουλάχιστον ένα να είναι άσπρο
δ) Το πολύ ένα να είναι άσπρο
ε) Ακριβώς ένα να είναι άσπρο
στ) Κανένα κόκκινο
ζ) Κανένα άσπρο.

Λύση

Ορίζουμε τα γεγονότα:

$A_i =$ {από τα 2 τα i μπαλάκια είναι άσπρα}

$M_i =$ {από τα 2 τα i μπαλάκια είναι μαύρα}

$K_i =$ {από τα 2 τα i μπαλάκια είναι κόκκινα}

α) $P(A_2)=\dfrac{\binom{10}{2}\binom{6}{0}}{\binom{16}{2}}=\dfrac{45}{120}=0,375$

β) $P(K_2)=\dfrac{\binom{2}{2}\binom{14}{0}}{\binom{16}{2}}=\dfrac{1}{120}=0,008$

γ) $P(A_{i\geq 1})=1-P(A_0)=1-\dfrac{\binom{10}{0}\binom{6}{2}}{\binom{16}{2}}=1-\dfrac{15}{120}=0,875$

δ) $P(A_{i\leq 1})=P(A_0)+P(A_1)=\dfrac{\binom{10}{0}\binom{6}{2}+\binom{10}{1}\binom{6}{1}}{\binom{16}{2}}=0,625$

ε) $P(A_1)=\dfrac{\binom{10}{1}\binom{6}{1}}{\binom{16}{2}}=\dfrac{60}{120}=0,5$

στ) $P(K_0)=\dfrac{\binom{14}{2}\binom{2}{0}}{\binom{16}{2}}=\dfrac{91}{120}=0,758$

ζ) $P(A_0)=\dfrac{\binom{10}{0}\binom{6}{2}}{\binom{16}{2}}=\dfrac{15}{120}=0,125$.

Άσκηση 1.6

Τα αποτελέσματα της βαθμολογίας ενός μαθήματος ήταν:

10%	των φοιτητών	βαθμολογήθηκαν	με	9	ή	10	(άριστα)
26%	»	»	»	7	ή	8	(πολύ καλά)
44%	»	»	»	5	ή	6	(καλά)
14%	»	»	»	3	ή	4	(σχεδόν καλά)
6%	»	»	»	0	ή	1 ή 2	(άσχημα)

Διαλέγουμε τυχαία ένα φοιτητή. Ποια είναι η πιθανότητα να πήρε

i) τουλάχιστον 5 ή 6 (καλά)

ii) ούτε άριστα ούτε άσχημα

iii) το πολύ 5 ή 6.

Λύση

A = {ο φοιτητής βαθμολογήθηκε με άριστα} , $P(A) = 0{,}1$

B = {ο φοιτητής βαθμολογήθηκε με πολύ καλά} , $P(B) = 0{,}26$

Γ = {ο φοιτητής βαθμολογήθηκε με καλά} , $P(\Gamma) = 0{,}44$

Δ = {ο φοιτητής βαθμολογήθηκε με σχεδόν καλά} , $P(\Delta) = 0{,}14$

E = {ο φοιτητής βαθμολογήθηκε με άσχημα} , $P(E) = 0{,}06$

i) P (τουλάχιστον καλά) $= P(\Gamma) + P(B) + P(A) = 0{,}8$

ii) P (ούτε άριστα, ούτε άσχημα) $= P(\overline{A} \cdot \overline{E}) = 1 - P(A+E) = 0{,}84$

iii) P (το πολύ 5 ή 6) $= P(\Gamma) + P(\Delta) + P(E) = 0{,}64$

Να σημειωθεί ότι τα γεγονότα A, B, Γ, Δ, E είναι ξένα μεταξύ τους.

Άσκηση 1.7

Να βρεθούν οι πιθανότητες σε μια οικογένεια με 5 παιδιά:

α) Να υπάρχει τουλάχιστον ένα αγόρι

β) Ακριβώς δύο αγόρια

γ) Όλα να είναι αγόρια όταν το πρώτο είναι αγόρι.

Λύση

Θέτουμε $A_i =$ {υπάρχουν i αγόρια στην οικογένεια}, και δεχόμαστε ότι η πιθανότητα να γεννηθεί αγόρι ή κορίτσι είναι $\frac{1}{2}$ και οι γεννήσεις αποτελούν ανεξάρτητα γεγονότα. Τότε

α) $P(A_{i \geq 1}) = 1 - P(A_0) = 1 - \binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{31}{32}$

β) $P(A_2) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{32}$.

γ) Η γνώση ότι το πρώτο παιδί είναι αγόρι, σημαίνει ότι ζητάμε την πιθανότητα του γεγονότος: υπάρχουν τέσσερα αγόρια στην οικογένεια, η οποία είναι:

$$P(A_4) = \binom{4}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}.$$

Σημείωση: Οι συνδυασμοί $\binom{s}{k}$ δίνουν το πλήθος των διαφορετικών 5-άδων παιδιών, από τα οποία τα k είναι αγόρια.

Άσκηση 1.8

Σ' ένα λαβύρινθο υπάρχουν 4 διασταυρώσεις και σε κάθε διασταύρωση υπάρχουν τρεις κατευθύνσεις, αριστερά, δεξιά και ευθεία. Υπάρχει μόνο μία σωστή διαδρομή για την έξοδο. Ένας ποντικός διαλέγει κάθε κατεύθυνση με την ίδια πιθανότητα. Ποια η πιθανότητα να βρει τη σωστή έξοδο;

Λύση

A_i = {ο ποντικός βρίσκει τη σωστή κατεύθυνση στην i διασταύρωση},

$i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$

A = {ο ποντικός βρίσκει την έξοδο}

Υποθέτουμε ότι κάθε διασταύρωση είναι ανεξάρτητη από τις άλλες. Έτσι:

$$P(A) = P(A_1A_2A_3A_4) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = 0{,}0123.$$

Άσκηση 1.9

Σ' ένα παιχνίδι παρατηρούμε τα τρία τελευταία ψηφία του αριθμού των αυτοκινήτων που περνούν από την πλατεία Συντριβανίου. Ποια είναι η πιθανότητα:

i) Τα δύο ακριβώς να είναι ίδια.

ii) Στα τέσσερα αυτοκίνητα που θα περάσουν, το ένα τουλάχιστον να έχει ακριβώς δύο από τα τελευταία 3 ψηφία ίδια.

Λύση

Παρατηρούμε τις 3-άδες (α, β, γ) όπου $\alpha, \beta, \gamma = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 9$

i) Οι δυνατές περιπτώσεις είναι: $10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$

Οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι: $10 \cdot 9 \cdot \dfrac{3!}{2!\,1!} = 270$

διότι υπάρχουν $\dfrac{3!}{2!\,1!}$ 3-άδες με δύο ψηφία ίδια π.χ. (α, β, β) με $\alpha, \beta = 0, 1, 2, \ldots, 9$, $\alpha \neq \beta$ και οι δυνατές περιπτώσεις για τα (α, β) είναι $10 \cdot 9$.

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι: $p = \dfrac{270}{10^3} = 0{,}27$.

ii) $A_{4,k} =$ {στα τέσσερα αυτοκίνητα τα k να έχουν τα δύο ψηφία τους ίδια}

$P(A_{4,\,k\geq 1}) = 1 - P(A_{4,\,0}) = 1 - (1-p)^4 = 1 - (0{,}73)^4 = 0{,}716 \simeq 0{,}72$

όπου 0,73 η πιθανότητα ένα αυτοκίνητο να μην έχει τα δύο από τα τρία τελευταία ψηφία του ίδια.

Άσκηση 1.10

Ένα αρτοποιείο φτιάχνει 80 ψωμιά κάθε μέρα. Απ' αυτά τα 10 είναι μικρότερου βάρους από το κανονικό. Σ' έναν έλεγχο, ο ελεγκτής ζυγίζει 5 ψωμιά. Ποια είναι η πιθανότητα να βρεθεί ψωμί μικρότερου βάρους;

Λύση

B = {στα 5 ψωμιά υπάρχει ψωμί μικρότερου βάρους)

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{\binom{70}{5}\binom{10}{0}}{\binom{80}{5}} \approx 0{,}5 .$$

Άσκηση 1.11

Σε μια χώρα το κόμμα A το ψηφίζουν το 21% των ανδρών, το 28% των γυναικών και το 15% των ανδρόγυνων. Ποια η πιθανότητα το κόμμα A να πάρει τουλάχιστον μία ψήφο από ένα ζευγάρι;

Λύση

A = {ο άνδρας ψηφίζει το κόμμα Α}

B = {η γυναίκα ψηφίζει το κόμμα Α}

Γ = {τουλάχιστον ένα άτομο στο ζευγάρι ψηφίζει το κόμμα Α}

$$P(\Gamma) = P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}21 + 0{,}28 - 0{,}15 = 0{,}34 .$$

Άσκηση 1.12

Παίρνουμε τυχαία τρεις αριθμούς, χωρίς επανάθεση από ένα δοχείο που περιέχει τους αριθμούς 1, 2,…, 20. Να βρεθεί η πιθανότητα των παρακάτω γεγονότων:

i) Το άθροισμά τους είναι 11

ii) Το γινόμενό τους είναι άρτιος αριθμός

iii) Ο μικρότερος είναι 4 ή 5.

Λύση

Οι δυνατές περιπτώσεις είναι όσες και οι διατάξεις των 20 πραγμάτων ανά 3 δηλαδή:

$$N_\Delta = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$$

i) Οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι:

(1, 2, 8)	σε πλήθος	$3! = 6$
(1, 3, 7)	» »	$3! = 6$
(1, 4, 6)	» »	$3! = 6$
(2, 3, 6)	» »	$3! = 6$
(2, 4, 5)	» »	$3! = 6$

$$N_E = 5 \cdot 6 = 30 \Rightarrow P = \frac{30}{6840} = 0{,}0044$$

ii) A = {το γινόμενο των τριών αριθμών να είναι άρτιος αριθμός} ισοδυναμεί με το γεγονός

A = {ένας τουλάχιστον αριθμός να είναι άρτιος}

Συνεπώς:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{3!\binom{20}{3}}{6840} = 0{,}8947\,.$$

iii) Για να είναι ο μικρότερος αριθμός 4 θα πρέπει οι υπόλοιποι δύο να είναι δύο από τους αριθμούς {5, 6,…, 20}. Για να είναι ο μικρότερος αριθμός 5 θα πρέπει οι υπόλοιποι δύο να είναι από τους {6, 7, …, 20}.

Οι ευνοϊκές περιπτώσεις συνεπώς είναι:

$$\binom{16}{2}3! + \binom{15}{2}3! = 1350\,.$$

Συνεπώς: $$p = \frac{1350}{6840} = 0{,}197\,.$$

Σημείωση: Το ίδιο αποτέλεσμα θα βρούμε αν χρησιμοποιήσουμε συνδυασμούς αντί για διατάξεις.

Άσκηση 1.13

Παίρνουμε τυχαία πέντε αριθμούς από ένα δοχείο που περιέχει τους αριθμούς $1, 2, \ldots, 15$. Ποια είναι η πιθανότητα:

i) ο μεγαλύτερος να είναι 9

ii) ο μικρότερος να είναι 3 και ο μεσαίος (σε μέγεθος) το 8

iii) οι δύο να είναι άρτιοι και οι τρεις περιττοί.

Οι παραπάνω πιθανότητες να υπολογισθούν λαμβάνοντας υπόψη τη διάταξη και χωρίς αυτήν.

Λύση

➲ ***Λαμβάνοντας υπόψη τη διάταξη***

Οι δυνατές περιπτώσεις είναι $(15)_5 = 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11 \Rightarrow N_\Delta = 360360$

i) Για να είναι ο μεγαλύτερος αριθμός το 9 θα πρέπει οι υπόλοιποι τέσσερις να ανήκουν στο $A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι:

$$\binom{8}{4} 5! = 8400$$

Άρα $p = \dfrac{8400}{360360} = 0{,}0233$

ii) Για να είναι ο μικρότερος το 3 και ο μεσαίος το 8 θα πρέπει ο ένας αριθμός να είναι από το σύνολο $A_1 = \{4, 5, 6, 7\}$ και οι άλλοι δύο από το $A_2 = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$. Στην περίπτωση αυτή, οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι:

$$\binom{4}{1}\binom{7}{2} 5! = 10080$$

Άρα $p = \dfrac{10080}{360360} = 0{,}028$.

iii) Το να πάρουμε τρεις περιττούς αριθμούς και δύο άρτιους, ισοδυναμεί με το να πάρουμε τρεις αριθμούς από το σύνολο $A_1 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ και δύο από το σύνολο $A_2 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$.

Οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι:

$$\binom{8}{3}\binom{7}{2} 5! = 141000$$

Άρα $p = \dfrac{141000}{360360} = 0{,}3913$.

➲ ***Χωρίς να λάβουμε υπόψη τη διάταξη***

Οι δυνατές περιπτώσεις είναι: $\binom{15}{5} = 3003$.

i) Οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι $\binom{8}{4} = 70$, όσες οι επιλογές 4 αριθμών από τους 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 και 8. Η ζητούμενη πιθανότητα

$$p = \frac{70}{3003} = 0,0233.$$

ii) Οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι $\binom{4}{1}\binom{7}{2} = 84$ ενώ ή ζητούμενη πιθανότητα

$$p = \frac{84}{3003} = 0,028.$$

iii) Οι ευνοϊκές περιπτώσεις ακολουθώντας το ίδιο σκεπτικό είναι: $\binom{8}{3}\binom{7}{2} = 1175$ και η ζητούμενη πιθανότητα

$$p = \frac{1175}{3003} = 0,3913.$$

Σημείωση: Παρατηρούμε ότι σ' όλες τις περιπτώσεις οι πιθανότητες είναι ίσες είτε λάβουμε υπόψη τη διάταξη ή όχι.

Άσκηση 1.14

Στα 150 ποντίκια ενός εργαστηρίου 20 είναι μαύρα. Επιλέγουμε τυχαία 4 ποντίκα. Ποια η πιθανότητα να πάρουμε 1 μαύρο:

i) Με επανάθεση

ii) Χωρίς επανάθεση.

Λύση

i) Με επανάθεση $\qquad p = 4\frac{2}{15}\left(\frac{13}{15}\right)^3 = 0,3472$

όπου: $\frac{2}{15}$ η πιθανότητα ένα ποντίκι να είναι μαύρο, $\frac{13}{15}$ η πιθανότητα να μην είναι μαύρο και 4 το πλήθος των διαφορετικών τετράδων που αποτελούνται από ένα μαύρο και τρία μη μαύρα ποντίκια.

ii) Χωρίς επανάθεση $$p=\frac{\binom{20}{1}\binom{130}{3}}{\binom{150}{4}}=0,3532$$

Άσκηση 1.15

Ένα φάρμακο είναι αποτελεσματικό σε μία ασθένεια στις 75% των περιπτώσεων. Έξι ασθενείς παίρνουν το φάρμακο. Ποια είναι η πιθανότητα:

i) Όλοι να γίνουν καλά

ii) 4 να γίνουν καλά

iii) τουλάχιστον 4 να γίνουν καλά.

Λύση

i) $p=\binom{6}{6}0,75^6\,0,25^0=0,178$

ii) $p=\binom{6}{4}0,75^4\,0,25^2=0,2966$

iii) P (τουλάχιστον 4 να γίνουν καλά) =

$$=\sum_{k=4}^{6}\binom{6}{k}0,75^k 0,25^{6-k}=0,2966+0,356+0,178=0,8306\,.$$

Άσκηση 1.16

Η πιθανότητα να γεννηθεί αγόρι ή κορίτσι είναι 0,5. Μια οικογένεια έχει τρία παιδιά.

i) Ποια η πιθανότητα να έχει τουλάχιστον δύο αγόρια;

ii) Αν έχει τουλάχιστον ένα αγόρι ποια η πιθανότητα να έχει 2 αγόρια;

Λύση

$A_k=${η οικογένεια έχει k αγόρια} k= 0, 1, 2, 3

$B_k=${η οικογένεια έχει τουλάχιστον k αγόρια}

$A_k\subset B_k$

i) $P(B_2)=P(A_2)+P(A_3)=\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{2}$

ii) $P(B_1) = 1 - P(A_0) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

$$P(A_2 / B_1) = \frac{P(B_1 A_2)}{P(B_1)} = \frac{P(A_2)}{P(B_1)} = \frac{3/8}{7/8} = \frac{3}{7}.$$

Άσκηση 1.17

Ο πατέρας έχει τον γονιδιακό τύπο AA και η μητέρα $A\alpha$.
Ποια η πιθανότητα τα δύο από τα τρία παιδιά τους να έχουν τον τύπο $A\alpha$;

Λύση

A = {ένα παιδί έχει τον τύπο $A\alpha$}
B = {δύο από τα τρία παιδιά έχουν τον τύπο $A\alpha$}

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}.$$

Άσκηση 1.18

i) Δείξτε ότι δύο γεγονότα A, B ξένα μεταξύ τους με $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ δεν μπορεί να είναι ανεξάρτητα

ii) Αν A, B ανεξάρτητα και $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ τότε δε μπορεί να είναι ξένα

iii) Μας δίνουν $P(\overline{A}B) = 0,3$, $P(B\Gamma) = 0,4$, $P(\overline{B}) = 0,4$, $P(\overline{A}B\Gamma) = 0,2$

Να υπολογισθούν οι πιθανότητες $P(B\overline{\Gamma})$, $P(AB\Gamma)$

iv) Δείξτε ότι: $P(A\Gamma \cup AB) \le P(A) + P(\Gamma)$ για οποιαδήποτε γεγονότα A, B, Γ.

Λύση

i)
$$\left.\begin{array}{l} AB = \varnothing \Rightarrow P(AB) = 0 \\ P(A) > 0,\ P(B) > 0 \Rightarrow P(A)\cdot P(B) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow P(AB) \ne P(A)P(B)$$

ii) A, B ανεξάρτητα $\Rightarrow P(AB) = P(A)\cdot P(B) > 0 \Rightarrow AB \ne \varnothing$

iii) $P(B\overline{\Gamma}) = P(B) - P(B\Gamma) = 0,2$ διότι, $P(B) = P(B\Gamma) + P(B\overline{\Gamma})$

$P(AB\Gamma) = P(B\Gamma) - P(\overline{A}B\Gamma) = 0,2$ διότι, $P(B\Gamma) = P(AB\Gamma) + P(\overline{A}B\Gamma)$

iv) $P(A\Gamma \cup AB) = P(A\Gamma) + P(AB) - P(AB\Gamma) =$

$$= P(\Gamma) - P(\overline{A}\Gamma) + P(A) - P(A\overline{B}) - P(AB\Gamma) \Rightarrow$$

$\Rightarrow P(A\Gamma \cup AB) < P(A) + P(\Gamma)$.

Προτεινόμενες Ασκήσεις

1.51 Ποια είναι η πιθανότητα να κάνει κάποιος φουλ του άσσου, στο πόκερ; (Το πόκερ παίζεται με 52 φύλλα και φουλ του άσσου είναι να έχει κάποιος 3 άσσους και 2 οποιαδήποτε άλλα φύλλα).

1.52 Σ' ένα τμήμα το 70% των φοιτητών είναι αγόρια και το 30% είναι κορίτσια. Από τα αγόρια το 40% παίρνει πτυχίο στα 8 εξάμηνα και το 60% σε περισσότερα από 8 εξάμηνα. Από τα κορίτσια το 45% παίρνει πτυχίο στα 8 εξάμηνα και το 55% παίρνει πτυχίο σε περισσότερο από 8 εξάμηνα.

α) Να βρεθεί η πιθανότητα ένας φοιτητής να πάρει πτυχίο σε 8 εξάμηνα.

β) Αν κάποιος πήρε πτυχίο σε περισσότερα από 8 εξάμηνα, ποια η πιθανότητα να είναι αγόρι και ποια η πιθανότητα να είναι κορίτσι;

1.53 Το ποσοστό αυτών που πάσχουν από AIDS είναι 0,5 % Ένα test δίνει σωστή διάγνωση με πιθανότητα 80% για τους υγιείς και 98% για τους ασθενείς. Να υπολογισθεί η πιθανότητα λανθασμένης διάγνωσης σε ένα άτομο φορέα του AIDS και η πιθανότητα λανθασμένης διάγνωσης γενικά.

1.54 Μια Χριστουγεννιάτικη γιρλάντα αποτελείται από 50 λαμπάκια συνδεδεμένα σε σειρά: αυτό σημαίνει ότι η γιρλάντα ανάβει όταν όλα τα λαμπάκια ανάβουν. Η πιθανότητα να είναι χαλασμένο ένα λαμπάκι είναι 1%. Να υπολογισθεί η πιθανότητα να ανάψει η γιρλάντα.

1.55 Για τα γεγονότα A, B, Γ ισχύουν:

$$P(A) = P(B) = P(\Gamma) = \frac{1}{5}, \quad P(A \cap B \cap \Gamma) = \frac{1}{25},$$

$$P(A \cap B) = P(A \cap \Gamma) = P(B \cap \Gamma) = \frac{1}{25}.$$

Να δειχθεί ότι τα γεγονότα A, B, Γ είναι ανεξάρτητα ανά ζεύγη αλλά δεν είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους..

1.56 Σε μια παρέα 15 ατόμων, να βρεθεί η πιθανότητα δύο τουλάχιστον άτομα να ανήκουν στο ίδιο ζώδιο.

1.57 Τα γεγονότα A και B είναι ανεξάρτητα και ισχύει $B \subset A$. Να βρεθεί η πιθανότητα του γεγονότος A.

1.58 Έχουμε δύο νομίσματα A και B με όψεις: κεφαλή (K) και γράμματα (Γ).

Για το νόμισμα A ισχύει: $P(K_A) = P(\Gamma_A) = \frac{1}{2}$,

ενώ για το νόμισμα B ισχύει $P(K_B) = \frac{2}{3}$ και $P(\Gamma_B) = \frac{1}{3}$.

Πήραμε ένα νόμισμα τυχαία και έδειξε γράμματα. Ποια είναι η πιθανότητα να ήταν το νόμισμα A;

1.59 Η πιθανότητα να καεί στην επόμενη δεκαετία το δάσος A μιας περιοχής είναι 10^{-2} ενώ η πιθανότητα να καεί το δάσος B της ίδιας περιοχής είναι $2 \cdot 10^{-2}$. Να βρεθεί η πιθανότητα P_1 να καεί ένα τουλάχιστον δάσος της περιοχής, και η πιθανότητα P_2 να καούν και τα δύο δάση της περιοχής την επόμενη δεκαετία.

1.60 Να δειχθεί ότι αν $A \cap B = \varnothing$ και S ο δειγματοχώρος, τότε:

α) $P(B/\overline{A}) = \dfrac{P(B)}{1 - P(A)}$,

β) $P(B/A \cup B) = \dfrac{P(B)}{P(A) + P(B)}$,

γ) $P(\overline{A}/S) = 1 - P(A/S)$.

Γενικές Ασκήσεις

1. Σε άσκηση κατανόησης των γεωμετρικών μεγεθών, ζητήθηκε από 50 μαθητές της ΣΤ′ δημοτικού να μετρήσουν με χάρακα τις πλευρές ενός φύλλου χαρτιού Α4 και να βρουν το εμβαδόν του σε τετραγωνικά εκατοστά. Οι απαντήσεις τους δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

551	570	580	589	600	608	608	608	608	609
609	609	620	620	620	620	620	620	620	620
620	620	620	630	630	630	630	630	630	630
630	630	630	630	630	630	630	630	630	630
638	638	638	640	651	651	660	660	682	704

i) Να κατασκευαστεί πίνακας συχνοτήτων ομαδοποιώντας τα δεδομένα σε έξι κλάσεις ίσου πλάτους.

ii) Να υπολογιστεί η επικρατούσα τιμή, η διάμεσος το 1ο, το 3ο τεταρτημόριο και το ενδοτεταρτομοριακό πλάτος της δειγματικής κατανομής.

iii) Να κατασκευαστούν τα ιστογράμματα συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων.

2. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται τα λεπτά που αφιέρωσαν 50 φοιτητές ενός τμήματος για να παρακολουθήσουν τις εργασίες ενός Συνεδρίου. (Παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά).

30	42	48	49	52	55	58	62	66	70
71	78	89	90	91	93	94	97	98	100
102	105	107	108	110	115	121	124	127	130
135	142	144	148	149	155	162	164	171	182
186	188	190	192	197	201	207	218	223	229

i) Να κατασκευαστεί πίνακας συχνοτήτων ομαδοποιώντας τα δεδομένα σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους.

ii) Να υπολογιστεί η επικρατούσα τιμή, το ενδοτεταρτημοριακό πλάτος από τα αρχικά δεδομένα και η διάμεσος από τα ομαδοποιημένα δεδομένα.

iii) Να κατασκευαστεί το θηκόγραμμα. Ποια είναι τα συμπεράσματά σας για τη μορφή της κατανομής. Υπάρχουν παράτυπα σημεία;

iv) Να υπολογισθούν η μέση τιμή και η διασπορά από τα ομαδοποιημένα δεδομένα.

v) Να ελεγχθεί αν ο μέσος χρόνος που αφιέρωσαν οι φοιτητές για την παρακολούθηση των εργασιών του Συνεδρίου είναι 2 ώρες ή περισσότερο.

3. Ο χρόνος προσέλευσης των φοιτητών στις εξετάσεις των 8-11 π.μ. με προσέγγιση ενός λεπτού είναι

7,45	7,45	7,46	7,47	7,47	7,48	7,50	7,50	7,50	7,51
7,53	7,54	7,54	7,55	7,55	7,57	7,58	7,58	8,00	8,00
8,00	8,00	8,01	8,01	8,02	8,02	8,05	8,05	8,06	8,07
8,08	8,08	8,09	8,09	8,10	8,12	8,14	8,18	8,22	8,31

i) Να κατασκευαστεί ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων χρησιμοποιώντας έξι κλάσεις ίσου πλάτους.
ii) Να υπολογιστεί η επικρατούσα τιμή, το ενδοτεταρτημοριακό πλάτος από τα αρχικά δεδομένα και η διάμεσος από τα ομαδοποιημένα δεδομένα.
iii) Να κατασκευαστεί και να σχολιαστεί το θηκόγραμμα.
iv) Να υπολογισθούν ο μέσος χρόνος άφιξης των φοιτητών και η διασπορά του από τα ομαδοποιημένα δεδομένα.
v) Να ελεγχθεί αν ο μέσος χρόνος άφιξης των φοιτητών είναι 8,15 ή περισσότερο.

4. Για ένα δείγμα 13 εταιριών πώλησης ηλεκτρικών συσκευών από την Αθήνα η μέση τιμή και η δειγματική διακύμανση των πωλήσεων είναι $\overline{x}=141$ και $s_1^2=73$, αντίστοιχα. Για ένα άλλο δείγμα μεγέθους 11 από τη Θεσσαλονίκη βρήκαμε $\overline{y}=130$ και $s_2^2=64$. Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ δύο πόλεων. Να γίνει παραμετρικός έλεγχος της υπόθεσης αυτής σε επίπεδο σημαντικότητας 0,1.

5. Στην εξεταστική περίοδο του Ιουνίου του ακαδημαϊκού έτους 2011-2012 σε ένα μάθημα προσήλθαν 40 αγόρια, εκ των οποίων 12 πέτυχαν, και 32 κορίτσια εκ των οποίων 20 πέτυχαν. Επιπλέον υπολογίστηκαν οι μέσοι όροι και οι τυπικές αποκλίσεις των βαθμών των φοιτητών και βρέθηκε $\overline{x}=4,87$ και $s_1=2,59$ για τα αγόρια, $\overline{y}=5,22$ και $s_2=2,24$ για τα κορίτσια. Σε επίπεδο σημαντικότητας a = 0,05 να γίνει ο έλεγχος των παρακάτω υποθέσεων:
i) Τα ποσοστά αποτυχίας των αγοριών είναι μεγαλύτερα από τα ποσοστά αποτυχίας των κοριτσιών
ii) Οι μέσοι όροι της βαθμολογίας των αγοριών και των κοριτσιών ίσοι.

6. Σε ένα τυχαίο δείγμα $n=10$ εργατών μετρήσαμε τον αριθμό των προϊόντων που παράγουν σε μια μέρα που δεν άκουγαν μουσική και σε μια άλλη μέρα που άκουγαν ειδικά επιλεγμένη γρήγορη μουσική και πήραμε τα ακόλουθα αποτελέσματα.

Χωρίς μουσική	19	22	20	17	17	17	21	18	15	17
Με μουσική	20	19	23	17	18	20	20	17	18	19

Ζητείται να ελεγχθεί η υπόθεση ότι η μουσική δεν αυξάνει την παραγωγικότητα σε στάθμη σημαντικότητας a=0,025.

i) Με την υπόθεση της κανονικότητας

ii) Χωρίς την υπόθεση της κανονικότητας.

7. Το υπουργείο Οικονομικών ανακοίνωσε στις 29 Δεκεμβρίου 2007 τις νέες τιμές αντικειμενικών αξιών σε 100 περιοχές της Ελλάδος (ποσοστά %). Οι τιμές ομαδοποιήθηκαν σε 8 κλάσεις, όπως προκύπτει από τον παρακάτω πίνακα. Επιπλέον υποθέτουμε ότι τα δεδομένα ακολουθούν την εκθετική κατανομή

Αύξηση Αντικειμενικής Αξίας	[0,70)	[70,140)	[140,210)	[210,280)	[280,350)	[350,420)	[420,490)	≥490
Πλήθος Περιοχών	27	14	9	3	1	2	1	0

i) Με τη μέθοδο ροπών και μέγιστης πιθανοφάνειας να εκτιμηθεί η παράμετρος λ της εκθετικής κατανομής.

ii) Να ελεγχθεί σε επίπεδο σημαντικότητας a=0,05 αν τα δεδομένα ακολουθούν εκθετική κατανομή, χρησιμοποιώντας

α) X^2 έλεγχο καλής προσαρμογής.

β) Κριτήριο Kolmogorov - Smirnov

8. Μια πολιτική παράταξη παρήγγειλε μια έρευνα για να μπορέσει να ανακαλύψει αν η εικόνα της είναι ίδια σε όλα τα οικονομικά στρώματα της χώρας. Τα αποτελέσματα της έρευνας δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

	Αρνητική	*Ουδέτερη*	*Θετική*
Χαμηλό Εισόδημα	28	44	8
Μέσο Εισόδημα	33	29	18
Υψηλό Εισόδημα	39	27	14

i) Να χρησιμοποιηθεί ο κατάλληλος έλεγχος για να διαπιστωθεί αν υπάρχει εξάρτηση του εισοδήματος και της εικόνας που έχουν οι πολίτες για τη συγκεκριμένη πολιτική παράταξη σε a=0,05.
ii) Να ελεγχθεί αν το ποσοστό όσων έχουν χαμηλό εισόδημα από τους πολίτες με αρνητική άποψη είναι ίσο με το ποσοστό όσων έχουν υψηλό εισόδημα από τους πολίτες με θετική άποψη σε a=0,05.

9. Στον παρακάτω πίνακα δίνεται ο χρόνος που χρειάστηκε για την πραγματοποίηση ελέγχου αντισεισμικής προστασίας σε 12 σχολεία του Νομού Θεσσαλονίκης και 23 σχολεία του Νομού Αττικής (σε δεκάδες λεπτά). Με τη βοήθεια του κριτηρίου Mann-Witney να ελεγχθεί αν υπάρχει σημαντική διαφορά ως προς το χρόνο ελέγχου ανάλογα με το Νομό. Δίνεται a=0,05.

Θεσσαλονίκη:	35, 36, 36, 37, 39, 41, 43, 43, 44, 47, 48, 51
Αθήνα:	36, 38, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 43, 44, 45, 46, 47, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 55, 58, 60

10. Το υπουργείο Οικονομικών ανακοίνωσε στις 29 Δεκεμβρίου 2005 τις νέες αντικειμενικές αξίες των ακινήτων. Πραγματοποιήθηκε καταγραφή της αύξησης των αντικειμενικών αξιών σε 100 περιοχές του Νομού Αττικής (ποσοστά %). Οι τιμές ομαδοποιήθηκαν σε 6 κλάσεις, όπως προκύπτει από τον παρακάτω πίνακα. Επιπλέον υποθέτουμε ότι τα δεδομένα ακολουθούν την κανονική κατανομή $N(40, 16^2)$.

Αύξηση Αντικειμενικής Αξίας	[0, 8)	[8, 16)	[16, 28)	[28, 44)	[44, 60)	≥ 60
Πλήθος Περιοχών	4	12	21	37	17	9

Δίνονται: $p_1 = 0{,}0165$, $p_3 = 0{,}1598$ και $p_5 = 0{,}2956$.
i) Να αποδειχθεί ότι $p_2 = 0{,}0441$, $p_4 = 0{,}3721$ και $p_6 = 0{,}1119$
ii) Να ελεγχθεί σε επίπεδο σημαντικότητας a = 0,05 αν τα δεδομένα ακολουθούν κανονική κατανομή $N(40, 16^2)$, χρησιμοποιώντας X^2 έλεγχο καλής προσαρμογής.

11. Καταγράφηκε το πλήθος των απουσιών και ο βαθμός 12 φοιτητών σε ένα μάθημα. Τα στοιχεία δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Πλήθος απουσιών (X)	11	10	11	9	2	1	7	6	9	5	7	4
Βαθμολογία (Y)	15	20	22	28	85	78	35	56	20	45	35	18

Δίνονται: $\sum_{i=1}^{12} x_i y_i = 2410 \quad \sum_{i=1}^{12} x_i^2 = 684 \quad \sum_{i=1}^{12} y_i^2 = 23537$

i) Να υπολογισθούν ο συντελεστής συσχέτισης του Pearson και του Spearman.

ii) Να βρεθεί η ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης που συνδέει τη βαθμολογία των φοιτητών (Y) με το πλήθος των απουσιών (X) αν από το συντελεστή συσχέτισης του Pearson υποδεικνύεται γραμμική σχέση. Να γίνει έλεγχος.

iii) Να εκτιμηθεί από την ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης η βαθμολογία ενός φοιτητή με $x = 42$ και να βρεθεί ένα 98% διάστημα εμπιστοσύνης για την εκτίμηση αυτήν.

12. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τα ύψη και τα βάρη 10 μαθητών:

Ύψος X	152	158	162	165	170	172	175	176	180	181
Βάρος Y	59	60	62	56	61	65	70	71	97	91

Δίνονται: $\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 117959$, $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 286783$, $\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 49638$.

i) Να υπολογισθεί και να ερμηνευθεί ο συντελεστής συσχέτισης.

ii) Να βρεθεί η ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης αν από το συντελεστή συσχέτισης υποδεικνύεται γραμμική συσχέτιση.

iii) Να εκτιμηθεί από την ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης, εφόσον είναι εφικτό:

a) Το βάρος ενός μαθητή με ύψος 1) 140 cm, 2) 176 cm

b) Το ύψος ενός μαθητή αν το βάρος του είναι 72 kg.

13. Μετρήσαμε σε 12 άτομα την πίεση του αίματος και καταγράψαμε την ηλικία τους.

Ηλικία (X)	29	31	34	34	38	40	44	45	48	51	55	58
Πίεση αίματος (Y)	95	92	100	112	103	116	120	118	124	120	122	128

Δίνονται: $\sum_{i=1}^{12} x_i y_i = 58165$, $\sum_{i=1}^{12} x_i^2 = 22413$, $\sum_{i=1}^{12} y_i^2 = 153466$.

i) Να υπολογισθεί και να ερμηνευθεί ο συντελεστής συσχέτισης και να ελεγχθεί αν υπάρχει ή όχι σχέση μεταξύ των δύο μεταβλητών σε $a = 0{,}05$.

ii) Να βρεθεί η ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης που συνδέει την πίεση του αίματος με την ηλικία, αν από τον συντελεστή συσχέτισης υποδεικνύεται γραμμική σχέση.
iii) Να βρεθεί ένα 95% δ.ε. για την πίεση του αίματος ατόμων ηλικίας 60 ετών.

14. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι βαθμολογίες 50 αγοριών και 80 κοριτσιών σε έναν μαθητικό διαγωνισμό. Να ελέγξετε με κατάλληλο μη παραμετρικό έλεγχο, αν οι βαθμολογίες ακολουθούν την ίδια κατανομή σε σ.σ. a = 0,05.

Βαθμολογία	1	2	3	4	5	6	7	8
Αγόρι	1	3	4	6	15	5	7	9
Κορίτσι	4	8	12	17	12	11	6	10

15. Ο προϊστάμενος μιας εταιρείας για να ελέγξει την ταχύτητα εξυπηρέτησης των υπαλλήλων της σε σχέση με τη βάρδια εργασίας, βαθμολόγησε από το 1 έως το 4 τους χρόνους εξυπηρέτησης 30 συνολικά τυχαία επιλεγμένων πελατών, από 10 σε κάθε βάρδια. Τα αποτελέσματα δίνονται στον παρακάτω πίνακα. Να ελέγξετε αν υπάρχει διαφορά στη βαθμολόγηση των χρόνων εξυπηρέτησης ως προς τη βάρδια εργασίας σε σ.σ. a = 0,05.

00:00 - 8:00 π.μ.	3	4	2	2	3	4	3	3	2	3
8:00 π.μ. - 4:00 μ.μ.	3	1	3	2	1	3	4	2	4	1
4:00 μ.μ. - 12:00 μ.μ.	4	4	3	4	3	3	3	3	2	3