ΜΠΡΑΝΙΣΛΑΒ ΜΠΟΡΙΤΣΙΤΣ

ΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

θεωρία - ασκήσεις

Εισαγωγικά κεφάλαια Μαθηματικής Λογικής:

- Αξιωματική Μέθοδος
- Προτασιακοί Λογισμοί
- Πρωτοβάθμια Κατηγορηματική Λογική
- Κλασική και Διαισθητική Λογική
- Θεωρία Αποδείξεων

$$\frac{\Gamma \vdash A\Delta \qquad \Pi A \vdash \Lambda}{\Gamma\Pi \vdash \Delta\Lambda}$$

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο υπογράφεται από τον συγγραφέα ή εκδότη

AMS Mathematics Subject Clossification (1991): 03B, 03F, 03G

ISBN 960-431-335-5

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 23920 72.222 (5 γραμ.) - Fax: 23920 72.229
e-mail: info@ziti.gr

Βιβλιοπωλείο

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ. 2310 203.720, Fax 2310 211.305
e-mail: sales@ziti.gr

www.ziti.gr

Στη μνήμη του Επιμενίδη,

του Καζαντζάκη,

στην Αγία Κρήτη,

στα παμπάλαια χώματα της Κνωσού

Πρόλογος

Η εργασία πάνω στο βιβλίο αυτό άρχισε με σκοπό να καλυφθούν τα πιο σημαντικά θέματα της κλασικής και διαισθητικής λογικής από την άποψη της θεωρίας αποδείξεων. Η αρχική ιδέα ήταν να επεξεργασθούμε τις βασικές συντακτικές και σημασιολογικές ιδιότητες της κλασικής και διαισθητικής προσέγγισης στην λογική και στα μαθηματικά, αναπτύσσοντας, από την αρχή έως το τέλος του κειμένου, τον παραλληλισμό μεταξύ αυτών των δύο προσεγγίσεων.

Το μεγαλύτερο μέρος του εισαγωγικού κεφαλαίου αφιερώνεται στα γενικά προβλήματα της αξιωματικής μεθόδου και στις ιδιότητες της σχέσης απαγωγής. Παρουσιάζουμε το Θεώρημα Απαγωγής για το συνεπαγωγικό τμήμα της διαισθητικής λογικής –το ελάχιστο σύστημα για το οποίο μπορεί να αποδειχθεί το Θεώρημα Απαγωγής σε συνηθισμένη μορφή.

Το δεύτερο κεφάλαιο ασχολείται με τους προτασιακούς λογισμούς κλασικής και διαισθητικής λογικής. Περιγράφονται οι διατυπώσεις τύπου Hilbert των λογικών αυτών και οι αντίστοιχοι λογισμοί σειρών τύπου Gentzen. Αποδεικνύεται το Θεώρημα Πληρότητας για την κλασική προτασιακή λογική, σχετικά με την συνηθισμένη δίτιμη σημασιολογία και το Θεώρημα Πληρότητας για την διαισθητική λογική, σχετικά με τη σημασιολογία του Kripke. Μελετούνται οι διαισθητικές ερμηνείες του κλασικού συλλογισμού, όπως και οι ανάλογες άλγεβρες της κλασικής και διαισθητικής λογικής προτάσεων –άλγεβρες Boole και άλγεβρες Heyting. Στο τέλος του κεφαλαίου παρουσιάζονται συστήματα φυσικών απαγωγών του κλασικού και διαισθητικού λογισμού προτάσεων.

Στο τρίτο κεφάλαιο θεωρούνται η σύνταξη (λογισμοί τύπου Hilbert, τύπου Gentzen και συστήματα φυσικών απαγωγών) και η σημασιολογία (μοντέλα) κλασικού και διαισθητικού λογισμού κατηγορημάτων, μαζί με τα αντίστοιχα αποτελέσματα πληρότητας, όπως και μερικά από τα συνηθισμένα παραδείγματα μαθηματικών θεωριών πάνω στην πρωτοβάθμια γλώσσα.

Τα δύο κεντρικά θέματα του τέταρτου κεφαλαίου είναι το Θεώρημα Απαλοιφής της Τομής των πρωτοβάθμιων κατηγορηματικών σειριακών λογισμών της κλασικής και διαισθητικής λογικής, με τις γνωστές συνέπειες (αποφασιστικότητα προτασιακών λογισμών, ιδιότητες παρεμβολής), και το Θεώρημα Κανονικής Μορφής για τα συστήματα φυσικών απαγωγών το οποίο λαμβάνεται επίσης ως μία συνέπεια του Θεωρήματος Απαλοιφής της Τομής.

Το βιβλίο αυτό εν μέρει έχει γραφεί κατά την προετοιμασία μου για τη διδασκαλία των μαθημάτων Λογική και Θέματα Λογικής: Μη Κλασικές Λογικές του ακαδημαϊκού έτους 1994-1995 στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης. Πρέπει να τονίσω ότι αυτό συνέβη κατά τη διάρκεια εμφύλιου πολέμου στην Γιουγκοσλαβία και πολύ δύσκολων και δυσοίωνων καιρών, για μένα προσωπικά, αλλά και ότι τα μαθήματα που δίδασκα σε μία ομάδα θαυμάσιων φοιτητών των Τμημάτων Μαθηματικών και Επιστήμης Υπολογιστών του Πανεπιστημίου Κρήτης, και το ευνοϊκό κλίμα που υπήρξε στο Τμήμα Μαθηματικών, μου πρόσφεραν πάντα μία πολύτιμη και σπάνια όαση γαλήνης και αισιοδοξίας.

Εκτός από την ευγνωμοσύνη προς τους φοιτητές μου, εκφράζω την ευγνωμοσύνη μου προς το Τμήμα Μαθηματικών της Σχολής Θετικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Κρήτης, το οποίο μου έδειξε εμπιστοσύνη, τιμή και φιλοξενία, με την πρόσληψή μου στο διδακτικό του προσωπικό.

Το βιβλίο γράφτηκε ταυτοχρόνως στην ελληνική, σερβική και αγγλική γλώσσα. Ιδιαίτερη ευγνωμοσύνη χρωστάω στους συναδέλφους μου Α. Γιαννόπουλο, Ε. Δεληγιάννη, Χ. Κορνάρο και Μ. Λάμπρου, οι οποίοι διάβασαν αρκετές φορές αυτό το κείμενο, αποκαλύπτοντάς μου ξανά και ξανά τα μυστικά της τόσο απλής, αλλά και τόσο εμβριθούς ελληνικής γλώσσας. Είμαι ευγνώμων απέναντι στην κ. M. Lučić *η οποία είχε διαβάσει και διορθώσει την αγγλική έκδοση του βιβλίου. Τέλος, εκφράζω την ευγνωμοσύνη μου στον πρώτο και πιο σημαντικό δάσκαλό μου της ελληνικής γλώσσας, τη σύζυγό μου Ευστρατία, για την υπομονή με την οποία μου εξηγούσε ακατάπαυστα τις λεπτομέρειες της ελληνικής ορθογραφίας.*

Φυσικά, την πλήρη ευθύνη για όλα τα χαρακτηριστικά του κειμένου, από τα τεχνικά και τυπογραφικά, έως τα επιστημονικά και διδακτικά, τη φέρω προσωπικά εγώ.

Ευχαριστώ εκ των προτέρων όλους τους συναδέλφους οι οποίοι θα κάνουν οποιαδήποτε παρατήρηση σχετικά με το κείμενο αυτό.

Ελπίζω ότι η ατελής και ταπεινή αυτή συνεισφορά μου, θα προκαλέσει ενδιαφέρον για τα θέματα των μη κλασικών λογικών και της θεωρίας των αποδείξεων.

Ηράκλειο, 11 Μαΐου 1995 — *Ο Συγγραφέας*

Περιεχόμενα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Γλώσσα 1
2. Τα παράδοξα 2
3. Αξιωματική μέθοδος 3
4. Αποδείξεις και σχέση απαγωγής 6

Ασκήσεις 24

ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΙ ΛΟΓΙΣΜΟΙ 25

5. Κλασική προτασιακή λογική 26
6. Σημασιολογία του κλασικού προτασιακού λογισμού 46
7. Διαισθητική λογική 51
8. Άλγεβρα λογικής 66
   8.1. Άλγεβρες Boole 69
   8.2. Άλγεβρες Heyting 72
9. Συστήματα φυσικών απαγωγών 76

Ασκήσεις 80

ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑ ΚΑΤΗΓΟΡΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ 85

10. Κλασικός πρωτοβάθμιος κατηγορηματικός λογισμός 88
11. Σημασιολογία της πρωτοβάθμιας κλασικής λογικής 97
12. Διαισθητική πρωτοβάθμια κατηγορηματική λογική 104
13. Παραδείγματα πρωτοβάθμιων θεωριών 112
    13.1. Διμελείς σχέσεις 115
    13.2. Αλγεβρικές θεωρίες 118
    13.3. Τυπική αριθμητική 119
    13.4. Τυπική θεωρία συνόλων 122

Ασκήσεις 125

ΘΕΩΡΙΑ ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΝ 129
14. Θεώρημα απαλειφής της τομής 129
14.1. Κάποιες συνέπειες του θεωρήματος απαλοιφής της τομής 134
15. Φυσικές απαγωγές και κανονικοποίηση 140
15.1. Θεώρημα κανονικής μορφής 146
16. Ένα περίγραμμα της άλγεβρας αποδείξεων 154
Ασκήσεις 160

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 161

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ 165

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τις πρώτες τυπικές περιγραφές των κανόνων της συμπερασματολογίας της λογικής συναντάμε στο *Όργανον* του Αριστοτέλη. Αυτή ήταν η ονομαζόμενη *αριστοτέλεια συλλογιστική*. Την εποχή εκείνη, την οποία την γνωρίζουμε από την ιστορία ως *κλασσική εποχή*, η *αριστοτέλεια δίτιμη αρχή* ήταν καθορισμένη και παραδεκτή. Βάσει της αρχής αυτής είναι δυνατόν μία πρόταση να πάρει μία από τίς (*μόνο*) δύο τιμές αλήθειας, *αλήθεια* ή *ψεύδος*. Η λογική η οποία βασίζεται στην αρχή αυτή είναι γνωστή σήμερα ως *κλασσική* ή *δίτιμη λογική*.

Τα επόμενα βήματα στην ανάπτυξη της τυπικής λογικής τα πραγματοποίησαν οι G. W. Leibniz (1646–1716), A. de Morgan (1806–1871), C. S. Peirce (1839–1914) και τα σημαντικότερα ο G. Boole (1815–1864) το 1847 όταν δημοσίευσε *The Mathematical Analysis of Logic,* και ο G. Frege (1848–1925) το 1879, με το έργο του *Begriffsschrift.*

Με την ευκαιρία αυτή αναφέρουμε ακόμη μία μνημειώδη εργασία, η οποία πηγάζει από την αρχαία Ελλάδα: τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη. Χωρίς αμφιβολία, για μία περίοδο που διήρκεσε περισσότερο από δύο χιλιάδες χρόνια, τα *Στοιχεία* ήσαν το λαμπρότατο παράδειγμα εφαρμογής της αξιωματικής μεθόδου. Τονίζουμε το γεγονός αυτό επειδή η αξιωματική μέθοδος είναι το θεμέλιο της ανάπτυξης των σύγχρονων μαθηματικών και της λογικής.

Στο εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο θα προσπαθήσουμε να σκια-

γραφήσουμε μερικές από τίς βασικές ιδέες και έννοιες της λογικής.

1. Γλώσσα

Μιλώντας γενικά, η *γλώσσα* μπορεί να θεωρηθεί ως μέσο επικοινωνίας. Για να εξηγήσουμε τις κύριες διαφορές μεταξύ *δύο* επιπέδων της χρήσης της γλώσσας, όταν το αντικείμενο μελέτης είναι η ίδια η γλώσσα, ας υποθέσουμε, π.χ., ότι τα αγγλικά, ως ξένη γλώσσα, τα μαθαίνουμε μέσω της ελληνικής γλώσσας. Στην περίπτωση αυτή η αγγλική είναι η υπό μελέτη γλώσσα, και ονομάζεται η *αντικειμενική γλώσσα,* ενώ η ελληνική είναι η γλώσσα με την οποία διεξάγεται η συνομιλία — η ονομαζόμενη *μεταγλώσσα.* Είναι ιδιαίτερα σημαντικό να *ξεχωρίσουμε* αυτά τα δύο επίπεδα, στην περίπτωση που αυτές οι δύο γλώσσες ταυτίζονται.

Για μία επιτυχημένη μελέτη των μαθηματικών ή της λογικής είναι αναγκαίο να περάσουμε από την *φυσική* γλώσσα σε μία κατάλληλη *τυπική* γλώσσα. Αυτό το πέρασμα μπορεί να πραγματοποιηθεί με ένα είδος *συμβολοποίησης* ενός τμήματος της φυσικής γλώσσας. (Π.χ., "1+2" είναι μία σειρά συμβόλων την οποία χρησιμοποιούμε για να συμβολίσουμε το "ένα σύν δύο".) Τονίζουμε ότι το πρόβλημα της συμβολοποίησης ενός τυχόντος γλωσσικού ισχυρισμού μπορεί να είναι πολύ δύσκολο.

Η επόμενη σημαντική διαφορά την οποία πρέπει να υπογραμμίσουμε είναι η αυτή μεταξύ *σύνταξης (syntax)* και *σημασιολογίας (semantics).* Η σύνταξη αναφέρεται σε καθαρά τυπικά θέματα, όπως είναι οι *γραμματικοί κανόνες*, ενώ η σημασιολογία έχει σχέση με την *έννοια* των λέξεων.

Το αρχικό σημείο του λογικού φορμαλισμού είναι οι *προτασιακοί σύνδεσμοι (propositional connenctives)*, όπως: *καί, ή, όχι, αν ... τότε,* και *αν και μόνο αν,* και οι *ποσοδείκτες: για κάθε* και *υπάρχει.*

Ο συνήθης κατάλογος των βασικών λογικών συμβόλων είναι

ο εξής:

$$\begin{array}{lll}
\wedge & — & \textit{σύζευξη (για το καί)} \\
\vee & — & \textit{διάζευξη (για το ή)} \\
\neg & — & \textit{άρνηση (για το όχι)} \\
\rightarrow & — & \textit{συνεπαγωγή (για το αν ... τότε)} \\
\leftrightarrow & — & \textit{ισοδυναμία (για το αν και μόνο αν)} \\
\forall & — & \textit{καθολικός ποσοδείκτης (για το για κάθε)} \\
\exists & — & \textit{υπαρξιακός ποσοδείκτης (για το υπάρχει)}
\end{array}$$

Ενα τμήμα της σύνταξης μίας τέτοιας τυπικής γλώσσας περιλαμβάνει και τον κανόνα του σχηματισμού με τον οποίο από τα αντικείμενα A και B μπορούμε να δημιουργήσουμε ενα *νέο* αντικείμενο όπως, για παράδειγμα, το $A \wedge B$. Το αντίστοιχο τμήμα της σημασιολογίας, με την παρουσία της αριστοτέλειας δίτιμης αρχής, μπορεί να περιγραφεί με την βοήθεια του επόμενου αληθοπίνακα:

A	B	$A \wedge B$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

(Τους αληθοπίνακες πρώτος τους χρησιμοποίησε ο C. S. Peirce το 1902.) Ετσι, υποθέτοντας ότι οι προτάσεις A και B μπορούν να πάρουν μία από τίς δύο μόνο τιμές αλήθειας $\top$ (για *αλήθεια*) ή $\bot$ (για *ψεύδος*), μπορούμε να χαρακτηρίσουμε την τιμή αλήθειας της νέας πρότασης $A \wedge B$ ως εξής: $A \wedge B$ παίρνει την τιμή $\top$ *αν και μόνο αν* και η A και η B παίρνουν την τιμή $\top$.

2. Τα παράδοξα

Η λέξη *παράδοξο* προέρχεται από την αρχαία ελληνική γλώσσα και παράγεται από τις λέξεις “παρά την δόξαν”, δηλαδή παρά

την γενική γνώμη. Επίσης η λέξη αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί γιά να επισημάνει οποιονδήποτε ισχυρισμό, ο οποίος ξεφεύγει από κάποιους συνηθισμένους κανόνες ή ακόμα καί, φαινομενικά ή πραγματικά, διαφωνεί με διαπιστωμένα γεγονότα. Συνεπώς, κάθε απροσδόκητο μαθηματικό αποτέλεσμα θα μπορούσε να κατανοηθεί ως παράδοξο (της εποχής που ανακαλύφθηκε).

Για παράδειγμα, η ύπαρξη των άρρητων αριθμών, που απόδειξαν οι πυθαγόρειοι, ήταν το παράδοξο της εποχής τους. Αυτό ήταν παράδοξο ως γεγονός, αλλά μπορεί να θεωρηθεί επίσης και ως παράδοξο από την λογική άποψη. Συγκεκριμένα η πρώτη απόδειξη για το γεγονός ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός, όπως την σώζει ο Αριστοτέλης στα *Αναλυτικά Πρότερα*, έγινε με την μέθοδο της *απαγωγής σε άτοπο* (*reductio ad absurdum*).

Ενα απο τα πιό απλά και τα πιό παλιά παράδοξα, γνωστό απο τους αρχαίους χρόνους ως το *παράδοξο του Επιμενίδη* ή ως το *παράδοξο του ψεύτη*, παρουσιαζόταν στην φιλολογία σε διάφορες μορφές. (Ο Επιμενίδης, σοφός και μάντης, γεννήθηκε στην Κνωσό ή στην Φαιστό περί το 659 π.Χ.) Μια επιφανειακή ανάλυση της τιμής αληθείας της πρότασης "Εγώ λέω ψέμματα" μπορεί να πραγματοποιηθεί με τον εξής τρόπο. Αν εγώ πραγματικά λέω ψέμματα, τότε η μελετούμενη πρόταση είναι αληθής, αλλά αυτό διαφωνεί με το γεγονός ότι εγώ λέω ψέμματα. Εαν, πάλι, εγω λέω την αλήθεια, τότε η πρόταση διαφωνεί με το γεγονός ότι εγώ λέω την αλήθεια. Το παράδοξο του Επιμενίδη είναι παράδειγμα *σημασιολογικού παράδοξου*.

Αλλες σημαντικές κλάσεις παραδόξων εμφανίζονται στα πλαίσια της θεωρίας συνόλων και είναι σχεδόν αδύνατον να βρεί κανείς βιβλίο Λογικής ή Συνολοθεωρίας το οποίο δεν ασχολείται με τα παράδοξα του Russell (B.Russell, 1905), του Burali–Forti (C. Burali–Forti, 1897) ή του Skolem (T. Skolem, 1923).

Το *παράδοξο του Russell* μπορούμε να το περιγράψουμε ως εξής. Εστω S το σύνολο όλων των συνόλων τα οποία δεν περιλαμβάνουν τον εαυτό τους ως στοιχείο. Τότε προκύπτει η εξής αντίφαση. Το S ανήκει στο S αν και μόνο αν το S δεν ανήκει στο S. Αυτό το παράδοξο μπορούμε να το αποφύγουμε, π.χ.,

με τον ακριβή ορισμό της έννοιας του συνόλου στα πλαίσια της αξιωματικής θεωρίας συνόλων των Zermelo—Fraenkel (E. Zermelo, A. Fraenkel).

Εδω θα μελετήσουμε επίσης ένα εντελώς διαφορετικό είδος παραδόξων (ή ίσως είναι καλύτερα να τα ονομάσουμε *ψευδοπαράδοξα* ή "παράδοξα") τα οποία είναι γνωστά στην λογική ως *παράδοξα συνεπαγωγής* και συχνά χρησιμοποιούνται ως θεμέλιο κριτικής κάποιων λογικών θέσεων. Αυτή η κριτική μάς οδηγεί σε κάποια συστήματα μη κλασσικών λογικών (τροπικές λογικές, σχετικές λογικές, γραμμικές λογικές κ. α.) Για παράδειγμα, απο την κλασσική ταυτολογία $A \to (B \to A)$ μπορούμε να βγάλουμε το εξής συμπέρασμα: αν ο A είναι ταυτολογία, τότε ο αυθαίρετος τύπος B συνεπάγεται τον A. Παρόμοια, απο την ταυτολογία $\neg A \to (A \to B)$ μπορούμε να συμπεράνουμε: αν ο A είναι ψευδής, τότε ο A συνεπάγεται οποιονδήποτε τύπο B. Αυτά τα παράδοξα για πρώτη φορά τα είχε μελετήσει ο C. I. Lewis.

Τέλος, ας μελετήσουμε τον παρακάτω ισχυρισμό. *Υπάρχουν δύο άρρητοι αριθμοί a και b ώστε ο a^b είναι ρητός.* Ο ισχυρισμός μπορεί να δικαιολογηθεί ως εξής: αν υποθέσουμε ότι $a = b = \sqrt{2}$, τότε αυτό θα μπορούσε, ίσως, να είναι η λύση του προβλήματός μας. Αλλά, αν δεν συμβαίνει αυτό, δηλαδή αν $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ είναι άρρητος, τότε μπορούμε να θέσουμε $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ και $b = \sqrt{2}$, και έχουμε, οπωσδήποτε, ότι ο a^b είναι ρητός αριθμός. Κατόπιν μίας ανάλυσης της απόδειξης που μόλις παρουσιάσαμε, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι τον παραπάνω ισχυρισμό τον αποδείξαμε, αλλά δεν βρήκαμε τους αριθμούς a και b. Εμείς βρήκαμε μόνο δυο δυνατότητες για τους a και b, ώστε μία απο αυτές να είναι η λύση. Απο την άποψη των κατασκευαστικών μαθηματικών η απόδειξη που παραθέσαμε δεν είναι ικανοποιητική, γιατί το να δοθεί μία *κατασκευαστική απόδειξη* του τύπου $\exists x A(x)$ σημαίνει να παρουσιασθεί μια κατασκευή του αντικειμένου x για το οποίο $A(x)$ ισχύει.

3. Αξιωματική μέθοδος

Το πρώτο και, για αρκετό χρονικό διάστημα, το μοναδικό παράδειγμα της αξιωματικής συστηματοποίησης κάποιων επιστημονικών γεγονότων ήταν η παρουσίαση της γεωμετρίας του Ευκλείδη. Σήμερα η αξιωματική προσέγγιση αποτελεί ένα μέρος της επιστημονικής παράδοσης. Σχεδόν κάθε ακριβής έρευνα περιλαμβάνει, τουλάχιστον έμμεσα, την χρήση της αξιωματικής μεθόδου. Η *θεωρία των επαγωγικών* (ή *αναδρομικών*) *ορισμών* αντιπροσωπεύει την τυπική βάση της αξιωματικής μεθόδου. Το απλούστερο και γνωστότερο παράδειγμα επαγωγικά ορισμένου συνόλου είναι το σύνολο **N** των φυσικών αριθμών. Ο ορισμός του **N** μπορεί να δοθεί μέσω των επομένων συνθηκών:

(i) Το 0 είναι φυσικός αριθμός.

(ii) Αν ο n είναι φυσικός αριθμός, τότε ο $n+1$ είναι επίσης φυσικός αριθμός.

(iii) Ολοι οι φυσικοί αριθμοί έχουν περιγραφεί με τις συνθήκες *(i)* και *(ii)* αυτού του ορισμού.

Ας μελετήσουμε ένα γενικότερο παράδειγμα επαγωγικού ορισμού.

Με τον όρο *κανόνας παραγωγής* εννοούμε κάθε διατεταγμένο ζεύγος μορφής (Γ, A), όπου το $\Gamma \cup \{A\}$ είναι πεπερασμένο σύνολο αντικειμένων. Το Γ είναι το ονομαζόμενο *σύνολο υποθέσεων* και το A είναι *συνέπεια* αυτού του κανόνα. Ο κανόνας (Γ, A) συνήθως συμβολίζεται και ως εξής:

$$\frac{\Gamma}{A}$$

Εστω $\mathcal{A}$ σύνολο κανόνων παραγωγής. Τότε λέμε ότι το σύνολο Π είναι *$\mathcal{A}$–κλειστό* αν και μόνο αν, για κάθε κανόνα παραγωγής (Γ, A) του $\mathcal{A}$, ισχύει ότι από $\Gamma \subseteq \Pi$ προκύπτει $A \in \Pi$. Το *ελάχιστο* $\mathcal{A}$–κλειστό σύνολο που περιέχει κάποιο σύνολο Δ, δηλαδή η τομή όλων των συνόλων $\{\Pi | \Pi$ είναι $\mathcal{A}$–κλειστό και $\Delta \subseteq \Pi\}$ ονομάζεται *απαγωγική κλειστότητα (deductive closure)* του Δ ή *$\mathcal{A}$–κλειστότητα* του Δ, και συμβολίζεται $Cn_{\mathcal{A}}(\Delta)$ ή, απλά $Cn(\Delta)$. Οταν το

$\Delta = \emptyset$, γράφουμε $Cn_{\mathcal{A}}$ αντί $Cn_{\mathcal{A}}(\emptyset)$. Αν $(\emptyset, A)$ είναι κανόνας παραγωγής του $\mathcal{A}$, τότε το στοιχείο A ονομάζεται *ατομικό, αρχικό* ή *γεννητορικό στοιχείο* του $\mathcal{A}$.

Τώρα το σύνολο των φυσικών αριθμών μπορεί να ορισθεί από το εξής σύνολο κανόνων παραγωγής: $\mathcal{N} = \{(\emptyset, 0), (\{n\}, n+1)\}$, οπότε $\mathbf{N} = Cn_{\mathcal{N}}$. Παρόμοια, το σύνολο των άρτιων αριθμών θα είναι $2\mathbf{Z} = Cn_{2\mathcal{Z}}$, όπου $2\mathcal{Z} = \{(\emptyset, 0), (\{n\}, n+2), (\{n\}, n-2)\}$.

Το σύνολο $\mathbf{V}$ των διανυσμάτων ενός γραμμικού (ή διανυσματικού) χώρου, πάνω από το σώμα $\mathbf{F}$, ορίζεται επαγωγικά μέσω του κανόνα: αν $x, y \in \mathbf{V}$ και $\alpha \in \mathbf{F}$, τότε $x+y, \alpha \cdot x \in \mathbf{V}$, όπου το $+$ είναι η πρόσθεση διανυσμάτων και το $\cdot$ ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός. Κάθε βάση του χώρου $\mathbf{V}$ είναι σύνολο αρχικών στοιχείων του $\mathbf{V}$.

Εστω A ένα αυθαίρετο μη κενό σύνολο γραμμάτων. Τότε με το $W(A)$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των πεπερασμένων ακολουθιών του συνόλου A και η δομή $\langle W(A), \delta, \sqcup \rangle$ ονομάζεται *ελεύθερη ημιομάδα των λέξεων του A (free semigroup of words over A)*, όπου δ είναι μία διμελής πράξη στο $W(A)$ και $\sqcup$ η κενή λέξη του $W(A)$. Πιο συγκεκριμένα, το σύνολο των λέξεων πάνω από το σύνολο A ορίζεται επαγωγικά μέσω των εξής συνθηκών:

(i) $A \cup \{\sqcup\} \subseteq W(A)$
(ii) *Αν* $x, y \in W(A)$, *τότε* $xy \in W(A)$.

Ετσι, μπορούμε να ορίσουμε και την πράξη δ (ένωση των λέξεων):

$$x \delta y = xy$$

και να χαρακτηρίσουμε την μονάδα $\sqcup$ (δ–ουδέτερο στοιχείο):

$$\forall x \;\; x\delta\sqcup = \sqcup\delta x = x$$

Προφανώς, το $\langle W(A), \delta, \sqcup \rangle$ είναι μία προσεταιριστική δομή, επαγωγικά ορισμένη.

Στα πλαίσια της θεωρίας αποδείξεων, το *σύνολο For των τύπων*, πάνω στην κατάλληλη γλώσσα, ορίζεται επαγωγικά. Για την περίπτωση της προτασιακής γλώσσας το σύνολο *ατόμων* (ή

ατομικών τύπων) αποτελείται από προτασιακά γράμματα (αριθμήσιμου πλήθους) και από μερικές προτασιακές σταθερές. Για n–*μελή λογικό σύνδεσμο* ή *πράξη* π, ο αντίστοιχος κανόνας σχηματισμού θα έχει την εξής μορφή: αν οι $A_1, ..., A_n$ είναι τύποι, τότε ο $\pi A_1 ... A_n$ είναι τύπος.

Ας σημειώσουμε οτι ο επαγωγικός ορισμός είναι η βάση της *αρχής της επαγωγικής απόδειξης* η οποία είναι το μοναδικό κατάλληλο μέσο το οποίο χρησιμοποιείται στις αποδείξεις ισχυρισμών που αναφέρονται σε όλο το επαγωγικά ορισμένο σύνολο.

Το *λογικό σύστημα* ή *λογική* (ή *λογικός λογισμός*) $\mathcal{L}$ συνήθως ορίζεται επαγωγικά. Τα αρχικά στοιχεία του $\mathcal{L}$ λέγονται *αξιώματα* και όταν ο κανόνας παραγωγής

$$\frac{\Gamma}{A}$$

ανήκει στο σύνολο κανόνων του $\mathcal{L}$, λέμε ότι ο A είναι *άμεση συνέπεια* του Γ στο $\mathcal{L}$. Το σύνολο των *θεωρημάτων* του $\mathcal{L}$ είναι το ελάχιστο σύνολο το οποίο περιλαμβάνει το σύνολο των αξιωμάτων του $\mathcal{L}$ και είναι κλειστό ως προς τους κανόνες παραγωγής.

Η βάση κάθε λογικού συστήματος $\mathcal{L}$ είναι η κατάλληλη *σχέση συνέπειας* (ή *σχέση απαγωγής*) (*consequence* (ή *deduction*) *relation*) — μία σχέση μεταξύ των συνόλων τύπων και τύπων, η οποία συμβολίζεται $\vdash_{\mathcal{L}}$ (ή, απλά, $\vdash$) και ορίζεται ως εξής: $\Gamma \vdash A$ αν και μόνο αν υπάρχει μία πεπερασμένη ακολουθία τύπων $A_1, ..., A_n$ με $A_n = A$, και κάθε τύπος A_i $(1 \leq i \leq n)$ της ακολουθίας αυτής ικανοποιεί μία από της παρακάτω συνθήκες:

(i) A_i είναι αξίωμα του $\mathcal{L}$

(ii) $A_i \in \Gamma$

(iii) A_i είναι άμεση συνέπεια ενός συνόλου τύπων

$$\Pi \subseteq \{A_1, ..., A_{i-1}\} \text{ στο } \mathcal{L}$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι από το σύνολο των υποθέσεων Γ, στο $\mathcal{L}$, μπορούμε να συμπεράνουμε τον A. Αν $\Gamma = \emptyset$, λέμε ότι ο A είναι *αποδείξιμος* στο $\mathcal{L}$, ή ότι ο A είναι *θεώρημα* του $\mathcal{L}$, και

το συμβολίζουμε με $\vdash_{\mathcal{L}} A$. Η αντίσιοιχη ακολουθία των τύπων η οποία τερματίζεται με τον A είναι μία *απαγωγή (deduction)* του A από Γ στο $\mathcal{L}$ ή, όταν $\Gamma = \emptyset$, αυτή είναι η *απόδειξη (proof)* για τον A στο $\mathcal{L}$.

Αυτή είναι η ονομαζόμενη *συντακτική* σχέση απαγωγής. Αργότερα θα μελετήσουμε και μία άλλη, διαφορετική, *σημασιολογική* σχέση απαγωγής. Τον πρώτο ορισμό της συντακτικής σχέσης απαγωγής τον παρουσίασε ο P. B. J. Bolzano το 1837. Το σύμβολο "$\vdash$" το χρησιμοποίησε, για πρώτη φορά, το 1879 ο G. Frege για να συμβολίσει την σχέση απαγωγής.

Η σχέση απαγωγής που μόλις ορίσαμε έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

(i) $\vdash \subseteq \mathcal{P}(For) \times For$, όπου $\mathcal{P}(For)$ είναι το δυναμοσύνολο του συνόλου For των τύπων.

(ii) Αν $A \in \Gamma$, τότε $\Gamma \vdash A$.

(iii) Αν $\Gamma \vdash A$, τότε $\Gamma \cup \{B\} \vdash A$.

(iv) Αν $\Gamma \vdash A$ και $\Pi \cup \{A\} \vdash B$, τότε $\Gamma \cup \Pi \vdash B$.

Για τις ενώσεις $\Gamma \cup \Pi$ και $\Gamma \cup \{A\}$ των συνόλων των τύπων, συνήθως, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό Γ, Π και Γ, A, αντίστοιχα.

Εχοντας υπ' όψιν τον ορισμό της απαγωγικής κλεισιότητας, μπορούμε να αποδείξουμε τον εξής ισχυρισμό:

Θεώρημα 3.1. *Εστω $\mathcal{L}$ ένα λογικό σύστημα. Τότε, για καθε σύνολο Π τύπων, ισχύει*

$$Cn(\Pi) = \{B | \Pi \vdash B\}$$

Απόδειξη. Ας αποδείξουμε πρώτα ότι $Cn(\Pi) \subseteq \{B|\Pi \vdash B\}$. Αν $C \in Cn(\Pi)$, τότε ο C περιλαμβάνεται, σύμφωνα με τον ορισμό, σε όλα τα $\mathcal{L}$–κλειστά σύνολα, τα οποία περιλαμβάνουν το Π σαν υποσύνολο και, φανερά, το $\{B|\Pi \vdash B\}$ είναι ενα απο αυτά τα σύνολα. Συνεπώς έχουμε ότι $C \in \{B|\Pi \vdash B\}$. Αντίστροφα, αν $B_1, ..., B_n$ είναι μία $\mathcal{L}$—απαγωγή του $B = B_n$ από το σύνολο υποθέσεων Π, τότε, με επαγωγή στο $m (\leq n)$, συμπεραίνουμε ότι, για κάθε m $(1 \leq m \leq n)$, $B_m \in Cn(\Pi)$ και, συνεπώς, $B \in Cn(\Pi)$. $\square$

Η απαγωγική κλεισιότητα Cn είναι ειδική περίπτωση του τελεστή κλειστότητας, που ορίζεται συνήθως στα πλαίσια της γενικής τοπολογίας, και έχει τα εξής αξιόλογα χαρακτηριστικά:

(i) $\Gamma \subseteq Cn(\Gamma)$
(ii) Αν $\Gamma \subseteq \Pi$, *τότε* $Cn(\Gamma) \subseteq Cn(\Pi)$.
(iii) $Cn(Cn(\Gamma)) \subseteq Cn(\Gamma)$

για τυχόντα σύνολα τύπων Γ και Π.

Θα περιγράψουμε τώρα κάποιες από τις πιο σημαντικές έννοιες της θεωρίας των λογικών συστημάτων. Μία από αυτές είναι η *ανεξαρτησία των αξιωμάτων (independence of axioms).*

Εστω A ένα αξίωμα της λογικής $\mathcal{L}$ και έστω $\mathcal{L}^*$ η λογική την οποία λαμβάνουμε από την λογική $\mathcal{L}$ παραλείποντας τον A από το σύνολο αξιωμάτων της $\mathcal{L}$. Εαν $A \in Cn_{\mathcal{L}^*}$, δηλαδή εαν ο A είναι θεώρημα της $\mathcal{L}^*$, τότε λέμε ότι το αξίωμα A είναι *εξαρτημένο* από τα υπόλοιπα αξιώματα της $\mathcal{L}$ και ότι το σύνολο των αξιωμάτων της $\mathcal{L}$ είναι *εξαρτημένο.* Σε αντιδιαστολή λέμε ότι το σύνολο των αξιωμάτων της $\mathcal{L}$ είναι *ανεξάρτητο* και αυτό συμβαίνει όταν δεν υπάρχει κανένα αξίωμα της $\mathcal{L}$ εξαρτημένο από τα υπόλοιπα αξιώματα της $\mathcal{L}$.

Το πιο φημισμένο παράδειγμα το οποίο αναφέρεται στο πρόβλημα ανεξαρτησίας είναι η γνωστή ιστορία για το Αίτημα των Παραλλήλων του Ευκλείδη και τις μη ευκλείδειες γεωμετρίες. Μπορούμε ακόμη να αναφέρουμε την ανεξαρτησία του Αξιώματος Επιλογής και της Υπόθεσης του Συνεχούς στην θεωρία των συνόλων κτλ. Είναι ενδιαφέρον να τονίσουμε ότι *κάθε μαθηματικό πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως ένα πρόβλημα ανεξαρτησίας.*

Ας μελετήσουμε, σαν ένα απλό παράδειγμα, τον συνηθισμένο ορισμό του μετρικού χώρου. Ο *μετρικός χώρος* ορίζεται ως διατεταγμένο ζεύγος $\langle A, d\rangle$ το οποίο αποτελείται από το αυθαίρετο μή κενό σύνολο A και την συνάρτηση $d : A^2 \to \mathbf{R}$, όπου $\mathbf{R}$ είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών, η οποία ικανοποιεί τους

παρακάτω όρους:

$$(M1) \quad (\forall x \in A)(\forall y \in A) d(x,y) \geq 0$$
$$(M2) \quad (\forall x \in A)(\forall y \in A)(d(x,y) = 0 \leftrightarrow x = y)$$
$$(M3) \quad (\forall x \in A)(\forall y \in A) d(x,y) = d(y,x)$$
$$(M4) \quad (\forall x \in A)(\forall y \in A)(\forall z \in A) d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$$

Η συνάρτηση d λέγεται *μετρική* ή *απόσταση* στο A και τα $(M1)$ – $(M4)$ λέγονται *αξιώματα μετρικής*.

Ας αποδείξουμε, καιʼ αρχήν, ότι τα αξιώματα $(M1)$ και $(M3)$ είναι εξαρτημένα από τα αξιώματα $(M2)$ και $(M4)$. Οιαν $x = y$, στο $(M4)$, μέσω $(M2)$, έχουμε $0 = d(x,y) \leq d(x,z) + d(x,z) = 2d(x,z)$. Συνεπώς, έχουμε $(M1)$: $\forall x \forall z d(x,z) \geq 0$. Θέτοντας $x = z$, στο $(M4)$, και χρησιμοποιώντας το $(M2)$, έχουμε $d(x,y) \leq d(x,x) + d(y,x) = d(y,x)$. Παρόμοια: $d(y,x) \leq d(x,y)$, από όπου λαμβάνουμε $(M3)$: $\forall x \forall y d(x,y) = d(y,x)$.

Για να αποδείξουμε ότι το σύνολο των αξιωμάτων $(M2)$ και $(M4)$ είναι ανεξάρτητο, θα μελετήσουμε δύο συναρτήσεις $d_1, d_2 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ τις οποίες ορίζουμε ως εξής: $d_1(x,y) = x - y$ και $d_2 = |x-y|+1$. Η d_1 ικανοποιεί το $(M2)$, αλλά δεν ικανοποιεί το $(M4)$ ενώ, αντιθέτως, η d_2 ικανοποιεί το $(M4)$, αλλά δεν ικανοποιεί το $(M2)$.

Ετσι, για να ορισθεί η έννοια του μετρικού χώρου, αρκεί να έχουμε τα αξιώματα $(M2)$ και $(M4)$.

Ας αποδείξουμε ότι, π. χ., ο *αντιμεταθετικός νόμος (commutativity law):*

$$\forall x \forall y \;\; x * y = y * x$$

και ο *προσεταιριστικός νόμος (associativity law):*

$$\forall x \forall y \forall z \;\; (x * y) * z = x * (y * z)$$

ως αξιώματα τα οποία ορίζουν κάποιες αλγεβρικές δομές, με μία διμελή πράξη $*$, είναι ανεξάρτητα. Για να αποδείξουμε ότι από τον προσεταιρισιικό νόμο δέν προκύπιει ο αντιμεταθετικός νόμος, θα μελετήσουμε μία προσεταιριστική, αλλά όχι και αντιμεταθετική

δομή. Εστω A ένα αυθαίρετο μη κενό σύνολο γραμμάτων. Η ελεύθερη ημιομάδα των λέξεων του A, $\langle W(A), \delta, \sqcup\rangle$ είναι μία προσεταιριστική δομή, αλλά, όταν το σύνολο A περιλαμβάνει περισσότερα από ένα στοιχείο, η $\langle W(A), \delta, \sqcup\rangle$ δεν ικανοποιεί τον αντιμεταθετικό νόμο. Αντίστροφα, ο εξής συμμετρικός πίνακας

$*$	0	1	2
0	0	2	0
1	2	1	2
2	0	2	1

ορίζει μία αντιμεταθετική διμελή πράξη $*$ στο σύνολο $\{0, 1, 2\}$, αλλά μη προσεταιριστική, λόγω του εξής γεγονότος: $0 * (1 * 2) \neq (0 * 1) * 2$. Συνεπώς, ούτε ο προσεταιριστικός νόμος προκύπτει από τον αντιμεταθετικό, ούτε ο αντιμεταθετικός νόμος από τον προσεταιριστικό.

Τώρα θα μελετήσουμε ένα πιο τυπικό, αλλά επίσης μη λογικό παράδειγμα. Η έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας των διανυσμάτων του γραμμικού χώρου αντιστοιχεί στην έννοια της ανεξαρτησίας των αξιωμάτων μίας τυπικής θεωρίας. Εστω $\mathbf{V}$ γραμμικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbf{F}$ και A ένα υποσύνολο του $\mathbf{V}$. Αν δεχθούμε το A ως σύνολο αξιωμάτων με τους εξής δύο κανόνες παραγωγής

$$\frac{x}{\alpha x} \quad \text{και} \quad \frac{x \quad y}{x+y}$$

όπου $\alpha \in \mathbf{F}$ και $x, y \in \mathbf{V}$, τότε μπορούμε να ισχυριστούμε ότι: το αξίωμα $x \in A$ είναι εξαρτημένο από τα άλλα αξιώματα του A αν και μόνο αν υπάρχουν $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbf{F}$ και $x_1, ..., x_k \in A \setminus \{x\}$, έτσι ώστε $x = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_k x_k$, για κάποιο $k \geq 1$. Αυτός ο ισχυρισμός μπορεί να αποδειχθεί με επαγωγή στο πλήθος των χρήσεων των κανόνων παραγωγής στην απόδειξη του x και, για το αντίστροφο, άμεσα, παρουσιάζοντας την αντίστοιχη απαγωγή.

Παραδείγματα τα οποία αναφέρονται σε καθαρά λογικούς λογισμούς θα μελετηθούν στο επόμενο κεφάλαιο.

Μία άλλη σημαντική έννοια η οποία αναφέρεται στα λογικά συστήματα, είναι η ιδιότητα της συνέπειας. Μπορούμε να την ορίσουμε ως εξής: η λογική $\mathcal{L}$ είναι *συνεπής* ή *μη αντιφατική (consistent)* αν και μόνο αν υπάρχει ένας τύπος ο οποίος δεν είναι αποδείξιμος στην $\mathcal{L}$. Με άλλα λόγια, μία θεωρία είναι ασυνεπής αν επιτρέπει να αποδειχθεί κάθε πρόταση. Συνεπώς, στα πλαίσια μίας αντιφατικής θεωρίας είναι δυνατόν να αποδείξουμε και τον ισχυρισμό A και την άρνηση του $\neg A$.

Ενα λογικό σύστημα είναι *αποφασίσιμο (decidable)* αν και μόνο αν για κάθε τύπο A, μπορούμε να αποφασίσουμε, σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων, αν ο A είναι θεώρημα ή όχι. Αυτή ήταν μία πρόχειρη περιγραφή του ορισμού της αποφασισιμότητας. Μία ακριβής περιγραφή μπορεί να δοθεί στα πλαίσια της θεωρίας των αναδρομικών συναρτήσεων.

Τέλος, ας μελετήσουμε και το πρόβλημα της *πληρότητας (completeness)*. Συνήθως, η αρχή της θεμελίωσης μιάς αξιωματικής θεωρίας είναι κάποια ποσότητα γνώσεων παρουσιασμένη ως ένα σύνολο ισχυρισμών το οποίο αναφέρεται στο αντίστοιχο αντικείμενο. Η αξιωματικοποίηση αυτού του συνόλου ισχυρισμών μπορεί να κατανοηθεί ως συστηματοποίηση υπαρχουσών γνώσεων στην μορφή μιάς αξιωματικής θεωρίας. Η πρώτη ερώτηση που προκύπτει στο τέλος αυτής της διαδικασίας είναι η εξής: η λαμβανόμενη αξιωματική θεωρία περιγράφει *πλήρως* το αρχικό σύνολο ισχυρισμών; Η ίδια ερώτηση θα μπορούσε να τεθεί και διαφορετικά: μπορεί κάθε *αληθής* ισχυρισμός μελετημένης θεωρίας να *αποδειχθεί* στα πλαίσια της λαμβανόμενης αξιωματικής θεωρίας; Σύμφωνα με τα φημισμένα θεωρήματα μη πληρότητας του Gödel, που έχουν αποδειχθεί το 1931, δεν υπάρχει καν η ελπίδα να βρεθεί πλήρης αξιωματικοποίηση για ολόκληρο το σύστημα της αριθμητικής. Παρ' όλα αυτά, εμείς θα ασχοληθούμε με μερικά παραδείγματα πιο απλών δομών, όπως τα καθαρά λογικά συστήματα, για τα οποία είναι δυνατόν να δοθεί η αντίστοιχη πλήρης αξιωματικοποίηση.

Ο όρος ο οποίος είναι αντίστροφος της πληρότητας είναι η *ορθότητα* του αξιωματικού συστήματος. Δηλαδή, κάθε ισχυρισμός

ο οποίος μπορεί να *αποδειχθεί* στα πλαίσια του αξιωματικού συστήματος πρέπει να είναι και *αληθής*. Ο όρος της ορθότητας είναι προφανής, αλλά σημαντικός.

4. Αποδείξεις και σχέση απαγωγής

Η απόδειξη είναι η κεντρική έννοια της λογικής και το βασικό μέσο των μαθηματικών. Αυτός ο ισχυρός δεσμός μεταξύ της λογικής και των μαθηματικών ήταν επαρκής αιτία για να εδραιωθεί η μαθηματική λογική ως ειδικός κλάδος των μαθηματικών με σκοπό να ερευνά τις αποδείξεις ως μαθηματικά αντικείμενα μέσω της μαθηματικής μεθοδολογίας. Ακριβέστερα, η *θεωρία αποδείξεων (proof theory)* είναι τμήμα της μαθηματικής λογικής η οποία ασχολείται με τις αποδείξεις ως αντικείμενο των ερευνών της. Αλλοι κλάδοι της σύγχρονης μαθηματικής λογικής είναι *η θεωρία μοντέλων (model theory), η θεωρία αναδρομικών συναρτήσεων (recursion theory)* και *η θεωρία συνόλων (set theory).*

Τα πρώτα περιγράμματα της θεωρίας αποδείξεων έγιναν κατά τις αρχές του αιώνα από τον D. Hilbert με την παρουσίαση του πεπερασμένου προγράμματός του. Αν και ήταν γνωστό ότι οι κύριες ιδέες του Hilbert είναι απραγματοποίητες, λόγω των αποτελεσμάτων μη πληρότητας του Gödel, η θεωρία αποδείξεων αναπτυσσόταν μέσω διαφορετικών κλάδων, όπως η θεωρία των λογικών συστημάτων, η μεταιροπική θεωρία αποδείξεων, η γενική θεωρία αποδείξεων, η δομική θεωρία αποδείξεων κ.α.

Η τυπική απόδειξη συνήθως ορίζεται μέσω της αντίστοιχης *σχέσης απαγωγής* ή *συνέπειας (deducibility* ή *consequence relation)* όπως στην παραπάνω παράγραφο. Τώρα θα παρουσιάσουμε μια τυπική ή, μπορούμε να πούμε, μια καθαρά αλγεβρική περιγραφή της σχέσης συνέπειας.

Εστω $\mathcal{L}$ ένα λογικό σύστημα ορισμένο μέσω κάποιων αξιωμάτων και κανόνων παραγωγής, πάνω από το αντίστοιχο σύνολο τύπων. Με $\mathcal{L}(\rightarrow)$ συμβολίζουμε ένα λογικό σύστημα πάνω από τη γλώσσα του $\mathcal{L}$ η οποία επεκτείνεται με τρία νέα σύμβολα: $\top$ (για

μία νέα σταθερά), & (για μία νέα διθέσια πράξη) και → (για μία νέα διθέσια σχέση). Το σύνολο *προτύπων* του συστήματος $\mathcal{L}(\to)$ ορίζεται επαγωγικά ως το ελάχιστο σύνολο το οποίο περιλαμβάνει την σταθερά $\top$ και όλους τους τύπους του $\mathcal{L}$, και το οποίο είναι κλειστό ως προς τον κανόνα σχηματισμού: εάν A και B είναι προτύποι του $\mathcal{L}(\to)$, τότε $\&AB$ είναι προτύπος του $\mathcal{L}(\to)$. Εάν A και B είναι πρότυποι του $\mathcal{L}(\to)$, τότε $A \to B$ είναι ο *τύπος* του $\mathcal{L}(\to)$.

Υπάρχουν τρείς ομάδες *αξιωμάτων* του $\mathcal{L}(\to)$:

$$\begin{array}{rc} (i) & A \to A \\ & A \to \top \\ & \&AB \to \&BA \end{array}$$

για όλους τους προτύπους A και B.

(ii) $\top \to A$, εάν ο A είναι αξίωμα του $\mathcal{L}$.

(iii) $\&A_1\&...\&A_{k-1}\&A_k \to A$, εάν $\dfrac{A_1, ..., A_{k-1}, A_k}{A}$ είναι κανόνας παραγωγής του $\mathcal{L}$.

Οι *κανόνες παραγωγής* του $\mathcal{L}(\to)$ είναι οι εξής:

$$\frac{A \to B \quad A \to C}{A \to \&BC}\ (\to \&)$$

$$\frac{A \to B}{\&AC \to B}\ (\& \to)$$

$$\frac{A \to B \quad B \to C}{A \to C}\ (TR)$$

Αμεσα, χρησιμοποιώντας τους κανόνες παραγωγής του $\mathcal{L}(\to)$, μπορούμε να δείξουμε ότι οι δύο επόμενοι τύποι μπορούν να αποδειχθούν στα πλαίσια του συστήματος $\mathcal{L}(\to)$:

$$\&\&ABC \to \&A\&BC \quad \text{και} \quad \&A\&BC \to \&\&ABC$$

Ετσι, μπορούμε να γράψουμε $A\&B$ αντί για $\&AB$, και, επίσης, δεν χρειαζόμαστε παρενθέσεις.

Λέμε ότι ο τύπος A είναι k*–αποδείξιμος* αν και μόνο αν το μήκος της συντομότερης απόδειξης του A είναι k. Με επαγωγή στο k μπορούμε να αποδείξουμε τον εξής ισχυρισμό:

Λήμμα 4.1. *Εάν ο τύπος* $A \to B\&C$ *είναι* k*–αποδείξιμος στο* $\mathcal{L}(\to)$, *τότε* $A \to B$ *είναι* m*–αποδείξιμος στο* $\mathcal{L}(\to)$ *και* $A \to C$ *είναι* n*–αποδείξιμος στο* $\mathcal{L}(\to)$, *όπου* $\max(m,n) < k$.

Το επόμενο θεώρημα συνδέει τα συστήματα $\mathcal{L}$ και $\mathcal{L}(\to)$:

Θεώρημα 4.2. *Εστω* $A_1, ..., A_n, A$ *τυχόντες τύποι του* $\mathcal{L}$ $(n \geq 1)$. *Τότε*

$$A_1, ..., A_n \vdash_{\mathcal{L}} A \quad \textit{αν και μόνο αν} \quad \vdash_{\mathcal{L}(\to)} A_1\&...\&A_n \to A$$

και

$$\vdash_{\mathcal{L}} A \quad \textit{αν και μόνο αν} \quad \vdash_{\mathcal{L}(\to)} \top \to A$$

Απόδειξη. Η κατεύθυνση "μόνο αν". Θα κάνουμε επαγωγή στο μήκος m της παραγωγής του $A_1, ..., A_n \vdash A$ στο $\mathcal{L}$.

Η περίπτωση $m = 0$: εάν ο A είναι αξίωμα του $\mathcal{L}$, τότε, μέσω (TR), από τα αξιώματα $A_1\&...\&A_n \to \top$ και $\top \to A$ του $\mathcal{L}(\to)$, έχουμε $A_1\&...\&A_n \to A$. Εάν ο A είναι A_i, για κάποιο i $(1 \leq i \leq n)$, τότε $A_i \to A$ είναι αξίωμα του $\mathcal{L}(\to)$, από όπου, μέσω $A\&B \to B\&A$ και των κανόνων παραγωγής $(\& \to)$ και (TR), συμπεραίνουμε ότι $A_1\&...\&A_n \to A$ στο $\mathcal{L}(\to)$.

Η περίπτωση $m > 0$: εάν ο A είναι άμεση συνέπεια κάποιων τύπων $B_1, ..., B_k$, τότε $B_1\&...\&B_k \to A$ είναι αξίωμα του $\mathcal{L}(\to)$ και, μέσω επαγωγικής υπόθεσης, για κάθε i $(1 \leq i \leq k)$, ο τύπος $A_1\&...\&A_n \to B_i$ είναι αποδείξιμος στο $\mathcal{L}(\to)$, από όπου, μέσω του κανόνα $(\to \&)$ $(k-1)$–φορές, παράγουμε $A_1\&...\&A_n \to B_1\&...\&B_k$. Τελικά, μέσω (TR), παράγουμε $A_1\&...\&A_n \to A$ στο $\mathcal{L}(\to)$.

Η κατεύθυνση "αν". Θα κάνουμε επαγωγή στο μήκος m της απόδειξης του $A_1\&...\&A_n \to A$ στο $\mathcal{L}(\to)$.

Η περίπτωση $m = 0$ είναι τετριμμένη. Για $m > 0$, οι επόμενες υποπεριπτώσεις είναι πιθανές. Εάν το τελευταίο βήμα της απόδειξης έχει πραχθεί μέσω του κανόνα $(\& \to)$ από τον τύπο $A_1\&...$

$\&A_i \to A$, για κάποιο i $(1 \leq i \leq n)$, τότε, από την επαγωγική υπόθεση, έχουμε $A_1, ..., A_i \vdash_{\mathcal{L}} A$, δηλ. $A_1, ..., A_i, A_{i+1}, ..., A_n \vdash_{\mathcal{L}} A$. Εάν το τελευταίο βήμα της απόδειξης έχει πραχθεί μέσω του κανόνα (TR) από $A_1\&...\&A_n \to B_1\&...\&B_k$ και $B_1\&...\&B_k \to A$, τότε, σύμφωνα με το Λήμμα 4.1, έχουμε ότι, για κάθε i $(1 \leq i \leq k)$, ο τύπος $A_1\&...\&A_n \to B_i$ είναι αποδείξιμος στο $\mathcal{L}(\to)$, και, σύμφωνα με την υπόθεση επαγωγής συμπεραίνουμε, για κάθε i $(1 \leq i \leq k)$, $A_1, ..., A_n \vdash_{\mathcal{L}} B_i$, από όπου έχουμε $A_1, ..., A_n \vdash_{\mathcal{L}} A$.

Το δεύτερο τμήμα,

$$\vdash_{\mathcal{L}} A \quad \textit{αν και μόνο αν} \quad \vdash_{\mathcal{L}(\to)} \top \to A$$

αυτού του θεωρήματος μπορεί να δικαιολογηθεί παρόμοια. $\square$

Σύμφωνα με τον ισχυρισμό αυτό, η διμελής σχέση $\to$ του $\mathcal{L}(\to)$ είναι μία τυποποίηση της σχέσης απαγωγής $\vdash_{\mathcal{L}}$, η διμελής πράξη $\&$ είναι μεταθεωρητικό "και", ενώ η σταθερά $\top$ χαρακτηρίζει το σύνολο όλων των θεωρημάτων του $\mathcal{L}$. Αλγεβρικά, $\mathcal{L}(\to)$ είναι ένα μερικά προδιατεταγμένο σύνολο προτύπων (δηλ. η $\to$ είναι αυτοπαθής και μεταβατική σχέση), και με $\&$ και $\top$, η $\mathcal{L}(\to)$ είναι ημιδικτυωτό με μονάδα. Εάν ορίσουμε μία σχέση ισοδυναμίας $\equiv$ ως εξής: $A \equiv B$ *αν και μόνο αν* και οι δύο τύποι $A \to B$ και $B \to A$ είναι αποδείξιμοι στο $\mathcal{L}(\to)$, τότε, πραγματικά, λαμβάνουμε την ονομαζόμενη Lindenbaum–Tarski άλγεβρα του συστήματος $\mathcal{L}$ (A. Lindenbaum˙ A. Tarski).

Ενας άλλος απλός τρόπος για να περιγράψουμε ακριβώς την σχέση απαγωγής είναι να εκφράσουμε τίς βασικές ιδιότητές της μέσω ενός καθαρά συνεπαγωγικού λογισμού. Αυτός θα είναι ο λογισμός $\mathcal{H}_{\to}$ ($\mathcal{H}$ — για τον λογισμό του Heyting (A. Heyting) και $\to$ — για το συνεπαγωγικό τμήμα του). Η γλώσσα του $\mathcal{H}_{\to}$ αποτελείται από (1) ένα πεπερασμένο σύνολο προτασιακών γραμμάτων: $\{p_1, p_2, ...\}$, (2) ένα λογικό σύνδεσμο: $\to$ και (3) δύο βοηθητικά σύμβολα:) και (. Το σύνολο των τύπων είναι το ελάχιστο σύνολο το οποίο περιλαμβάνει τα προτασιακά γράμματα και είναι κλειστό ως πρός τον εξής κανόνα παραγωγής: εάν A και B είναι τύποι, τότε $(A \to B)$ είναι τύπος. Τα κεφαλαία $P, Q, R, P_1, Q_1, ...$ και $A, B, C, D, A_1, B_1, ...$ χρησιμοποιούνται ως

μεταβλητές πάνω από τα σύνολα των προτασιακών γραμμάτων και τύπων, αντίστοιχα. Επίσης υποθέτουμε ότι, όταν έχουμε περισσότερες εμφανίσεις της συνεπαγωγής, η πρώτη που εμφανίζεται από αριστερά έχει την προτεραιότητα, δηλαδή θα χρησιμοποιούμε την συντομογραφία $A \to B \to ... \to C \to D$ στην θέση του τύπου $(A \to (B \to (... \to (C \to D)...)))$.

Τα *αξιωματικά σχήματα* (ή *σχήματα αξιωμάτων*) του $\mathcal{H}_{\to}$ είναι τα εξής:

$$
\begin{array}{ll}
(A1) & A \to B \to A \\
(A2) & (A \to B \to C) \to (A \to B) \to A \to C
\end{array}
$$

και ο μοναδικός κανόνας παραγωγής είναι ο *κανόνας απόσπασης* (ή *κανόνας απόθεσης* ή *modus ponens*):

$$\frac{A \quad A \to B}{B} \quad (mp)$$

Ας σημειώσουμε ότι τα αξιωματικά σχήματα συμπεριλαμβάνουν άπειρα αξιώματα επειδή στην θέση των A, B και C μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιονδήποτε τύπο. Παρόμοια, μέσω του *κανόνα απόσπασης*, από αυθαίρετους τύπους της μορφής A και $A \to B$, μπορούμε να συμπεράνουμε τον B ως άμεση συνέπεια στο $\mathcal{H}_{\to}$.

Στην παράγραφο αυτή, το σύμβολο $\vdash$ θα συμβολίζει την σχέση απαγωγής του λογικού συστήματος $\mathcal{H}_{\to}$.

Θα μελετήσουμε τώρα κάποιες από τις βασικές ιδιότητες συνεπαγωγής αυτού του λογισμού:

Λήμμα 4.3. *Από τις υποθέσεις B και $A \to B \to C$, στο $\mathcal{H}_{\to}$, προκύπτει $A \to C$.*

Απόδειξη. Από B και

$$B \to A \to B \qquad (\text{αξίωμα } (A1))$$

μέσω του *κανόνα απόσπασης* (mp), έχουμε

$$A \to B \qquad (1)$$

Από $A \to B \to C$ και

$$(A \to B \to C) \to (A \to B) \to A \to C \qquad (\text{αξίωμα } (A2))$$

μέσω (mp), προκύπτει $(A \to B) \to A \to C$, από όπου, από (1) και (mp), έχουμε τελικά $A \to C$. $\square$

Λήμμα 4.4. *Οι εξής τύποι είναι θεωρήματα του $\mathcal{H}_{\to}$:*

$$\begin{array}{ll}
A \to A & \textit{(κανόνας ταυτότητος)} \\
(A \to A \to B) \to A \to B & \textit{(κανόνας συστολής)} \\
(A \to B \to C) \to B \to A \to C & \textit{(κανόνας μεταθέσεως)} \\
(A \to B) \to (B \to C) \to A \to C & \textit{(κανόνας μετάβασης)}
\end{array}$$

Απόδειξη. Κανόνας ταυτότητος: από

$$A \to (A \to A) \to A \quad (\text{περίπτωση του } (A1))$$

και

$$(A \to (A \to A) \to A) \to (A \to A \to A) \to A \to A$$

$$(\text{περίπτωση του } (A2))$$

μέσω (mp), προκύπτει

$$(A \to A \to A) \to A \to A$$

από όπου, από το

$$A \to A \to A \quad (\text{περίπτωση του } (A1))$$

μέσω (mp), έχουμε τελικά

$$A \to A$$