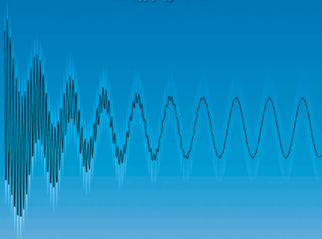


ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Σ. ΝΑΤΣΙΑΒΑΣ
Καθηγητής Α.Π.Θ.



Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα

ISBN 960-431-712-1

© Copyright: Σωτ. Νατσιάβας, Εκδόσεις Ζήτη, Μάιος 2001, Θεσσαλονίκη

Το παρόν έργο πνευματικής ιδιοκτησίας προστατεύεται κατά τις διατάξεις του Ελληνικού νόμου (Ν.2121/1993 όπως έχει τροποποιηθεί και ισχύει σήμερα) και τις διεθνείς συμβάσεις περί πνευματικής ιδιοκτησίας. Απαγορεύεται απολύτως η άνευ γραπτής άδειας του εκδότη κατά οποιοδήποτε τρόπο ή μέσο αντιγραφή, φωτοανατύπωση και εν γένει αναπαραγωγή, εκμίσθωση ή δανεισμός, μετάφραση, διασκευή, αναμετάδοση στο κοινό σε οποιαδήποτε μορφή (ηλεκτρονική, μηχανική ή άλλη) και η εν γένει εκμετάλλευση του συνόλου ή μέρους του έργου.



www.ziti.gr

**Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση**

Π. ΖΗΤΗ & ΣΙΑ ΟΕ

18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας

Τ.Θ. 171 • Νέοι Επιβάτες Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19

Τηλ.: 0392-72.222 (3 γραμ.) - Fax: 0392-72.229

e-mail: info@ziti.gr

Βιβλιοπωλείο

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη

Τηλ. (031) 203.720, Fax (031) 211.305

e-mail: sales@ziti.gr

Στην Ελλάδα που αγωνίζεται.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η περιοχή των Ταλαντώσεων μηχανικών συστημάτων αποτελεί μέρος της επιστήμης της Μηχανικής και ειδικότερα της Δυναμικής υλικών σωμάτων. Η λέξη ταλάντωση προέρχεται από τις λέξεις τάλαντο (δηλαδή ζυγαριά) και ώση και αναφέρεται στην αυξομειώση της τιμής ενός μεγέθους με την πάροδο του χρόνου. Τέτοιες αυξομειώσεις παρατηρούνται σε πολλές πρακτικές και επιστημονικές περιοχές. Μάλιστα, σε μερικές εφαρμογές εμφανίζονται φαινόμενα ταλαντώσεων σε σύνθετα συστήματα, τα οποία εκτός από μηχανικές συνιστώσες, μπορεί να περιλαμβάνουν και συνιστώσες που χαρακτηρίζονται από ηλεκτρική, μαγνητική ή χημική δράση. Η πρόβλεψη και ο μετέπειτα συστηματικός έλεγχος της συμπεριφοράς τέτοιων συστημάτων είναι δυνατό να γίνουν μόνο με την ανάπτυξη αξιόπιστων μοντέλων δυναμικής απόκρισης και την κατανόηση της επίδρασης των σημαντικών παραμέτρων στη συμπεριφορά τους.

Στα πλαίσια του παρόντος βιβλίου, η έμφαση εστιάζεται στην εξέταση της ταλαντωτικής συμπεριφοράς μηχανικών συστημάτων. Η ανάγκη μελέτης ταλαντώσεων σε μηχανικές διατάξεις γίνεται ολοένα και πιο επιτακτική για την αντιμετώπιση προβλημάτων που ανακύπτουν από τις σχεδιαστικές απαιτήσεις για πιο ελαφρές και ταχυκίνητες συνιστώσες σύγχρονων κατασκευών. Υπό τέτοιες συνθήκες σχεδίασης, ακόμη και πολύ μικρές κατασκευαστικές ατέλειες μπορεί να προκαλέσουν ανεπιθύμητα φαινόμενα, όπως η ανάπτυξη μεγάλων παραμορφώσεων και τάσεων ή η δημιουργία υψηλών επιπέδων θορύβου. Επιπλέον, ακόμη και σε μέτρια επίπεδα φόρτισης, ένας σημαντικός κίνδυνος που προκύπτει από την εμφάνιση ταλαντώσεων είναι η κόπωση των εξαρτημάτων των κατασκευών. Πέρα όμως από τις αρνητικές επιπτώσεις, υπάρχουν και εφαρμογές στις οποίες είναι επιθυμητή η δημιουργία ταλαντώσεων ορισμένης μορφής (π.χ. σε φυγοκεντρικούς διαχωριστές, σε μετρήσεις τεχνικών παραμέτρων κατασκευών και μηχανών ή σε μουσικά όργανα). Επομένως, είναι φανερή η ανάγκη μελέτης και κατανόησης του τρόπου παραγωγής και εκδήλωσης ταλαντώσεων σε υπάρχοντα, αλλά και σε υπό σχεδίαση μηχανικά συστήματα.

Σε όλες τις περιπτώσεις εξετάζονται **ταλαντώσεις μικρού εύρους** γύρω από μία θέση ισορροπίας. Επιπλέον, η συμπεριφορά των εξεταζόμενων κατασκευών διέπεται από **γραμμικούς** καταστατικούς νόμους. Οι υποθέσεις αυτές ικανοποιούνται με αρκετή ακρίβεια σε πολλές μηχανικές κατασκευές και οδηγούν στην παραγωγή μοντέλων, των οποίων η συμπεριφορά περιγράφεται με επάρκεια από γραμμικές

εξισώσεις κίνησης. Η επίλυση και η μελέτη τέτοιων μοντέλων παρέχει χρήσιμο υπόβαθρο και πολύτιμες πληροφορίες στην κατανόηση θεμελιωδών αρχών ταλάντωσης μηχανικών συστημάτων. Επίσης, με άμεση εφαρμογή των αρχών αυτών καθίσταται δυνατή τόσο η συστηματική πρόβλεψη και ο έλεγχος ταλαντώσεων, όσο και η βελτιστοποίηση των χαρακτηριστικών απόκρισης ή η αναγνώριση και η διάγνωση βλαβών ενός δυναμικού συστήματος.

Οι μηχανικοί φορείς παρουσιάζουν συνεχή κατανομή ιδιοτήτων. Όμως, σε μια μεγάλη κατηγορία στοιχείων μηχανών και κατασκευών μπορεί να θεωρηθεί ότι η μάζα, η απόσβεση και η στιβαρότητά τους είναι συγκεντρωμένη σε διακριτά σημεία τους. Η συμπεριφορά τέτοιων συστημάτων μπορεί να αναλυθεί με την χρησιμοποίηση διακριτών μοντέλων, τα οποία αντιπροσωπεύονται από συστήματα κανονικών διαφορικών εξισώσεων. Όμως, όταν απαιτείται μεγαλύτερη ακρίβεια υπολογισμών, θεωρείται ότι οι μηχανικές ιδιότητες του φορέα είναι πράγματι συνεχώς κατανεμημένες, οπότε οι εξισώσεις κίνησης εμφανίζονται στη μορφή μερικών διαφορικών εξισώσεων. Γενικά, ο αναλυτικός προσδιορισμός της δυναμικής συμπεριφοράς συνεχών φορέων είναι δυνατός μόνο για μια μικρή κατηγορία συστημάτων με απλή γεωμετρία. Σε φορείς με πολύπλοκη γεωμετρία, η δυναμική ανάλυση γίνεται με την εφαρμογή προσεγγιστικών μεθοδολογιών γεωμετρικής διακριτοποίησης (π.χ. μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων), οι οποίες οδηγούν τελικά σε παρόμοια μαθηματικά μοντέλα με εκείνα των διακριτών κατασκευών. Επιπλέον, τόσο ο προσδιορισμός των τεχνικών παραμέτρων, όσο και η επαλήθευση ή η βελτίωση των προσεγγιστικών αναλυτικών μοντέλων γίνεται συχνά με την ταυτόχρονη εφαρμογή κατάλληλων πειραματικών μεθοδολογιών.

Η διέγερση ενός συστήματος μπορεί να προέρχεται μόνον από την επιβολή αρχικής μετατόπισης και ταχύτητας (οπότε προκαλείται ελεύθερη ταλάντωσή του) ή και από εξωτερική φόρτιση (που προκαλεί εξαναγκασμένη ταλάντωση) των συνιστωσών του. Συνήθως, η επίδραση της εξωτερικής διέγερσης (π.χ. διέγερση από αζυγοσταθμία περιστρεφόμενου σώματος, διέγερση οχημάτων από ανωμαλίες του οδοστρώματος, πλοίων από θαλάσσια κύματα, αεροπορικών κατασκευών από δίνες αέρα και κτιρίων από σεισμό ή δυνατό αέρα) εμφανίζεται στις εξισώσεις κίνησης με τη μορφή μη ομογενών όρων. Ένας άλλος τύπος διέγερσης εμφανίζεται με τη μορφή χρονικά μεταβαλλόμενων συντελεστών στις εξισώσεις κίνησης. Ο τύπος αυτός της διέγερσης είναι γνωστός ως παραμετρική διέγερση και προκαλεί φαινόμενα τα οποία αναλύονται με μεθοδολογίες που είναι διαφορετικές από αυτές που παρουσιάζονται στο παρόν βιβλίο. Τέλος, ανάλογα με τις διαθέσιμες πληροφορίες, οι παράμετροι της διέγερσης και οι τεχνικές παράμετροι των μοντέλων θεωρείται ότι είναι πλήρως ή μερικά γνωστές, οπότε υιοθετούνται καθοριστικές ή στοχαστικές μεθοδολογίες, αντίστοιχα.

Γενικά, η ανάλυση της ταλαντωτικής συμπεριφοράς μηχανικών διατάξεων περιλαμβάνει τέσσερα διακριτά στάδια. Στο πρώτο στάδιο εξετάζονται τα βασικά χα-

ρακτηριστικά και οι ιδιομορφίες της διάταξης, εφαρμόζονται οι κατάλληλες απλοποιητικές παραδοχές και δημιουργείται ένα όσο το δυνατόν πιο απλό, αλλά αρκετά αξιόπιστο και ακριβές μοντέλο της διάταξης. Κατόπιν, εφαρμόζεται μια από τις μεθόδους της Μηχανικής και καταστρώνονται οι αντίστοιχες εξισώσεις κίνησης. Το τρίτο στάδιο περιλαμβάνει την επιλογή και εφαρμογή των καταλλήλων αναλυτικών, αριθμητικών ή πειραματικών μεθόδων που επιτρέπουν τον προσδιορισμό της ταλαντωτικής συμπεριφοράς του μοντέλου. Στο τελευταίο στάδιο γίνεται παραμετρική ανάλυση, ερμηνεία και αξιοποίηση των αποτελεσμάτων.

Ο κύριος σκοπός του παρόντος βιβλίου είναι η παρουσίαση των σημαντικότερων μεθοδολογιών που εφαρμόζονται για την πρόβλεψη της δυναμικής και ταλαντωτικής συμπεριφοράς μηχανικών συστημάτων με γραμμικά χαρακτηριστικά. Στο πρώτο τμήμα του βιβλίου, που περιλαμβάνει τα πρώτα πέντε κεφάλαια, παρουσιάζονται ακριβείς αναλυτικές μεθοδολογίες. Πιο συγκεκριμένα, στο πρώτο κεφάλαιο εξετάζονται ταλαντωτές ενός βαθμού ελευθερίας, ενώ στο δεύτερο κεφάλαιο αναλύεται η συμπεριφορά πολυβάθμιων διακριτών συστημάτων. Οι εξισώσεις κίνησης πολυβάθμιων συστημάτων παρουσιάζονται σε συμμετρική μητρωική μορφή και επιλύονται με τη μέθοδο ανάλυσης ιδιομορφών. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, η απόκριση γραμμικών συστημάτων προκύπτει με επαλληλία αποκρίσεων διαζευγμένων ταλαντωτών ενός βαθμού ελευθερίας. Στο τρίτο κεφάλαιο, οι μεθοδολογίες αυτές επεκτείνονται και εφαρμόζονται σε συστήματα που εμφανίζουν ασυμμετρίες στις εξισώσεις κίνησης. Τέλος, στο τέταρτο και πέμπτο κεφάλαια προσδιορίζεται η απόκριση συνεχών μονοδιάστατων και πολυδιάστατων φορέων, αντίστοιχα.

Το δεύτερο τμήμα του βιβλίου περιλαμβάνει το έκτο, έβδομο και όγδοο κεφάλαια και αναφέρεται στην παρουσίαση προσεγγιστικών μεθοδολογιών. Ειδικότερα, στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι πιο αντιπροσωπευτικές κλασικές προσεγγιστικές αναλυτικές μεθοδολογίες που αναφέρονται τόσο σε διακριτά, όσο και σε συνεχή συστήματα. Παρόμοια, στο έβδομο κεφάλαιο παρουσιάζονται ξεχωριστά τα σημαντικότερα βήματα της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων, με άμεση αναφορά και εφαρμογή της στην περιοχή της Δυναμικής των Κατασκευών. Στο όγδοο κεφάλαιο παρουσιάζεται η μέθοδος σύνθεσης κατασκευαστικών συνιστωσών, με εφαρμογή της οποίας είναι δυνατή η δραστική μείωση των βαθμών ελευθερίας σε πολυβάθμια συστήματα με συστηματικό τρόπο και χωρίς την απώλεια σημαντικής υπολογιστικής ακρίβειας.

Το τρίτο μέρος του βιβλίου περιλαμβάνει το ένατο και το δέκατο κεφάλαιο και η έμφαση εστιάζεται σε μετρητικές και πειραματικές μεθόδους και διαδικασίες. Πιο συγκεκριμένα, στο ένατο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι θεμελιώδεις έννοιες που είναι απαραίτητες για τη στοχαστική ανάλυση ταλαντώσεων. Παρόμοια, στο δέκατο κεφάλαιο παρουσιάζεται το θεωρητικό υπόβαθρο στο οποίο στηρίζονται οι βασικότερες μεθοδολογίες που εφαρμόζονται για τον προσδιορισμό παραμέτρων δυναμικών συστημάτων μέσω ταλαντωτικών μετρήσεων.

Το τελευταίο τμήμα του βιβλίου αποτελείται από τρία παραρτήματα. Το πρώτο από αυτά αναφέρεται σε ορισμούς μετασχηματισμού Fourier και σε θεμελιώδεις έννοιες ανάλυσης δυναμικών σημάτων, το δεύτερο πραγματεύεται ιδιοπροβλήματα τύπου Sturm-Liouville, ενώ στο τρίτο παράρτημα παρουσιάζονται συνοπτικά μερικά χρήσιμα στοιχεία Στατιστικής που είναι χρήσιμα στη στοχαστική ανάλυση ταλαντώσεων.

Σε όλα τα κεφάλαια, παρουσιάζεται αρχικά το απαραίτητο θεωρητικό υπόβαθρο. Η κατανόηση του γνωστικού αντικειμένου των Μηχανικών Ταλαντώσεων απαιτεί καλή γνώση και ευχέρεια στην εφαρμογή των βασικών αρχών της Μηχανικής, καθώς και της θεωρίας των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων και της γραμμικής άλγεβρας. Η παρουσίαση γίνεται με γενικό τρόπο, χωρίς να γίνεται αναφορά σε συγκεκριμένη μηχανική διάταξη. Με τον τρόπο αυτό δίνεται έμφαση και φυσική ερμηνεία στις βασικές έννοιες, οι οποίες εμπεδώνονται στη συνέχεια με επιλεγμένα παραδείγματα. Ταυτόχρονα γίνεται και η παρουσίαση των κυριοτέρων δυναμικών φαινομένων που παρατηρούνται σε συστήματα με γραμμικά χαρακτηριστικά. Στο τέλος κάθε κεφαλαίου παρουσιάζεται μια σειρά από άλυτες ασκήσεις και προβλήματα, με σκοπό την εξάσκηση του αναγνώστη, αλλά και την παρουσίαση ειδικών θεμάτων με ιδιαίτερη πρακτική χρησιμότητα.

Στο σημείο αυτό θέλω να ευχαριστήσω το προσωπικό των εκδόσεων Ζήτη που συνεργάστηκε και βοήθησε στη βέλτιστη εμφάνιση του παρόντος συγγράμματος.

Σωτήρης Νατσιάβας

Θεσσαλονίκη,
Απρίλιος 2001

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1 Ταλάντωση Δυναμικών Συστημάτων με ένα Βαθμό Ελευθερίας

1.1 Μηχανικό μοντέλο – Εξίσωση κίνησης	1
1.2 Ελεύθερη ταλάντωση	9
1.3 Εξαναγκασμένη ταλάντωση	22
1.4 Απόκριση σε αρμονική διέγερση	29
1.5 Απόκριση σε σύνθετη διέγερση	45
1.6 Απόκριση σε περιοδική διέγερση	47
1.7 Εφαρμογές	55
1.7.1 Επιλογή χαρακτηριστικών θεμελίωσης μηχανής	55
1.7.2 Αρχές λειτουργίας οργάνων μέτρησης ταλαντωτικών μεγεθών	58
1.7.3 Συστήματα με εσωτερική απόσβεση	62
1.8 Ασκήσεις	65

2 Ταλάντωση Διακριτών Συστημάτων με πολλούς Βαθμούς Ελευθερίας

2.1 Κατάστρωση εξισώσεων κίνησης	73
2.2 Συστήματα χωρίς απόσβεση – Ανάλυση ιδιομορφών	81
2.2.1 Κατάστρωση και επίλυση ιδιοπροβλήματος	82
2.2.2 Συνθήκες ορθογωνικότητας	84
2.2.3 Προσδιορισμός απόκρισης	86
2.3 Συστήματα με απόσβεση	102
2.3.1 Κλασική απόσβεση - Μέθοδος Caughey	103

2.3.2 Μέθοδος Duncan	105
2.4 Πολυβάθμια συστήματα υπό αρμονική διέγερση	116
2.5 Ασκήσεις	125

3 Διακριτά Συστήματα με Ασύμμετρα Μητρώα

3.1 Εξισώσεις κίνησης	135
3.2 Συστήματα χωρίς απόσβεση και γυροσκοπικούς όρους	152
3.2.1 Κατάστροψη του ιδιοπροβλήματος	152
3.2.2 Ιδιότητες διορθωγωνικότητας	153
3.2.3 Προσδιορισμός απόκρισης	154
3.3 Γραμμικά συστήματα με γενική μορφή	155
3.4 Ασκήσεις	169

4 Ταλαντώσεις Μονοδιάστατων Συνεχών Φορέων

4.1 Εισαγωγή	175
4.2 Ταλαντώσεις χορδής	176
4.3 Αξονικές ταλαντώσεις ράβδου	189
4.3.1 Εξίσωση κίνησης	189
4.3.2 Αρχικές και συνοριακές συνθήκες	191
4.3.3 Χωρισμός μεταβλητών - Ιδιοπρόβλημα	192
4.3.4 Συνθήκες ορθογωνικότητας ιδιομορφών	194
4.3.6 Μέθοδος ανάλυσης ιδιομορφών	195
4.3.7 Προσδιορισμός ιδιομορφών ράβδου με σταθερές ιδιότητες	197
4.4 Στρεπτικές ταλαντώσεις ατράκτου	214
4.5 Καμπτικές ταλαντώσεις δοκού	231
4.5.1 Υποθέσεις και εξίσωση κίνησης	231
4.5.2 Αρχικές και συνοριακές συνθήκες	238
4.5.3 Χωρισμός μεταβλητών - Ιδιοπρόβλημα	239
4.5.4 Ορθογωνικότητα ιδιομορφών	240

4.5.5 Θεώρημα ανάπτυξης ιδιομορφών	241
4.5.6 Προσδιορισμός ιδιομορφών δοκού με σταθερές ιδιότητες	242
4.6 Ταλαντώσεις δοκού Timoshenko	253
4.7 Ασκήσεις	259

5 Ταλαντώσεις Πολυδιάστατων Συνεχών Φορέων

5.1 Ταλαντώσεις μεμβράνης	267
5.1.1 Ορισμοί - Εξίσωση κίνησης	267
5.1.2 Χωρισμός μεταβλητών - Ιδιοπρόβλημα	268
5.2 Ταλαντώσεις πλάκας	280
5.2.1 Ορισμοί - Εξίσωση κίνησης	280
5.2.2 Χωρισμός μεταβλητών - Ιδιοπρόβλημα	286
5.3 Γενική θεμελίωση	294
5.3.1 Ορισμοί - Εξισώσεις κίνησης	294
5.3.2 Ιδιοπρόβλημα - Ορθογωνικότητα ιδιομορφών	296
5.3.3 Θεώρημα ανάπτυξης ιδιομορφών - Απόκριση	298
5.4 Επίδραση απόσβεσης	301
5.5 Ασκήσεις	307

6 Προσεγγιστικές Μέθοδοι Ανάλυσης

6.1 Προσεγγιστικές μέθοδοι σε διακριτά συστήματα	313
6.1.1 Μέθοδος Rayleigh	313
6.1.2 Μέθοδος Rayleigh-Ritz	317
6.2 Αντιστοιχία διακριτού και συνεχούς μοντέλου κατασκευής	320
6.3 Προσεγγιστικές μέθοδοι σε συνεχή συστήματα	323
6.3.1 Μέθοδος Rayleigh	323
6.3.2 Μέθοδος Rayleigh-Ritz	328
6.3.3 Μέθοδος Galerkin	332
6.3.4 Μέθοδος συντοπισμού	334

6.3.5 Μέθοδος Lagrange	336
6.4 Ασκήσεις	339

7 Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων

7.1 Εισαγωγή	343
7.2 Εξισώσεις κίνησης πεπερασμένων στοιχείων	344
7.2.1 Αξονικό πεπερασμένο στοιχείο	344
7.2.2 Στρεπτικό πεπερασμένο στοιχείο	348
7.2.3 Καμπτικό πεπερασμένο στοιχείο	348
7.2.4 Άλλα πεπερασμένα στοιχεία	352
7.3 Μετασχηματισμός συντεταγμένων	354
7.4 Κατάσρωση ολικών μητρώων	359
7.5 Επιβολή συνοριακών συνθηκών	369
7.6 Συνεπές και διακριτό μητρώο μάζας	375
7.7 Επιβολή γραμμικών περιορισμών	378
7.7.1 Επιβολή κινηματικών περιορισμών	378
7.7.2 Στατική συμπίκνωση μητρώων	380
7.7.3 Απαλοιφή ιδιομορφών στερεού σώματος	383
7.8 Επίλογος	386
7.9 Ασκήσεις	388

8 Σύνθεση Κατασκευαστικών Συνιστωσών

8.1 Φιλοσοφία της μεθόδου - Ορισμοί	395
8.2 Επιτάχυνση της σύγκλισης ιδιομορφών	397
8.3 Κατηγορίες διανυσμάτων μορφής	406
8.3.1 Ιδιομορφές της συνιστώσας	406
8.3.2 Ιδιομορφές στερεού σώματος	407
8.3.3 Διανύσματα μοναδιαίας μετατόπισης	407
8.3.4 Διανύσματα μοναδιαίας δύναμης	408

8.3.5 Διανύσματα παραμόρφωσης με αδρανειακή ανακούφιση	409
8.4 Εξισώσεις κίνησης κατασκευαστικών συνιστωσών	415
8.5 Εξισώσεις κίνησης σύνθετης κατασκευής	419
8.6 Ασκήσεις	424

9 Στοχαστική Ανάλυση Ταλαντώσεων

9.1 Στοχαστικές διαδικασίες	429
9.1.1 Ορισμοί	430
9.1.2 Στάσιμες στοχαστικές διαδικασίες	433
9.1.3 Στοιχεία μαθηματικού λογισμού στοχαστικών διαδικασιών	438
9.1.4 Ορισμοί στο πεδίο του χρόνου - Εργοδικές διαδικασίες	447
9.1.5 Τυπικές στοχαστικές διαδικασίες	454
9.2 Απόκριση συστήματος σε στοχαστική διέγερση	456
9.2.1 Ανάλυση στο πεδίο του χρόνου	456
9.2.2 Ανάλυση στο πεδίο συχνотήτων	462
9.3 Στοχαστική πρόβλεψη αστοχίας - Αξιοπιστία συστήματος	474
9.3.1 Συχνότητα υπέρβασης δεδομένης στάθμης απόκρισης	474
9.3.2 Συχνότητα εμφάνισης κορυφών της απόκρισης	477
9.4 Ασκήσεις	481

10 Πειραματικός Προσδιορισμός Παραμέτρων

10.1 Συνάρτηση μετάδοσης ταλαντωτικού συστήματος	494
10.1.1 Συνάρτηση μετάδοσης μονοβάθμιου ταλαντωτή	494
10.1.2 Συνάρτηση μετάδοσης ταλαντωτή με εσωτερική απόσβεση	501
10.1.3 Πίνακας μετάδοσης πολυβάθμιου συστήματος	504
10.2 Πειραματικός προσδιορισμός συναρτήσεων μετάδοσης	512
10.3 Προσδιορισμός παραμέτρων ταλάντωσης	514
10.3.1 Μέθοδος των μεγίστων ευρών	515
10.3.2 Μέθοδος προσαρμογής με κύκλο	515

10.3.3 Μέθοδος του μιγαδικού εκθέτη	520
10.4 Παραμετρική μορφική αναγνώριση	524
10.5 Ασκήσεις	531

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

A Μετασχηματισμός Fourier - Ανάλυση Σήματος

A.1 Ορισμοί	541
A.2 Ιδιότητες	549
A.3 Διακριτός και ταχύς μετασχηματισμός Fourier	554
A.4 Ασκήσεις	558

B Πρόβλημα Sturm-Liouville

B.1 Ορισμοί και ιδιότητες	567
B.2 Μέθοδος ανάπτυξης ιδιομορφών	571
B.3 Ασκήσεις	573

Γ Στοιχεία Στατιστικής Ταλαντώσεων

Γ.1 Τυχαίο γεγονός	577
Γ.2 Τυχαία μεταβλητή	578
Γ.3 Ορισμοί για πλήθος τυχαίων μεταβλητών	584
Γ.4 Αθροίσματα τυχαίων μεταβλητών - Κεντρικό οριακό θεώρημα	594
Γ.5 Ασκήσεις	596

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	599
--------------------	-----

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Ταλάντωση Δυναμικών Συστημάτων με ένα Βαθμό Ελευθερίας

Στο παρόν κεφάλαιο εξετάζεται η δυναμική και ταλαντωτική συμπεριφορά μηχανικών συστημάτων, των οποίων η κίνηση περιγράφεται με ένα βαθμό ελευθερίας. Αρχικά παρουσιάζεται το δυναμικό μοντέλο των συστημάτων αυτών και η αντίστοιχη εξίσωση κίνησης. Στη συνέχεια ορίζονται οι σημαντικές τεχνικές παράμετροι και αναλύεται η ελεύθερη ταλάντωση, καθώς και η απόκριση σε γενική εξωτερική διέγερση. Κατόπιν, δίνεται έμφαση στην εξέταση των ειδικών αλλά χρήσιμων περιπτώσεων σταθερής, κρουστικής, αρμονικής και περιοδικής διέγερσης. Επιπλέον, εξετάζονται και αναλύονται μερικές βασικές αρχές σε θεμελιώδεις έννοιες των ταλαντώσεων μηχανικών συστημάτων, όπως αυτές που αναφέρονται στην επιλογή ισοδυνάμων μαζών, ελατηρίων και αποσβεστήρων, τον πειραματικό προσδιορισμό παραμέτρων, την απόκριση οχημάτων και διατάξεων σε διέγερση εδάφους και περιστρεφόμενης αζυγοσταθμίας, καθώς και την επιλογή των χαρακτηριστικών οργάνων μέτρησης και θεμελιώσεων μηχανών. Η επίλυση της εξίσωσης κίνησης του ταλαντωτή ενός βαθμού ελευθερίας αποτελεί το θεμέλιο της θεωρίας των ταλαντώσεων γραμμικών συστημάτων. Όπως θα γίνει φανερό σε επόμενα κεφάλαια, τόσο η επίλυση διακριτών συστημάτων με πολλούς βαθμούς ελευθερίας, όσο και ο προσδιορισμός της δυναμικής απόκρισης συνεχών φορέων ανάγονται τελικά στην επίλυση του ίδιου μαθηματικού προβλήματος.

1.1 ΜΗΧΑΝΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ - ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΙΝΗΣΗΣ

Η ταλαντωτική συμπεριφορά πολλών μηχανικών συστημάτων μπορεί να περιγραφεί με αρκετή ακρίβεια από το μοντέλο ενός βαθμού ελευθερίας που παρουσιάζεται στο σχήμα 1.1.1. Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό, όλη η μάζα του συστήματος θεωρείται ότι είναι συγκεντρωμένη στο στοιχείο μάζας m , το οποίο είναι απολύτως στερεό. Επίσης, η ελαστικότητα του συστήματος αντιπροσωπεύεται από ελατήριο

με αμελητέα μάζα. Στη γενική περίπτωση, το ελατήριο αυτό εξασκεί μία δύναμη στη μάζα, η οποία είναι μη γραμμική συνάρτηση της παραμόρφωσης x του ελατηρίου, έστω $f_s(x)$. Όμως, με βάση την υπόθεση για ταλάντωση μικρού εύρους, η δύναμη αυτή μπορεί να αναπτυχθεί στη σειρά Taylor (υπό ποιες προϋποθέσεις;)

$$f_s(x) = f_s(0) + f'_s(0)x + O(x^2) \Rightarrow f_s(x) \approx kx,$$

αφού $f_s(0) = 0$. Έτσι, με παράλειψη των όρων ανώτερης τάξης προκύπτει ότι η δύναμη ελατηρίου είναι ανάλογη της μετατόπισης x , με σταθερό συντελεστή αναλογίας

$$k = f'_s(0),$$

ο οποίος ονομάζεται **συντελεστής στιβαρότητας** του ελατηρίου. Το τρίτο εξιδανικευμένο στοιχείο του μοντέλου, ο αποσβεστήρας, αντιπροσωπεύει τις δυνάμεις απόσβεσης, οι οποίες εμφανίζονται κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης. Συνήθως, τέτοιες δυνάμεις συνδέονται με μηχανισμούς ιξώδους απόσβεσης, αεροδυναμικής αντίστασης, ξηρής τριβής και εσωτερικής τριβής της διάταξης και είναι μη γραμμικές συναρτήσεις της μετατόπισης x και της ταχύτητας \dot{x} του στοιχείου μάζας. Όμως, με βάση την υπόθεση για μικρά εύρη ταλάντωσης, η δύναμη αυτή μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι γραμμική συνάρτηση της ταχύτητας (όπως επαληθεύεται και από πειραματικά αποτελέσματα), δηλαδή είναι ίση με $c\dot{x}$, όπου η σταθερά c ονομάζεται **συντελεστής απόσβεσης** της διάταξης.

Το εξεταζόμενο μηχανικό μοντέλο μπορεί να τεθεί σε κίνηση με την επιβολή κάποιας αρχικής μετατόπισης ή ταχύτητας, καθώς επίσης και με την εφαρμογή κάποιας εξωτερικής διέγερσης με ιστορία $f(t)$. Η εξωτερική διέγερση μπορεί να προέρχεται από διάφορες αιτίες, όπως για παράδειγμα από αζυγοσταθμίες σε συστήματα με περιστρεφόμενα μέλη, από δίνες αέρα σε αεροπορικές κατασκευές, από κύματα σε θαλάσσιες κατασκευές και από σεισμό ή δυνατό αέρα σε κτίρια.

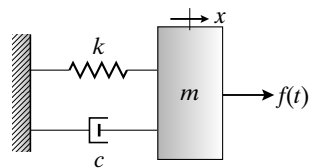
Για τον προσδιορισμό της κίνησης του μοντέλου, πρέπει πρώτα να καταστρωθεί η εξίσωση της κίνησής του. Έτσι, με βάση το διάγραμμα ελευθέρου σώματος που παρουσιάζεται στο σχήμα 1.1.2 και την εφαρμογή του δεύτερου νόμου κίνησης του Νεύτωνα για τη μάζα m προκύπτει ότι

$$\Sigma F_x = f(t) - kx - c\dot{x} = m\ddot{x},$$

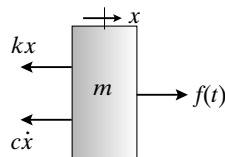
ή τελικά

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t). \quad (1.1.1)$$

Σε μαθηματική ορολογία, η παραπάνω σχέση είναι μια κανονική διαφορική εξί-



Σχήμα 1.1.1



Σχήμα 1.1.2

σωση δεύτερης τάξης ως προς το χρόνο t . Επομένως, για να είναι δυνατή η εύρεση της γενικής λύσης της, είναι απαραίτητο να καθορισθούν και οι αρχικές συνθήκες

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0, \quad (1.1.2)$$

οι οποίες συμπληρώνουν την κατάστρωση του αντίστοιχου μαθηματικού προβλήματος. Επειδή η εξίσωση κίνησης (1.1.1) είναι γραμμική και έχει σταθερούς συντελεστές, η ακριβής διαδικασία επίλυσής της είναι γνωστή και παρουσιάζεται στις επόμενες ενότητες.

- **Παράτηρηση 1.1.1:** Από ενεργειακής απόψεως, το στοιχείο μάζας του εξεταζόμενου μοντέλου αντιπροσωπεύει το μέσο αποθήκευσης της κινητικής του ενέργειας, ενώ το ελατήριο αποθηκεύει (ή αποδίδει) τη δυναμική ενέργεια του συστήματος. Έτσι, στην περίπτωση ελεύθερης ταλάντωσης χωρίς απόσβεση, πολλαπλασιασμός με \dot{x} και ολοκλήρωση της αντίστοιχης εξίσωσης κίνησης

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

οδηγεί στη σχέση

$$T + V = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} k x_0^2, \quad (1.1.3)$$

όπου οι ποσότητες

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad \text{και} \quad V = \frac{1}{2} k x^2$$

αντιπροσωπεύουν την κινητική και τη δυναμική ενέργεια του συστήματος, αντίστοιχα. Η σχέση (1.1.3) εκφράζει τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας του συστήματος, όπως αναμένεται για την εξεταζόμενη περίπτωση. Τέλος, ο αποσβεστήρας αντιπροσωπεύει τους μηχανισμούς σκέδασης της ενέργειας, που ενεργοποιούνται κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης.

- **Παράτηρηση 1.1.2:** Αν το εξεταζόμενο σύστημα βρίσκεται υπό την επίδραση του πεδίου βαρύτητας στην κατεύθυνση του άξονα κίνησης, τότε η εξίσωση κίνησης (1.1.1) αντικαθίσταται από την

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) + mg. \quad (1.1.4)$$

Σε τέτοια περίπτωση θεωρείται ως συντεταγμένη κίνησης η μετατόπιση u από τη θέση στατικής ισορροπίας της μάζας, οπότε

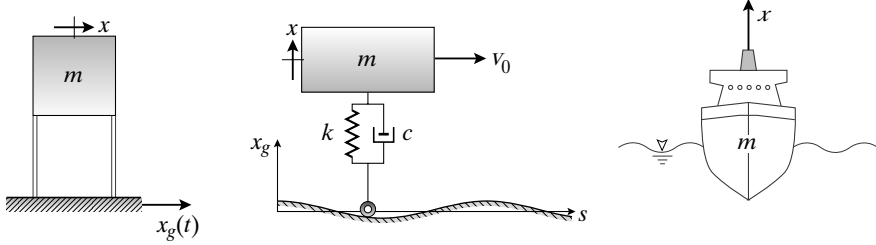
$$x = x_{st} + u \quad \text{με} \quad x_{st} = mg/k.$$

Επομένως, με αντικατάσταση στην (1.1.4) προκύπτει ότι

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f(t),$$

η οποία είναι πανομοιότυπη με την (1.1.1).

- **Παρατήρηση 1.1.3:** Η εξωτερική φόρτιση μπορεί να προέρχεται και από μετατόπιση $x_g(t)$ της βάσης του ταλαντωτή (π.χ. σεισμική διέγερση κατασκευών, διέγερση οδού οχημάτων, διέγερση πλοίου από κύματα), όπως δείχνει το σχήμα 1.1.3.



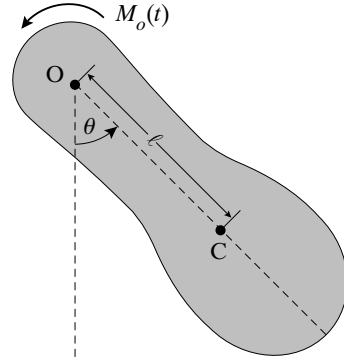
Σχήμα 1.1.3

Στην περίπτωση αυτή, η εξίσωση κίνησης (1.1.1) αντικαθίσταται από την

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{x}_g + kx_g,$$

η οποία έχει παρόμοια μορφή με την (1.1.1). Από πού προέρχεται ο όρος ελατηρίου στην τελευταία περίπτωση;

- **Παρατήρηση 1.1.4:** Η συντεταγμένη κίνησης μπορεί να αντιπροσωπεύει και γωνιακή μετατόπιση. Για παράδειγμα, το σχήμα 1.1.4 παριστάνει εκκρεμή μηχανική διάταξη με μάζα m και μαζική ροπή αδράνειας I_o ως προς τον άξονα περιστροφής της, στον οποίο εξασκείται γνωστή εξωτερική ροπή $M_o(t)$. Εφαρμογή του αντίστοιχου νόμου κίνησης στην προκειμένη περίπτωση οδηγεί αρχικά στην εξίσωση



Σχήμα 1.1.4

$$\Sigma M_o = I_o \ddot{\theta} \Rightarrow I_o \ddot{\theta} = -mg\ell \sin\theta + M_o(t),$$

η οποία μετά από τακτοποίηση όρων και γραμμικοποίηση παίρνει τη μορφή

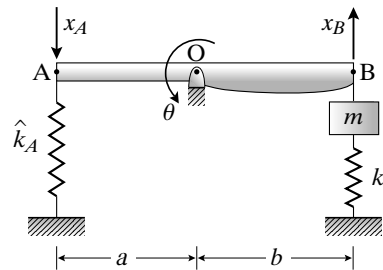
$$I_o \ddot{\theta} + mg\ell \theta = M_o(t).$$

Η τελευταία εξίσωση είναι παρόμοια με την εξίσωση κίνησης (1.1.1) και οι σταθεροί συντελεστές έχουν αντίστοιχη φυσική σημασία (ποιος είναι ο ρόλος της βαρύτητας στο εξεταζόμενο σύστημα;), ενώ η εξωτερική διέγερση είναι ροπή αντί για δύναμη.

► **Παρατήρηση 1.1.5:** Η διαφορική εξίσωση κίνησης (1.1.1) με τις αρχικές συνθήκες (1.1.2) εμφανίζονται κατά τη μελέτη και άλλων φυσικών φαινομένων, τα οποία περιγράφονται από γραμμικά μοντέλα. Κλασικό παράδειγμα είναι η ροή ρεύματος σε ηλεκτρικό κύκλωμα υπό την επίδραση γνωστού δυναμικού. Στην περίπτωση αυτή οι σταθερές m , c και k αντιπροσωπεύουν την επαγωγή, αντίσταση και χωρητικότητα του κυκλώματος, αντίστοιχα.

Παράδειγμα 1.1.1: Δυναμικό Μοντέλο Ελατηρίων Βαλβίδας ΜΕΚ

Το σχήμα 1.1.5 δείχνει ένα απλοποιημένο μοντέλο που χρησιμοποιείται για την περιγραφή της ταλαντωτικής συμπεριφοράς των ελατηρίων της βαλβίδας μιας μηχανής εσωτερικής καύσης. Να καταστρωθεί η εξίσωση κίνησης ως προς την κατακόρυφη μετατόπιση x_A του σημείου Α. Το στερεό τμήμα ΑΟΒ έχει μαζική ροπή αδράνειας I_O ως προς τον άξονα περιστροφής του.



Σχήμα 1.1.5

Λύση:

Το εξεταζόμενο σύστημα έχει ένα βαθμό ελευθερίας. Επιπλέον, για ταλαντώσεις μικρού εύρους ισχύουν οι κινηματικές συνθήκες

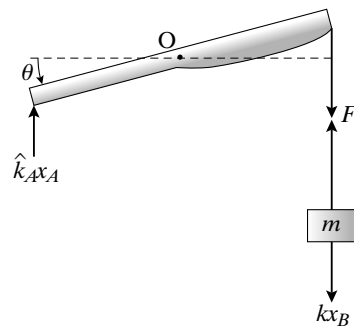
$$x_A = a\theta \text{ και } x_B = b\theta. \quad (1)$$

Με βάση τα αντίστοιχα διαγράμματα ελευθέρου σώματος του σχήματος 1.1.6 (γιατί δεν συμπεριλήφθηκαν οι δυνάμεις που αναπτύσσονται στην άρθρωση Ο και η οριζόντια συνιστώσα της δύναμης στην άρθρωση Β;) προκύπτει η εξίσωση κίνησης

$$\Sigma F_x = F - kx_B = m\ddot{x}_B \quad (2)$$

για τη μάζα m και η

$$\Sigma M_O = -(\hat{k}_A x_A)a - Fb = I_O \ddot{\theta} \quad (3)$$



Σχήμα 1.1.6

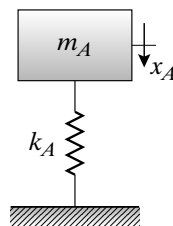
για το στερεό σώμα ΑΟΒ. Επομένως, με συνδυασμό των εξισώσεων (2) και (3) με τις σχέσεις (1) προκύπτει τελικά η εξίσωση κίνησης της εξεταζόμενης διάταξης ως προς τη μετατόπιση x_A στη μορφή

$$m_A \ddot{x}_A + k_A x_A = 0, \quad (4)$$

με

$$m_A = \left(\frac{b}{a}\right)^2 m + \frac{1}{a^2} I_o \quad \text{και} \quad k_A = \left(\frac{b}{a}\right)^2 k + \hat{k}_A. \quad (5)$$

- **Σημείωση:** Η παραπάνω εξίσωση κίνησης μπορεί να κατασρωθεί ευκολότερα με μια εναλλακτική μεθοδολογία, η οποία βασίζεται σε ενεργειακές θεωρήσεις. Αρχικά, το σύστημα που εικονίζεται στο σχήμα 1.1.5 αντικαθίσταται από το **ισοδύναμο** μηχανικό μοντέλο του σχήματος 1.1.7. Η σταθερά στιβαρότητας k_A υπολογίζεται με εξίσωση της **δυναμικής** ενέργειας του αρχικού και του ισοδύναμου μοντέλου, δηλαδή από τις σχέσεις



Σχήμα 1.1.7

$$V = \frac{1}{2} \hat{k}_A x_A^2 + \frac{1}{2} k x_B^2 = \frac{1}{2} k_A x_A^2.$$

Έτσι, με εφαρμογή των κινηματικών συνθηκών (1) προκύπτει η ισοδύναμη σταθερά στιβαρότητας

$$k_A = \hat{k}_A + \left(\frac{b}{a}\right)^2 k. \quad (6)$$

Παρόμοια, με εξίσωση της **κινητικής** ενέργειας του αρχικού και του ισοδύναμου μοντέλου προκύπτει ότι

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_B^2 + \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m_A \dot{x}_A^2,$$

οπότε η ισοδύναμη μάζα του συστήματος είναι

$$m_A = m \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{1}{a^2} I_o. \quad (7)$$

Προφανώς, η εξίσωση κίνησης του ισοδύναμου μοντέλου, με χρησιμοποίηση των σχέσεων (6) και (7), είναι ταυτόσημη με την (4). Ποια μορφή έχει η εξίσωση κίνησης αν χρησιμοποιηθεί ως συντεταγμένη η θ ή η x_B ;

Παράδειγμα 1.1.2: *Ισοδύναμο Δυναμικό Μοντέλο Κατασκευής*

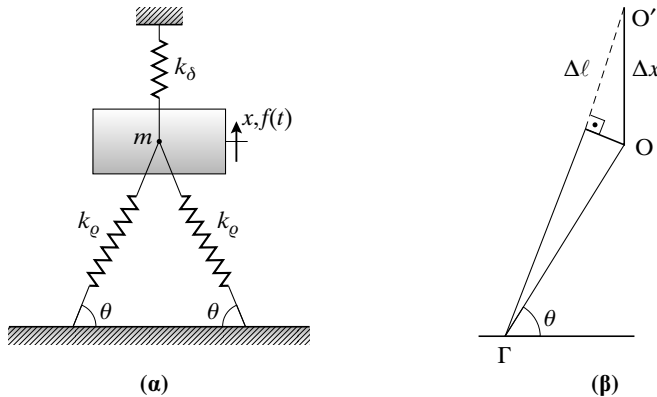
Στερεό σώμα με μάζα m στερεώνεται στο μέσο αμφιέρειστης δοκού AB , η οποία υποστηρίζεται από τις ράβδους ΓO και ΔO , όπως δείχνει το σχήμα 1.1.8. Αν η

μάζα m διεγείρεται με γνωστή δύναμη $f(t)$ στην κατακόρυφη διεύθυνση, να καταστρωθεί η αντίστοιχη εξίσωση κίνησης. Να θεωρηθούν γνωστές οι ελαστικές και γεωμετρικές ιδιότητες της δοκού και των ράβδων και να αμεληθούν οι μάζες τους.

Λύση:

Το σύστημα που εικονίζεται στο σχήμα 1.1.8 αντιπροσωπεύεται αρχικά από το μηχανικό μοντέλο του σχήματος 1.1.9α. Οι σταθερές ελατηρίων του μοντέλου αυτού υπολογίζονται με βάση γνωστά αποτελέσματα της Αντοχής Υλικών. Δηλαδή, αν η ράβδος έχει μέτρο ελαστικότητας E_ρ , μήκος ℓ_ρ και διατομή εμβαδού A_ρ , ενώ η δοκός έχει μέτρο ελαστικότητας E_δ , μήκος ℓ_δ και διατομή με επιφανειακή ροπή αδράνειας I_δ , τότε

$$k_\rho = \frac{E_\rho A_\rho}{\ell_\rho} \quad \text{και} \quad k_\delta = 48 \frac{E_\delta I_\delta}{\ell_\delta^3}.$$



Σχήμα 1.1.9

Ο προσδιορισμός της συνεισφοράς της στιβαρότητας των ράβδων στην ολική στιβαρότητα στην εξεταζόμενη διεύθυνση κίνησης της μάζας m , γίνεται με βάση το σχήμα 1.1.9β. Από το σχήμα αυτό φαίνεται ότι μια (μικρή) κατακόρυφη μετατόπιση $OO' = \Delta x$ του άκρου O του ελατηρίου ΓO , προκαλεί αλλαγή του μήκους του κατά

$$\Delta \ell \approx \Delta x \sin \theta,$$

η οποία με τη σειρά της οδηγεί σε ανάπτυξη αξονικής δύναμης στη ράβδο με μέτρο

$$F_\rho = k_\rho \Delta \ell.$$

Η προβολή της δύναμης αυτής στη διεύθυνση x είναι ίση με $F_\theta \sin \theta$. Επομένως, από τα παραπάνω φαίνεται ότι η αντίσταση του ελατηρίου ΓΟ στη μετατόπιση Δx είναι ίση με

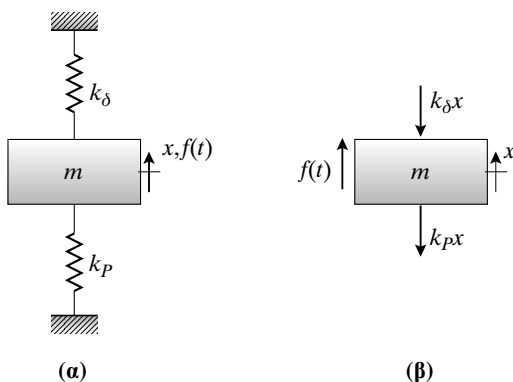
$$(k_\theta \sin^2 \theta) \Delta x$$

(τί γίνεται όταν $\theta = 0$ ή $\theta = 90^\circ$;). Άρα, το μοντέλο του σχήματος 1.1.9α αντικαθίσταται από το ισοδύναμο σύστημα του σχήματος 1.1.10α, με

$$k_P = 2k_\theta \sin^2 \theta.$$

Τέλος, από το διάγραμμα ελεύθερου σώματος 1.1.10β προκύπτει ότι η εξίσωση κίνησης της μάζας m στην κατακόρυφη διεύθυνση x είναι

$$\Sigma F_x = m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + (k_\delta + 2k_\theta \sin^2 \theta)x = f(t).$$



Σχήμα 1.1.10

- **Σημείωση 1η:** Η δυναμική ενέργεια που αποθηκεύεται στο ελατήριο που αντιπροσωπεύει τη ράβδο ΓΟ ή ΔΟ κατά μια απειροστή κατακόρυφη μετατόπιση Δx ισούται με

$$V = \frac{1}{2} k_\theta (\Delta \ell)^2 = \frac{1}{2} k_\theta \sin^2 \theta (\Delta x)^2.$$

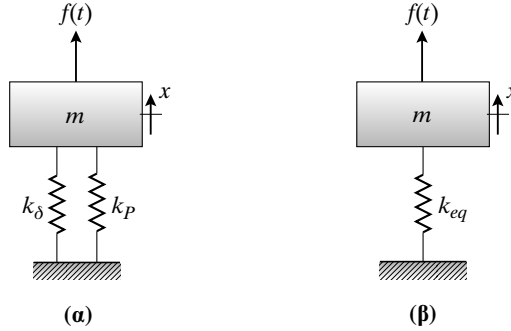
Από τη σχέση αυτή φαίνεται και πάλι ότι η ισοδύναμη σταθερά στιβαρότητας στη διεύθυνση x είναι για κάθε ελατήριο ίση με $k_\theta \sin^2 \theta$, όπως υπολογίστηκε παραπάνω.

- **Σημείωση 2η:** Τα ισοδύναμα ελατήρια των δύο ράβδων του σχήματος 1.1.10α είναι ουσιαστικά παράλληλα συνδεδεμένα, γιατί εμφανίζουν την ίδια παραμόρφωση κατά τη μετατόπιση της μάζας m . Αυτό φαίνεται καλύτερα στο σχήμα 1.1.11, όπου παρουσιάζεται ένα μοντέλο ισοδύναμο με εκείνο του σχήματος 1.1.10α. Όπως φαίνεται από την εξίσωση κίνησης, στην περίπτωση αυτή το ισο-

δύναμο ελατήριου του συστήματος έχει στιβαρότητα

$$k_{eq} = k_{\delta} + k_p.$$

Ποια είναι η ισοδύναμη στιβαρότητα δύο ελατηρίων με σταθερές k_1 και k_2 , αν τα ελατήρια αυτά είναι συνδεδεμένα σε σειρά;



Σχήμα 1.1.11

1.2 ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

Όταν δεν εξασκείται εξωτερική φόρτιση στον εξεταζόμενο ταλαντωτή, η εξίσωση κίνησης (1.1.1) γίνεται

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0. \quad (1.2.1)$$

Καταρχήν, διαίρεση των μελών της εξίσωσης με m οδηγεί στη μορφή

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0, \quad (1.2.2)$$

όπου οι σταθερές

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{και} \quad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (1.2.3)$$

ονομάζονται **ιδιουσυχνότητα** και **μέτρο απόσβεσης** του συστήματος, αντίστοιχα. Επειδή η εξεταζόμενη εξίσωση είναι γραμμική και έχει σταθερούς συντελεστές, οι λύσεις της έχουν μορφή

$$x(t) = ae^{\lambda t}, \quad (1.2.4)$$

όπου a και λ είναι άγνωστες σταθερές. Για τον προσδιορισμό των σταθερών αυτών, αντικαθίσταται η (1.2.4) στην (1.2.2), οπότε προκύπτει ότι

$$(\lambda^2 + 2\zeta\omega_0\lambda + \omega_0^2)ae^{\lambda t} = 0. \quad (1.2.5)$$

Επομένως, η συνάρτηση που εκφράζεται από την (1.2.4) αποτελεί μη μηδενική λύση της (1.2.1) μόνον όταν η σταθερά λ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega_0\lambda + \omega_0^2 = 0, \quad (1.2.6)$$

η οποία είναι γνωστή ως **χααρακτηριστική εξίσωση** του συστήματος. Συνεπώς, η (1.2.4) είναι λύση της (1.2.1) για τις ειδικές τιμές

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}. \quad (1.2.7)$$

Επιπλέον, αφού η εξίσωση (1.2.1) είναι γραμμική, η γενική λύση της θα έχει μορφή

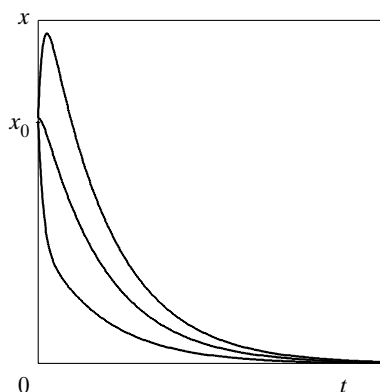
$$x(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} \quad (1.2.8)$$

(όταν $\lambda_1 \neq \lambda_2$), όπου οι δύο εναπομένουσες σταθερές a_1 και a_2 προσδιορίζονται με εφαρμογή των αρχικών συνθηκών (1.1.2).

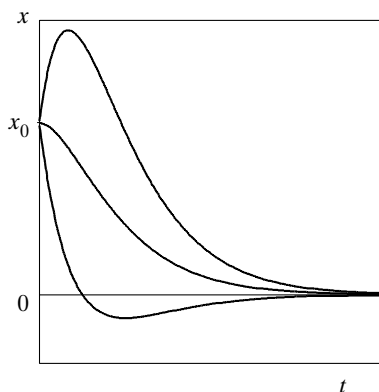
Όπως είναι προφανές από την (1.2.7), η ακριβής μορφή της λύσης της (1.2.1) εξαρτάται από τη σχέση της τιμής του μέτρου απόσβεσης ζ με τη μονάδα. Πιο συγκεκριμένα, διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις.

α. Υπερκρίσιμη Απόσβεση ($\zeta > 1$)

Στην περίπτωση αυτή οι ρίζες $\lambda_{1,2}$ της (1.2.6), όπως εκφράζονται με την (1.2.7) είναι πραγματικές, αρνητικές και άνισες. Τέτοιες τιμές του ζ είναι συνήθως πολύ μεγάλες και παρουσιάζονται μόνο μετά από προσθήκη κατάλληλου αποσβεστήρα στο σύστημα. Όπως φαίνεται από την (1.2.8) -και επιβεβαιώνεται από τα αριθμητικά αποτελέσματα του σχήματος 1.2.1α, για τρεις διαφορετικές τιμές της αρχικής ταχύτητας- η απόκριση του συστήματος φθίνει εκθετικά, χωρίς ταλάντωση.



(α)



(β)

Σχήμα 1.2.1

β. Κρίσιμη Απόσβεση ($\zeta = 1$)

Για $\zeta = 1$, η σχέση (1.2.7) δίνει

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega_0 < 0,$$

οπότε η λύση της (1.2.1) παίρνει τη μορφή

$$x(t) = (\alpha_1 + \alpha_2 t)e^{-\omega_0 t} \quad (1.2.9)$$

αντί της (1.2.8). Άρα, η δυναμική απόκριση του συστήματος φθίνει και πάλι εκθετικά προς την κατάσταση ηρεμίας χωρίς ταλαντώσεις, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.2.1β.

γ. Υποκρίσιμη Απόσβεση ($0 \leq \zeta < 1$)

Η περίπτωση αυτή είναι η πιο συνηθισμένη στην πράξη. Ενδεικτικά αναφέρεται ότι η τιμή του μέτρου απόσβεσης είναι περίπου 0.005 για μεταλλικές κατασκευές, 0.003 για ξύλο, 0.02 για μπετόν και 0.04 για λάστιχο. Σχετικά υψηλές τιμές του μέτρου απόσβεσης εμφανίζονται σε θεμελιώσεις κατασκευών και σε αναρτήσεις οχημάτων, στις οποίες ο συντελεστής απόσβεσης κυμαίνεται μεταξύ 0.1 και 0.5. Για τέτοιες τιμές του μέτρου απόσβεσης η χαρακτηριστική εξίσωση (1.2.6) δέχεται μιγαδικά συζυγείς ρίζες

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\omega_d,$$

όπου

$$\delta = \zeta\omega_0 = \frac{c}{2m} \quad (1.2.10)$$

είναι ο **εκθέτης απόσβεσης** του ταλαντωτή, ενώ

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} \quad (1.2.11)$$

είναι η ονομαζόμενη **ιδιοσυχνότητα με απόσβεση**. Έτσι, η λύση (1.2.8) γράφεται αρχικά στη μορφή

$$x(t) = \alpha_1 e^{-(\delta+i\omega_d)t} + \alpha_2 e^{-(\delta-i\omega_d)t}.$$

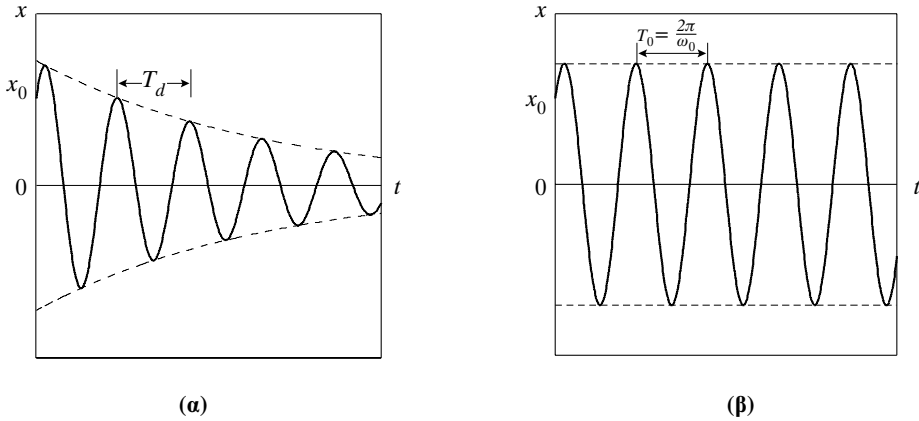
Στη συνέχεια, με εφαρμογή της ταυτότητας του Euler

$$e^{\pm i\omega_d t} = \cos\omega_d t \pm i \sin\omega_d t$$

και μετά την εκτέλεση των απαραίτητων αλγεβρικών πράξεων η λύση (1.2.8) ξαναγράφεται στην πραγματική μορφή

$$x(t) = (A_1 \cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t)e^{-\delta t} \quad (1.2.12)$$

(πώς συνδέονται οι σταθερές A_1 και A_2 με τις a_1 και a_2 ;). Συνεπώς, με άμεση



Σχήμα 1.2.2

Τα παραπάνω αποτελέσματα παρέχουν φυσική ερμηνεία και συγχρόνως δείχνουν την επίδραση που έχουν οι τεχνικές παράμετροι ω_0 , ω_d , ζ και δ στην ελεύθερη ταλάντωση του εξεταζόμενου ταλαντωτή. Όπως φαίνεται από τους ορισμούς, οι ποσότητες αυτές εξαρτώνται μόνον από τις παραμέτρους m , c και k του συστήματος. Επιπλέον, με βάση τους ίδιους ορισμούς είναι δυνατός ο πειραματικός προσδιορισμός των παραμέτρων αυτών. Για παράδειγμα, η ιδιοπερίοδος του συστήματος μπορεί να μετρηθεί απευθείας από πειραματική καταγραφή παρόμοια με αυτή του σχήματος 1.2.2α. Επιπλέον, από τη σχέση (1.2.13) φαίνεται ότι ο λόγος των μετατοπίσεων –συνήθως επιλέγονται οι μέγιστες τιμές– μεταξύ δύο χρονικών στιγμών που απέχουν χρόνο ίσο με την ιδιοπερίοδο, δηλαδή $t_2 = t_1 + T_d$, είναι

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \frac{Ae^{-\delta t_1} \cos(\omega_d t_1 - \theta)}{Ae^{-\delta t_2} \cos(\omega_d t_2 - \theta)} = \frac{e^{-\delta t_1} \cos(\omega_d t_1 - \theta)}{e^{-\delta(t_1 + T_d)} \cos(\omega_d t_1 + 2\pi - \theta)} = e^{\delta T_d}.$$

Επομένως, υπολογισμός της **λογαριθμικής μείωσης**, που ορίζεται με τη σχέση

$$\Lambda \equiv \ln \frac{x_1}{x_2} = \delta T_d, \quad (1.2.16)$$

από την πειραματικά προσδιοριζόμενη καμπύλη του σχήματος 1.2.2α, οδηγεί στον υπολογισμό του εκθέτη απόσβεσης και κατόπιν του μέτρου απόσβεσης μέσω της σχέσης

$$\Lambda = \delta T_d = \zeta \omega_0 \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad \Rightarrow \quad \Lambda = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}},$$

η οποία δίνει τελικά

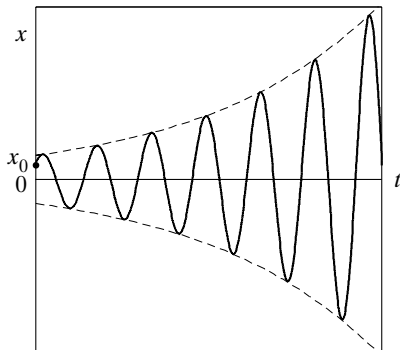
$$\zeta = \frac{\Lambda}{\sqrt{4\pi^2 + \Lambda^2}}.$$

Είναι προφανές ότι για μικρά μέτρα απόσβεσης ισχύουν οι απλούστερες σχέσεις

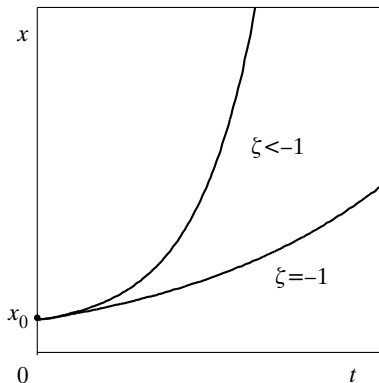
$$\Lambda \approx 2\pi\zeta \quad \text{και} \quad \zeta \approx \Lambda/2\pi.$$

δ. Αρνητική Απόσβεση ($\zeta < 0$)

Σε μερικά δυναμικά συστήματα είναι δυνατό να δημιουργηθούν συνθήκες κατά τις οποίες οι μηχανισμοί απόσβεσης προσδίδουν ενέργεια στο σύστημα αντί να την απορροφούν. Τυπικά παραδείγματα αποτελούν αυτοδιεγειρόμενες ταλαντώσεις που εμφανίζονται κατά την περιστροφή ατράκτων σε έδρανα ολίσθησης, στην κοπή μετάλλων ή κατά τη ροή ρευστού γύρω από κατασκευές. Είναι εύκολο να επιβεβαιωθεί ότι αν $-1 < \zeta < 0$, η απόκριση του συστήματος περιγράφεται και πάλι από τη σχέση (1.2.12). Στην περίπτωση αυτή, όμως, το εύρος ταλάντωσης αυξάνεται εκθετικά και θεωρητικά απειρίζεται γιατί ο εκθέτης απόσβεσης είναι αρνητικός (σχήμα 1.2.3α). Στην πράξη, η συμπεριφορά αυτή οδηγεί σε καταστροφή της κατασκευής ή στην ενεργοποίηση μη γραμμικών μηχανισμών, οι οποίοι οδηγούν τελικά το σύστημα σε ταλάντωση πεπερασμένου εύρους, που δεν μπορεί να προβλεφθεί από τη γραμμική θεωρία. Τέλος, αν $\zeta = -1$ ή $\zeta < -1$, η απόκριση δίνεται από τη σχέση (1.2.9) ή την (1.2.8), αντίστοιχα και επομένως το εύρος της τείνει εκθετικά προς το άπειρο, αλλά χωρίς ταλάντωση (σχήμα 1.2.3β).



(α)



(β)

Σχήμα 1.2.3

► **Παρατήρηση 1.2.1:** Το μέτρο απόσβεσης ζ είναι αδιάστατος αριθμός, ενώ η ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης ω_0 εκφράζεται σε rad/s . Στην πράξη, χρησιμοποιείται συχνά η μονάδα Hz (ή κύκλος ανά δευτερόλεπτο) για τη μέτρηση συχνότητας, η οποία για διάκριση συμβολίζεται με f_0 . Προφανώς, ισχύει ότι

$$\omega_0 = 2\pi f_0.$$

- **Παρατήρηση 1.2.2:** Η ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης μιας κατασκευής μπορεί να εκτιμηθεί με μέτρηση της στατικής της παραμόρφωσης, x_{st} , αφού από τον ορισμό (1.2.3α) προκύπτει εύκολα ότι

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{mg/x_{st}}{m}} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{x_{st}}}.$$

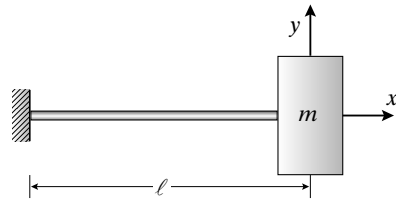
- **Παρατήρηση 1.2.3:** Η λύση (1.2.9) μπορεί να παραχθεί και από τη σχέση (1.2.12), γιατί όπως προκύπτει με εφαρμογή του ορισμού (1.2.11), στο όριο $\zeta \rightarrow 1$ ισχύει ότι

$$\omega_d \rightarrow 0 \Rightarrow \cos \omega_d t \rightarrow 1 \text{ και } \sin \omega_d t \rightarrow 0.$$

- **Παρατήρηση 1.2.4:** Όταν η απόσβεση ενός συστήματος είναι κρίσιμη, μπορεί να αποδειχθεί ότι μετά από μια αρχική διαταραχή, ο ταλαντωτής επανέρχεται στη θέση στατικής ισορροπίας στον **ελάχιστο** δυνατό χρόνο (πώς εξηγείται αυτό;). Η ιδιότητα αυτή χρησιμοποιείται σε πολλές πρακτικές εφαρμογές (βλέπε παράδειγμα 1.2.2 και άσκηση 1.10). Γιατί συμβαίνει αυτό για $\zeta = 1$ και όχι για $\zeta \rightarrow \infty$, όπως φαίνεται “λογικότερο”;

Παράδειγμα 1.2.1: Ιδιοσυχνότητες Ατράκτου με Στρόβιλο

Το σχήμα 1.2.4 παριστάνει το μοντέλο μιας ατράκτου με κυκλική διατομή ακτίνας r , η οποία είναι πακτωμένη στο αριστερό άκρο της και φέρει υδροστρόβιλο στο δεξιό άκρο της. Αν η μάζα m του στροβίλου και η πολική ακτίνα αδρανείας του R είναι πολύ μεγαλύτερες από τη μάζα και την ακτίνα της ατράκτου, αντίστοιχα, να υπολογισθεί η ιδιοσυχνότητα του μοντέλου σε αξονική, καμπτική και στρεπτική ταλάντωση.



Σχήμα 1.2.4

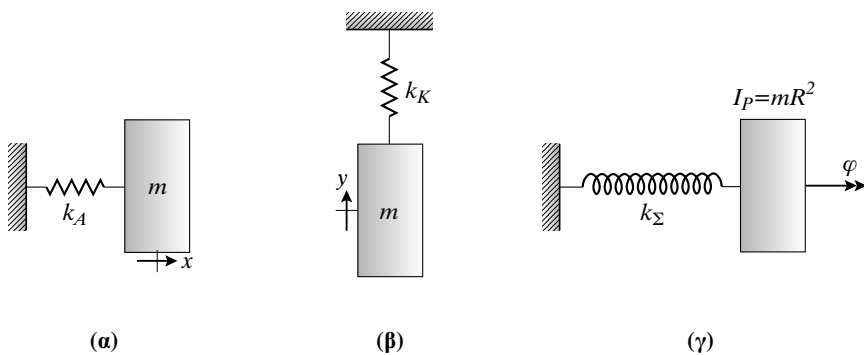
Λύση:

Το ισοδύναμο μοντέλο του συστήματος για αξονική ταλάντωση του στροβίλου στη διεύθυνση x φαίνεται στο σχήμα 1.2.5α, με στιβαρότητα

$$k_A = EA/\ell.$$

Επομένως, η ιδιοσυχνότητα του συστήματος σε αξονική ταλάντωση είναι

$$\omega_A = \sqrt{\frac{k_A}{m}} = \sqrt{\frac{EA}{m\ell}}. \quad (1)$$



Σχήμα 1.2.5

Παρόμοια, το ισοδύναμο μοντέλο σε καμπτική ταλάντωση του συστήματος στη διεύθυνση y φαίνεται στο σχήμα 1.2.5β, με

$$k_K = 3EI/\ell^3.$$

Άρα, η ιδιοσυχνότητα σε καμπτική ταλάντωση είναι

$$\omega_K = \sqrt{\frac{k_K}{m}} = \sqrt{\frac{3EI}{m\ell^3}}. \quad (2)$$

Τέλος, το ισοδύναμο μοντέλο του συστήματος σε στρεπτική ταλάντωση του στροβίλου δίνεται στο σχήμα 1.2.5γ, με στρεπτική στιβαρότητα

$$k_\Sigma = GJ/\ell,$$

όπου G είναι το μέτρο διάτμησης της ατράκτου και J μια σταθερά που εξαρτάται από τη γεωμετρία της διατομής. Ειδικά για κυκλική διατομή, η σταθερά J ισούται με την πολική ροπή αδράνειας της διατομής, I_P . Επιπλέον, από τη θεωρία Ελαστικότητας είναι γνωστή η σχέση $E = 2(1-\nu)G$, όπου ν είναι ο λόγος Poisson του υλικού της ατράκτου. Επομένως, η ιδιοσυχνότητα του συστήματος σε στρεπτική ταλάντωση δίνεται από τη σχέση

$$\omega_\Sigma = \sqrt{\frac{k_\Sigma}{I_P}} = \sqrt{\frac{\pi E r^4}{4(1-\nu)mR^2\ell}}. \quad (3)$$

● **Σημείωση:** Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\frac{\omega_K}{\omega_A} = \frac{r_g}{\ell} \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{r}{\ell}, \quad (4)$$

γιατί η ακτίνα αδράνειας της κυκλικής διατομής ισούται με

$$r_g = \sqrt{\frac{I}{A}} = \frac{r}{2}.$$

Επίσης, από τις σχέσεις (1) και (3) συνεπάγεται ότι

$$\frac{\omega_\Sigma}{\omega_A} = \frac{1}{2\sqrt{1-\nu}} \frac{r}{R}, \quad (5)$$

η οποία σε συνδυασμό με την (4) οδηγεί στην

$$\frac{\omega_K}{\omega_\Sigma} = \sqrt{3(1-\nu)} \frac{R}{\ell}. \quad (6)$$

Η σχέση (4) δείχνει ότι η ιδιοσυχνότητα της εξεταζόμενης διάταξης σε καμπτική ταλάντωση είναι μια τάξη μεγέθους μικρότερη της ιδιοσυχνότητας σε αξονική ταλάντωση. Επιπλέον, αν

$$r \ll R \ll \ell,$$

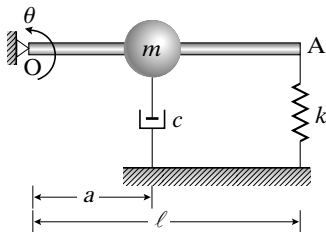
τότε από τις σχέσεις (4)-(6) φαίνεται αμέσως ότι

$$\omega_K \ll \omega_\Sigma \ll \omega_A.$$

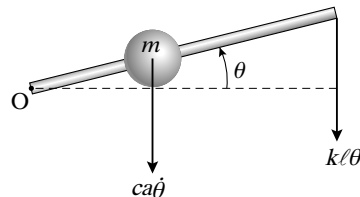
Το αποτέλεσμα αυτό έχει μεγάλη πρακτική αξία στην ανάλυση και μελέτη ταλαντώσεων ατράκτων.

Παράδειγμα 1.2.2: Υπολογισμός Ιδιοσυχνότητας και Μέτρου Απόσβεσης

Να υπολογισθεί η ιδιοσυχνότητα, το μέτρο απόσβεσης και η ιδιοσυχνότητα με απόσβεση για το μηχανικό σύστημα του σχήματος 1.2.6α. Η ράβδος OA είναι στερεή και έχει αμελητέα μάζα ως προς τη συγκεντρωμένη μάζα m . Για ποια τιμή του μήκους ℓ της ράβδου η απόσβεση του συστήματος είναι κρίσιμη; Τέλος, να προσδιορισθεί η απόκριση του συστήματος αν η ράβδος περιστραφεί αρχικά κατά μια μικρή γωνία θ_0 και μετά αφεθεί ελεύθερη.



(α)



(β)

Σχήμα 1.2.6

Επομένως, για τις δεδομένες αρχικές συνθήκες

$$\theta(0) = \theta_0 \quad \text{και} \quad \dot{\theta}(0) = 0$$

προκύπτει ότι η ταλάντωση του συστήματος εκφράζεται από τη σχέση

$$\theta(t) = \theta_0 \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right) e^{-\delta t}.$$

- **Σημείωση:** Εναλλακτικά, η εξίσωση κίνησης μπορεί να εκφρασθεί ως προς την κατακόρυφη μετατόπιση της μάζας m ή του άκρου A της ράβδου. Αλλάζει η τιμή των παραμέτρων ω_0 , ζ , ω_d και δ για τις περιπτώσεις αυτές;

Παράδειγμα 1.2.3: *Εφαρμογή Προσεγγιστικών Ενεργειακών Μεθόδων*

Να υπολογισθεί η ιδιοσυχνότητα του μηχανικού συστήματος του σχήματος 1.2.4 σε αξονική ταλάντωση αν η μάζα της ατράκτου, m_A , είναι συγκρίσιμη με τη μάζα του τροβίλου. Για τον ποσοτικό προσδιορισμό αυτής της επίδρασης, να θεωρηθεί ότι η αξονική μετατόπιση της ατράκτου, έστω $u(y, t)$, μεταβάλλεται γραμμικά ως προς την αξονική συντεταγμένη y .

Λύση:

Καταρχήν, η αξονική στιβαρότητα του συστήματος είναι και πάλι ίση με $k_A = EA/\ell$. Όμως, επειδή στην εξεταζόμενη περίπτωση η μάζα της ατράκτου είναι συγκρίσιμη με τη μάζα του τροβίλου, θα πρέπει να συμπεριληφθεί στον υπολογισμό της ιδιοσυχνότητας ταλάντωσης. Σύμφωνα με την κινηματική υπόθεση

$$u(y, t) = \frac{y}{\ell} x(t).$$

Επομένως, η κινητική ενέργεια της ατράκτου υπολογίζεται στη μορφή

$$T_A = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left(\frac{y}{\ell} \dot{x} \right)^2 \frac{m_A}{\ell} dy = \frac{1}{2} \frac{m_A}{3} \dot{x}^2,$$

πράγμα που σημαίνει ότι η ισοδύναμη μάζα του συστήματος είναι ίση με

$$m_{eq} = m + \frac{1}{3} m_A,$$

οπότε η ιδιοσυχνότητα του συστήματος σε αξονική ταλάντωση γίνεται

$$\omega_A = \sqrt{\frac{k_A}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{EA}{(m + m_A/3)\ell}}. \quad (1)$$

Προφανώς, όταν $m_A \ll m$, η επίδραση της μάζας της ατράκτου στην ιδιοσυχνότητα του συστήματος γίνεται αμελητέα.

- **Σημείωση 1η:** Η υπόθεση ότι η αξονική μετατόπιση της ατράκτου μεταβάλλεται γραμμικά με την αξονική συντεταγμένη της οδηγεί σε προσεγγιστικά αποτελέσματα. Η ακριβής επίδραση της μάζας (και της στιβαρότητας) της ατράκτου στην ταλάντωση του συστήματος εξετάζεται στο τέταρτο κεφάλαιο, όπου μελετάται η ταλαντωτική συμπεριφορά συνεχών φορέων. Επιπλέον, υποθέσεις παρόμοιες με αυτή που χρησιμοποιήθηκε στο παρόν παράδειγμα, σχετικά με την παραμόρφωση της ατράκτου, αποτελούν τη βάση μιας κατηγορίας προσεγγιστικών μεθοδολογιών, οι οποίες αναπτύσσονται στο έκτο κεφάλαιο. Πιο συγκεκριμένα, η μέθοδος που εφαρμόστηκε είναι γνωστή ως **μέθοδος Rayleigh**.
- **Σημείωση 2η:** Εναλλακτικά, σε **συντηρητικά** μηχανικά συστήματα, όπως το εξεταζόμενο, ο προσδιορισμός της ιδιοσυχνότητας μπορεί να γίνει με την εφαρμογή της ενεργειακής αρχής

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2,$$

η οποία ισχύει για δύο τυχαίες χρονικές στιγμές. Έτσι, αν ως χρόνος t_1 επιλεγεί η στιγμή όπου η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι ίση με μηδέν, τότε $T_1 = T_{max}$. Παρόμοια, αν ως χρόνος t_2 επιλεγεί η στιγμή που η κινητική ενέργεια είναι ίση με μηδέν, τότε $V_2 = V_{max}$, οπότε η ενεργειακή αρχή γράφεται στη μορφή

$$T_{max} = V_{max}. \quad (2)$$

Στο εξεταζόμενο παράδειγμα, η κινητική και η δυναμική ενέργεια εκφράζονται στη μορφή

$$T = \frac{1}{2} \left(m + \frac{m_A}{3} \right) \dot{x}^2 \quad \text{και} \quad V = \frac{1}{2} k_A x^2,$$

αντίστοιχα. Επιπλέον, εφόσον για ελεύθερη ταλάντωση (χωρίς απόσβεση) ισχύει ότι

$$x(t) = \hat{x} \cos(\omega_A t - \theta)$$

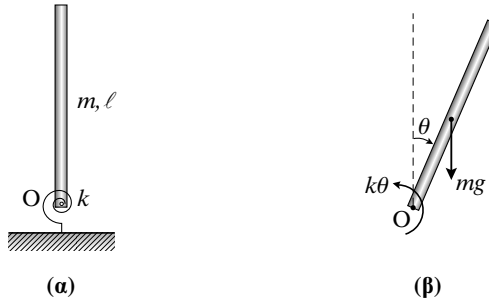
είναι προφανές ότι

$$T_{max} = \frac{1}{2} \left(m + \frac{m_A}{3} \right) (\omega_A \hat{x})^2 \quad \text{και} \quad V_{max} = \frac{1}{2} k_A \hat{x}^2.$$

Άρα, με εφαρμογή της ενεργειακής αρχής (2) προκύπτει και πάλι η ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης στη μορφή (1).

Παράδειγμα 1.2.4: Ευστάθεια Μηχανικού Συστήματος

Το σχήμα 1.2.7α παριστάνει το απλοποιημένο μηχανικό μοντέλο μιας υψηλής κατασκευής (π.χ. πύργος ελέγχου ή βιομηχανική καμινάδα). Το μοντέλο αποτελείται από ομογενή στερεή ράβδο μάζας m και μήκους ℓ , η οποία υποστηρίζεται στη βάση της με στρεπτικό ελατήριο στιβαρότητας k . Να υπολογισθεί η ιδιοσυχνότητα του μοντέλου και το κρίσιμο μήκος της ράβδου, ώστε να μην αποκλίνει σημαντικά από την κατακόρυφη θέση της.



Σχήμα 1.2.7

Λύση:

Η εξίσωση κίνησης της ράβδου για περιστροφική ταλάντωση μικρού εύρους ως προς τη βάση της προσδιορίζεται με βάση το διάγραμμα ελεύθερου σώματος που φαίνεται στο σχήμα 1.2.7β. Έτσι, με εφαρμογή του αντίστοιχου νόμου κίνησης και την υπόθεση ταλάντωσης με μικρό εύρος προκύπτει ότι

$$\Sigma M_o = I_o \ddot{\theta} \Rightarrow -k\theta + mg \frac{\ell}{2} \theta = \frac{1}{3} m \ell^2 \ddot{\theta}.$$

Μεταφορά όλων των όρων στο αριστερό μέλος και διαίρεση με $m\ell^2/3$ οδηγεί στη σχέση

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0,$$

από την οποία φαίνεται ότι η ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης μικρού εύρους είναι

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k - mg\ell/2}{m\ell^2/3}}.$$

Προφανώς, για να εκτελεί η κατασκευή αρμονική ταλάντωση γύρω από τη θέση στατικής ισορροπίας $\theta = 0$, πρέπει το ύψος της να είναι τέτοιο, ώστε να ισχύει η ανισότητα

$$k > mg\ell/2.$$

Όταν δεν ισχύει η παραπάνω ανισότητα, η απόκριση του συστήματος αποκλίνει εκθετικά από τη θέση $\theta = 0$, όπως προκύπτει με επίλυση της εξίσωσης κίνησης. Αυτό

σημαίνει ότι το κρίσιμο μήκος της ράβδου είναι

$$\ell_{cr} = \frac{2k}{\rho Ag} ,$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα και A είναι το εμβαδόν της διατομής της ράβδου.

- **Σημείωση:** Το μηχανικό σύστημα που εξετάσθηκε αποτελεί ένα από τα απλούστερα παραδείγματα, στα οποία εμφανίζεται **αστάθεια**. Η αστάθεια αυτή ονομάζεται **στατική**, γιατί προέρχεται από απώλεια της στιβαρότητας της κατασκευής και είναι παρόμοια με την αστάθεια που παρατηρείται σε πολυπλοκότερα συστήματα, όπως ο λυγισμός δοκών και πλακών. Η άλλη μορφή αστάθειας που παρατηρείται σε μηχανικά συστήματα ονομάζεται **δυναμική** και προέρχεται από την ύπαρξη μηχανισμών που τροφοδοτούν με ενέργεια το σύστημα και ισοδυναμούν με την εμφάνιση αρνητικής απόσβεσης (ποια είναι η μορφή της αντίστοιχης απόκρισης;). Και στις δύο μορφές αστάθειας, η γραμμική θεωρία προβλέπει άπειρα εύρη ταλάντωσης, πράγμα που παραβιάζει την αρχική υπόθεση για ταλάντωση μικρού εύρους. Επομένως, σε τέτοιες περιπτώσεις, η ακριβέστερη μελέτη της απόκρισης απαιτεί τη συμπερίληψη μη γραμμικών όρων στην εξίσωση της κίνησης.

1.3 ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

Με την παρουσία εξωτερικής διέγερσης στην εξίσωση κίνησης (1.1.1), η **γενική** λύση εκφράζεται στη μορφή

$$x(t) = x_h(t) + x_\mu(t) . \quad (1.3.1)$$

Κατά τα γνωστά, η **ομογενής** λύση $x_h(t)$ ικανοποιεί την εξίσωση που προκύπτει από την (1.1.1) μετά την εξάλειψη του μη ομογενούς όρου $f(t)$. Επομένως, το τμήμα αυτό της λύσης προσδιορίζεται όπως στην προηγούμενη ενότητα για το πρόβλημα της ελεύθερης ταλάντωσης. Αντίθετα, ως **μερική** λύση $x_\mu(t)$ ορίζεται οποιαδήποτε χρονική συνάρτηση που ικανοποιεί την (1.1.1). Στη γενική περίπτωση, η λύση αυτή μπορεί να υπολογισθεί με βάση την ομογενή λύση και την εφαρμογή της μεθόδου μεταβολής των παραμέτρων. Έτσι, για $0 \leq \zeta < 1$, η ομογενής λύση δίνεται από την (1.2.12) ή την ισοδύναμή της (1.2.13), ενώ η αντίστοιχη μερική λύση προσδιορίζεται στη μορφή

$$x_\mu(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t f(\tau) e^{-\delta(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau . \quad (1.3.2)$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι γνωστό ως **ολοκλήρωμα Duhamel** (ή ολοκλήρωμα αναδίπλωσης).

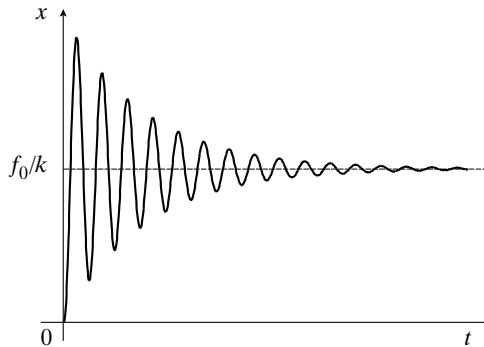
οπότε η απόκριση του συστήματος είναι

$$x(t) = \frac{f_0}{k} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\delta t} \cos(\omega_d t - \theta) \right], \quad (1)$$

με

$$\tan \theta = \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}. \quad (2)$$

Το σχήμα 1.3.1 παρουσιάζει τη γραφική παράσταση της απόκρισης στις δεδομένες αρχικές συνθήκες. Όπως αναμένεται, η απόκριση τείνει εκθετικά στη στατική παραμόρφωση f_0/k .



Σχήμα 1.3.1

- **Σημείωση 1η:** Τα ίδια τελικά αποτελέσματα παράγονται με άμεση εφαρμογή των σχέσεων (1.3.3) και (1.3.4). Συγκεκριμένα, για μηδενικές αρχικές συνθήκες και σταθερή διέγερση, εφαρμογή των σχέσεων αυτών οδηγεί στην έκφραση

$$x(t) = \frac{f_0}{m\omega_d} \int_0^t e^{-\delta(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau,$$

η οποία μετά την εκτέλεση των πράξεων οδηγεί και πάλι στις σχέσεις (1) και (2).

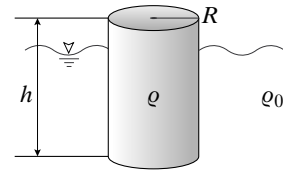
- **Σημείωση 2η:** Αν η απόσβεση είναι αμελητέα, η απόκριση του συστήματος είναι

$$x(t) = \frac{f_0}{k} (1 - \cos \omega_0 t),$$

η οποία είναι αρμονική, με συχνότητα $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, μέσο εύρος f_0/k και εύρος ταλάντωσης ίσο με τη στατική παραμόρφωση f_0/k . Πώς προσδιορίζονται τα τοπικά εύρη ταλάντωσης όταν η απόσβεση του συστήματος είναι σημαντική;

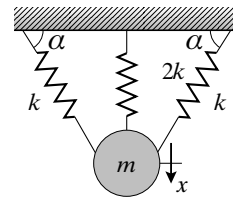
1.8 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1.1** Κύλινδρος ακτίνας R , ύψους h και από υλικό με πυκνότητα ρ βυθίζεται σε υγρό πυκνότητας ρ_0 , όπως δείχνει το σχήμα 1.8.1. Να σχεδιαστεί το ισοδύναμο δυναμικό μοντέλο, να υπολογιστεί ο ισοδύναμος συντελεστής στιβαρότητας k_{eq} και να προσδιορισθεί η ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης του κυλίνδρου.



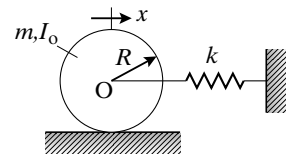
Σχήμα 1.8.1

- 1.2** Σώμα μάζας m συνδέεται με ελατήρια γνωστής στιβαρότητας και κινείται στην κατακόρυφη διεύθυνση, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.8.2. Να υπολογιστεί ο ισοδύναμος συντελεστής στιβαρότητας k_{eq} και η ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης για το εξεταζόμενο δυναμικό μοντέλο.



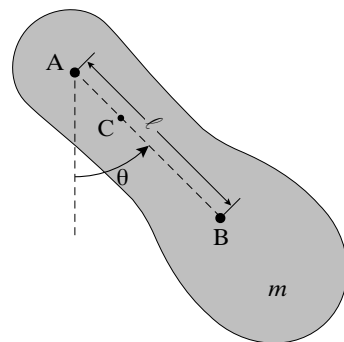
Σχήμα 1.8.2

- 1.3** Να σχεδιαστεί το ισοδύναμο δυναμικό μοντέλο για τη μηχανική διάταξη που εικονίζεται στο σχήμα 1.8.3. Η διάταξη αυτή αποτελείται από στερεό κύλινδρο, ο οποίος κυλάει χωρίς να ολισθαίνει σε επίπεδη επιφάνεια. Κατόπιν, να υπολογιστεί η ισοδύναμη μάζα m_{eq} του συστήματος και να υπολογιστεί η ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης. Να θεωρηθούν ως δεδομένα η μαζική ροπή αδράνειας I_O του κυλίνδρου ως προς τον διαμήκη άξονα που διέρχεται από το σημείο του O , η μάζα του m , η ακτίνα του R και ο συντελεστής στιβαρότητας k του ελατηρίου. Τέλος, να επαληθευθούν τα αποτελέσματα με απευθείας εφαρμογή των νόμων του Newton.



Σχήμα 1.8.3

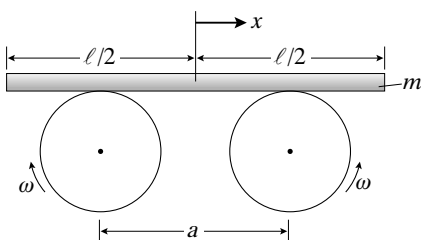
- 1.4** Το σχήμα 1.8.4 επεξηγεί τον πειραματικό προσδιορισμό της μαζικής ροπής αδράνειας και της θέσης του κέντρου μάζας C στερεού σώματος με επίπεδη, αλλά ακανόνιστη



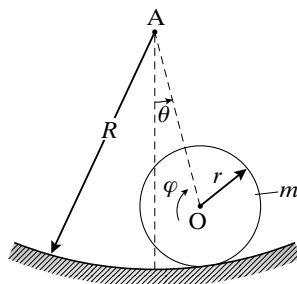
Σχήμα 1.8.4

γεωμετρία. Συγκεκριμένα, το σώμα αναρτάται αρχικά από σημείο Α και μετράται η περίοδος της ελεύθερης αιώρησής του, έστω T_A . Στη συνέχεια το σώμα αναρτάται από σημείο Β, το οποίο βρίσκεται στην προέκταση του ευθύγραμμου τμήματος ΑC και μετράται η νέα ιδιοπερίοδος ταλάντωσης, έστω T_B . Αν είναι γνωστή η μάζα του σώματος m και η απόσταση ℓ μεταξύ των σημείων Α και Β, να υπολογισθεί η θέση του κέντρου μάζας του σώματος και η αντίστοιχη μαζική ροπή αδράνειας.

- 1.5** Ράβδος μάζας m και μήκους ℓ τοποθετείται πάνω σε δύο κυλίνδρους, που περιστρέφονται με σταθερή και αντίθετη γωνιακή ταχύτητα ω , όπως δείχνει το σχήμα 1.8.5. Η απόσταση μεταξύ των δύο κυλίνδρων είναι a , ενώ ο συντελεστής τριβής μεταξύ της ράβδου και των κυλίνδρων είναι μ . Να παραχθεί η εξίσωση κίνησης της ράβδου και να αποδειχθεί ότι πραγματοποιεί ταλάντωση. Ποια είναι η τιμή της συχνότητας της κίνησης;



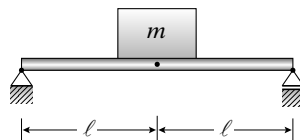
Σχήμα 1.8.5



Σχήμα 1.8.6

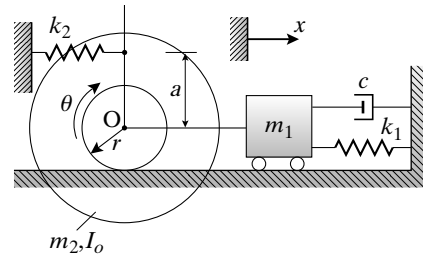
- 1.6** Κύλινδρος με μάζα m και ακτίνα r κυλάει χωρίς να ολισθαίνει στο εσωτερικό κυλινδρικής κοιλότητας ακτίνας R , όπως δείχνει το σχήμα 1.8.6. Να υπολογιστεί η ιδιοσυχνότητα μικρού εύρους ταλάντωσης του κυλίνδρου ως προς τη θέση στατικής ισορροπίας του, με εφαρμογή της αρχής διατήρησης της μηχανικής ενέργειας.

- 1.7** Μηχανή μάζας m στηρίζεται στο μέσο αρθρωμένης δοκού με γνωστές και σταθερές ελαστικές και γεωμετρικές ιδιότητες, όπως δείχνει το σχήμα 1.8.7. Αν η μάζα της δοκού, \hat{m} , είναι συγκρίσιμη με τη μάζα της μηχανής, να υπολογιστεί η ισοδύναμη μάζα και η ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης του συστήματος. Ποια είναι η ιδιοσυχνότητα του συστήματος όταν η μάζα της δοκού είναι μικρή σε σχέση με τη μάζα της μηχανής;



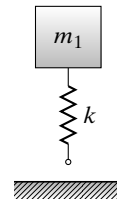
Σχήμα 1.8.7

- 1.8** Να σχεδιαστεί το ισοδύναμο δυναμικό μοντέλο για το μηχανικό σύστημα του σχήματος 1.8.8 και να υπολογιστούν η ισοδύναμη μάζα και ο ισοδύναμος συντελεστής στιβαρότητας. Κατόπιν, να προσδιοριστούν η ιδιοσυχνότητα και το μέτρο απόσβεσης του συστήματος. Τέλος, να επαναληφθούν οι ίδιοι υπολογισμοί αν επιλεγεί η γωνία θ ως η συντεταγμένη κίνησης. Αλλάζει η ιδιοσυχνότητα ή το μέτρο απόσβεσης του συστήματος με την επιλογή της νέας συντεταγμένης κίνησης;



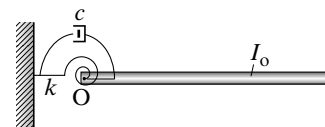
Σχήμα 1.8.8

- 1.9** Το σχήμα 1.8.9 παριστάνει το απλοποιημένο μοντέλο ενός μικρού αεροπλάνου κατά τη διάρκεια της προσγείωσής του. Το μοντέλο αποτελείται από σώμα μάζας m , το οποίο έρχεται σε επαφή με το έδαφος μέσω ελατηρίου στιβαρότητας k που αντιπροσωπεύει το σύστημα ανάρτησης του αεροπλάνου. Να υπολογιστεί ο χρόνος που παραμένει σε επαφή το ελατήριο με το έδαφος πριν από την πρώτη αναπήδηση του σώματος από το έδαφος.



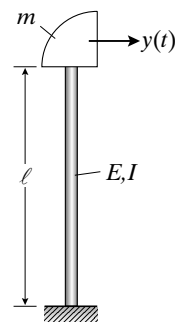
Σχήμα 1.8.9

- 1.10** Το σχήμα 1.8.10 δείχνει το μοντέλο του μηχανισμού επαναφοράς μιας θύρας ψυγείου. Να επιλεγεί η τιμή του συντελεστή απόσβεσης του μηχανισμού, ώστε η θύρα να επανέρχεται στη θέση στατικής ισορροπίας της στον ελάχιστο δυνατό χρόνο. Να θεωρηθούν γνωστά η μαζική ροπή αδράνειας I_0 της θύρας ως προς το σημείο O και ο συντελεστής στιβαρότητας k του στρεπτικού ελατηρίου. Ποια είναι τότε η απόκριση του συστήματος στις αρχικές συνθήκες $\theta(0) = \theta_0$ και $\dot{\theta}(0) = 0$;



Σχήμα 1.8.10

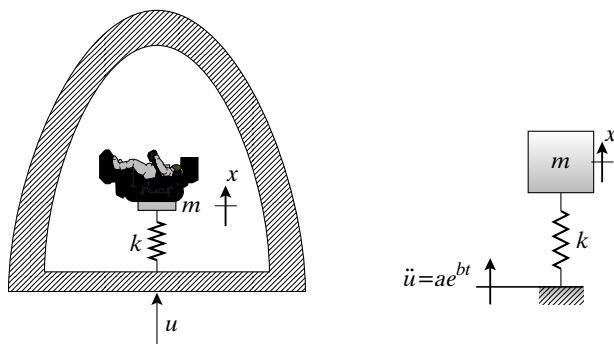
- 1.11** Να σχεδιαστεί το ισοδύναμο δυναμικό μοντέλο και να γραφεί η εξίσωση κίνησης για το μηχανικό σύστημα αεροτομής-τουρμπίνας του σχήματος 1.8.11. Επιπλέον, να υπολογιστεί ο συντελεστής απόσβεσης αν είναι γνωστό από



Σχήμα 1.8.11

μετρήσεις το χρονικό διάστημα ανάμεσα σε δύο διαδοχικές τιμές του μέγιστου εύρους της απόκρισης. Ποια είναι η απόκριση του συστήματος στις αρχικές συνθήκες $y(0) = 0$ και $\dot{y}(0) = v_0$;

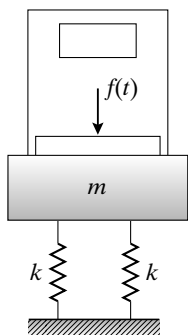
- 1.12** Κατά την ανάφλεξη του δεύτερου και του τρίτου ορόφου καυσίμων ενός πυραύλου, η επιτάχυνσή του αυξάνεται εκθετικά, σύμφωνα με τη σχέση $\ddot{u} = ae^{bt}$. Να υπολογιστεί η απόλυτη επιτάχυνση \ddot{x} που αισθάνεται ο αστροναύτης θεωρώντας ως αρχικές συνθήκες τις $z(0) = 0$ και $\dot{z}(0) = 0$, όπου $z = x - u$.



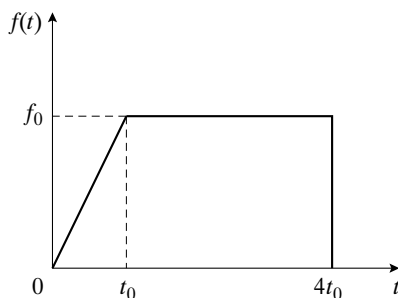
Σχήμα 1.8.12

- 1.13** Στο σχήμα 1.8.15α παρίσταται το μοντέλο μιας μηχανής σφυρηλάτησης. Η μηχανή έχει συνολική μάζα m και εδράζεται σε θεμελίωση στιβαρότητας k . Στη διάρκεια της σύγκρουσης της σφύρας με το προς διαμόρφωση τεμάχιο εξασκείται στη μηχανή μία δύναμη, της οποίας η μορφή φαίνεται στο σχήμα 1.8.13β. Να προσδιορισθεί η απόκριση της μηχανής:

- με τη βοήθεια του ολοκληρώματος αναδίπλωσης,
- με εφαρμογή της αρχής της επαλληλίας,
- με εφαρμογή κατάλληλων συνθηκών συνέχειας.



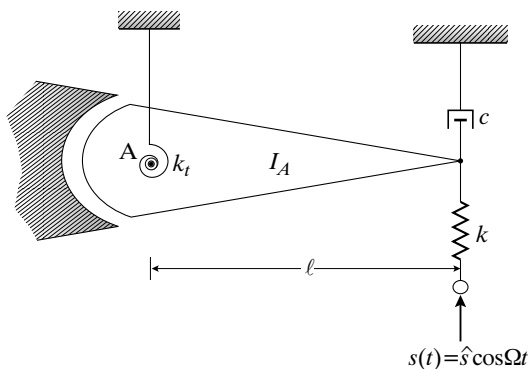
(α)



(β)

Σχήμα 1.8.13

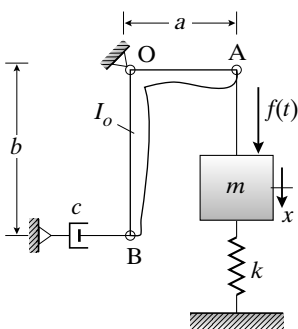
- 1.14** Το μηχανικό μοντέλο του σχήματος 1.8.14 αποτελεί προσομοίωση της έδρασης του περυγίου ενός αεροσκάφους, το οποίο έχει μαζική ροπή αδράνειας I_A ως προς το σημείο A και μήκος ℓ . Μέσω ειδικής μηχανικής διάταξης, το περυγίο δέχεται αρμονική διέγερση μετατόπισης με μορφή $s(t) = \hat{s} \cos \Omega t$. Να καθοριστούν η ιδιοσυχνότητα ω_0 , το μέτρο απόσβεσης ζ και η απόκριση του περυγίου στη μόνιμη κατάσταση.



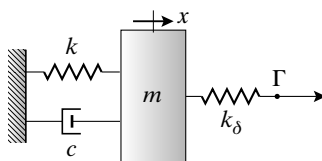
Σχήμα 1.8.14

- 1.15** Στη μηχανική διάταξη του σχήματος 1.8.15 ο βραχίονας AOB είναι στερεός και έχει μαζική ροπή αδράνειας I_o ως προς την άρθρωση O . Για ταλαντώσεις μικρού εύρους γύρω από τη θέση ισορροπίας, να προσδιοριστούν:

- η ιδιοσυχνότητα και το μέτρο απόσβεσης της διάταξης και
- η απόκριση της διάταξης στη μόνιμη κατάσταση, αν στη μάζα m εφαρμόζεται η αρμονική δύναμη $f(t) = \hat{f} \cos \Omega t$.



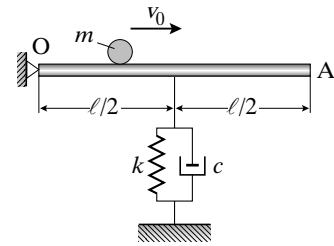
Σχήμα 1.8.15



Σχήμα 1.8.16

- 1.16** Σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας υπόκειται σε αρμονική διέγερση που εφαρμόζεται στο σημείο Γ , όπως δείχνει το σχήμα 1.8.16. Να καταστρωθεί η εξίσωση κίνησης του συστήματος και να υπολογιστούν:

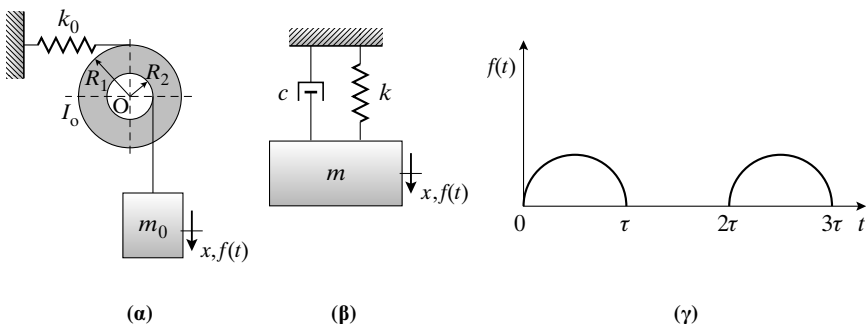
- α. Να καταστρωθεί η εξίσωση κίνησης του συστήματος, θεωρώντας μικρό εύρος ταλάντωσης. Ποια είναι η τιμή της ιδιοσυχνότητας, του μέτρου απόσβεσης και της ιδιοσυχνότητας με απόσβεση;
- β. Αν η εξέδρα βρίσκεται σε ηρεμία όταν εμφανίζεται το σωματίδιο στο σημείο O , να προσδιορισθεί η απόκριση της εξέδρας στο χρονικό διάστημα $0 < t < T = \ell/v_0$.
- γ. Να καθοριστεί η ελάχιστη τιμή της ταχύτητας που προκαλεί συντονισμό της εξέδρας στη μόνιμη κατάσταση, αν σε κάθε χρονική στιγμή που ένα σωματίδιο εγκαταλείπει την εξέδρα στο άκρο A εμφανίζεται νέο σωματίδιο στο άκρο O .



Σχήμα 1.8.19

1.20 Το σχήμα 1.8.20α παριστάνει το δυναμικό μοντέλο μιας μηχανικής διάταξης.

- α. Αν είναι γνωστές οι τιμές των σταθερών r_1, r_2, c_0, m_0 και I_0 να προσδιορισθούν οι τιμές των σταθερών k και m του ισοδύναμου μοντέλου του σχήματος 1.8.20β.
- β. Για τον προσδιορισμό του συντελεστή αποσβέσεως c διεξάγεται η εξής μέτρηση. Επιβάλλονται οι αρχικές συνθήκες $x(0) = x_0$ και $\dot{x}(0) = 0$ στη μάζα m_0 και μετρώνται δύο διαδοχικές μέγιστες τιμές της μετατόπισής της, έστω \hat{x}_1 και \hat{x}_2 . Με βάση τις τιμές αυτές να καθοριστεί αρχικά το μέτρο απόσβεσης ζ και στη συνέχεια ο συντελεστής απόσβεσης c . Ποια είναι η απόκριση του συστήματος στην περίπτωση αυτή;
- γ. Αν επιβληθεί εξωτερική περιοδική διέγερση της μορφής του σχήματος 1.8.20γ, να προσδιορισθούν οι τιμές του χρόνου τ , για τις οποίες το μηχανικό σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού.



Σχήμα 1.8.20

1.21 Το διπλανό σχήμα δείχνει το απλοποιημένο μοντέλο μιας μηχανικής διάταξης, η οποία διεγείρεται με γνωστή μετατόπιση $s(t)$.

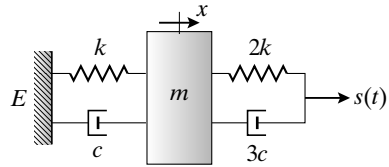
α. Να προσδιοριστεί η ιδιοσυχνότητα χωρίς απόσβεση και το μέτρο απόσβεσης της διάταξης.

β. Να καθοριστεί η απόκριση της διάταξης αν αυτή ξεκινά από την ηρεμία και

$$s(t) = s_0 = \text{σταθερά}.$$

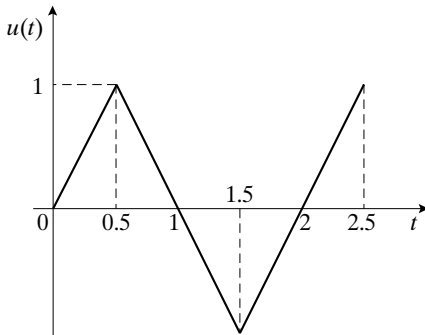
γ. Να υπολογιστεί η δύναμη που αναπτύσσεται στην έδραση E της διάταξης στη μόνιμη κατάσταση ταλάντωσης αν

$$s(t) = \hat{s}_1 \cos \Omega t + \hat{s}_2 \cos(2\Omega t - \theta).$$

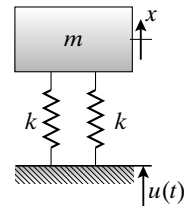


Σχήμα 1.8.21

1.22 Μηχανική διάταξη υπόκειται σε περιοδική διέγερση μετατόπισης, η ιστορία της οποίας δίνεται στο σχήμα 1.8.22α. Να προσδιοριστεί η απόκριση της διάταξης, που φαίνεται στο σχήμα 1.8.22β με $m = 100 \text{ kg}$ και $k = 550 \text{ N/m}$, στη μόνιμη κατάσταση.



(α)



(β)

Σχήμα 1.8.22

1.23 Να προσδιοριστεί ο συντελεστής στιβαρότητας k και ο συντελεστής απόσβεσης c ενός επιταχυνσιόμετρου αν το μέγιστο σφάλμα μέτρησης πρέπει να περιοριστεί σε 3% για μετρήσεις σε περιοχή συχνοτήτων 0-100 Hz (δίνεται ότι $m = 5 \text{ gr}$).

1.24 Να προσδιοριστεί η μέγιστη ιδιοσυχνότητα ενός μηχανοσιόμετρου αν το μέγιστο σφάλμα μέτρησης πρέπει να περιοριστεί σε 2% για μετρήσεις σε περιοχή συχνοτήτων 500-1500 στροφές ανά λεπτό. Να εξετασθούν οι περιπτώσεις με μέτρο απόσβεσης $\zeta = 0, 0.6$ και 0.9 .