ΓΕΩΡΓΙΟΥ Μ. ΝΙΤΣΙΩΤΑ
Καθηγητή Πανεπιστημίου

ΕΛΑΣΤΟΣΤΑΤΙΚΗ

Γραμμική Θεωρία

ΔΕΥΤΕΡΟΣ ΤΟΜΟΣ

Ἐπιφανειακοί φορεῖς – Μέθοδοι ἐπιλύσεως

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 1998

Περιεχόμενα τοῦ Δεύτερου Τόμου

ΤΡΙΤΟ ΜΕΡΟΣ

ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΟΙ ΦΟΡΕΙΣ

ΤΕΤΑΡΤΟ ΜΕΡΟΣ

ΟΙ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ

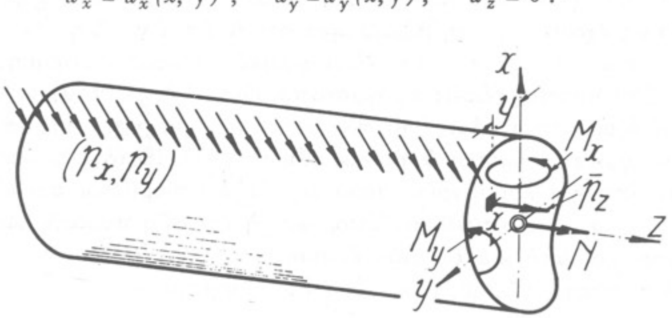
ΕΝΑΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΟΙ ΔΙΣΚΟΙ

9.1. Ἡ ἐπίπεδη παραμόρφωση καί ἡ ἐπίπεδη ἔνταση

Κάθε εἰδική κατάσταση δέν εἶναι τίποτε ἄλλο παρά μία περίπτωση τῆς γενικῆς τριδιάστασης καταστάσεως καί σάν τέτοια πρέπει νά προκύπτει μέ τήν εἰδίκευση τῶν γενικῶν ἐξισώσεων, γιά νά εἶναι μιά φυσικῶς πραγματοποιήσιμη κατάσταση. Ἡ βασική αὐτή ἀρχή ἰσχύει βέβαια τόσο γιά τήν ἐπίπεδη παραμόρφωση ὅσο καί γιά τήν ἐπίπεδη ἔνταση. Εἰδικότερα γιά τήν ἐπίπεδη παραμόρφωση ὑποθέσαμε (πρβ. ἄρθρο 2.4) ὅτι αὐτή πραγματοποιεῖται σέ πρισματικά σώματα ἄπειρου μήκους, ὅταν αὐτά φορτίζονται κάθετα ($p_z = 0$) καί ὁμοιόμορφα κατά τό μῆκος τῶν γεννητριῶν τους. Ἡ διατήρηση τῆς ἐπίπεδης μορφῆς τῶν σταθερῶν διατομῶν τοῦ πρίσματος ἐπιτρέπει τήν ὑπόθεση ὅτι ἡ μετατόπιση εἶναι ἐπίπεδη καί διπαραμετρική:

$$u_x = u_x(x, y), \quad u_y = u_y(x, y), \quad u_z = 0. \tag{1}$$



Σχ. 1. Πρίσμα μέ τά ἀκραῖα φορτία διατομῆς ἀπό τήν ἐπίπεδη παραμόρφωση.

Πράγματι ἀπό τήν παραδοχή αὐτή ἀπορρέει ὅτι ἡ παραμόρφωση εἶναι ἐπίσης ἐπίπεδη καί διπαραμετρική :

$$\epsilon_z = 0, \quad \gamma_{yz} = 0, \quad \gamma_{zx} = 0, \tag{2α}$$

μέ μή μηδενικές τίς συνιστῶσες ἐπάνω στό ἐπίπεδο x, y :

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}\ , \qquad \epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}\ , \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \tag{2β}$$

καί μέ τήν εἰδική διόγκωση

$$\theta = \epsilon_x + \epsilon_y + 0 = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}. \tag{3}$$

Μέ τίς παραμορφώσεις (2) ὁ νόμος δυσκαμψίας (ἐξ. 6.13) τῆς τριδιάστατης ἐλαστικῆς καταστάσεως δίνει τίς τάσεις

$$\sigma_x = \frac{2G}{1-2\nu}[(1-\nu)\epsilon_x + \nu\epsilon_y]\ , \quad \sigma_y = \frac{2G}{1-2\nu}[(1-\nu)\epsilon_y + \nu\epsilon_x]\ , \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}\ , \tag{4α}$$

$$\tau_{yz} = 0\ , \qquad \tau_{zx} = 0\ , \tag{4β}$$

$$\boxed{\sigma_z = \frac{2G\nu}{1-2\nu}(\epsilon_x + \epsilon_y) = \nu(\sigma_x + \sigma_y)\ .} \tag{4γ}$$

Ἀφοῦ λοιπόν μέ αὐτές τίς σχέσεις πληροῦνται καί οἱ συνθῆκες ἐλαστικότητας, μένουν μόνο οἱ στατικές συνθῆκες. Ἐπειδή οἱ τάσεις εἶναι ἀνεξάρτητες ἀπό τή μεταβλητή z καί ἐπειδή $p_z = 0$, οἱ συνθῆκες ἰσορροπίας τῶν διευθύνσεων x, y γίνονται

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + p_x = 0, \qquad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + p_y = 0\ , \tag{5}$$

ἐνῶ ἡ συνθήκη τῆς διευθύνσεως z ἐκφυλίζεται στήν ταυτότητα $0=0$.

Μετά τή διαπίστωση ὅτι πληροῦνται ὅλες οἱ συνθῆκες τῆς τριδιάστατης καταστάσεως ἔχουμε πιά τή βεβαιότητα ὅτι ἡ ἐ π ί π ε δ η δ ι π α ρ α μ ε τ ρ ι κ ή π α ρ α μ ό ρ φ ω σ η εἶναι φυσικά πραγματοποιήσιμη. Οἱ μετατοπίσεις καί οἱ παραμορφώσεις πραγματοποιοῦνται μόνο ἐπάνω στό ἐπίπεδο x, y καί ἐξαρτῶνται μόνο ἀπό τίς τάσεις σ_x , σ_y , τ_{xy} τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ, ὅπως φαίνεται ἀμέσως ἀπό τούς τύπους (4α). Ἐκτός ὅμως ἀπό τίς τάσεις αὐτές ὑπάρχει καί ἡ τρίτη τάση σ_z , πού καθορίζεται συναρτήσει τῶν τάσεων σ_x , σ_y τοῦ ἐπιπέδου. Ἑπομένως ἡ ἐπίπεδη παραμόρφωση δ έ ν συνοδεύεται καί ἀπό μιά ἐπίπεδη ἔνταση.

Ἡ ἀντιστροφή τῶν ἐξ. (4α) ὁδηγεῖ στίς σχέσεις

$$\epsilon_x = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_y\right), \quad \epsilon_y = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x\right), \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}. \tag{6}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα γιά τήν ἐπίπεδη παραμόρφωση τίς βοηθητικές ἐλαστικές σταθερές

$$\nu_\pi = \frac{\nu}{1-\nu}\ , \quad E_\pi = \frac{E}{1-\nu^2}\ , \quad G_\pi = G, \tag{7}$$

μποροῦμε νά γράψουμε τό νόμο εὐκαμψίας μέ τή μορφή

$$\epsilon_x = \frac{1}{E_\pi}(\sigma_x - \nu_\pi \sigma_y), \qquad \epsilon_y = \frac{1}{E_\pi}(\sigma_y - \nu_\pi \sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_\pi} \qquad (8\alpha)$$

καί τό νόμο δυσκαμψίας (4α) μέ τή μορφή

$$\sigma_x = \frac{E_\pi}{1-\nu_\pi^2}(\epsilon_x + \nu_\pi \epsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E_\pi}{1-\nu_\pi^2}(\epsilon_y + \nu_\pi \epsilon_x), \quad \tau_{xy} = G_\pi \gamma_{xy}. \quad (8\beta)$$

Οἱ τιμές (7) ἐξακολουθοῦν νά πληροῦν τή σχέση $2G_\pi(1+\nu_\pi) = E_\pi$.

Ὅταν τό πρίσμα ἔχει πεπερασμένο μῆκος, τότε στίς δύο ἀκραῖες του διατομές θά ἐμφανιστοῦν οἱ ὀρθές τάσεις σ_z τῆς ἐξ. (4γ)· αὐτές πρέπει νά ὑπάρχουν γιά νά πραγματοποιηθεῖ ἡ κατάσταση τῆς ἐπίπεδης παραμορφώσεως. Ἄν δέν συμβαίνει αὐτό, ἄν δηλαδή οἱ ἀκραῖες διατομές εἶναι ἀφόρτιστες, τότε πρέπει νά μηδενιστοῦν οἱ τάσεις σ_z πού προκύπτουν ἀπό τήν ἐπίπεδη παραμόρφωση. Αὐτό γίνεται μέ τήν πρόσθεση στήν ἐπίπεδη κατάσταση καί μιᾶς ἄλλης δεύτερης καταστάσεως τοῦ πρίσματος, ἡ ὁποία ὀφείλεται σέ μιά ἐπιφανειακή φόρτιση $\bar{p}_z = -\sigma_z$, πού ἐνεργεῖ καί στίς δύο ἀκραῖες διατομές (σχ. 1).

Σέ πρίσματα μεγάλου μήκους ἡ φόρτιση $\bar{p}_z$ μπορεῖ, σύμφωνα μέ τήν ἀρχή τοῦ SAINT–VENANT, νά ἀντικατασταθεῖ μέ μιά ὁποιαδήποτε ἰσοδύναμή της φόρτιση, δηλαδή μέ μιά φόρτιση πού δίνει τήν ἴδια ὀρθή δύναμη N καί τίς ἴδιες ροπές κάμψεως M_x, M_y :

$$N = \int \bar{p}_z \, dx\, dy, \qquad M_x = \int y\, \bar{p}_z \, dx\, dy, \qquad M_y = \int x\, \bar{p}_z \, dx\, dy.$$

Ἡ λύση τότε πού θά προκύψει θά ἰσχύει γιά τό κύριο καί μεγαλύτερο ἐσωτερικό μέρος τοῦ πρίσματος, μέ ἐξαίρεση τίς δύο ἀκραῖες περιοχές. Σ' αὐτή τήν περίπτωση ὁ ὑπολογισμός τῆς δεύτερης καταστάσεως γίνεται βάσει τῆς τεχνικῆς θεωρίας κάμψεως –γραμμικός νόμος– ἡ ὁποία καί δίνει μόνο τάσεις $\bar{\sigma}_z$ $(\neq \sigma_z)$ καί τ_{zx}, τ_{zy}. Ἔτσι στό ἐπίπεδο παραμένουν ἀναλλοίωτες οἱ τάσεις τῆς ἐπίπεδης παραμορφώσεως, μεταβάλλονται ὅμως οἱ παραμορφώσεις.

Θά μελετήσουμε τήν ἐ π ί π ε δ η ἔ ν τ α σ η, θεωρώντας στήν ἀρχή ὅτι αὐτή ἐξαρτᾶται καί ἀπό τή μεταβλητή z, ὅτι δηλαδή εἶναι τ ρ ι π α ρ α μ ε τ ρ ι κ ή. Ὡς ἐπίπεδη χαρακτηρίσαμε τήν ἔνταση πού ἔχει τάσεις

$$\sigma_z = 0, \qquad \tau_{yz} = 0, \qquad \tau_{zx} = 0 \qquad (9)$$

καί φορτίο[1] $p_z = 0$. Τότε ἡ συνθήκη ἰσορροπίας κατά τή διεύθυνση z πληροῦται ἐκ ταυτότητος καί οἱ δύο ἄλλες ἀποκτοῦν καί πάλι τή μορφή (5), οἱ τάσεις ὅμως σ_x, σ_y, τ_{xy}, πού περιέχονται σ' αὐτές, εἶναι συναρτήσεις καί τῶν τ ρ ι ῶ ν μεταβλητῶν.

Εἰσάγοντας τίς τιμές (9) στίς συνθῆκες εὐκαμψίας (ἐξ. 6.9) τῆς τριδιάστατης ἐλαστικῆς καταστάσεως καί λαμβάνοντας ὑπόψη τόν ἐσωτερικό κα-

[1] Ὅλα τά ἄλλα αἴτια εἶναι ἀνεξάρτητα ἀπό τήν z.

ταναγκασμό, βρίσκουμε τίς τριπαραμετρικές παραμορφώσεις

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) + \epsilon_x^0 \;, \quad \epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) + \epsilon_y^0 \;, \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} + \gamma_{xy}^0 \;, \tag{10α}$$

$$\gamma_{yz} = 0 \;, \quad \gamma_{zx} = 0 \;, \tag{10β}$$

$$\boxed{\epsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\nu}{1-\nu}\left[(\epsilon_x + \epsilon_y) - (\epsilon_x^0 + \epsilon_y^0)\right]} \tag{10γ}$$

καί τήν εἰδική διόγκωση

$$\theta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{(1-2\nu)(\epsilon_x + \epsilon_y) + \nu(\epsilon_x^0 + \epsilon_y^0)}{1-\nu} = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) + (\epsilon_x^0 + \epsilon_y^0) . \tag{10δ}$$

Κατά τή διεύθυνση z δέν δεχόμαστε καταναγκασμό ϵ_z^0, γ_{yz}^0, γ_{zx}^0. Μέ τήν ἀντιστροφή τῶν ἐξ. (10α) ἔχουμε τίς σχέσεις

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left[(\epsilon_x + \nu\epsilon_y) - (\epsilon_x^0 + \nu\epsilon_y^0)\right] , \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left[(\epsilon_y + \nu\epsilon_x) - (\epsilon_y^0 + \nu\epsilon_x^0)\right] \\ &\tau_{xy} = G\,(\gamma_{xy} - \gamma_{xy}^0) . \end{aligned}\right\} . \tag{11}$$

Τέλος, οἱ γεωμετρικές συνθῆκες

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} , \qquad \epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} , \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} , \tag{12α}$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} , \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0 , \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0 \tag{12β}$$

πρέπει καί αὐτές νά πληροῦνται μέ τήν τριπαραμετρική τους μορφή. Αὐτό θά συμβαίνει ὁπωσδήποτε, ὅταν προσδιορίσουμε πρῶτα τίς μετατοπίσεις u_x, u_y, u_z καί κατόπιν προχωρήσουμε, μέ τή βοήθεια τῶν τύπων (12) καί (11) στόν ὑπολογισμό τῶν παραμορφώσεων καί τῶν τάσεων. Γιά τό λόγο αὐτόν προκρίνουμε, πρός τό παρόν, τή μέθοδο μετατοπίσεων καί εἰσάγουμε τήν εἰδική τιμή (πρβ. ἐξ. 10δ)

$$\theta = \frac{1-2\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) + \frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_x^0 + \epsilon_y^0) , \tag{13}$$

πού ἔχει ἡ διόγκωση γιά τήν ἐπίπεδη ἔνταση. Ἀπό τήν ἄλλη πλευρά προσδιορίζουμε ἀπό τήν πρώτη ἐξ. (12β) τήν τρίτη μετατόπιση u_z, συναρτήσει τῶν δύο ἄλλων:

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = \epsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) - (\epsilon_x^0 + \epsilon_y^0)\right] . \tag{14}$$

Μετά ἀπό αὐτά εἰσάγουμε τήν τιμή (13) στίς δύο πρῶτες ἐξισώσεις τοῦ LAMÉ (ἐξ. 6.33γ) καί λαμβάνουμε ὑπόψη τίς δύο τελευταῖες ἐξ. (12β), οἱ ὁποῖες δίνουν

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\, \partial z} = -\frac{\partial \epsilon_z}{\partial x}\ , \qquad \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 u_z}{\partial y\, \partial z} = -\frac{\partial \epsilon_z}{\partial y}\,.$$

Σ᾽ αὐτές τίς ἰσότητες θέτουμε τήν ἔκφραση (14) τοῦ ϵ_z καί κατόπιν μετατρέπουμε τή λαπλασιανή Δ τῶν τριῶν παραμέτρων σέ λαπλασιανή $\bar{\Delta}$ τῶν δύο παραμέτρων x, y, μέ τή βοήθεια τῆς ἰσότητας

$$\Delta u_i = \bar{\Delta} u_i + \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} = \bar{\Delta} u_i - \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x_i}\,.$$

Ἐκτελῶντας τίς ἁπλοποιήσεις βρίσκουμε τελικά τίς ἐξισώσεις

$$\bar{\Delta} u_x + \frac{1+\nu}{1-\nu}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) + \frac{1}{G}\,(p_x + \overset{0}{p}_x) = 0\,, \tag{15α}$$

$$\bar{\Delta} u_y + \frac{1+\nu}{1-\nu}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) + \frac{1}{G}\,(p_y + \overset{0}{p}_y) = 0\,, \tag{15β}$$

μέ τούς φορτιστικούς ὅρους τοῦ καταναγκασμοῦ

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{G}\,\overset{0}{p}_x &= -\frac{2}{1-\nu}\,\frac{\partial}{\partial x}\,(\overset{0}{\epsilon}_x + \nu\,\overset{0}{\epsilon}_y) - \frac{\partial \overset{0}{\gamma}_{xy}}{\partial y} \\ \frac{1}{G}\,\overset{0}{p}_y &= -\frac{2}{1-\nu}\,\frac{\partial}{\partial y}\,(\overset{0}{\epsilon}_y + \nu\,\overset{0}{\epsilon}_x) - \frac{\partial \overset{0}{\gamma}_{xy}}{\partial x} \end{aligned}\right\}. \tag{16}$$

Οἱ τελευταῖοι προκύπτουν μέ τήν εἰδίκευση τοῦ τύπου (6.32) γιά τίς τιμές τοῦ ἐπίπεδου καταναγκασμοῦ καί μέ τή θεώρηση στίς ἐξ. (15) τῶν πρόσθετων ὅρων πού προέρχονται ἀπό τίς ἐξ. (13) καί (14).

Μέ τίς ἐξ. (15) καί τήν ἐξ. (14) καθορίζονται οἱ μετατοπίσεις u_x, u_y, u_z μιᾶς τ ρ ι π α ρ α μ ε τ ρ ι κ ῆ ς καταστάσεως. Αὐτή θά εἶναι ἐπίπεδη ὡς πρός τήν ἔνταση, μόνο ἐφόσον μέ τά δοσμένα αἴτια πληροῦνται [1] καί οἱ δύο τελευταῖες ἐξ. (12). Ὡς πρός τήν παραμόρφωση καί τή μετατόπιση ὁπωσδήποτε δ έ ν εἶναι ἐπίπεδη.

Τό ἐρώτημα πού ἀναφύεται τώρα εἶναι τό ἄν ὑπάρχει ἡ δ ι π α ρ α μ ε τ ρ ι κ ή ἐπίπεδη ἐντατική κατάσταση· ἡ ἀπάντηση σ᾽ αὐτό γενικά εἶναι ἀρνητική. [2] Πράγματι, ἄν ὑποθέσουμε ὅτι οἱ μετατοπίσεις τοῦ ἐπιπέδου εἶναι συναρτήσεις μόνο τῶν δύο μεταβλητῶν, δηλαδή ἄν

$$u_x = u_x(x, y)\ , \qquad u_y = u_y(x, y)\ , \tag{17}$$

τότε βρίσκουμε ἀπό τίς δύο τελευταῖες ἐξ. (12β) τίς σχέσεις $\partial u_z/\partial y = 0$ καί $\partial u_z/\partial x = 0$. Ἀπό αὐτές συνάγεται ὅτι τό u_z πρέπει νά εἶναι μιά καθαρή συνάρτηση τοῦ z μόνο, πράγμα πού ἀντίκειται στήν ἐξ. (14).

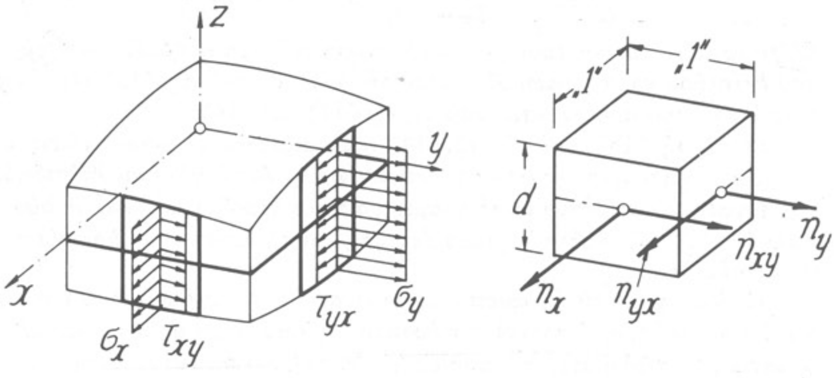
Τό πρόβλημα γιά τό ὁποῖο κυρίως ἐνδιαφερόμαστε ἀφορᾶ τό λ ε π τ ό δ ί σ κ ο, μ᾽ ἕνα πάχος d, σταθερό ἤ καί μεταβλητό. Στό δίσκο αὐτόν ἀπό τή μιά ἡ φόρτιση p_x, p_y κατανέμεται ὁμοιόμορφα κατά τό πάχος d

[1] Ἡ διερεύνηση παραλείπεται, γιατί παρουσιάζει μόνο μαθηματικό ἐνδιαφέρον.

[2] Ἡ διερεύνηση τῆς ἐπίπεδης παραμορφώσεως καί τῆς ἐπίπεδης ἐντάσεως γίνεται διεξοδικά στό σύγγραμμα τοῦ ΚΙΤΣΙΚΗ, Ν.: Στατική, 1. τομ. Ἀθῆναι 1938, σ. 237-254. [Β.10]. Βλ. ἐπίσης LITTLE [Γ.22], σ. 83-90.

καί ἀπό τήν ἄλλη στίς δύο όριακές ἐπιφάνειές του $z = \pm d/2$ — ἄν αὐτές εἶναι σχεδόν ἐπίπεδες — ἰσχύουν οἱ συνθῆκες $\tau_{yz} = \tau_{zx} = \sigma_z = 0$ τῆς ἐπίπεδης ἐντάσεως. Στίς ἴδιες ἐπιφάνειες θά ἔχουμε λοιπόν τίς τιμές $\partial\tau_{yz}/\partial y = 0$ καί $\partial\tau_{zx}/\partial x = 0$, οἱ ὁποῖες δίνουν, σέ συνδυασμό μέ τήν τρίτη συνθήκη ἰσορροπίας, τή σχέση $\partial\sigma_z/\partial z = 0$, γιά ὅλα τά σημεῖα τῶν ὁριακῶν ἐπιφανειῶν. Ἡ τελευταία σχέση μαζί μέ τήν $\sigma_z = 0$ ἐπιτρέπει νά δεχθοῦμε ὅτι ἡ σ_z καί στό ἐσωτερικό τοῦ λεπτοῦ δίσκου δέν μπορεῖ νά ἔχει ἀξιοπρόσεκτες τιμές. Ἔτσι δικαιολογεῖται ἡ πρώτη ἐξίσωση τῶν παραδοχῶν (9) ἀλλά καί οἱ δύο ἄλλες εἶναι ἐπακόλουθο τῶν προηγούμενων συλλογισμῶν.

Σέ μιά πρώτη φάση ἐπιζητοῦμε τήν ἐξασφάλιση τῆς ἰσορροπίας τοῦ δίσκου στό μέσο ἐπίπεδό του, γιατί, ὅπως διαπιστώσαμε, κάθετα σ' αὐτό οὔτε φόρτιση οὔτε τάσεις ἀσκοῦνται. Γιά τό σκοπό αὐτόν θεωροῦμε ἕνα στοιχεῖο τοῦ δίσκου πού ὁρίζεται ἀπό τίς δύο ὁριακές ἐπιφάνειες καί, ἐπάνω στό μέσο ἐπίπεδο, ἀπό δύο ζεύγη τομῶν παράλληλων μέ τούς ἄξονες συντεταγμένων x, y. Γιά τήν ἰσορροπία κατά τίς διευθύνσεις τῶν ἀξόνων



Σχ. 2. Οἱ δυνάμεις διατάσεως (μεμβράνης) τοῦ δίσκου.

αὐτῶν μποροῦμε νά συνθέσουμε προηγουμένως τίς τάσεις σ_x, σ_y, τ_{xy} ὅλου τοῦ πάχους d καί νά εἰσάγουμε τίς δυνάμεις

$$n_x = \int_d \sigma_x \, dz, \qquad n_y = \int_d \sigma_y \, dz, \qquad n_{xy} = \int_d \tau_{xy} \, dz. \qquad (18\alpha)$$

Αὐτές ὀνομάζονται δ υ ν ά μ ε ι ς μ ε μ β ρ ά ν η ς, γιατί ἐνεργοῦν ἐφαπτομενικά στό δίσκο, ἤ δ υ ν ά μ ε ι ς δ ι α τ ά σ ε ω ς, γιατί παραμορφώνουν τό δίσκο μέσα στό ἐπίπεδό του. Ἡ διάκριση γίνεται σέ ἀναφορά μέ τήν π λ ά κ α, πού ἔχει τό ἴδιο σχῆμα μέ τό δίσκο, ἀλλά ἐμφανίζει τίς δ υ ν ά μ ε ι ς κ ά μ ψ ε ω ς — δηλαδή ροπές — μέ ἀποτέλεσμα νά καμπυλώνεται αὐτή. Οἱ δυνάμεις διατάσεως μποροῦν νά θεωρηθοῦν ὅτι εἶναι οἱ συνιστα-

μένες τῶν τάσεων τοῦ δίσκου, οἱ ὁποῖες ἐνεργοῦν στή μονάδα μήκους ἐκείνων τῶν τομῶν τοῦ δίσκου πού εἶναι κάθετες ἐπάνω στό μέσο ἐπίπεδο.

Ἄν τώρα ὀνομάσουμε P_x, P_y τίς συνισταμένες τῶν φορτίων p_x, p_y σέ ὅλο τό πάχος τοῦ δίσκου, δηλαδή ἄν θέσουμε

$$P_x = \int_d p_x \, dz \,, \qquad P_y = \int_d p_y \, dz \,, \tag{18β}$$

τότε θά ἰσχύουν οἱ συνθῆκες ἰσορροπίας

$$\boxed{\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial y} + P_x = 0 \,, \qquad \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial n_y}{\partial y} + P_y = 0.} \tag{19}$$

Αὐτές προκύπτουν στατικά ὅπως οἱ ἐξ. (5) καί μαθηματικά μέ τήν ὁλοκλήρωση τῶν ἐξ. (5) ὡς πρός z καί μετά μέ τήν ἀντικατάσταση τῶν τιμῶν (18α) καί (18β). Οἱ P_x, P_y συνήθως συμβολίζονται μέ τά p_x, p_y, στήν περίπτωση ὅμως αὐτή τά φορτία αὐτά δέν εἶναι ἀνηγμένα στή μονάδα ὄγκου, ὅπως στίς ἐξ. (5), ἀλλά στή μονάδα μήκους τῶν γραμμῶν συντεταγμένων τοῦ μέσου ἐπιπέδου.

Μετά ἀπό αὐτά δεχόμαστε γιά τό δίσκο μιά *ἐντατική κατάσταση σχεδόν ἐπίπεδη* (quasi-plane), δηλαδή *κατά μέσο ὅρο ἐπίπεδη καί διπαραμετρική*[1], μέ χαρακτηριστικά μεγέθη τίς *μέσες* τιμές τῶν τάσεων

$$\sigma_x = \frac{1}{d} n_x \,, \quad \sigma_y = \frac{1}{d} n_y \,, \quad \tau_{xy} = \frac{1}{d} n_{xy} \,, \tag{20}$$

Αὐτές δίνουν τίς *διπαραμετρικές* μέσες τιμές τῶν παραμορφώσεων (10α) καί (10γ) καί στή συνέχεια τίς *διπαραμετρικές* ἐπίσης μέσες τιμές τῶν μετατοπίσεων u_x, u_y, πού προκύπτουν ἀπό τίς ἐξ. (12α). Ἄν θέλαμε νά ἐργαστοῦμε μέ τίς δυνάμεις διατάσεως, ὁ νόμος ἐλαστικότητας (10α) θά εἶχε τή μορφή

$$\epsilon_x = \frac{1}{Ed}(n_x - \nu n_y) + \overset{0}{\epsilon}_x \,, \quad \epsilon_y = \frac{1}{Ed}(n_y - \nu n_x) + \overset{0}{\epsilon}_y \,, \quad \gamma_{xy} = \frac{n_{xy}}{Gd} + \overset{0}{\gamma}_{xy} \,, \tag{21}$$

Μένει ἀκόμη ἀνοικτό τό θέμα τῶν παραμορφώσεων γ_{yz}, γ_{zx}, ϵ_z καί τῆς μετατοπίσεως u_z, τίς ὁποῖες ὅμως τώρα ἀρκεῖ νά ὁρίσουμε κατά μέσο ὅρο, δηλαδή *μόνο ἐπάνω στό μέσο ἐπίπεδο*. Ἡ διατήρηση τῆς ἐπίπεδης μορφῆς τοῦ δίσκου ἐπιβάλλει τή μέση τιμή u_z = σταθ. = 0, ἐνῶ οἱ μηδενικές τάσεις τ_{yz} καί τ_{zx} ἐπιβάλλουν μηδενικές ὀλισθήσεις γ_{yz}, γ_{zx}. Ἔτσι σάν μέση τιμή τῆς ϵ_z μποροῦμε νά δεχθοῦμε αὐτή πού δίνεται ἀπό τήν ἐξ. (10γ). Ἡ ϵ_z ἔχει σάν συνέπεια τήν αὔξηση τοῦ πάχους τοῦ δίσκου κατά $\epsilon_z d$, μιά αὔξηση πού εἶναι μεταβλητή ἀπό σημεῖο σέ σημεῖο τοῦ μέσου ἐπιπέδου.

---

[1] Γιά τή σχετική διερεύνηση βλ. TIMOSHENKO - GOODIER [Γ.42], σ. 270.

9.2. Ἡ μέθοδος τῆς τασεοσυναρτήσεως

Ἡ μέθοδος τάσεων ἁπλοποιεῖται σημαντικά μέ τή χρησιμοποίηση τῆς τασεοσυναρτήσεως $F(x, y)$, πού εἰσήγαγε ὁ AIRY[1]. Γιά νά καταλήξουμε σέ πιό γενικές ἐξισώσεις, θεωροῦμε σάν γνωστή μιά ε ἰ δ ι κ ή λύση σ_x^p, σ_y^p, τ_{xy}^p, πού πληροῖ μ ό ν ο τίς στερεοστατικές συνθῆκες (5). Οἱ τάσεις τότε δίνονται μέ τίς ἐκφράσεις

$$\boxed{\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \sigma_x^p , \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \sigma_y^p , \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} + \tau_{xy}^p ,} \tag{26}$$

γιατί αὐτές πληροῦν ἐκ ταυτότητος τίς συνθῆκες ἰσορροπίας. Ἡ διαφορική ἐξίσωση τῆς ἄγνωστης τασεοσυναρτήσεως προκύπτει ἀπό τή συνθήκη συμβιβαστοῦ τῶν τάσεων (24) μέ τήν εἰσαγωγή τῶν προηγούμενων τιμῶν· αὐτές δίνουν

$$\sigma_x + \sigma_y = \Delta F + (\sigma_x^p + \sigma_y^p) . \tag{27}$$

Ἔτσι ἡ (24) γίνεται

$$\boxed{\Delta\Delta F + [\Delta(\sigma_x^p + \sigma_y^p) + (1+\nu)(p + p^0)] = 0 ,} \tag{28}$$

ὅπου $\Delta\Delta$ ἡ διπλή λαπλασιανή μέ τή μορφή

$$\boxed{\Delta\Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\, \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} .} \tag{29}$$

Ἀπό τίς τάσεις (26) ὑπολογίζονται οἱ παραμορφώσεις (πρβ. ἐξ. 10α) καί ἀπό αὐτές, μέ τήν ὁλοκλήρωση τῶν ἐξισώσεων $\epsilon_x = \partial u_x / \partial x$ καί $\epsilon_y = \partial u_y / \partial y$, οἱ μετατοπίσεις :

$$\left.\begin{aligned} E u_x &= \int (\sigma_x - \nu\sigma_y)\, dx + E\int \epsilon_x^0\, dx + \omega_y(y) \\ E u_y &= \int (\sigma_y - \nu\sigma_x)\, dy + E\int \epsilon_y^0\, dy + \omega_x(x) \end{aligned}\right\} . \tag{30α}$$

Οἱ δύο συναρτήσεις ὁλοκληρώσεως $\omega_y(y)$ καί $\omega_x(x)$ δέν εἶναι ἀνεξάρτητες μεταξύ τους, γιατί ὑποχρεωτικά ἰσχύει ἡ συνθήκη

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} + \gamma_{xy}^0 = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} + \gamma_{xy}^0 . \tag{30β}$$

Μετά τήν εἰσαγωγή τῶν τιμῶν (30α) αὐτή γίνεται ἀρχικά

[1] AIRY, G. B.: On the strains in the interior of beams, Lond. Phil. Trans. Vol. 153 (1863) p. 42 καί British Assoc. Report p. 82, Cambridge 1862.

$$\int\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}-\nu\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+E\frac{\partial\epsilon_x^0}{\partial y}\right)dx+\int\left(\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}-\nu\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+E\frac{\partial\epsilon_y^0}{\partial x}\right)dy$$
$$+\frac{d\omega_x}{dx}+\frac{d\omega_y}{dy}=2(1+\nu)\,\tau_{xy}+E\gamma_{xy}^0 \qquad (30\gamma)$$

καί κατόπιν, μέ τή θεώρηση τῶν συνθηκῶν ἰσορροπίας (5), ἀποκτᾶ τήν τελική της μορφή

$$\frac{d\omega_x}{dx}+\frac{d\omega_y}{dy}+\int\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}+\nu p_y+E\frac{\partial\epsilon_x^0}{\partial y}\right)dx+\int\left(\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}+\nu p_x+E\frac{\partial\epsilon_y^0}{\partial x}\right)dy$$
$$=(2+\nu)\,\tau_{xy}+E\gamma_{xy}^0+\text{σταθ.} \qquad (30\delta)$$

Οἱ μαζικές δυνάμεις p_x, p_y κατά κανόνα εἶναι σ υ ν τ η ρ η τ ι κ έ ς, προέρχονται δηλαδή ἀπό ἕνα δυναμικό V μέ τήν ἐκτέλεση τῶν παραγωγίσεων:

$$p_x=-\frac{\partial V}{\partial x},\qquad p_y=-\frac{\partial V}{\partial y}. \qquad (31\alpha)$$

Σ' αὐτή τήν περίπτωση ὁ τύπος (25α) δίνει

$$p=\frac{\partial p_x}{\partial x}+\frac{\partial p_y}{\partial y}=-\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)=-\Delta V. \qquad (31\beta)$$

'Από τήν ἄλλη πλευρά μπορεῖ νά τεθεῖ

$$\sigma_x^p=V,\qquad \sigma_y^p=V,\qquad \tau_{xy}^p=0. \qquad (31\gamma)$$

'Αλλά καί τά φορτία τοῦ καταναγκασμοῦ μπορεῖ νά δίνουν ἀνάλογα ἀποτελέσματα. Ἔτσι γιά τή θερμοκρασιακή ἀλλαγή κατά $T(x,y)$ βαθμούς ἡ ἀρχική παραμόρφωση ἔχει τίς τιμές

$$\epsilon_x^t=\epsilon_y^t=\alpha\,T(x,y),\qquad \gamma_{xy}^t=0, \qquad (32\alpha)$$

ὅπου α ὁ συντελεστής τῆς θερμικῆς διαστολῆς τοῦ ὑλικοῦ. Μέ τίς τιμές αὐτές ὁ τύπος (25β) δίνει

$$p_0=2G\alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)=\frac{E\alpha}{1+\nu}\,\Delta T. \qquad (32\beta)$$

Στήν ὑπόψη περίπτωση ἡ διαφορική ἐξίσωση γίνεται

$$\boxed{\Delta\Delta F+\Delta\left[(1-\nu)V+E\alpha T\right]=0.} \qquad (33)$$

'Από τήν ἄλλη πλευρά οἱ ἐκφράσεις (30α) καί (30δ) τῶν μετατοπίσεων ἀποκτοῦν ἁπλούστερη μορφή, ἐφόσον μάλιστα χρησιμοποιηθοῦν καί οἱ τύποι (26). Ἔτσι ἔχουμε

$$\left.\begin{aligned} E u_x &= \int \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + (1-\nu) V \right] dx - \nu \frac{\partial F}{\partial x} + E\alpha \int T\, dx + \bar{\omega}_y \\ E u_y &= \int \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + (1-\nu) V \right] dy - \nu \frac{\partial F}{\partial y} + E\alpha \int T\, dy + \bar{\omega}_x \end{aligned}\right\} . \qquad (34\alpha)$$

$$\frac{\partial \bar{\omega}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\omega}_y}{\partial y} + \int \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} dx + \int \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} dy + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} +$$
$$+ (1-\nu) \int \left(\frac{\partial V}{\partial y} dx + \frac{\partial V}{\partial x} dy \right) + E\alpha \int \left(\frac{\partial T}{\partial y} dx + \frac{\partial T}{\partial x} dy \right) = \text{σταθ.} \qquad (34\beta)$$

Τέλος ἡ πιό συνηθισμένη περίπτωση εἶναι ἡ περίπτωση σωληνοειδοῦς πεδίου δυνάμεων καί θερμοκρασίας. Τότε ἰσχύουν οἱ συνθῆκες

$$\Delta V = 0 , \quad \Delta T = 0$$

καί ἡ διαφορική ἐξίσωση (33) τοῦ προβλήματος γίνεται διαρμονική :

$$\boxed{\Delta\Delta F = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 .} \qquad (35)$$

Οἱ ἐκφράσεις (34α) τῶν μετατοπίσεων παραμένουν ἀναλλοίωτες, μόνο πού στή συνθήκη (34β) ἐξαφανίζονται τά ὁλοκληρώματα πού περιέχουν τά μεγέθη V καί T.

Καί γιά τή μέθοδο μετατοπίσεων ὁ MARGUERRE ἔδωσε μιά συνάρτηση μετατοπίσεων $\psi(x,y)$, μέ τήν ὁποία μποροῦν νά ἐκφραστοῦν ὅλα τά μεγέθη.[1] Γιά τήν περίπτωση τῆς ὁμοιογενοῦς καταστάσεως, δηλαδή αὐτῆς πού δέν παρουσιάζει μαζική φόρτιση ἤ ἐσωτερικό καταναγκασμό, οἱ μετατοπίσεις μποροῦν νά ἐκφραστοῦν κατά τόν τρόπο

$$u_x = - \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} , \qquad u_y = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \Delta\psi , \qquad (36\alpha)$$

ἐφόσον ἡ ψ εἶναι διαρμονική συνάρτηση :

$$\Delta\Delta\psi = 0. \qquad (36\beta)$$

Πράγματι, ἄν τεθοῦν οἱ τιμές (36α) στίς καθοριστικές διαφορικές ἐξ. (14) καί ἄν ληφθεῖ ὑπόψη ἡ (36β), τότε οἱ ἐξ. (15) πληροῦνται ἐκ ταυτότητος. Ἑπομένως μέ τίς ἐκφράσεις (36α) μποροῦν νά ὑπολογιστοῦν πρῶτα ἀπό τούς τύπους (2β) οἱ παραμορφώσεις καί μετά ἀπό τούς (11) οἱ τάσεις :

---

[1] MARGUERRE, K. : Ebenes und achsensymmetrisches Problem der Elastizitätstheorie, ZAMM, 13(6), 437, 1933.

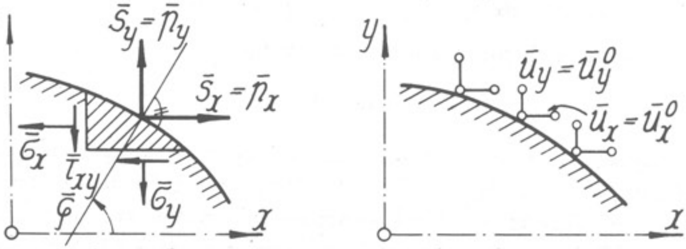
$$\left.\begin{aligned}\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(-\frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\,\partial y} + \nu\,\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}\right), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left[(2+\nu)\,\frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\,\partial y} + \frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}\right] \\ \tau_{xy} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} - \nu\,\frac{\partial^3\psi}{\partial x\,\partial y^2}\right)\end{aligned}\right\} \cdot (37)$$

Παρόλο πού ἡ ὑπόψη μέθοδος δέν ἀπαιτεῖ καμιά ὁλοκλήρωση γιά τόν προσδιορισμό τῶν μεγεθῶν ἐντάσεως καί μετατοπίσεως, κατά κανόνα ὑστερεῖ συγκριτικά μέ τή μέθοδο τῆς τασεοσυναρτήσεως.

Ἡ ὁλοκλήρωση τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων τῆς ἐπίπεδης ἐντάσεως ἀπαιτεῖ τήν ὕπαρξη δ ύ ο σ υ ν ο ρ ι α κ ῶ ν σ υ ν θ η κ ῶ ν· ἀκριβῶς τόσες δίνει καί τό φυσικό πρόβλημα. Ἄν π.χ. τό σύνορο, δηλαδή ἡ γραμμή τοῦ περιγράμματος τοῦ δίσκου, εἶναι ἐ λ ε ύ θ ε ρ ο, τότε ἐπάνω σ' αὐτό εἶναι γνωστή ἡ φόρτιση, μέ τίς συνιστῶσες της $\bar{p}_x$ καί $\bar{p}_y$ · αὐτές μπορεῖ νά εἶναι ἀκόμη καί μηδενικές. Οἱ τάσεις λοιπόν $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$, $\bar{\tau}_{xy}$ πρέπει νά δίνουν, γιά τίς τομές πού ἐφάπτονται ἐπάνω στό σύνορο, δύο συνιστῶσες $\bar{s}_x$ καί $\bar{s}_y$ ἴσες ἀκριβῶς μέ τή δοσμένη φόρτιση $\bar{p}_x$, $\bar{p}_y$. Ἀπό τό αἴτημα αὐτό καί μέ τή βοήθεια τῶν ἐξ. (3.20) προκύπτουν οἱ δ ύ ο συνοριακές συνθῆκες

$$\bar{s}_x = \bar{\sigma}_x \cos\bar{\phi} + \bar{\tau}_{xy} \sin\bar{\phi} = \bar{p}_x \ , \quad \bar{s}_y = \bar{\tau}_{xy} \cos\bar{\phi} + \bar{\sigma}_y \sin\bar{\phi} = \bar{p}_y \, . \qquad (38)$$

Μέ τή μορφή αὐτή ἐφαρμόζονται οἱ συνοριακές συνθῆκες, ὅταν πρόκειται νά ὁλοκληρωθοῦν οἱ δύο στατικές συνθῆκες (5) μαζί μέ τή συνθήκη συμβιβαστοῦ (24). Ἄν ὅμως ἡ ὁλοκλήρωση γίνεται γιά τίς ἐξ. (14) ἤ τήν (28) ἤ τήν (36β), τότε στίς συνοριακές συνθῆκες (38) οἱ τάσεις ἐκφράζονται ἀντίστοιχα μέ τίς μετατοπίσεις $\bar{u}_x$, $\bar{u}_y$ ἤ μέ τή συνάρτηση AIRY ἤ μέ τή συνάρτηση MARGUERRE.



Σχ. 3. Συνοριακές συνθῆκες τοῦ δίσκου.

Ἀντίθετα ἀπό τό ἐλεύθερο, στό ἑ δ ρ α ζ ό μ ε ν ο σύνορο, ὅπου ὑπάρχει μιά στήριξη πού ἐμποδίζει καί τίς δύο μετατοπίσεις $\bar{u}_x$, $\bar{u}_y$, θά ἰσχύουν οἱ συνοριακές συνθῆκες

$$\bar{u}_x = \bar{u}_x^0 \quad , \quad \bar{u}_y = \bar{u}_y^0 , \tag{39}$$

ὅπου $\bar{u}_x^0$, $\bar{u}_y^0$ ἡ δοσμένη καταναγκασμένη μετατόπιση τοῦ συνόρου, πού μπορεῖ νά εἶναι καί μηδενική. Στή μέθοδο μετατοπίσεων οἱ συνθῆκες αὐτές ἐφαρμόζονται αὐτούσιες, ἐνῶ στή μέθοδο τάσεων εἰσάγονται γιά τίς $\bar{u}_x$, $\bar{u}_y$ οἱ ἐκφράσεις (30α) ἤ (34α).

Στό ἐλεύθερο σύνορο εἶναι γνωστές ἐξαρχῆς οἱ δύο δυνάμεις $\bar{s}_x$, $\bar{s}_y$ καί μετά τή λύση τοῦ προβλήματος προκύπτουν οἱ ἄγνωστες τιμές $\bar{u}_x$, $\bar{u}_x$ τῶν μετατοπίσεων τοῦ συνόρου. 'Αντίθετα στό ἑδραζόμενο σύνορο προκαθορίζονται οἱ δύο μετατοπίσεις καί μετά τόν ὑπολογισμό προκύπτουν οἱ τιμές τῶν δύο δυνάμεων $\bar{s}_x$, $\bar{s}_y$, πού εἶναι οἱ ἀντιδράσεις τοῦ συνόρου. Ἐκτός ὅμως ἀπό αὐτές τίς δύο περιπτώσεις ἀ μ ι γ ῶ ν συνοριακῶν συνθηκῶν, μποροῦμε νά ἔχουμε καί μ ι κ τ έ ς. Εἶναι π.χ. δυνατό νά δίνεται ἡ δύναμη $\bar{s}_x$ καί ἡ κ ά θ ε τ η μετατόπισή της $\bar{u}_y^0$ ἤ ἀντίστροφα ἡ δύναμη $\bar{s}_y$ καί ἡ κ ά θ ε τ η μετατόπισή της $\bar{u}_x^0$.

Τελειώνοντας πρέπει νά ἀναφέρουμε καί τήν ἀ ρ χ ή τ ῆ ς ἐ π α λ λ η λ ί α ς, πού ἐξακολουθεῖ πάντα νά ἰσχύει. Εἰδικότερα, ὅταν χρησιμοποιοῦμε τήν τασεοσυνάρτηση τοῦ AIRY ἤ τή συνάρτηση τοῦ MARGUERRE, πρέπει νά ἔχουμε ὑπόψη ὅτι ἡ γραμμική μορφή τῶν καθοριστικῶν τους ἐξισώσεων (28) καί (36β) ἐπιτρέπει τήν ἐφαρμογή τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπαλληλίας καί γιά τίς ἴδιες τίς συναρτήσεις. Ἔτσι, ἄν ἡ λύση τοῦ προβλήματος ἑνός δίσκου ὁ ρ ι σ μ έ ν η ς μ ο ρ φ ῆ ς κ α ί σ τ η ρ ί ξ ε ω ς, γιά τά αἴτια (a_1) καί (a_2), δίνεται ἀπό τίς τασεοσυναρτήσεις ἀντίστοιχα F_1 καί F_2 , τότε τό ἄθροισμα $F_1 + F_2$ παριστάνει τή λύση γιά τήν περίπτωση $(a_1 + a_2)$ τῆς συνυπάρξεως τῶν δύο αἰτίων.

'Α σ κ ή σ ε ι ς

1. Νά ἐπαληθευθοῦν οἱ ἐξ. (15) καί οἱ τύποι (16).
2. Νά ἐπαληθευθοῦν οἱ ἐξ. (24) καί οἱ τύποι (25).
3. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ παραδοχή (36α), μαζί μέ τήν (36β), ἐπαληθεύουν ἐκ ταυτότητος τίς ἐξ. (14). Νά ὑπολογιστοῦν οἱ τάσεις (37).
4.* Ἄν ἕνας ἐσωτερικός καταναγκασμός ϵ_x^0 , ϵ_y^0 , γ_{xy}^0 πληροῖ τή συνθήκη συμβιβαστοῦ (23) καί ἄν ὁ δίσκος περικλείνεται ἀπό ἕνα τελείως ἐλεύθερο σύνορο, τότε τί τάσεις θά δημιουργηθοῦν ; Πῶς ὑπολογίζονται οἱ μετατοπίσεις ;

9.3. Ὁ ἔλεγχος τῶν γνωστῶν λύσεων

'Από τήν ἀντοχή τῶν ὑλικῶν, ἀλλά καί μέ ἄλλους τρόπους, καταλήγουμε σέ λύσεις ὁρισμένων ἁπλῶν προβλημάτων,[1] οἱ ὁποῖες γιά νά ἑδραιω-

[1] Ἡ μεθοδική ἐπίλυση, μέ τή βοήθεια τῆς συναρτήσεως AIRY, ὅλων τῶν κλασικῶν προβλημάτων τοῦ δίσκου, βρίσκεται στά συγγράμματα τῶν TIMOSHENKO-GOODIER [Γ.42] καί τοῦ GIRKMANN [Γ.11]. Βλ. ἐπίσης ΣΥΡΜΑΚΕΖΗ [Γ.39].

θοῦν χρειάζονται ἕναν ἔλεγχο βάσει τῶν αὐστηρῶν συνθηκῶν τῆς θεωρίας τοῦ δίσκου. Ὁ ἔλεγχος αὐτός ἀπαιτεῖ τήν ἐπαλήθευση:

— τῶν στατικῶν συνθηκῶν (5),

— τῆς συνθήκης συμβιβαστοῦ (24) ἤ (28) ἤ (33) ἤ (35) καί

— τῶν συνοριακῶν συνθηκῶν τοῦ προβλήματος.

Ὅταν ἀποκλειστοῦν ἀπό τή φόρτιση οἱ μοναχικές δυνάμεις, τότε πρέπει ἐπιπλέον οἱ λύσεις νά δίνουν τάσεις μέ πεπερασμένες τιμές σέ ὅλη τήν ὑλική περιοχή τοῦ δίσκου.

Ἀρχίζοντας ἀπό τό πιό ἁπλό παράδειγμα, δηλαδή τοῦ ὀρθογωνικοῦ δίσκου πού ἐφελκύεται στά δύο ἄκρα του μέ τίς ὁμοιόμορφα κατανεμημένες τάσεις $\bar{p}_x$ = σταθ., δοκιμάζουμε τή γνωστή λύση

$$\sigma_x = \bar{p}_x \, , \quad \sigma_y = 0 \, , \quad \tau_{xy} = 0 .$$

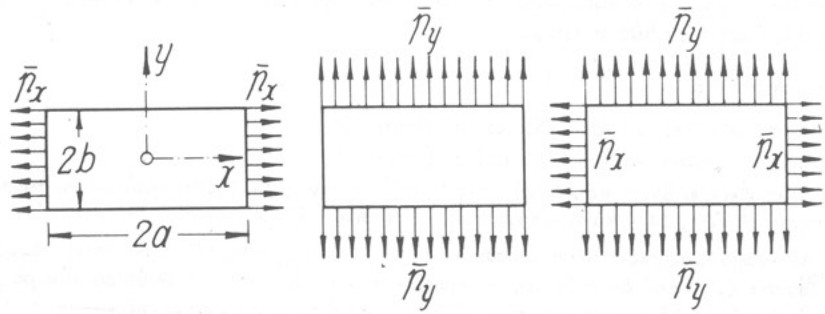
Αὐτή εἶναι ἡ αὐστηρή λύση, γιατί ἐπαληθεύει τίς (5), τήν (35) καί τίς συνοριακές συνθῆκες, πού ἐδῶ εἶναι :

$$\text{γιά} \quad x = \pm a : \quad \bar{\sigma}_x = \bar{p}_x \, , \quad \bar{\tau}_{xy} = 0 ,$$

$$\text{γιά} \quad y = \pm b : \quad \bar{\sigma}_y = 0 \, , \quad \bar{\tau}_{xy} = 0 .$$

Μέ τήν ἀνταλλαγή τῶν δεικτῶν x καί y μποροῦμε ἀμέσως νά γράψουμε τή λύση

$$\sigma_x = 0 \, , \quad \sigma_y = \bar{p}_y \, , \quad \tau_{xy} = 0$$



Σχ. 4. Ὀρθογωνικός δίσκος μέ μονό- καί διαξονικό ἑλκυσμό.

γιά τήν ὁμοιόμορφη ἕλξη κατά τή διεύθυνση y καί, ἐφαρμόζοντας τήν ἀρχή τῆς ἐπαλληλίας, νά συνθέσουμε τή λύση

$$\sigma_x = \bar{p}_x \, , \quad \sigma_y = \bar{p}_y \, , \quad \tau_{xy} = 0$$

γιά τήν ὁμοιόμορφη φόρτιση καί κατά τίς δύο διευθύνσεις.

Ἄν πρόκειται γιά πρόβλημα κάμψεως δοκοῦ, τότε, στή διατομή πού