**Ντίνης Ορέστης - Θωμάς**

Αγρονόμος & Τοπογράφος Μηχανικός

# Τοπογραφικά Δίκτυα

## Στατιστική επεξεργασία & Συνόρθωση

- Θεωρία
- Πολλές λυμένες ασκήσεις

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο υπογράφεται από το συγγραφέα

ISBN 978-960-456-324-1



**Φωτοστοιχειοθεσία**
**Εκτύπωση**
**Βιβλιοδεσία**

**Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ**
18ο χλμ Θεσσαλονίκης - Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

www.ziti.gr

**ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ:**
Αρμενοπούλου 27 - 546 35 Θεσσαλονίκη • Τηλ.: 2310-203.720 • Fax 2310-211.305
e-mail: sales@ziti.gr

**ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΕΝΩΣΗ ΕΚΔΟΤΩΝ ΒΙΒΛΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ:**
Στοά του Βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5) - 105 64 ΑΘΗΝΑ • Τηλ.-Fax: 210-3211.097

**ΑΠΟΘΗΚΗ ΑΘΗΝΩΝ - ΠΩΛΗΣΗ ΧΟΝΔΡΙΚΗ:**
Ασκληπιού 60 - Εξάρχεια 114 71, Αθήνα • Τηλ.-Fax: 210-3816.650 • e-mail: athina@ziti.gr

**ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ:** www.ziti.gr

# Εισαγωγή

Στην ανώτερη γεωδαισία όπου όλες οι μετρήσεις πραγματοποιούνται με τη χρήση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων λαμβάνονται υπόψη η ένταση της βαρύτητας, η διεύθυνση της βαρύτητας, δηλαδή οι επιδράσεις του γήινου πεδίου βαρύτητας, αλλά και η ατμόσφαιρα κυρίως όσον αφορά τη μεταβολή της θερμοκρασίας και τον βαθμό ιονισμού της με αποτέλεσμα κάθε ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία μέσα στην ατμόσφαιρα να αποκλίνει από την ευθύγραμμη διάδοση και να καθυστερεί.

Οι Τοπογράφοι Μηχανικοί όμως στο πολύ μεγάλο φάσμα των εφαρμογών, επιστημονικών ερευνών και άλλων εργασιών με τις οποίες ασχολούνται στο τοπογραφικό πεδίο έχουν βασική επιδίωξη την εύρεση των σχετικών αγνώστων παραμέτρων με τη μέγιστη δυνατή ακρίβεια. Για την επίτευξη αυτού του στόχου τόσο για μετρήσεις που αφορούν ένα συγκεκριμένο είδος παρατήρησης π.χ. γωνία, απόσταση, υψομετρική διαφορά όσο και για σύνθετες παρατηρήσεις που γίνονται στο πλαίσιο δικτύων για την αποτύπωση μιας περιοχής αναπτύχθηκαν οι μέθοδοι συνόρθωσης ώστε να καλύπτουν τις διάφορες περιπτώσεις οι οποίες είναι δυνατό να παρουσιαστούν πρακτικά. Στο βιβλίο αυτό αναλύονται σε τρία κεφάλαια όλα τα παραπάνω στοιχεία κατά τρόπο ώστε μετά τα θεωρητικά θέματα που είναι στην αρχή να υπάρχουν πολλές λυμένες ασκήσεις για καλύτερη κατανόηση των εννοιών και ασκήσεις προς λύση για να δοκιμάσει ο αναγνώστης μόνος του να εφαρμόσει όλα όσα διάβασε.

Έτσι στο *πρώτο κεφάλαιο* γίνεται αναφορά στην έννοια της συνόρθωσης, στις μεθόδους της, στους πίνακες – στις εξισώσεις και στους αλγόριθμους εφαρμογής της κάθε μεθόδου, στην στατιστική αξιολόγηση των αποτελεσμάτων, στη συνόρθωση οριζόντιων – χωροσταθμικών δικτύων και στους μετασχηματισμούς (ομοιότητας – αφινικό).

Στο *δεύτερο κεφάλαιο* που ασχολείται με την στατιστική επεξεργασία των τοπογραφικών παρατηρήσεων εξετάζονται οι τυχαίες μεταβλητές (διακριτές και συνεχείς), η εκτίμηση των παραμέτρων, ο νόμος μετάδοσης των σφαλμάτων (συμμεταβλητοτήτων) ο οποίος έχει τον πιο σημαντικό ρόλο σε πάρα πολλές περιπτώσεις και τα διαστήματα εμπιστοσύνης – έλεγχοι ακρίβειας στοιχεία πάρα πολύ χρήσιμα σε πρακτικές εφαρμογές. Παρατίθενται επίσης και οι πίνακες κατανομών για τη λήψη στοιχείων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για ασκήσεις πέραν αυτού του βιβλίου.

Στο *τρίτο κεφάλαιο* όπου αναπτύσσονται τα τοπογραφικά δίκτυα παρουσιάζονται τα είδη τους, η ακρίβεια τους, ο παραμετρικός βαθμός, η αδυναμία βαθμού, η

αξιοπιστία τους, οι συνορθώσεις των οριζόντιων – χωροσταθμικών δικτύων και ο σχεδιασμός τους.

Στο τέλος υπάρχει ένα *παράρτημα με μαθηματικές σχέσεις* (παράγωγοι, πίνακες, εξισώσεις, ταυτότητες κ.α.) όπου είναι συγκεντρωμένοι αρκετοί τύποι που θα βοηθήσουν στις συγκεκριμένες ασκήσεις αλλά και γενικότερα.

Ελπίζω ότι με τον τρόπο που έχει γραφεί το βιβλίο θα αποτελέσει ένα χρήσιμο εργαλείο για τους φοιτητές – σπουδαστές οι οποίοι ασχολούνται με το αντικείμενο αυτό για να το κατανοήσουν καλύτερα τόσο θεωρητικά όσο και πρακτικά αποσαφηνίζοντας τα περισσότερα δυνατόν θέματα.

Θεσσαλονίκη, Απρίλιος 2012

# Περιεχόμενα

## *Κεφάλαιο 1*
## Συνόρθωση



## *Κεφάλαιο 2*
## Στατιστική επεξεργασία τοπογραφικών παρατηρήσεων

## *Κεφάλαιο 3*
## Τοπογραφικά δίκτυα



## *Παράρτημα*
## Τυπολόγιο

# 1 Συνόρθωση

## 1.1 Το πρόβλημα της συνόρθωσης

### α) Η έννοια της συνόρθωσης

Η λογική που ακολουθείται στην Τοπογραφία είναι των διαδοχικών προσεγγίσεων από το γενικότερο προς το ειδικότερο. Για να φτάσουμε όμως στην αποτύπωση των σημείων λεπτομερειών πρέπει πρώτα να προηγηθούν οι τριγωνισμοί διαφόρων τάξεων και η πολυγωνομετρία όπως και οι αντίστοιχες εργασίες χωροστάθμησης.

Η αποτύπωση ξεκινά από τη δημιουργία ενός οριζόντιου και ενός χωροσταθμικού δικτύου που συνήθως αλλά όχι αναγκαστικά συνδέονται με παρόμοια δίκτυα ανώτερης τάξης τα οποία προϋπάρχουν στην περιοχή.

Επομένως:

➲ Σκοπός αποτύπωσης: προσδιορισμός σχήματος και μεγέθους δικτύου (αναλόγως των παρατηρήσεων),

➲ Είδη δικτύων:
- ανεξάρτητα (δε συνδέονται με προϋπάρχοντα δίκτυα στην περιοχή)
- εξαρτημένα ή ενταγμένα (συνδέονται με προϋπάρχοντα δίκτυα στην περιοχή)

Ως άγνωστες παράμετροι στη συνόρθωση επιλέγονται οι συντεταγμένες καθώς είναι πολύ εύκολο από αυτές να υπολογισθούν με τη βοήθεια απλών σχετικά σχέσεων της Αναλυτικής Γεωμετρίας και της Τριγωνομετρίας όλα τα υπόλοιπα γεωμετρικά στοιχεία του δικτύου (γωνίες και πλευρές). Τα προβλήματα που δημιουργούνται από τη χρήση των συντεταγμένων είναι τα εξής:

i) Επιλογή των συντεταγμένων σαν εργαλείο για την περιγραφή της γεωμετρικής μορφής του δικτύου.

ii) Δεν είναι δυνατόν να προκύψουν οι πραγματικές τιμές των μεγεθών τα οποία μετράμε, εξαιτίας των αναπόφευκτων σφαλμάτων των μετρήσεων. Έτσι και οι

υπολογισμένες συντεταγμένες θα είναι επηρεασμένες από τα σφάλματα των μετρήσεων.

Το πρώτο πρόβλημα ξεπερνιέται είτε εισάγοντας «ένα αυθαίρετο σύστημα αναφοράς» (ανεξάρτητα δίκτυα), είτε συμπεριλαμβάνοντας στα δίκτυα σημεία που ανήκουν σε προϋπάρχον δίκτυο και έχουν γνωστές (υπολογισμένες) συντεταγμένες.

Το δεύτερο πρόβλημα για να αντιμετωπιστεί πρέπει:

- Να αναζητηθεί εκείνος ο συνδυασμός μετρήσεων τόσων όσες και οι άγνωστες συντεταγμένες με τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια, κάτι το οποίο συνήθως στην πράξη δε γίνεται.
- Να γίνουν περισσότερες από m μετρήσεις, όπου m είναι ο αριθμός των αγνώστων. Ο αριθμός $f = n - m$ ονομάζεται βαθμός ελευθερίας. Το πρόβλημα της επιλογής του ποιες και πόσες από τις δυνατές μετρήσεις πρέπει να γίνουν ώστε να ικανοποιηθούν οι απαιτήσεις ακρίβειας των συντεταγμένων είναι ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης.

Πρέπει να επιλεγεί η βέλτιστη μέθοδος υπολογισμού, εκείνη δηλαδή που οδηγεί στις λιγότερο επηρεασμένες από τα σφάλματα των μετρήσεων συντεταγμένες. Αυτό γίνεται με τη συνόρθωση των παρατηρήσεων. Δεν υπάρχει μία μέθοδος συνόρθωσης επειδή δεν υπάρχει ένας μοναδικός τρόπος καθορισμός του τι ακριβώς είναι βέλτιστη μέθοδος.

## β) Μέθοδοι συνόρθωσης

Το πρόβλημα συνόρθωσης των παρατηρήσεων προκύπτει όταν έχουμε περισσότερες παρατηρήσεις από τον αριθμό των αγνώστων. Δηλαδή: $n > m$, όπου $n$ είναι ο αριθμός των παρατηρήσεων και $m$ είναι ο αριθμός των αγνώστων.

Αναλόγως του αριθμού m των αγνώστων στο πρόβλημα και της γενικής μορφής των εξισώσεων που συνδέουν τις παρατηρούμενες παραμέτρους $y_n^\alpha$ με τις άγνωστες παραμέτρους $x_m^\alpha$ έχουμε τις παρακάτω μεθόδους συνόρθωσης:

- Εξισώσεις παρατηρήσεων
- Εξισώσεις συνθηκών
- Μικτές εξισώσεις
- Εξισώσεις παρατηρήσεων με $k$ δεσμεύσεις
- Μικτές εξισώσεις με $k$ δεσμεύσεις

Σκοπός της συνόρθωσης είναι ο προσδιορισμός της βέλτιστης γραμμικής ανεπηρέαστης εκτίμησης οιασδήποτε παραμέτρου $q = q\left(y^\alpha\right)$ του φυσικού συστήματος.

### γ) Επιλογή μεθόδου συνόρθωσης

Η μέθοδος συνόρθωσης που θα χρησιμοποιηθεί εξαρτάται αρχικά από την ύπαρξη ή μη αγνώστων παραμέτρων $x_m^\alpha$. Αν δεν υπάρχουν επιλέγεται η μέθοδος των εξισώσεων συνθηκών.

Αν υπάρχουν άγνωστες παράμετροι $x_m^\alpha$ εξετάζουμε αν είναι δυνατό να γραφούν οι παρατηρούμενες παράμετροι $y^\alpha$ συναρτήσει των $x^\alpha$, δηλ. $y^\alpha = f(x^\alpha)$. Αν αυτό γίνεται επιλέγεται η μέθοδος των εξισώσεων παρατηρήσεων.

Τέλος αν είναι πεπλεγμένη η σχέση τους και δεν είναι δυνατόν ο διαχωρισμός τους σε δυο μέρη εκλέγεται η μέθοδος των εξισώσεων συνθηκών.

### δ) Εξισώσεις μεθόδων συνόρθωσης

Το πλήθος των εξισώσεων σε κάθε μέθοδο δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{s=n+m-r},$$

όπου $n$ είναι οι παρατηρήσεις, $m$ οι άγνωστοι και $r$ ο παραμετρικός βαθμός.

Οι βαθμοί ελευθερίας $f$ σε ένα πρόβλημα συνόρθωσης είναι:

$$\boxed{f=n-m}$$

Για τις εξισώσεις παρατηρήσεων, συνθηκών και τις μικτές εξισώσεις ισχύει ότι:

| **Εξισώσεις Παρατηρήσεων** | **Γενική μορφή (μη γραμμικές εξισώσεις)** | **Γραμμικές εξισώσεις** |
|---|---|---|
| $m=r,\ s=n$ | $y^\alpha = f(x^\alpha)$ | $b=Ax+v$ |
| Εξισώσεις συνθηκών | Γενική μορφή (μη γραμμικές εξισώσεις) | Γραμμικές εξισώσεις |
| $m=0,\ s=n-r$ | $g(y^\alpha)=0$ | $Bv=w$ |
| Μικτές εξισώσεις | Γενική μορφή (μη γραμμικές εξισώσεις) | Γραμμικές εξισώσεις |
| $0<m\le r$<br>$n-r<s\le n$ | $F(y^\alpha, x^\alpha)=0$ | $Ax-Bv+w=0$ |

**Παρατήρηση 1:** Στις εξισώσεις παρατηρήσεων και στις μικτές εξισώσεις οι άγνωστες παράμετροι $x^\alpha$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

**Παρατήρηση 2:** Παραμετρικός βαθμός $r$ είναι ο αριθμός των ελάχιστων απαιτούμενων παρατηρήσεων προκειμένου να επιτύχουμε το ζητούμενο, π.χ. όταν μετράμε μόνο γωνίες ισχύει: $r=2$ καθώς με γωνίες βρίσκεται μόνο το σχήμα και για τον προσδιορισμό αυτού αρκούν 2 μετρήσεις γωνιών. Αντιστοίχως όταν μετρώνται γωνίες και αποστάσεις είναι $r=3$ καθώς με αποστάσεις και γωνίες

προσδιορίζεται σχήμα και μέγεθος των οποίων η εύρεση επιτυγχάνεται με τη μέτρηση συνολικά 3 μεγεθών τους (με διάφορους συνδυασμούς).

## ε) Πίνακες μεθόδων

### ➲ Μέθοδος εξισώσεων παρατηρήσεων

$$x^{\alpha} = \begin{bmatrix} X_1^{\alpha} \\ X_2^{\alpha} \\ \vdots \\ X_m^{\alpha} \end{bmatrix},$$ όπου $x^{\alpha}$ είναι οι άγνωστες παράμετροι

$$y^{\alpha} = \begin{bmatrix} Y_1^{\alpha} \\ Y_2^{\alpha} \\ \vdots \\ Y_n^{\alpha} \end{bmatrix},$$ όπου $y^{\alpha}$ είναι οι παρατηρούμενες παράμετροι

$$y^{b} = \begin{bmatrix} Y_1^{b} \\ Y_2^{b} \\ \vdots \\ Y_n^{b} \end{bmatrix},$$ όπου $y^{b}$ είναι οι μετρήσεις

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix},$$ όπου $f$ είναι οι εξισώσεις των παρατηρήσεων

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm} \end{bmatrix},$$ όπου $\boldsymbol{A}$ είναι ο πίνακας σχεδιασμού και ισούται με τις μερικές παραγώγους των παρατηρούμενων παραμέτρων προς τις άγνωστες παραμέτρους, δηλαδή ισχύει: $A = \dfrac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}\left(x^{\circ}\right)$

$$x = \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \vdots \\ \delta x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{\alpha} - \overset{\circ}{x}_1 \\ x_2^{\alpha} - \overset{\circ}{x}_2 \\ \vdots \\ x_m^{\alpha} - \overset{\circ}{x}_m \end{bmatrix},$$ όπου $x$ είναι οι άγνωστες διορθώσεις των προσεγγιστικών τιμών των αγνώστων παραμέτρων

### ➲ Μέθοδος εξισώσεων συνθηκών

$$y^{\alpha} = \begin{bmatrix} Y_1^{\alpha} \\ Y_2^{\alpha} \\ \vdots \\ Y_n^{\alpha} \end{bmatrix},$$ όπου $y^{\alpha}$ είναι οι παρατηρούμενες παράμετροι

$$y^{b} = \begin{bmatrix} Y_1^{b} \\ Y_2^{b} \\ \vdots \\ Y_n^{b} \end{bmatrix},$$ όπου $y^{b}$ είναι οι μετρήσεις

$$g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_f \end{bmatrix},$$ όπου g είναι οι εξισώσεις συνθηκών

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{f1} & b_{f2} & \cdots & b_{fn} \end{bmatrix},$$ όπου $B$ είναι ο πίνακας των μερικών παραγώγων των εξισώσεων συνθηκών ως προς τις παρατηρήσεις και ισχύει: $B = \dfrac{\partial g}{\partial y^{\alpha}}\left(y^{b}\right)$

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_f \end{bmatrix},$$ όπου $w$ είναι τα σφάλματα κλεισίματος και ισχύει: $w_i = b_{i1} \cdot v_1 + b_{i2} \cdot v_2 + \ldots + b_{in} \cdot v_n$

### ➲ Μέθοδος μικτών εξισώσεων

$$x^{\alpha} = \begin{bmatrix} X_1^{\alpha} \\ X_2^{\alpha} \\ \vdots \\ X_m^{\alpha} \end{bmatrix},$$ όπου $x^{\alpha}$ είναι οι άγνωστες παράμετροι

$$y^{\alpha} = \begin{bmatrix} Y_1^{\alpha} \\ Y_2^{\alpha} \\ \vdots \\ Y_n^{\alpha} \end{bmatrix},$$ όπου $y^{\alpha}$ είναι οι παρατηρούμενες παράμετροι

$$y^b = \begin{bmatrix} Y_1^b \\ Y_2^b \\ \vdots \\ Y_n^b \end{bmatrix},$$ όπου $y^b$ είναι οι μετρήσεις

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix},$$ όπου $v$ είναι τα σφάλματα

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_s \end{bmatrix},$$ όπου $u$ είναι οι μικτές εξισώσεις

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nm} \end{bmatrix},$$

όπου $A$ είναι ο πίνακας σχεδιασμού και ισούται με:

$$A = \frac{\partial u}{\partial x^\alpha}\left(y^b, \overset{\circ}{x}\right)$$

$$x = \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \vdots \\ \delta x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^\alpha - \overset{\circ}{x}_1 \\ x_2^\alpha - \overset{\circ}{x}_2 \\ \vdots \\ x_m^\alpha - \overset{\circ}{x}_m \end{bmatrix},$$

όπου $x$ είναι οι άγνωστες διορθώσεις των προσεγγιστικών τιμών των αγνώστων παραμέτρων

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_s \end{bmatrix},$$

όπου $w$ είναι τα σφάλματα κλεισίματος και ισχύει:

$$w_i = u_i\left(y_1^b, y_2^b, \ldots, y_n^b, \overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m\right)$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{bmatrix},$$

όπου $B$ είναι ο πίνακας των μερικών παραγώγων των μικτών εξισώσεων ως προς τις παρατηρήσεις και τις άγνωστες παραμέτρους και ισχύει:

$$B = \frac{\partial u}{\partial y^\alpha}\left(y^b, \overset{\circ}{x}\right).$$

## στ) Αλγόριθμοι μεθόδων

### ➲ Μέθοδος εξισώσεων παρατηρήσεων

$C_v = \sigma_o^2 \cdot Q$

$P = I$ για ασυσχέτιστες και ισοβαρείς μετρήσεις

$P = \sigma_o^2 \cdot C_v^{-1} = \sigma_o^2 \cdot \dfrac{1}{\sigma_o^2} \cdot Q^{-1} \Rightarrow P = Q^{-1}$, όταν $\sigma_o^2$ άγνωστη

$P = C_v^{-1} = \sigma_o^2 \cdot Q^{-1}$, όταν $\sigma_o^2$ γνωστή

$N = A^T \cdot P \cdot A,\ u = A^T \cdot P \cdot b,\quad \hat{x}^\alpha = x^o + \hat{x}$

$\hat{v} = b - A \cdot \hat{x},\quad \hat{y} = A \cdot \hat{x},\quad \hat{y} = y^o + \hat{y} = y^b - \hat{v}$

### ➲ Μέθοδος εξισώσεων συνθηκών

$P = I$ για ασυσχέτιστες και ισοβαρείς μετρήσεις

$P = C_v^{-1} = \sigma_o^2 \cdot Q^{-1}$, όταν $\sigma_o^2$ γνωστή

$P = \sigma_o^2 \cdot \dfrac{1}{\sigma_o^2} \cdot Q \Rightarrow P = Q^{-1}$, όταν $\sigma_o^2$ άγνωστη

$M = B \cdot P^{-1} \cdot B^T,\quad M \cdot k = w \Rightarrow k = M^{-1} \cdot w,\quad \hat{v} = P^{-1} \cdot B^T \cdot k$

$Q_{\hat{v}} = P^{-1} \cdot B^T \cdot M^{-1} \cdot B \cdot P^{-1},\quad Q_{\hat{y}^\alpha} = P^{-1} - Q_{\hat{v}}$

Όταν $C_v$ γνωστός $\left(C_v = \sigma_o^2 \cdot Q\right) \Rightarrow P = C_v^{-1}$ οπότε: $C_{\hat{v}} = Q_{\hat{v}}$ και $C_{\hat{y}^\alpha} = Q_{\hat{y}^\alpha}$

Όταν $C_v$ άγνωστος ($Q$: γνωστός, $\sigma_o^2$ άγνωστη) $\Rightarrow P = Q^{-2}$ οπότε:

$\hat{\sigma}^2 = \dfrac{\hat{v}^T \cdot P \cdot \hat{v}}{f}$ και $\hat{C}_{\hat{v}} = \hat{\sigma}^2 \cdot Q_{\hat{v}},\ \hat{C}_{\hat{y}^\alpha} = \hat{\sigma}^2 \cdot Q_{\hat{y}^\alpha}$

### ➲ Μέθοδος μικτών εξισώσεων

$P = I$ για ασυσχέτιστες και ισοβαρείς μετρήσεις

$P = C_v^{-1} = \sigma_o^2 \cdot Q^{-1}$, όταν $\sigma_o^2$ γνωστή

$P = \sigma_o^2 \cdot \dfrac{1}{\sigma_o^2} \cdot Q \Rightarrow P = Q^{-1}$, όταν $\sigma_o^2$ άγνωστη

$M = B \cdot P^{-1} \cdot B^T,\quad N = A^T \cdot M^{-1} \cdot A,\quad u = A^T \cdot M^{-1} \cdot w$

$\hat{x} = -N^{-1} \cdot u,\quad \hat{x}^\alpha = x^o + \hat{x},\quad \hat{v} = P^{-1} \cdot B^T \cdot M^{-1} \cdot \left(w + A \cdot \hat{x}\right),\quad \hat{y}^\alpha = y^b - \hat{v}$

$$Q_{\hat{x}} = Q_{\hat{x}^{\alpha}} = N^{-1}$$

$$Q_{\hat{v}} = P^{-1} \cdot B^{T} \cdot \left(M^{-1} - M^{-1} \cdot A \cdot N^{-1} \cdot A^{T} \cdot M^{-1}\right) \cdot B \cdot P^{-1}$$

$$Q_{\hat{y}^{\alpha}} = P^{-1} - Q_{\hat{v}}, \quad Q_{\hat{x}^{\alpha}\hat{y}^{\alpha}} = -Q_{\hat{x}^{\alpha}} \cdot A^{T} \cdot M^{-1} \cdot B \cdot P^{-1}$$

Όταν $C_v$ γνωστός: $P = C_v^{-1}$ οπότε:

$$C_{\hat{x}} = Q_{\hat{x}} = C_{\hat{x}^{\alpha}} = Q_{\hat{x}^{\alpha}}$$

$$C_{\hat{v}} = Q_{\hat{v}}, \quad C_{\hat{y}^{\alpha}} = Q_{\hat{y}^{\alpha}}, \quad C_{\hat{x}^{\alpha}\hat{y}^{\alpha}} = Q_{\hat{x}^{\alpha}\hat{y}^{\alpha}}$$

Όταν $C_v$ άγνωστος ($C_v = \sigma_o^2 \cdot Q$ με γνωστό Q και άγνωστο $\sigma_o^2$): $P = Q^{-1}$ και ισχύει: $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{\hat{v}^T \cdot P \cdot v}{f}$. Άρα: $\hat{C}_{\hat{x}} = \hat{\sigma}^2 \cdot Q\hat{x} = \hat{C}_{\hat{x}^{\alpha}} = \hat{\sigma}^2 \cdot Q_{\hat{x}^{\alpha}} = \hat{\sigma}^2 \cdot Q_{\hat{x}^{\alpha}}$

$$\hat{C}_{\hat{v}} = \hat{\sigma}^2 \cdot Q_{\hat{v}}, \quad \hat{C}_{\hat{y}^{\alpha}} = \hat{\sigma}^2 \cdot Q_{\hat{y}^{\alpha}}, \quad \hat{C}_{\hat{x}^{\alpha}\hat{y}^{\alpha}} = \hat{\sigma}^2 \cdot Q_{\hat{x}^{\alpha}\hat{y}^{\alpha}}.$$

## ζ) Σύγκριση μεθόδων συνόρθωσης

Από τη σύγκριση των μεθόδων συνόρθωσης των οποίων οι πίνακες και οι αλγόριθμοι γράφηκαν αναλυτικά παραπάνω καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα:

- Στη μέθοδο εξισώσεων παρατηρήσεων το πρώτο το οποίο υπολογίζεται είναι οι εκτιμήσεις των αγνώστων παραμέτρων:

  $$\hat{x}, \hat{x}^{\alpha} = x_o + \hat{x}, \quad \hat{v} = b - A \cdot \hat{x}, \quad \hat{y}^{\alpha} = y^b - \hat{v}$$

Έτσι προσδιορίζονται κατευθείαν οι άγνωστες συντεταγμένες.

Στη μέθοδο εξισώσεων συνθηκών υπολογίζονται πρώτα οι εκτιμήσεις των σφαλμάτων και μετά οι συνορθωμένες παρατηρήσεις: $\hat{v}, \hat{y}^{\alpha} = y^b - \hat{v}$.

Όταν έχουμε συνορθώσει λοιπόν τις παρατηρήσεις (γωνίες, αποστάσεις) είναι δυνατόν να υπολογιστούν οι συντεταγμένες των αγνώστων σημείων (π.χ. 2, 3, 4, κ.α.) ως εξής:

$$\begin{aligned} \hat{x}_2 &= x_1 + \hat{S}_{12} \cdot \sin\left(G_{12} + \hat{\omega}_1\right) \\ \hat{y}_2 &= y_1 + S_{12} \cdot \cos\left(G_{12} + \hat{\omega}_1\right) \end{aligned}, \qquad (*)$$

όπου: $G_{12} = G_{A1} + \hat{\omega}_1 + 200^g$.

Για να βρούμε όμως τις ακρίβειες των συντεταγμένων εφαρμόζουμε νόμο μετάδοσης συμμεταβλητοτήτων (σφαλμάτων) στη σχέση (*) παραπάνω, όπου προφανώς πρέπει να έχει υπολογιστεί ο πίνακας $C_{\hat{y}_{\alpha}}$. Από όλα αυτά παρατηρούμε ότι προς

το τέλος οι υπολογισμοί δυσκολεύουν ως προς τη μέθοδο των εξισώσεων παρατηρήσεων.

Συνοψίζοντας η μέθοδος των εξισώσεων παρατηρήσεων (Μ.Ε.Π.) πλεονεκτεί ως προς τη μέθοδο των εξισώσεων συνθηκών (Μ.Ε.Σ.) γιατί είναι γνωστό εξ αρχής το μαθηματικό μοντέλο.

➲ Από τις εξισώσεις παρατηρήσεων είναι δυνατό να οδηγηθούμε στις εξισώσεις συνθηκών ως εξής:

- Μη γραμμική μορφή παρατηρήσεων στη Μ.Ε.Σ.: $\left.\begin{array}{l} g\left(y^{\alpha}\right)=0 \\ y^{\alpha}=f\left(x^{\alpha}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow g\left(f\left(x^{\alpha}\right)\right)=0$

Ο πίνακας $B$ ορίζεται ως εξής: $B=\dfrac{\partial g}{\partial y^{\alpha}}$.

Ο πίνακας $A$ ορίζεται στη Μ.Ε.Π. ως εξής: $A=\dfrac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}$.

Όταν τα $x, y$ συνδέονται γραμμικά το γινόμενο $BA = 0$ αλλιώς ισχύει: $BA \approx 0$.

Από το σύστημα των εξισώσεων παρατηρήσεων $b=Ax+v$ που ισχύει στη Μ.Ε.Π. απαλείφοντας τις άγνωστες παραμέτρους καταλήγουμε στο σύστημα παρατηρήσεων των εξισώσεων συνθηκών:

$$b=Ax+v \Rightarrow Bb=BAx+Bv \xrightarrow{BA=0} Bb=Bv \Rightarrow w=Bv .$$

➲ Προτιμάται το μαθηματικό μοντέλο της μεθόδου των μικτών εξισώσεων έναντι του μαθηματικού μοντέλου των εξισώσεων παρατηρήσεων διότι αντιστρέφεται πίνακας $\boldsymbol{N}$ μικρότερων διαστάσεων στο πρώτο σε σχέση με το δεύτερο.

Ένα παράδειγμα στο οποίο φαίνεται αυτό είναι ένας κύκλος όπου άγνωστες παράμετροι είναι $\left(x_C, y_C, R\right)$ και λόγω της μορφής της εξίσωσης κύκλου $\left(x-x_C\right)^2+\left(y-y_C\right)^2=R^2$ βλέπουμε ότι είναι αδύνατο να διαχωριστούν οι παρατηρήσεις $(x, y)$ από τα άγνωστα $\left(x_C, y_C, R\right)$ οπότε επιλέγεται ως μέθοδος συνόρθωσης η μέθοδος των μικτών εξισώσεων. Έτσι ο πίνακας $A$ θα είναι ένας πίνακας $\boldsymbol{N}\times 3$ όπου οι $N$ γραμμές θα είναι οι μικτές εξισώσεις

$$\begin{array}{l} u_1:\left(x_1-x_C\right)^2+\left(y_1-y_C\right)^2=R^2 \\ u_2:\left(x_2-x_C\right)^2+\left(y_2-y_C\right)^2=R^2 \\ \vdots \\ u_N:\left(x_N-x_C\right)^2+\left(y_N-y_C\right)^2=R \end{array},$$

ενώ οι 3 στήλες θα είναι οι άγνωστοι $\left(x_C, y_C, R\right)$.

Ο πίνακας **N** που προκύπτει από τη σχέση: $N = A^T \cdot M^{-1} \cdot A$ θα έχει διάσταση 3×3.

Σημειώνεται ότι ο πίνακας *B* υπολογίζεται από τη σχέση $B = \dfrac{\partial g}{\partial y^{\alpha}}$ και ο πίνακας *M* από: $M = BP^{-1}B^T$.

Για λυθεί το ίδιο πρόβλημα με τη Μ.Ε.Π. επιλέγεται άλλο μαθηματικό μοντέλο, δηλαδή ότι οι συντεταγμένες των σημείων στην περιφέρεια του κύκλου υπολογίζονται με βάση τις παρακάτω σχέσεις που είναι της μορφής $y^{\alpha} = f\left(x^{\alpha}\right)$:

$$\begin{aligned} x_i &= x_C + R \cdot \cos\theta_i \\ y_i &= y_C + R \cdot \sin\theta_i \end{aligned},$$

όπου $\theta_i$ είναι η γωνία διεύθυνσης του εκάστοτε σημείου.

Εδώ το διάνυσμα των αγνώστων παραμέτρων $x^{\alpha}$ θα είναι: $x^{\alpha} = \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ R \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_N \end{bmatrix}$ και από το οποίο καταλήγουμε στο ότι ο πίνακας *N* που πρέπει να αντιστραφεί θα έχει διάσταση (3+*N*) × (3+*N*) οπότε προφανώς επιλέγεται η μέθοδος των μικτών εξισώσεων.

➲ Προτιμάται το μαθηματικό μοντέλο της μεθόδου των μικτών εξισώσεων έναντι του μαθηματικού μοντέλου των εξισώσεων συνθηκών γιατί η αντιστροφή του πίνακα *M* είναι πιο δύσκολη εργασία από την αντιστροφή του πίνακα *N* (3×3). Αυτό γίνεται πιο εύκολα κατανοητό αν στο παραπάνω παράδειγμα με τον κύκλο από 3 μικτές εξισώσεις λύσουμε ως προς τις άγνωστες παραμέτρους $\left(x_C, y_C, R\right)$ και τις αντικαταστήσουμε στις υπόλοιπες οπότε από *N* μικτές εξισώσεις πηγαίνουμε σε *N*–3 εξισώσεις συνθηκών. Συνεπώς πρέπει να αντιστραφεί πίνακας *M* (*N*–3×*N*–3) στις εξισώσεις συνθηκών που είναι σαφώς δυσκολότερη εργασία από την αντιστροφή του πίνακα *N* (3×3) στις μικτές εξισώσεις.

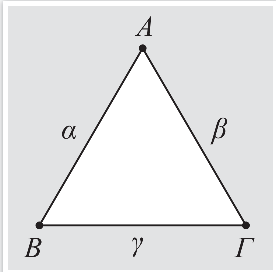
# Λυμένες Ασκήσεις

## Άσκηση 1

§1.1 δ) Εξισώσεις μεθόδων συνόρθωσης, | ε) Πίνακες μεθόδων συνόρθωσης
§3.2 Παραμετρικός βαθμός, αδυναμία βαθμού – βαθμοί ελευθερίας

Στο διπλανό σχήμα μετρήθηκαν οι γωνίες ($A$, $B$, $\Gamma$) και οι πλευρές ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$).

Να βρεθούν μετά από συνόρθωση με τη μέθοδο εξισώσεων των παρατηρήσεων οι πλευρές ($\beta$, $\gamma$, $\alpha$).




***ΛΥΣΗ***

Αφού μετρήθηκαν γωνίες και πλευρές μπορεί να οριστεί το σχήμα και το μέγεθος του τριγώνου οπότε ο παραμετρικός βαθμός $r$ είναι 3. Δηλ. 3 πλευρές ή 3 γωνίες ή 2 γωνίες και 1 πλευρά ή 2 πλευρές και μία γωνία. Έτσι σε αυτήν την περίπτωση ισχύει: $m = r$, όπου m είναι ο αριθμός των αγνώστων.

Άρα: $s = n + m - r \Rightarrow \boxed{s = n}$ .

Να σημειωθεί ότι ο παραπάνω τύπος είναι ο γενικός τύπος εύρεσης εξισώσεων σε κάθε μέθοδο (εξισώσεων παρατηρήσεων, μικτών εξισώσεων, εξισώσεων συνθηκών).

Άλλος τρόπος γραφής είναι:

$$s = (n - r) + m = f + m ,$$

όπου $n$ είναι οι παρατηρήσεις και $f$ οι βαθμοί ελευθερίας.

Οι βαθμοί ελευθερίας εκφράζουν πόσες μετρήσεις είναι παραπάνω από τις ελάχιστες που απαιτούνται.

Οι εξισώσεις παρατηρήσεων έχουν τη μορφή:

$$y^{\alpha} = f\left(x^{\alpha}\right),$$

προκύπτουν από το νόμο των συνημιτόνων και είναι:

$$A = \arccos\left(\frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}\right)$$

$$B = \arccos\left(\frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\gamma}\right)$$

$$\Gamma = \arccos\left(\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta}\right)$$

$$\alpha = \alpha$$

$$\beta = \beta$$

$$\gamma = \gamma$$

Οι πίνακες της μεθόδου είναι:

$$y^{\alpha} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ \Gamma \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}, \quad y^{b} = \begin{bmatrix} A' \\ B' \\ \Gamma' \\ \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{bmatrix}, \quad x^{\alpha} = \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Σημειώνεται ότι όπως είναι γνωστό από θεωρία $y^{\alpha}$ είναι το διάνυσμα των άγνωστων παρατηρούμενων παραμέτρων, $y^{b}$ είναι το διάνυσμα των παρατηρήσεων και $x^{\alpha}$ το διάνυσμα των αγνώστων. Μετά συνεχίζεται κανονικά ο αλγόριθμος της μεθόδου εξισώσεων παρατηρήσεων (βλέπε παράγραφο 1.1 στ).

## Άσκηση 2

§1.4 Συνόρθωση οριζόντιο δικτύου | §3.4 Δεσμεύσεις

Σε ένα δίκτυο που αποτελείται από 4 σημεία έγιναν 8 παρατηρήσεις διευθύνσεων, 4 παρατηρήσεις γωνιών και 5 παρατηρήσεις αποστάσεων. Τι επισημάνσεις μπορείτε να κάνετε για τη συνόρθωσή του;

***ΛΥΣΗ***

Αρχικά δημιουργείται ο πίνακας σχεδιασμού $A$ για την εύρεση των μερικών υπολογιζόμενων παραγώγων.

Στα στοιχεία που υπολογίζονται, δηλαδή προσδιορίζονται μετά από πράξεις, τοποθετείται αστερίσκος (*) ενώ στα υπόλοιπα στοιχεία, δηλαδή που δεν υπολογίζονται, τίποτα.

Δε πρέπει να μας διαφεύγει ότι: $\boxed{\delta = \alpha - \theta}$

Έτσι ισχύει:

$$
A = \begin{array}{c|cccccccccccc|}
 & x_1 & y_2 & x_2 & y_2 & x_3 & y_3 & x_4 & y_4 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 \\
\hline
\delta_{12} & * & * & * & * & & & & & -1 & & & \\
\delta_{13} & * & * & & & * & * & & & -1 & & & \\
\delta_{14} & * & * & & & & & * & * & -1 & & & \\
\delta_{21} & * & * & * & * & & & & & & -1 & & \\
\delta_{23} & & & * & * & * & * & & & & -1 & & \\
\delta_{32} & & & * & * & * & * & & & & & -1 & \\
\delta_{41} & * & * & & & & & * & * & & & & -1 \\
\delta_{43} & & & & & * & * & * & * & & & & -1 \\
\omega_{132} & * & * & * & * & * & * & & & & & & \\
\omega_{214} & * & * & * & * & & & * & * & & & & \\
\omega_{314} & * & * & & & * & * & * & * & & & & \\
\omega_{412} & * & * & * & * & & & * & * & & & & \\
S_{12} & * & * & * & * & & & & & & & & \\
S_{23} & & & * & * & * & * & & & & & & \\
S_{24} & & & * & * & & & * & * & & & & \\
S_{31} & * & * & & & * & * & & & & & & \\
S_{43} & & & & & * & * & * & * & & & & \\
\hline
\end{array}
$$

Οι επισημάνσεις που μπορούν να γίνουν σε αυτό το σημείο για την περίπτωση μετρήσεων σε δίκτυο είναι οι εξής:

**Σημείωση 1:** Στα δίκτυα διατηρούνται οι συντεταγμένες κάποιων σημείων σταθερές, δηλαδή εισάγονται ελάχιστες δεσμεύσεις. Σε κάθε σειρά διευθύνσεων (π.χ. $\delta_{12}, \delta_{13}, \delta_{14}, \delta_{21}, \delta_{32}, \delta_{41}, \delta_{43}$) υπάρχει άλλη σταθερά προσανατολισμού $\theta$ οπότε σε αυτή τη σταθερά το στοιχείο του πίνακα σχεδιασμού είναι $-1$.

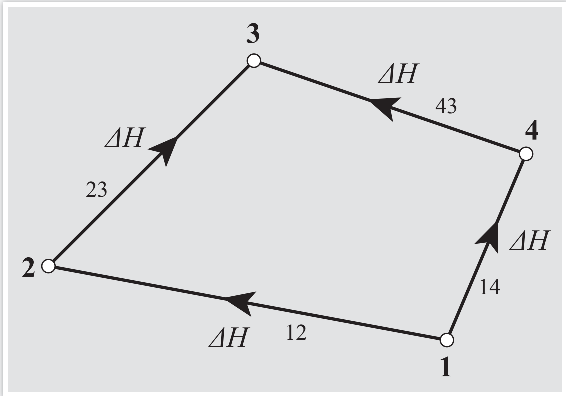
**Σημείωση 2:** Για να είναι δυνατή η αντιστροφή του πίνακα $N$ θα πρέπει ο πίνακας $\boldsymbol{A}$ να είναι πλήρης βαθμού, δηλ. να έχει ορίζουσα $\neq 0$. Στη συγκεκριμένη άσκηση το μοντέλο είναι μη πλήρους βαθμού καθώς ο πίνακας $A$ έχει μικρότερο παραμετρικό βαθμό $r$ από τον αριθμό των παρατηρήσεων.

**Σημείωση 3:** Τα προβλήματα που προκύπτουν σε μοντέλα μη πλήρους βαθμού αντιμετωπίζονται με την εισαγωγή ελαχίστων δεσμεύσεων. Δηλαδή να κρατηθούν συντεταγμένες κάποιων σημείων σταθερές. Ο αριθμός τους 3 ή 4 εξαρτάται από τις μετρήσεις. Έτσι για μικτό δίκτυο είναι 3 ενώ για τριγωνομετρικό 4. Οπότε υπάρχουν τελικά οι εξισώσεις (παρατηρήσεων ή μικτές) και οι δεσμεύσεις.

## Άσκηση 3

§1.1 ε) Πίνακες μεθόδων συνόρθωσης | στ) Αλγόριθμοι μεθόδων συνόρθωσης
§1.5 Χωροσταθμικό δίκτυο

Στο χωροσταθμικό δίκτυο του παρακάτω σχήματος έγιναν οι μετρήσεις: $\Delta h_{12}$, $\Delta h_{23}$, $\Delta h_{43}$, $\Delta h_{13}$, $\Delta h_{14}$. Παρακάτω δίνονται τα βάρη τους και τα υψόμετρα $h_2, h_4$.




Να γίνει συνόρθωση του δικτύου με τη μέθοδο των εξισώσεων παρατηρήσεων για τον υπολογισμό των υψομέτρων $h_1, h_3$. Επίσης να βρεθούν τα στοιχεία: $\hat{v}$, $\hat{y}_\alpha$, $\hat{\sigma}^2$ και $\hat{C}_{\hat{x}^\alpha}$.

$\Delta h'_{12} = 1.899$ m, $p_{12} = 3.5$

$\Delta h'_{23} = -4.641$ m, $p_{23} = 5.5$

$\Delta h'_{43} = -1.830$ m, $p_{43} = 2.5$

$\Delta h'_{13} = -2.734$ m, $p_{13} = 4.5$

$\Delta h'_{14} = -0.930$ m, $p_{14} = 1.8$

$h_2 = 10.00$ m, $h_4 = 7.20$ m

### *ΛΥΣΗ*

Αρχικά βρίσκονται τα προσεγγιστικά υψόμετρα των κορυφών 1 και 3 όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\Delta h'_{12} = h_2 - \overset{\circ}{h}_1 \Rightarrow \overset{\circ}{h}_1 = h_2 - \Delta h'_{12} = 10.000 - 1.899 \Rightarrow \boxed{\overset{\circ}{h}_1 = 8.101 \text{ m}}$$

$$\Delta h'_{23} = \overset{\circ}{h}_3 - h_2 \Rightarrow \overset{\circ}{h}_3 = h_2 + \Delta h'_{23} = 10.000 - 4.641 \Rightarrow \boxed{\overset{\circ}{h}_3 = 5.359 \text{ m}}$$

Μετά σχηματίζεται η διαδικασία κανονικά με το σχηματισμό των απαραίτητων πινάκων και ισχύει:

$$y^{\alpha}=\begin{bmatrix}\Delta h_{12}\\ \Delta h_{23}\\ \Delta h_{43}\\ \Delta h_{13}\\ \Delta h_{14}\end{bmatrix},\quad y^{b}=\begin{bmatrix}\Delta h'_{12}\\ \Delta h'_{23}\\ \Delta h'_{43}\\ \Delta h'_{13}\\ \Delta h'_{14}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.899\text{ m}\\ -4.641\text{ m}\\ -1.830\text{ m}\\ -2.734\text{ m}\\ -0.930\text{ m}\end{bmatrix},\quad x^{\alpha}=\begin{bmatrix}h_1\\ h_3\end{bmatrix},\quad x^{\circ}=\begin{bmatrix}8.101\text{ m}\\ 5.359\text{ m}\end{bmatrix}$$

$$y^{\circ}=f\left(x^{\circ}\right)=\begin{bmatrix}1.899\text{ m}\\ -4.641\text{ m}\\ -1.841\text{ m}\\ -2.742\text{ m}\\ -0.901\text{ m}\end{bmatrix},\quad b=y^{b}-y^{\circ}=\begin{bmatrix}0.000\text{ m}\\ 0.000\text{ m}\\ 0.011\text{ m}\\ 0.008\text{ m}\\ -0.029\text{ m}\end{bmatrix}$$

Ο πίνακας σχεδιασμού $A$ σχηματίζεται όπως είναι γνωστό έχοντας ως στοιχεία του τις μερικές παραγώγους των παρατηρημένων υψομετρικών διαφορών προς τα ά-γνωστα υψόμετρα $h_1$ και $h_3$. Η μορφή του λοιπόν θα είναι η εξής:

$$A=\begin{array}{c}\\ \Delta h_{12}\\ \Delta h_{23}\\ \Delta h_{43}\\ \Delta h_{14}\\ \Delta h_{13}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}h_1 & h_3\end{array}\\ \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 1\\ -1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

Ο πίνακας των κανονικών εξισώσεων $N$, θεωρώντας τους πίνακες $A^T$, $P$ και τον $A$ από παραπάνω είναι:

$$A^T=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad P=\begin{bmatrix}3.5 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5.5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2.5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1.8 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.5\end{bmatrix}$$

θα είναι:

$$N=A^T\cdot P\cdot A\ \Rightarrow\ \boxed{N=\begin{bmatrix}9.8 & -4.5\\ -4.5 & 12.5\end{bmatrix}}$$

Η ορίζουσα του πίνακα $N$ είναι: $|N|=102.250$

Ο αντίστροφος του πίνακα $N$ είναι:

$$N^{-1}=\frac{1}{102.25}\cdot\begin{bmatrix}12.5 & 4.5\\ 4.5 & 9.8\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ \boxed{N^{-1}=\begin{bmatrix}0.122 & 0.044\\ 0.044 & 0.096\end{bmatrix}}$$

Ο πίνακας $u$, λαμβάνοντας υπόψη τους πίνακες $A^T$, $P$, $b$ όπως γράφηκαν παραπάνω, προκύπτει από τη γνωστή σχέση:

$$u = A^T \cdot P \cdot b \;\Rightarrow\; \boxed{u = \begin{bmatrix} 0.016 \\ 0.064 \end{bmatrix}}$$

Οι εκτιμήσεις των αγνώστων παραμέτρων προκύπτουν από τη σχέση:

$$\hat{x}^{\alpha} = N^{-1} \cdot u \;\Rightarrow\; \boxed{\hat{x}^{\alpha} = \begin{bmatrix} \hat{h}_1 \\ \hat{h}_3 \end{bmatrix}}$$

Οι εκτιμήσεις των σφαλμάτων υπολογίζονται από τη σχέση:

$$\hat{v} = b - A \cdot \hat{x}^{\alpha} = y^b - A \cdot \hat{x}^{\alpha} \;\Rightarrow\; \boxed{\hat{v} = y^b - A \cdot \hat{x}^{\alpha}}$$

Οι εκτιμήσεις των παρατηρούμενων παραμέτρων προσδιορίζονται από τη σχέση:

$$\hat{y}^{\alpha} = y^{\circ} + \hat{y} \;\Rightarrow\; \boxed{\hat{y}^{\alpha} = y^{\circ} + A \cdot \hat{x}}$$

ή $\boxed{\hat{y}^{\alpha} = f\left(x^{\alpha}\right)}$

ή $\boxed{\hat{y}^{\alpha} = y^b - \hat{v}}$

Η εκτίμηση της μεταβλητότητας αναφοράς προκύπτει από τη σχέση:

$$\boxed{\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{v}^T \cdot P \cdot \hat{v}}{f} = \frac{\hat{v}^T \cdot P \cdot \hat{v}}{n-m}}$$

Η εκτίμηση του πίνακα συμμεταβλητοτήτων των αγνώστων παραμέτρων υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\hat{C}_{\hat{x}^{\alpha}} = \hat{\sigma}^2 \cdot Q_{\hat{x}^{\alpha}} = \hat{\sigma}^2 \cdot N^{-1} = \hat{\sigma}^2 \cdot \left(A^T \cdot P \cdot A\right)^{-1} \;\Rightarrow\; \boxed{\hat{C}_{\hat{x}^{\alpha}} = \hat{\sigma}^2 \cdot N^{-1}}.$$

## Άσκηση 4

§1.1 ε) Πίνακες μεθόδων συνόρθωσης | στ) Αλγόριθμοι μεθόδων συνόρθωσης | §3.12 A-posteriori μεταβλητότητα αναφοράς

Να βρεθεί ο πίνακας συμμεταβλητοτήτων των ($X$, $Y$, $Z$) συντεταγμένων σημείου της γήινης επιφάνειας ως προς τις γεωδαιτικές συντεταγμένες ($\lambda$, $\varphi$, $h$) με αναφορά τη γήινη σφαίρα ακτίνας $R$.

***Λύση***

Οι γεωδαιτικές συντεταγμένες, ελλειψοειδείς και καρτεσιανές, συνδέονται μεταξύ τους μέσω των σχέσεων:

$$X=(N+h)\cdot\cos\varphi\cdot\cos\lambda$$
$$Y=(N+h)\cdot\cos\varphi\cdot\sin\lambda \quad ,$$
$$Z=\left[\left(1-e^2\right)\cdot N+h\right]\cdot\sin\varphi$$

όπου $N$ είναι η ακτίνα καμπυλότητας της πρώτης κάθετης τομής του ΕΕΠ και $e$ η πρώτη εκκεντρότητα του ΕΕΠ.

Για τον υπολογισμό του πίνακα συμμεταβλητοτήτων $\hat{C}_{\hat{x}}$ υπάρχει η σχέση:

$$\hat{C}_{\hat{x}}=\hat{\sigma}^2\cdot N^{-1}$$

Επομένως για την εύρεση του $\hat{C}_{\hat{x}}$ απαιτείται η ακόλουθη διαδικασία:

- Σχηματισμός του πίνακα σχεδιασμού $A$.
- Υπολογισμός του πίνακα $N$ από τον τύπο: $N=A^T\cdot P\cdot A$.
- Προσδιορισμός της εκτίμησης της μεταβλητότητας αναφοράς $\hat{\sigma}^2$ από τη σχέση:

$$\hat{\sigma}^2=\frac{\hat{v}^T\cdot P\cdot\hat{v}}{f}, \quad \text{όπου:} \quad f=n-m, \quad \hat{v}=b-A\cdot x, \quad \hat{x}=N^{-1}\cdot u, \quad \hat{u}=A^T\cdot P\cdot b\ .$$

Μπορεί να θεωρηθεί ότι οι παρατηρήσεις δεν περιέχουν χονδροειδή ή συστηματικά σφάλματα οπότε: $\hat{\sigma}^2=\sigma_o^2=1$.

Συνεπώς: $\hat{C}_{\hat{x}}=N^{-1}$.

Έτσι για την εύρεση του πίνακα συμμεταβλητοτήτων $\hat{C}_{\hat{x}}$ αρκεί αρχικά ο προσδιορισμός του πίνακα $N$ και μετά η αντιστροφή του. Στον τύπο υπολογισμού του πίνακα $N$ ($N=A^T\cdot P\cdot A$) παρατηρείται ότι απαιτείται η γνώση του πίνακα $A$ και του πίνακα βάρους $P$. Θεωρώντας ότι όλες οι μετρήσεις που έγιναν είναι ασυσχέτιστες και ισοβαρείς ο πίνακας βάρους είναι ο μοναδιαίος: $P = I$.

Ο πίνακας σχεδιασμού $A$ έχει ως στοιχεία του τις μερικές παραγώγους των $X$, $Y$, $Z$ ως προς τις $\lambda$, $\varphi$, $h$ (γραμμές και στήλες αντίστοιχα).

Αναλυτικά τα στοιχεία του πίνακα $A$ βρίσκονται ως εξής:

$$\frac{\partial X}{\partial\lambda}=\frac{\partial}{\partial\lambda}[(N+h)\cdot\cos\varphi\cdot\cos\lambda] \Rightarrow \boxed{\frac{\partial X}{\partial\lambda}=-(N+h)\cdot\cos\varphi\cdot\sin\lambda}$$

$$\frac{\partial X}{\partial\varphi}=\frac{\partial}{\partial\varphi}[(N+h)\cdot\cos\varphi\cdot\cos\lambda] \Rightarrow \boxed{\frac{\partial X}{\partial\varphi}=-(N+h)\cdot\sin\varphi\cdot\cos\lambda}$$

$$\frac{\partial X}{\partial h}=\frac{\partial}{\partial h}[(N+h)\cdot\cos\varphi\cdot\cos\lambda] \Rightarrow \boxed{\frac{\partial X}{\partial h}=\cos\varphi\cdot\cos\lambda}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \lambda}=\frac{\partial}{\partial \lambda}[(N+h)\cdot\cos\varphi\cdot\sin\lambda] \Rightarrow \boxed{\frac{\partial Y}{\partial \lambda}=-(N+h)\cdot\cos\varphi\cdot\cos\lambda}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \varphi}=\frac{\partial}{\partial \varphi}[(N+h)\cdot\cos\varphi\cdot\sin\lambda] \Rightarrow \boxed{\frac{\partial Y}{\partial \varphi}=-(N+h)\cdot\sin\varphi\cdot\sin\lambda}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial h}=\frac{\partial}{\partial h}[(N+h)\cdot\cos\varphi\cdot\sin\lambda] \Rightarrow \boxed{\frac{\partial Y}{\partial h}=\cos\varphi\cdot\sin\lambda}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda}=\frac{\partial}{\partial \lambda}\left[\left(1-e^2\right)\cdot N+h\right]\cdot\sin\varphi \Rightarrow \boxed{\frac{\partial Z}{\partial \lambda}=0}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \varphi}=\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\left(1-e^2\right)\cdot N+h\right]\cdot\sin\varphi \Rightarrow \frac{\partial Z}{\partial \varphi}=\left(1-e^2\right)\cdot N\cdot\cos\varphi+h\cdot\cos\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial Z}{\partial \varphi}=\left[\left(1-e^2\right)\cdot N+h\right]\cdot\cos\varphi}$$

$$\boxed{\frac{\partial Z}{\partial h}=\sin\varphi}$$

Άρα, ο πίνακας σχεδιασμού $A$ είναι:

$$A=\begin{bmatrix} -(N+h)\cdot\cos\varphi\cdot\sin\lambda & -(N+h)\cdot\sin\varphi\cdot\cos\lambda & \cos\varphi\cdot\cos\lambda \\ -(N+h)\cdot\cos\varphi\cdot\cos\lambda & -(N+h)\cdot\sin\varphi\cdot\sin\lambda & \cos\varphi\cdot\sin\lambda \\ 0 & \left[\left(1-e^2\right)\cdot N+h\right]\cdot\cos\varphi & \sin\varphi \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας $N$ αφού ο πίνακας σχεδιασμού $A$ είναι 3×3, ο $A^T$ 3×3 θα έχει κι αυτός διάσταση 3×3 με την ακόλουθη μορφή:

$$N=\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} \end{bmatrix}$$

Τα στοιχεία του υπολογίζονται ως εξής:

$$N_{11}=A_{11}^2+A_{21}^2+A_{31}^2$$

$$N_{22}=A_{12}^2+A_{22}^2+A_{32}^2$$

$$N_{12}=N_{21}=A_{11}\cdot A_{12}+A_{21}\cdot A_{22}+A_{31}\cdot A_{32}$$

$$N_{13}=N_{31}=A_{11}\cdot A_{13}+A_{21}\cdot A_{23}+A_{31}\cdot A_{33}$$

$$N_{23}=N_{32}=A_{12}\cdot A_{13}+A_{22}\cdot A_{23}+A_{32}\cdot A_{33}$$

Έτσι:

$$N_{11}=(N+h)^2\cdot\cos^2\varphi\cdot\sin^2\lambda+(N+h)^2\cdot\cos^2\varphi\cdot\cos^2\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{N_{11}=\left[(N+h)^2\cdot\cos^2\varphi\right]\cdot\left(\cos^2\varphi+\sin^2\lambda\right)}$$

$$N_{22}=(N+h)^2\cdot\sin^2\varphi\cdot\cos^2\lambda+(N+h)^2\cdot\sin^2\varphi\cdot\sin^2\lambda+\left[\left(1-e^2\right)N+h\right]^2\cdot\cos^2\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad N_{22}=(N+h)^2\cdot\sin^2\varphi\cdot\left[\cos^2\lambda+\sin^2\lambda\right]+\left[\left(1-e^2\right)N+h\right]^2\cdot\cos^2\varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{N_{22}=(N+h)^2\cdot\sin^2\varphi+\left[\left(1-e^2\right)N+h\right]^2\cdot\cos^2\varphi}$$

$$N_{21}=N_{12}=(N+h)^2\cdot\cos\varphi\cdot\cos\lambda\cdot\sin\varphi\cdot\sin\lambda+(N+h)^2\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi\cdot\cos\lambda\cdot\sin\lambda+0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{N_{12}=N_{21}=2(N+h)^2\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi\cdot\cos\lambda\cdot\sin\lambda}$$

$$N_{31}=N_{13}=-(N+h)\cdot\cos^2\varphi\cdot\sin\lambda\cdot\cos\lambda-(N+h)\cdot\cos^2\varphi\cdot\sin\lambda\cdot\cos\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{N_{31}=N_{13}=-2(N+h)\cdot\cos^2\varphi\cdot\sin\lambda\cdot\cos\lambda}$$

$$N_{23}=N_{32}=A_{12}\cdot A_{13}+A_{22}\cdot A_{23}+A_{32}\cdot A_{33} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_{23}=N_{32}=$$

$$=-(N+h)\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\cos^2\lambda-(N+h)\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\sin^2\lambda+\left[\left(1-e^2\right)\cdot N+h\right]\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi$$

$$\Rightarrow N_{23}=N_{32}=\left[-(N+h)\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi\right]\cdot\left(\cos^2\lambda+\sin^2\lambda\right)+\left[\left(1-e^2\right)\cdot N+h\right]\cdot\sin\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_{23}=N_{32}=-(N+h)\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi+\left[\left[\left(1-e^2\right)\cdot N+h\right]\right]\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{N_{23}=N_{32}=-\sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\left[(N+h)+\left[\left(1-e^2\right)\cdot N+h\right]\right]}$$

Τέλος η αντιστροφή του πίνακα **N** προκύπτει από τη παρακάτω σχέση:

$$N^{-1}=\frac{1}{N}\cdot\begin{bmatrix} M_{11} & -M_{12} & M_{13} \\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23} \\ M_{31} & -M_{32} & M_{33} \end{bmatrix},$$

όπου τα στοιχεία $M_{11}$, $M_{12}$, $M_{13}$, $M_{21}$, $M_{22}$, $M_{23}$, $M_{31}$, $M_{32}$, $M_{33}$ υπολογίζονται ως εξής:

$$|M_{11}|=N_{22}\cdot N_{33}-N_{23}\cdot N_{32}$$

$$|M_{12}|=N_{21}\cdot N_{33}-N_{23}\cdot N_{31}$$

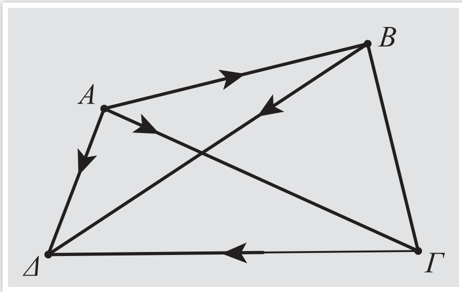
$$|M_{13}|=N_{21}\cdot N_{32}-N_{22}\cdot N_{31}$$

$$|M_{21}|=N_{12}\cdot N_{33}-N_{13}\cdot N_{32}$$

$$|M_{22}|=N_{11}\cdot N_{33}-N_{13}\cdot N_{31}$$

# Ασκήσεις για Λύση

**1)** Στο χωροσταθμικό δίκτυο που φαίνεται παρακάτω για τον προσδιορισμό των υψομέτρων των σημείων $Γ$, $Δ$ μετρήθηκαν οι εξής υψομετρικές διαφορές:




$ΔH_{AB} = 3.056\ \text{m}, \quad σ_{ΔH_{AB}} = 5\ \text{mm}$

$ΔH_{BΔ} = 2.584\ \text{m}, \quad σ_{ΔH_{BΔ}} = 4\ \text{mm}$

$ΔH_{AΓ} = 1.950\ \text{m}, \quad σ_{ΔH_{AΓ}} = 5\ \text{mm}$

$ΔH_{ΓΔ} = 0.875\ \text{m}, \quad σ_{ΔH_{ΓΔ}} = 6\ \text{mm}$

$ΔH_{AΔ} = 2.995\ \text{m}, \quad σ_{ΔH_{AΔ}} = 7\ \text{mm}$

Δίνεται: $H_A = 35.82\ \text{m}$.

Να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:

**α)** Γιατί έχουμε συνόρθωση ;

**β)** Ποια μέθοδος συνόρθωσης θα χρησιμοποιήσουμε;

**γ)** Ποιες είναι οι εκτιμήσεις των υψομέτρων των σημείων $B$, $Γ$, $Δ$;

**δ)** Ποιες είναι οι εκτιμήσεις των σφαλμάτων των παρατηρήσεων;

**ε)** Ποια είναι η εκτίμηση της μεταβλητότητας αναφοράς;

***ΛΥΣΗ***

**α)** Γιατί ισχύει $n > m \Rightarrow 5 > 3$, οπότε ικανοποιείται η απαραίτητη συνθήκη για να γίνει συνόρθωση.

**β)** Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο εξισώσεων παρατηρήσεων (Μ.Ε.Π.) καθώς δημιουργούνται εξισώσεις της μορφής $y = f(x)$.

**γ)** Οι εκτιμήσεις των υψομέτρων των σημείων $B, Γ, Δ$ είναι:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} δ\hat{h}_B \\ δ\hat{h}_Γ \\ δ\hat{h}_Δ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.032815 \\ -0.00331 \\ -0.00783 \end{bmatrix} (\text{m})$$

**δ)** Οι εκτιμήσεις των σφαλμάτων των παρατηρήσεων είναι:

$$\hat{v} = b - A\hat{x} \Rightarrow \hat{v} = \begin{bmatrix} 0.032815 \\ 2.620015 \\ 0.00331 \\ -0.16548 \\ 0.00783 \end{bmatrix} \text{(m)}$$

**ε)** Η εκτίμηση μεταβλητότητας αναφοράς είναι: $\hat{\sigma}^2 = 0.429$.

**2)** Να κάνετε τον ολικό έλεγχο μεταβλητότητας αναφοράς όταν δίνονται:

$f = 5$, $\sigma_o^2 = \pm 10cm$ και έχει υπολογιστεί: $\hat{\sigma}^2 = 0.85$, $\alpha = 0.05$.

Τι συμπεράσματα προκύπτουν;

***ΛΥΣΗ***

Επειδή: $\chi_f^{2(1-\alpha/2)} \leq u \leq \chi_f^{2(\alpha/2)} \Rightarrow 0.8312 \leq 425 \leq 12.83$, βγαίνει το συμπέρασμα ότι υπάρχουν χονδροειδή ή συστηματικά σφάλματα στις παρατηρήσεις.

**3)** Όταν δίνονται:

$t_1 = -0.55$, $t_2 = 3.60$, $t_3 = -1.25$, $t_4 = 2.95$

για $f = 18$ και $\alpha = 0.05$ εφαρμόζοντας τη διαδικασία της σάρωσης δεδομένων σε τι συμπεράσματα καταλήγετε:

***ΛΥΣΗ***

Η δεύτερη παρατήρηση δεν περνά γιατί: $|t_2| > t_{f-1}^{\alpha/2} \Rightarrow 3.60 > 2.110$ μετά την εφαρμογή της σάρωσης οπότε χαρακτηρίζεται ως περιέχουσα χονδροειδές σφάλμα.

**4)** Τριγωνομετρικό δίκτυο που έχει 5 κορυφές εκ των οποίων 3 είναι γνωστά σημεία του κρατικού δικτύου και τα άλλα είναι νεοϊδρυόμενα, χρησιμοποιήθηκε για την αποτύπωση μιας αγροτικής περιοχής. Στο δίκτυο αυτό παρατηρήθηκαν 35 συνολικά διευθύνσεις από όλα τα σημεία. Κάνοντας ολικό έλεγχο μεταβλητότητας αναφοράς και σάρωση δεδομένων εντοπίστηκαν 5 προβληματικές παρατηρήσεις οι οποίες και βγήκαν από τη συνόρθωση. Έτσι τώρα υπάρχουν 30 παρατηρήσεις (35 – 5 = 30) που θεωρούνται απαλλαγμένες από χονδροειδή σφάλματα. Αυτοί οι έλεγχοι έγιναν με την προϋπόθεση ότι το δίκτυο συνορθώθηκε με ελάχιστες δεσμεύσεις ή εσωτερικές δεσμεύσεις.

Για να γίνουν τα αποτελέσματα της συνόρθωσης δεκτά σε κάθε πρόβλημα ένταξης δικτύου πρέπει να ελεγχθεί η ποιότητα των πλεοναζουσών δεσμεύσεων. Να κάνετε τον απαραίτητο έλεγχο όταν δίνονται οι εκτιμήσεις των μεταβλητο-

τήτων από τις δύο παρακάτω λύσεις θεωρώντας επίπεδο σημαντικότητας 0.05:

$\hat{\sigma}^2 = 0.90$, από τη συνόρθωση με ελάχιστες δεσμεύσεις,

$\hat{\sigma}_H^2 = 1.15$, από τη συνόρθωση με πλεονάζουσες δεσμεύσεις.

***ΛΥΣΗ***

Ελέγχοντας τη σχέση: $F \leq F_{k,f}^{\alpha} \Rightarrow 2.8055 \leq 3.98$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι τα αποτελέσματα της συνόρθωσης με όλες τις πλεονάζουσες δεσμεύσεις γίνονται αποδεκτά με επίπεδο σημαντικότητας 0.05.

**5)** Για την εύρεση των παραμέτρων βέλτιστου κύκλου μετρήθηκαν οι συντεταγμένες $x_i^{\alpha}, y_i^{\alpha}$ πάνω στην περιφέρεια κυκλικής πλατείας. Για τέσσερα σημεία δίνονται:

$(x_1 = 0.0,\ y_1 = 1.5\ \text{m}),\ (x_2 = 0.7\ \text{m},\ y_2 = 1.2\ \text{m}),\ (x_3 = 2.0\ \text{m},\ y_3 = 1.9\ \text{m}),$
$(x_4 = 2.5\ \text{m},\ y_4 = 2.1\ \text{m})$

Θεωρώντας τις μετρήσεις με βάρος τη μονάδα ζητούνται:

**α)** Να υπολογίσετε τις εκτιμήσεις των παραμέτρων του βέλτιστου κύκλου, δηλαδή του κέντρου του κύκλου και της ακτίνας του.

**β)** Να υπολογίσετε τις εκτιμήσεις των παραμέτρων του βέλτιστου κύκλου με τη συνθήκη ότι αυτός, δηλαδή ο βέλτιστος κύκλος πρέπει να διέρχεται από το σημείο 5 $(x_5 = 1.35,\ y_5 = 1.60)$.

Οι παρατηρήσεις θεωρούνται ασυσχέτιστες μεταξύ τους και της ίδιας αλλά άγνωστης ακρίβειας.

***ΛΥΣΗ***

**α)** Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων του βέλτιστου κύκλου είναι:

$$\hat{x} = N^{-1} \cdot u \Rightarrow \hat{x} = \begin{bmatrix} \delta\hat{x}_o \\ \delta\hat{y}_o \\ \delta\hat{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.546 \\ 0.919 \\ 0.621 \end{bmatrix} \text{m}$$

**β)** Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων του βέλτιστου κύκλου με τη συνθήκη ότι αυτός πρέπει να διέρχεται από το σημείο 5, δηλαδή ικανοποιώντας αυτή τη δέσμευση, είναι:

$$\hat{x} = \hat{x}_o + N^{-1} \cdot H^T \cdot S^{-1} \cdot (z - H \cdot \hat{x}_o) \Rightarrow \hat{x} = \begin{bmatrix} \delta\hat{x}_o \\ \delta\hat{y}_o \\ \delta\hat{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.432 \\ 0.692 \\ 0.552 \end{bmatrix} \text{m}$$