Γεωργίου Ν. Παντελίδη
Καθηγητή Ε.Μ. Πολυτεχνείου

ΑΝΑΛΥΣΗ
ΤΟΜΟΣ Ι

ΤΡΙΤΗ ΕΚΔΟΣΗ
Βελτιωμένη και Συμπληρωμένη

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα

ISBN set 960-431-658-3
ISBN τ.Ι 960-431-656-7

www.ziti.gr

Φωτοστοιχειοθεσία Εκτύπωση

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 171 • Νέοι Επιβάτες Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 0392-72.222 (3 γραμ.) - Fax: 0392-72.229
e-mail: info@ziti.gr

Βιβλιοπωλείο

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ. (031) 203.720, Fax (031) 211.305
e-mail: sales@ziti.gr

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η αυξανόμενη σημασία των Μαθηματικών στο σύγχρονο κόσμο κατοπτρίζεται έντονα στο ενδιαφέρον των επιστημόνων να εισάγουν τα Μαθηματικά στις σπουδές τους και να μαθηματικοποιήσουν την επιστήμη τους. Κατά το τελευταίο τέταρτο του 20ου αιώνα οι *θετικές επιστήμες* παρουσίασαν μια εντυπωσιακή ανάπτυξη, σε έκταση και βάθος. Οι μαθηματικές τεχνικές έχουν διεισδύσει σε επιστημονικές περιοχές εκτός της μαθηματικής Επιστήμης, όπως π.χ. στη Φυσική, στην Τεχνολογία, στη Βιολογία ακόμη και στην Οικονομία και στις άλλες Κοινωνικές Επιστήμες. Ηλεκτρονικοί υπολογιστές και υπολογιστικές τεχνικές δίνουν ερευνητικά ερεθίσματα σε περιοχές, των οποίων η σημασία για τα ίδια τα Μαθηματικά και για άλλες Επιστήμες είναι πολύ μεγάλη. Έτσι σήμερα μπορούμε να πούμε ότι ***η υψηλή Τεχνολογία είναι μαθηματική Τεχνολογία*** και ως εκ τούτου δεν μπορεί να υπάρξει σημαντική Τεχνολογική εξέλιξη χωρίς τη βαθύτερη γνώση των Μαθηματικών.

Το ανά χείρας βιβλίο ***ΑΝΑΛΥΣΗ* I** μαζί με το βιβλίο ***ΑΝΑΛΥΣΗ* II** πραγματεύονται τη μελέτη των συναρτήσεων μιας και πολλών μεταβλητών και αποτελούν επεξεργασία και βελτίωση των βιβλίων ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ I&II και III (Εκδόσεων 1989-1996) και είναι εμπλουτισμένα με περισσότερα κατάλληλα επιλεγμένα παραδείγματα. Περιλαμβάνουν την ύλη της ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ που διδάσκεται στα Μαθηματικά και Τεχνολογικά Τμήματα των Πανεπιστημίων και Πολυτεχνείων. Το βιβλίο απευθύνεται και στους πτυχιούχους των Τμημάτων αυτών που ασκούν ήδη το επάγγελμά τους, γιατί αποτελεί ένα χρήσιμο βιβλίο αναφοράς.

Σε όλο το βιβλίο όταν χρησιμοποιούμε σχέσεις, προτάσεις και έννοιες που είναι γνωστές από το Λύκειο δεν τις σχολιάζουμε, εφόσον θεωρούμε ότι οι σχολικές γνώσεις είναι ικανοποιητικές. Παραθέτουμε πολλά λυμένα παραδείγματα, που η γνώση τους είναι απαραίτητη για την κατανόηση της ύλης. Ορισμένα από αυτά θα μπορούσαν να αποτελούν προτάσεις ή πορίσματα στο αντίστοιχο κεφάλαιο. Πολλές ασκήσεις αποτελούν σημαντικό στοιχείο της ύλης του βιβλίου και γι’ αυτό, όταν είναι απαραίτητο, θα παραπέμπουμε σ’ αυτές. Στο τέλος ορισμένων κεφαλαίων (2, 3, 10 και 11) υπάρχουν παραρτήματα (με σκιασμένο περιθώριο), όπου παρατίθενται αποδείξεις και σχόλια, που θεωρούμε ότι δεν είναι απαραίτητα σε πρώτη ανάγνωση και ενδιαφέρουν εκεί-

νους που θα ήθελαν να εμβαθύνουν στα περιεχόμενα του αντίστοιχου κεφαλαίου.

Η παραπομπή «*η πρόταση* 5.3.2» σημαίνει «*η πρόταση 3.2 του κεφαλαίου 5*», ενώ «*η πρόταση 6.4*» σημαίνει «*η πρόταση 6.4 της παραγράφου αυτής*» και «η §7.3» η παράγραφος 3 του κεφαλαίου 7. Η αρίθμηση των κεφαλαίων των δύο τόμων θα είναι ενιαία. Στον $1^{ο}$ τόμο περιλαμβάνονται τα κεφάλαια 1-15 και στο $2^{ο}$ τα κεφάλαια 16-30.

Στο Κεφ. 1 παραθέτουμε συνοπτικά στοιχεία της Θεωρίας Συνόλων, της Μαθηματικής Λογικής και της έννοιας της απεικονίσεως με στόχο να δώσουμε τους '*κανόνες επικοινωνίας*' που διέπουν την παρουσίαση της ύλης.

Στο Κεφ. 2 παραθέτουμε τα θεμέλια πάνω στα οποία στηρίζεται η Ανάλυση, που είναι το σύστημα των αξιωμάτων των πραγματικών αριθμών. Θεωρούμε δεδομένη την ύπαρξη του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών εφοδιασμένο με πράξεις και ιδιότητες, τις οποίες παρουσιάζουμε με τη μορφή τριών αξιωμάτων, *του αξιώματος πεδίου, του αξιώματος διατάξεως* και *του αξιώματος του ελαχίστου άνω φράγματος* ή *αξίωμα της πλήρους διατάξεως*. Το τελευταίο αξίωμα εφοδιάζει τους πραγματικούς αριθμούς με την κατάλληλη τοπολογική δομή.

Οι ακολουθίες πραγματικών αριθμών παρουσιάζονται στο Κεφ. 3, όπου ορίζονται οι δυνάμεις με πραγματικούς εκθέτες, οι λογάριθμοι και οι πράξεις στο σύνολο $\overline{\mathbb{R}}$. Παρατίθενται οι έννοιες και οι ιδιότητες του κατωτέρου και ανωτέρου ορίου μιας ακολουθίας. Έναν εκτεταμένο σχολιασμό και αποδείξεις των ορίων αυτών παραθέτουμε στο παράρτημα.

Στο Κεφ. 4 σχολιάζουμε την έννοια και τις ιδιότητες των πραγματικών συναρτήσεων, όπου παραθέτουμε τις γραφικές παραστάσεις στοιχειωδών συναρτήσεων. Τα όρια πραγματικών συναρτήσεων και η συνέχειά τους μελετώνται (Κεφ. 5 & 6) και με αναφορά στις ακολουθίες. Παραθέτουμε επίσης πίνακα (§5.5) των ορίων βασικών συναρτήσεων.

Εκτεταμένη μελέτη των παραγώγων, των θεμελιωδών θεωρημάτων και των συνεπειών τους και των εφαρμογών του Διαφορικού Λογισμού (*θεωρήματα Rolle και μέσης τιμής, ακρότατα συναρτήσεως, γενικευμένη ανισότητα Bernoulli, Ανισότητα Hölder, θεώρημα Darboux, Τύπος Taylor και θεώρημα Taylor*) παρατίθεται στα Κεφ. 7, 8 & 9.

Στο Κεφ. 10 (*Ορισμένο Ολοκλήρωμα-Ολοκλήρωμα Riemann*) παραθέτουμε μια στοιχειώδη Θεωρία Μέτρου για να διευκολύνουμε την κατανόηση των εφαρμογών του Ολοκληρωτικού Λογισμού αλλά και να τονίσουμε την συνεισφορά του *Ευδόξου* και του *Αρχιμήδη* στην ανάπτυξη της Αναλύσεως. Το *κριτηρίο ολοκληρωσιμότητας* του *Lebesgue* παρατίθεται (με απόδειξη στο παράρτημα)

για να συνδεθεί το Ορισμένο Ολοκλήρωμα με τη γενική θεωρία *Μέτρου και Ολοκληρώσεως*. Οι μέθοδοι ολοκληρώσεως και τα ολοκληρώματα που εξαρτώνται από παράμετρο κλείνουν το κεφάλαιο αυτό. Οι εφαρμογές του ορισμένου ολοκληρώματος (εμβαδόν, μήκος τόξου καμπύλης, εμβαδόν επιφάνειας και όγκος από περιστροφή, κέντρο βάρους και έργο δυνάμεως) περιλαμβάνονται στο Κεφ. 11.

Μια ολοκληρωμένη ανάπτυξη των σειρών πραγματικών αριθμών παρατίθεται στο Κεφ. 12 και στο Κεφ. 13 η ανάπτυξη των ακολουθιών και σειρών συναρτήσεων. Μια πλήρης ανάπτυξη των δυναμοσειρών παρατίθεται στο Κεφ. 14.

Το τελευταίο κεφάλαιο (Κεφ. 15) περιλαμβάνει τα γενικευμένα ολοκληρώματα.

Στο τέλος του βιβλίου υπάρχουν πίνακες *των παραγώγων 1ης τάξεως στοιχειωδών συναρτήσεων, των παραγώγων ν-οστής τάξεως ορισμένων συναρτήσεων, των αορίστων ολοκληρωμάτων συναρτήσεων που μπορούν να υπολογιστούν με τη βοήθεια των μεθόδων ολοκληρώσεως, των ορισμένων ολοκληρωμάτων μερικών συναρτήσεων* και *των αναπτυγμάτων συναρτήσεων σε δυναμοσειρές.*

Θεωρώ υποχρέωσή μου να ευχαριστήσω όλους τους συναδέλφους, που κατά καιρούς έχουν χρησιμοποιήσει το βιβλίο στη διδασκαλία τους, για τις εύστοχες υποδείξεις τους που συνέβαλαν στην καλύτερη παρουσίαση της ύλης.

Θέλω να ευχαριστήσω θερμά τον ***Εκδοτικό Οίκο ΖΗΤΗ*** και τους συνεργάτες του για την εξαιρετική εμφάνιση του βιβλίου αυτού, που ήταν συνέπεια της διάθεσης συνεργασίας τους και της υπομονής τους.

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2000 Γεώργιος Ν. Παντελίδης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 7

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Κεφάλαιο 8

ΘΕΜΕΛΙΩΔΗ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Κεφάλαιο 9

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Κεφάλαιο 10

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ - ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ RIEMANN

Κεφάλαιο 1

ΣΥΝΟΛΑ, ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ και ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

1. Σύνολα

Οι αρχές της Θεωρίας Συνόλων και κυρίως η εννοιολογική θεώρησή τους δε θα μας απασχολήσουν, γιατί δεν είναι στόχος αυτού του βιβλίου. Κατά τον **Cantor**, το σύνολο ορίζεται ως *συλλογή από ορισμένα τελείως καθορισμένα αντικείμενα ή επινοήματα του νου μας σε μια ολότητα*. Τα αντικείμενα ή επινοήματα, που αποτελούν το σύνολο, ονομάζονται **στοιχεία** ή **σημεία** του συνόλου. Επομένως τα στοιχεία ενός συνόλου μπορεί να είναι αριθμοί, διανύσματα, λογικές προτάσεις, γεγονότα, συναρτήσεις, σημεία ενός επιπέδου ή μιας ευθείας κ.λπ.

Αν X είναι ένα σύνολο, τότε η σχέση $x \quad X$ σημαίνει ότι το στοιχείο x ανήκει στο σύνολο X. Η άρνηση αυτής της σχέσεως συμβολίζεται με $x \quad X$. Αν X και Y είναι δύο σύνολα, τότε η σχέση $X \quad Y$ σημαίνει ότι κάθε στοιχείο του X είναι και στοιχείο του Y. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σύνολο X είναι **υποσύνολο** του συνόλου Y. Η άρνηση της σχέσεως $X \quad Y$ συμβολίζεται με $X \quad Y$ και σημαίνει ότι υπάρχει ένα (τουλάχιστον) στοιχείο του X που δεν ανήκει στο Y.

Θεωρούμε ότι ένα σύνολο είναι ορισμένο ή δοσμένο, όταν γνωρίζουμε από ποια στοιχεία αποτελείται. Έτσι δύο σύνολα X και Y λέμε ότι είναι ***ίσα,*** και το συμβολίζουμε με $X=Y$, όταν περιέχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία.

Από τους παραπάνω ορισμούς είναι φανερόν ότι ισχύουν:

$X \quad X$ (**ανακλαστική ιδιότητα**)

Αν $X \quad Y$ *και* $Y \quad Z$, *τότε* $X \quad Z$ (**μεταβατική ιδιότητα**).

Αν $X \quad Y$ *και* $Y \quad X$, *τότε* $X=Y$ (**αντισυμμετρική ιδιότητα**).

Αν X είναι ένα σύνολο και p μια ιδιότητα που αναφέρεται στα στοιχεία του συνόλου X, τότε υπάρχει ένα τελείως καθορισμένο υποσύνολο του X, το οποίο αποτελείται από εκείνα τα στοιχεία $x \quad X$ που ικανοποιούν την ιδιότητα p. Το σύνολο αυτό το συμβολίζουμε $\{x \quad X: p(x)\}$. Επίσης μπορούμε να αναφέρουμε, εφόσον είναι εφικτό, τα στοιχεία του συνόλου, όπως π.χ., {1, 2, 7, α, β, χ}. Επο-

μένως, αν α είναι ένα αντικείμενο ή επινόημα, τότε $\{\alpha\}$ είναι το σύνολο με μοναδικό στοιχείο το α, που σημαίνει $\alpha \quad \{\alpha\}$ και $\alpha \pi \{\alpha\}$.

Θεωρούμε την ύπαρξη συνόλου το οποίο δεν έχει κανένα στοιχείο, το ***κενό σύνολο,*** που συμβολίζουμε με Δ και είναι υποσύνολο οποιουδήποτε συνόλου.

Για κάθε σύνολο X υπάρχει ένα τελείως ορισμένο σύνολο, το $\mathcal{P}(X)$, με στοιχεία όλα τα υποσύνολα του X και ονομάζεται ***δυναμοσύνολο*** του X. Είναι φανερό ότι $\Delta \quad \mathcal{P}(X)$ καθώς και $X \quad \mathcal{P}(X)$. Στην περίπτωση που το σύνολο X έχει n στοιχεία, τότε το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(X)$ έχει 2^n στοιχεία (από το οποίο προήλθε ο συμβολισμός του δυναμοσυνόλου με 2^X που χρησιμοποιείται επίσης).

> **Το παράδοξον του Russel**: Η συλλογή όλων των συνόλων $\mathcal{Q}$ **δεν αποτελεί σύνολο** (με τη μαθηματική του έννοια), γιατί θα περιείχε τον εαυτό του ως στοιχείο. Η ιδιότητα ένα σύνολο να περιέχει τον εαυτό του ως στοιχείο μας οδηγεί στο εξής παράδοξο: *Χωρίζουμε το $\mathcal{Q}$ στα υποσύνολά του* $M=\{X \quad \mathcal{Q}: X \quad X\}$ και $N=\{X \quad \mathcal{Q}: X \quad X\}$. *Αν $M \quad M$, τότε σύμφωνα με τον ορισμό του M θα ήταν $M \quad M$. Αν πάλι $M \quad M$, τότε $M \quad N$ και επομένως $M \quad M$. Έχουμε λοιπόν αποδείξει ότι $M \quad M$, όταν, και μόνο όταν, $M \quad M$, που αποτελεί βέβαια αντινομία.*

Όταν λοιπόν στο εξής λέμε "*ένα σύνολο X*" πάντοτε υπονοούμε ότι είναι υποσύνολο ενός βασικού συνόλου, είτε αναφέρεται ρητά είτε όχι.

Αν X, Y είναι δύο σύνολα, τότε η ***ένωσή*** τους, που συμβολίζεται με $X \quad Y$, είναι το σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία που ανήκουν στο X ή στο Y ή συγχρόνως στο X και στο Y. Ενώ η ***τομή*** τους, που συμβολίζεται με $X \quad Y$, είναι το σύνολο που αποτελείται από όλα τα στοιχεία που ανήκουν συγχρόνως στο X και στο Y. Αν τα σύνολα X και Y δεν έχουν κοινά στοιχεία, δηλαδή $X \quad Y=\Delta$, τότε λέμε ότι αυτά είναι ***ξένα μεταξύ*** τους. Η ένωση και η τομή μπορεί να δοθούν συμβολικά ως εξής:

$$X \quad Y := \{x: x \quad X \text{ ή } x \quad Y\}, \quad X \quad Y := \{x: x \quad X \text{ και } x \quad Y\},$$

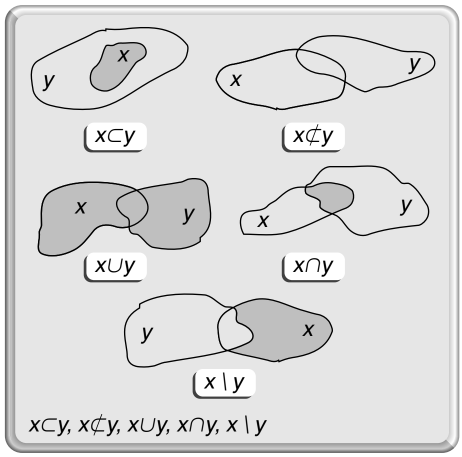
Η ένωση και η τομή συνόλων μπορεί να επεκταθεί και σε πεπαρασμένου πλήθους σύνολα $X_1, X_2, ..., X_n$:

$$\underset{i=1}{\overset{n}{}} X_i = X_1 \quad X_2 \quad ... \quad X_n = \{x: \text{υπάρχει } j,\ 1 \quad j \quad n \text{ με } x \quad X_j\},$$

$$\underset{i=1}{\overset{n}{}} X_i = X_1 \quad X_2 \quad ... \quad X_n = \{x: x \quad X_j \text{ για κάθε } j,\ 1 \quad j \quad n\}.$$

Η ***διαφορά*** του συνόλου Y από το σύνολο X ορίζεται ως το σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία του X τα οποία δεν ανήκουν στο Y και το συμβολίζουμε με $X|Y$, δηλαδή $X|Y:=\{x \quad X: x \quad Y\}$. Στην περίπτωση που $Y \quad X$, τότε η διαφορά $X|Y$ ονομάζεται ***συμπλήρωμα*** του Y ως προς X και συμβολίζεται

με $C_X Y$ ή CY, όταν είναι γνωστό το σύνολο ως προς το οποίο λαμβάνεται η διαφορά.



x⊂y, x⊄y, x∪y, x∩y, x \ y

Αν X και Y είναι δύο σύνολα (ξένα ή μη μεταξύ τους), τότε το σύνολο που αποτελείται από τα διατεταγμένα ζεύγη (x, y) με $x \quad X$ και $y \quad Y$ ονομάζεται ***καρτεσιανό γινόμενο*** των X και Y και συμβολίζεται με $X \quad Y$, δηλαδή

$$X \quad Y := \{(x, y) : x \quad X \text{ και } y \quad Y\}.$$

Τα στοιχεία (x, y) του καρτεσιανού γινομένου $X \quad Y$ ονομάζονται διατεταγμένα γιατί το πρώτο, το x, ανήκει στο X και το δεύτερο, το y, ανήκει στο Y. Επομένως η ισότητα $(x, y) = (\alpha, \beta)$ ισχύει, όταν, και μόνον όταν, $x = \alpha$ και $y = \beta$.

Ανάλογα ορίζεται το καρτεσιανό γινόμενο πεπερασμένου πλήθους συνόλων

$$X_1 \quad X_2 \quad \ldots \quad X_n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_j \quad X_j, j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Αν $X_1 = X_2 = \ldots = X_n = X$, τότε γράφουμε $X \quad X \quad \ldots \quad X = X^n$.

Ασκήσεις:

Να αποδείξετε τις παρακάτω συνέπειες των ορισμών:

1) $X \setminus X = \Delta$, $X \setminus \Delta = X$, $X \quad X = X$, $X \quad X = X$.
2) $X \quad Y = Y \quad X$, $X \quad Y = Y \quad X$, (***αντιμεταθετική ιδιότητα***)
3) $X \quad (Y \quad Z) = (X \quad Y) \quad Z$, $X \quad (Y \quad Z) = (X \quad Y) \quad Z$, (***προσεταιριστική ιδιότητα***)
4) $X \quad (Y \quad Z) = (X \quad Y) \quad (X \quad Z)$, $X \quad (Y \quad Z) = (X \quad Y) \quad (X \quad Z)$, (***επιμεριστική ιδιότητα***)
5) $X \setminus (Y \quad Z) = (X \setminus Y) \quad (X \setminus Z)$, $X \setminus (Y \quad Z) = (X \setminus Y) \quad (X \setminus Z)$, (***τύποι De Morgan***)
6) $X \quad Y = \Delta \qquad X = \Delta$ ή $Y = \Delta$.

7) Αν Χ, ΥπΔ, τότε Χ Υ = Υ Χ, όταν, και μόνον όταν, Χ = Υ.

8) Χ (Α Β) = (Χ Α) (Χ Β), (Χ Υ) (Α Β) = (Χ Α) (Υ Β), (***επιμεριστική ιδιότητα***)

2. Μαθηματική Λογική

Θα παραθέσουμε ορισμένα στοιχεία της Μαθηματικής Λογικής για πληρέστερη κατανόηση των συλλογισμών και των μαθηματικών προτάσεων. Μια πρόταση (με τη συντακτική της έννοια), που έχει την ιδιότητα να είναι αληθής *(Α)* ή ψευδής *(Ψ)* είναι μια *λογική πρόταση* ή, πιο απλά, *πρόταση*. Ένας *προτασιακός τύπος* είναι μια πρόταση (με τη συντακτική της έννοια), στην οποία εμφανίζονται μια ή περισσότερες μεταβλητές, ακαθόριστα σύμβολα, και η οποία γίνεται λογική πρόταση, όταν στη θέση των μεταβλητών βάλουμε στοιχεία από ένα τελείως καθορισμένο σύνολο, π.χ. από το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ ή από το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$. Αν *p(x)* είναι ένας προτασιακός τύπος και *Χ* είναι το σύνολο που διατρέχει η μεταβλητή *x*, τότε λέμε ότι ο προτασιακός τύπος *p(x) είναι ορισμένος* στο *Χ*. Το υποσύνολο *Α* του *Χ*, που αποτελείται από όλα τα στοιχεία *x Χ* για τα οποία η πρόταση *p(x)* είναι αληθής, ονομάζεται *σύνολο αλήθειας* του προτασιακού τύπου και συμβολίζεται {*x Χ*: *p(x)*}.

Παράδειγμα: Η ανίσωση $x^2 - 3x + 2 > 0$ είναι ένας προτασιακός τύπος ορισμένος στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Το σύνολο αλήθειάς του είναι το {*x* $\mathbb{R}$: $x < 1$ ή $x > 2$}.

Αν Π και Τ είναι λογικές προτάσεις, τότε αρνούμενοι ή συσχετίζοντές τις παίρνουμε νέες λογικές προτάσεις:

Άρνηση: Π (διαβ. *όχι* Π) είναι πρόταση αληθής, μόνον όταν η Π είναι ψευδής.

Σύζευξη: Π Τ (διαβ. Π *και* Τ) είναι πρόταση αληθής, μόνον όταν τόσο η Π όσο και η Τ είναι αληθής.

Διάζευξη: Π/ Τ (διαβ. Π *ή* Τ) είναι πρόταση ψευδής, μόνον όταν τόσο η Π όσο και η Τ είναι ψευδής.

Συνεπαγωγή: Π Τ (διαβ. *αν* Π, *τότε* Τ) είναι πρόταση ψευδής, μόνον όταν η Π είναι αληθής και η Τ ψευδής.

Ισοδυναμία: Π Τ (διαβ. Π, όταν, και μόνον όταν, Τ) είναι πρόταση αληθής, μόνον όταν οι προτάσεις Π και Τ είναι και οι δύο αληθείς ή και οι δύο ψευδείς.

Δύο προτασιακοί τύποι *p(x, y , ..., z), q(x, y, ..., z)* ονομάζονται *λογικά ισοδύναμοι,* όταν για οποιεσδήποτε τιμές των μεταβλητών *x, y, ..., z* ισχύει

p(x, y, ..., z) q(x, y, ..., z). Στην περίπτωση αυτή γράφουμε *p* ∫ *q*.

Οι παρακάτω σχέσεις μεταξύ των λογικών προτάσεων, των οποίων η απόδειξη αφήνεται στον αναγνώστη, θα μας διευκολύνουν στους μαθηματικούς συλλογισμούς που ακολουθούν:

(1) $[(\Pi \quad T)\wedge(T \quad \Sigma)] \quad [\Pi \quad \Sigma]$ *(νόμος του συλλογισμού),*

(2) $(\Pi\not\ T)\int(\ \Pi)\ (\ T),\ (\Pi\ T)\int(\ \Pi)\not\ (\ T)$ *(άρνηση διάζευξης, σύζευξης),*

(3) $\Pi\ (\ T)\int\ (\Pi\ T)$ *(η εις άτοπον απαγωγή),*

(4) $(\ T\ \ \Pi)\int(\Pi\ T)$ *(η πλάγια απόδειξη),*

(5) $(\Pi\ T)\int(\Pi\ T)\ (T\ \Pi)$.

Για συντομία χρησιμοποιούμε δύο σύμβολα, τους **ποσοδείκτες,**

$_x\ _X$, που σημαίνει: *για κάθε x X,*

$_x\ _X$, που σημαίνει: *υπάρχει τουλάχιστον ένα x X.*

Έτσι η πρόταση "*για κάθε x X ισχύει η p(x)*" συμβολικά γράφεται $_x\ _X\,p(x)$.
Αντίστοιχα, η πρόταση "*υπάρχει x X ώστε να ισχύει η p(x)*" γράφεται $_x\ _X\,p(x)$.
Η άρνηση της προτάσεως "*για κάθε x X ισχύει p(x)*" είναι "*υπάρχει (τουλάχιστον) ένα x X για το οποίο δεν ισχύει η p(x)*".

Η άρνηση της προτάσεως "*υπάρχει ένα x X για το οποίο ισχύει p(x)*" είναι "*για κάθε x X δεν ισχύει η p(x)*".

Αν *a(x), b(x)* είναι προτασιακοί τύποι ορισμένοι στο αυτό σύνολο *X*, με σύνολα αλήθειας *A* και *B* αντίστοιχα, τότε για τα σύνολα αλήθειας των παρακάτω προτάσεων ισχύουν:

(6) $\{x\ X:\ \ a(x)\} = C_X(A)$,

(7) $\{x\ X: a(x)\ \ b(x)\} = A\ \ B$,

(8) $\{x\ X: a(x)\not\ b(x)\} = A\ \ B$,

(9) *a(x) b(x), όταν, και μόνον όταν, A B,*

(10) *a(x) b(x), όταν, και μόνον όταν, A = B.*

Κατά το μετασχηματισμό ενός προτασιακού τύπου *a(x)* σ' έναν άλλο με τη βοήθεια επιτρεπτών πράξεων το σύνολο αληθείας A του *a(x)* είναι, σύμφωνα με την πρόταση (9), υποσύνολο του συνόλου αληθείας B του *b(x)*. Για το λόγο αυτό τα στοιχεία που καθιστούν αληθή τον *a(x)* θα αναζητηθούν μεταξύ των στοιχείων του B. Για παράδειγμα, ο προτασιακός τύπος *a(x)*: $x-2=\sqrt{x}$ με ύψωση στο τετράγωνο μας οδηγεί στον προτασιακό τύπο *b(x)*: $x^2-5x+4=0$ του οποίου το σύνολο αληθείας είναι $B=\{1, 4\}$, από το οποίο μόνο το 4 καθιστά αληθή τον προτασιακό τύπο *a(x).*

Αποδεικτικές μέθοδοι: Οι μαθηματικές προτάσεις αποτελούνται από μια *υπόθεση Y*, που θεωρείται αληθής πρόταση, και ένα συμπέρασμα *Σ*, που επιδιώκουμε ν' αποδείξουμε την αλήθειά της. Η αποδεικτική διαδικασία συνίσταται

στην απόδειξη της αλήθειας της συνεπαγωγής $Y \quad \Sigma$, οπότε και το συμπέρασμα Σ είναι αληθής πρόταση. Εκτός από την απ' ευθείας απόδειξη της συναπαγωγής μπορούμε να καταφύγουμε

> στην *πλάγια απόδειξη*, η οποία στηρίζεται στην ισοδυναμία (4), όπου υποθέτουμε ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα Σ και αποδεικνύουμε ότι δεν ισχύει και η υπόθεση Y

και

> στην *εις άτοπον απαγωγή*, η οποία στηρίζεται στην ισοδυναμία (3), όπου υποθέτουμε ότι ισχύει η υπόθεση Y και δεν ισχύει το συμπέρασμα Σ και οδηγούμαστε σε άτοπο, δηλαδή σε κάτι το οποίο αντιβαίνει στα αξιώματα της θεωρίας που αναφέρεται η πρόταση στην υπόθεση.

3. Η έννοια της απεικονίσεως

Στο επίκεντρο των Μαθηματικών βρίσκεται η έννοια της απεικονίσεως και ειδικότερα της συναρτήσεως, γιατί είναι απαραίτητη για να εκφράσουμε και να κατανοήσουμε τις θεμελιώδεις διαδικασίες που περιγράφουν πραγματικές καταστάσεις. Είναι το κατάλληλο μαθηματικό μέσο για να περιγράψουμε την *εξάρτηση* ορισμένων μεγεθών μεταξύ τους. Η ακριβής γνώση των μαθηματικών σχέσεων που συνδέουν διάφορα μεγέθη μας επιτρέπει να επεμβαίνουμε *ρυθμιστικά* στις διαδικασίες για να επιτύχουμε μια επιθυμητή έκβαση, όπως γίνεται συχνά στις Εφαρμογές. Ειδικότερα βέβαια η έννοια της συναρτήσεως, η οποία για την Ανάλυση έχει ιδιαίτερη σημασία, γιατί εκτός από την αντιστοιχία μεταξύ των μεγεθών περιγράφει και διαδικασίες ποσοτικών μεταβολών.

Έστω X, Y δύο σύνολα. Ονομάζουμε **απεικόνιση του** X **στο** Y μια διαδικασία (κανόνα, νόμο) f που σε κάθε στοιχείο $x \quad X$ αντιστοιχίζει ένα τελείως καθορισμένο στοιχείο $y \quad Y$, το $y = f(x)$, το οποίο ονομάζεται *τίμη της απεικονίσεως στο* x ή *εικόνα του* x *μέσω της* (απεικονίσεως) f *). Το στοιχείο x ονομάζεται *αρχέτυπο* του $f(x)$, το σύνολο X ονομάζεται *πεδίο ορισμού* και το Y *πεδίο τιμών* της f. Για την περιγραφή μιας απεικονίσεως f πρέπει να δοθούν το πεδίο ορισμού της X, το πεδίο τιμών Y και η διαδικασία αντιστοίχισης. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε το συμβολισμό:

$$f\colon \begin{cases} X \quad Y \\ x \mapsto f(x) \end{cases} \qquad \text{ή} \quad f\colon X \quad Y \quad \text{με} \quad x \mapsto f(x).$$

---

*) Η πιο ενδιαφέρουσα και χαρακτηριστική ιδιότητα μιας απεικονίσεως είναι ότι σε κάθε στοιχείο $x \quad X$ αντιστοιχίζει **ένα μόνο** στοιχείο του Y. Είναι, όπως λέμε, μονότιμη απεικόνιση. Υπάρχουν και πλειονότιμες απεικονίσεις, στις οποίες το $f(x)$ δεν είναι στοιχείο αλλά υποσύνολο του Y. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε:

$$f\colon X \quad \mathcal{P}(X) \quad \text{ή} \quad f\colon X \quad 2^Y$$

Επομένως δύο απεικονίσεις f, g είναι ίσες (συμβ. $f=g$), όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού X, το ίδιο πεδίο τιμών Y και για κάθε $x \quad X$ ισχύει $f(x)=g(x)$.

Για μια απεικόνιση $f: X \quad Y$ ονομάζουμε *εικόνα του συνόλου* $A \quad X$ μέσω της f το σύνολο $f(A):=\{f(x): x \quad A\} \quad Y$ και *αντίστροφη εικόνα* του $B \quad Y$ το σύνολο $f^{-1}(B):=\{x \quad X: f(x) \quad B\}$. Ονομάζουμε *σύνολο τιμών* της f την εικόνα του πεδίου ορισμού της, δηλαδή το σύνολο $f(X)$. Από τον ορισμό της απεικονίσεως $f: X \quad Y$ προκύπτει ότι για κάποιο στοιχείο $b \quad Y$ το σύνολο $f^{-1}(\{b\})$ μπορεί να είναι το κενό σύνολο, αν $b \quad Y \setminus f(X)$ ή να αποτελείται από περισσότερα του ενός στοιχεία. Για παράδειγμα, για την απεικόνιση που σε κάθε άνθρωπο αντιστοιχίζει το ύψος του, δεν υπάρχει άνθρωπος ύψους 10 m, ενώ υπάρχουν πολλοί που το ύψος τους είναι 1,80 m.

Πολλές φορές συμβολίζουμε με $\mathrm{D}(f)$ το πεδίο ορισμού της f και με $\mathrm{R}(f)$ το σύνολο τιμών της.

Ορίζουμε την απεικόνιση $f: X \quad Y$ *με* $x \mapsto f(x)$ και ως υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου $X \quad Y$ ως εξής:

$$f:=\{(x, y) \quad X \quad Y: \text{κάθε στοιχείο } x \text{ ανήκει μόνο σ' ένα ζεύγος } (x, y)\}.$$

Στην περίπτωση αυτή αντί $y=f(x)$ γράφουμε $(x, y) \quad f$.

Στα επόμενα η έκφραση "*η απεικόνιση f είναι ορισμένη στο σύνολο A* (αντ. *στο x_0*)" σημαίνει ότι το σύνολο A είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού (αντ. το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού) της f.

Παραδείγματα: Εκτός από τις συναρτήσεις, τις οποίες θα μελετήσουμε συστηματικά στα επόμενα κεφάλαια, οι πίνακες αποτελούν απεικονίσεις μεταξύ γραμμικών χώρων, το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι μια απεικόνιση από το σύνολο των ολοκληρώσιμων σ' ένα διάστημα συναρτήσεων στον $\mathbb{R}$. ■

Άμεση συνέπεια του ορισμού είναι οι επόμενες σχέσεις των οποίων η απόδειξη δίνεται ως άσκηση:

Έστω η απεικόνιση $f: X \quad Y$ και $A, B \quad X$. Τότε ισχύουν:

(1) $A \quad B \quad f(A) \quad f(B)$. (3) $f(A \quad B) \quad f(A) \quad f(B)$.

(2) $f(A \quad B) = f(A) \quad f(B)$. (4) $f(A \setminus B) .. f(A) \setminus f(B)$.

Μια απεικόνιση $f: X \quad Y$ ονομάζεται *αμφιμονοσήμαντη**), όταν για κάθε $x_1, x_2 \quad X$ ισχύει:

Αν $x_1 \pi x_2$*, τότε* $f(x_1) \pi f(x_2)$	ή ισοδύναμα	*Αν* $f(x_1)=f(x_2)$*, τότε* $x_1=x_2$

*) Πολλές φορές αντί του ελληνικού όρου «αμφιμονοσήμαντη» χρησιμοποιείται ο όρος «ένα προς ένα».

Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε στοιχείο $y \in Y$ υπάρχει **το πολύ** ένα στοιχείο $x \in X$ με $f(x)=y$.

Η $f: X \to Y$ λέμε ότι είναι μια απεικόνιση του X **επί** του Y, όταν $f(X)=Y$, δηλαδή για κάθε στοιχείο $y \in Y$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $x \in X$ με $f(x)=y$. Έτσι, όταν η $f: X \to Y$ είναι αμφιμονοσήμαντη και επί, τότε σε κάθε $y \in Y$ υπάρχει ακριβώς ένα $x \in X$ με $f(x)=y$.

Στην περίπτωση μιας αμφιμονοσήμαντης και επί απεικονίσεως $f: X \to Y$ μπορούμε να ορίσουμε την απεικόνιση $f^{-1}: Y \to X$ που σε κάθε στοιχείο $y \in Y$ αντιστοιχίζει το μοναδικό εκείνο στοιχείο $x \in X$ για το οποίο ισχύει $f(x)=y$. Η συνάρτηση f^{-1} ονομάζεται ***αντίστροφη*** της f.

Για μια αμφιμονοσήμαντη και επί απεικόνιση $f: X \to Y$ ισχύουν:

(5) $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$ *για κάθε* $x \in X$.

(6) $f\big(f^{-1}(y)\big) = y$ *για κάθε* $y \in Y$.

(7) *Η απεικόνιση* f *είναι επί, όταν, και μόνον όταν,* $f\big(f^{-1}(B)\big) = B$ *για κάθε* $B \subseteq Y$.

Ισχύει ακόμη:

Πρόταση 3.1: *Η αντίστροφη απεικόνιση* f^{-1} *μιας αμφιμονοσήμαντης και επί απεικονίσεως* f *είναι αμφιμονοσήμαντη και επί.*

Πράγματι, αν η $f: X \to Y$ είναι αμφιμονοσήμαντη και επί και $u,v \in Y$ με $f^{-1}(u)=f^{-1}(v)$, τότε, σύμφωνα με τη (6), θα είναι $u=f\big(f^{-1}(u)\big)=f\big(f^{-1}(v)\big)=v$, που σημαίνει ότι η f^{-1} είναι αμφιμονοσήμαντη.

Σύμφωνα λοιπόν με την τελευταία πρόταση υπάρχει και η αντίστροφη της αντίστροφης συναρτήσεως f^{-1} και ισχύει $(f^{-1})^{-1}=f$.

Παρατήρηση 3.1: Είναι φανερό από τα προηγούμενα ότι μόνο οι αμφιμονοσήμαντες και επί απεικονίσεις έχουν αντίστροφη. Στην περίπτωση που η αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f: X \to Y$ δεν είναι επί, δηλαδή $f(X) \neq Y$, τότε η $f: X \to f(X)$ είναι αμφιμονοσήμαντη και επί και η f^{-1} ορίζεται στο $f(X)$. ■

Δίνεται η απεικόνιση $f: X \to Y$ και το μη-κενό υποσύνολο A του X. Θα λέμε ότι η απεικόνιση $g: A \to Y$ είναι ο *περιορισμός* της f στο A, όταν για κάθε $x \in A$ είναι $g(x)=f(x)$, δηλαδή είναι η απεικόνιση

$$g: A \to Y \text{ με } x \mapsto g(x) = f(x).$$

Λέμε ότι η $g: Z \to Y$, με $Z \supseteq X$, είναι μια *επέκταση* της $f: X \to Y$, όταν για κάθε $x \in X$ ισχύει $g(x)=f(x)$.

Η ***ταυτοτική απεικόνιση*** στο X είναι εκείνη η απεικόνιση I_X που σε κάθε στοιχείο $x \in X$ αντιστοιχίζει τον εαυτό του, δηλαδή $I_X: X \to X$ με $I_X(x)=x$.

Ονομάζουμε *σύνθεση των απεικονίσεων* $f\colon X \quad Y$ και $g\colon Y \quad Z$ (με αυτή τη σειρά) την απεικόνιση

$$g\circ f\colon X \quad Z \ \text{ με } \ (g\circ f)(x) = g\big(f(x)\big).$$

Η σύνθεση των απεικονίσεων είναι μια προσεταιριστική πράξη, που σημαίνει ότι για τις απεικονίσεις

$$f\colon X \quad Y,\ g\colon Y \quad Z \ \text{ και } \ h\colon Z \quad W$$

ισχύει $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$ και για το λόγο αυτό αντί του $h\circ(g\circ f)$ γράφουμε $h\circ g\circ f$.

Παρατήρηση 3.2: Για τις απεικονίσεις $f\colon X \quad Y$ και $g\colon Y \quad Z$ η σύνθεση $f\circ g$ δεν έχει νόημα παρά μόνο όταν $Z=X$, δηλαδή όταν $f\colon X \quad Y$ και $g\colon Y \quad X$. Στην περίπτωση αυτή $f\circ g\colon Y \quad Y$ και $g\circ f\colon X \quad X$, που σημαίνει ότι οι απεικονίσεις $f\circ g$, $g\circ f$ είναι διαφορετικές, αφού μπορεί $X \pi Y$, δηλαδή δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα. Ακόμη και στην περίπτωση που $X=Y$ μπορεί οι $f\circ g$, $g\circ f$ να μην είναι ίσες (βλ. άσκηση 6). ■

Πρόταση 3.2: *Αν οι απεικονίσεις $f\colon X \quad Y$ και $g\colon Y \quad Z$ είναι αμφιμονοσήμαντες (αντ. αμφιμονοσήμαντες και επί), τότε και η $g\circ f\colon X \quad Z$ είναι αμφιμονοσήμαντη (αντ. αμφιμονοσήμαντη και επί).*

Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχουν $u,v \quad X$ ώστε $g\big(f(u)\big)=g\big(f(v)\big)$. Θα αποδείξουμε ότι $u=v$, που σημαίνει ότι η $g\circ f$ είναι αμφιμονοσήμαντη. Η g είναι αμφιμονοσήμαντη, οπότε θα είναι $f(u)=f(v)$, και επειδή και η f είναι αμφιμονοσήμαντη θα ισχύει $u=v$.

Έστω ότι οι f, g είναι αμφιμονοσήμαντες και επί και $z \quad Z$. Τότε επειδή η g είναι επί υπάρχει $y \quad Y$ με $g(y)=z$. Για αυτό το y υπάρχει $x \quad X$ (αφού η f είναι επί) τέτοιο, ώστε $f(x)=y$. Έτσι το x είναι εκείνο το στοιχείο του X για το οποίο ισχύει $(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big)=g(y)=z$, που σημαίνει ότι η $g\circ f$ είναι απεικόνιση επί. ■

Πρόταση 3.3: *Αν για τις απεικονίσεις $f\colon X \quad Y$ και $g\colon Y \quad X$ ισχύουν*

$$f\circ g=I_Y \quad \text{και} \quad g\circ f=I_X,$$

τότε η f είναι αμφιμονοσήμαντη και επί και $f^{-1}=g$.

Απόδειξη: Η f είναι απεικόνιση επί, αφού για οποιοδήποτε $y \quad Y$ υπάρχει ένα στοιχείο $x \quad X$, το $g(y)$, για το οποίο ισχύει $f(x)=f\big(g(y)\big)=(f\circ g)(y)=y$.

Η f είναι αμφιμονοσήμαντη, αφού για δύο u, $v \quad X$ για τα οποία είναι $f(u)=f(v)$ έχουμε $u=g\big(f(u)\big)=g\big(f(v)\big)=v$.

Αν x είναι το αρχέτυπο του y, δηλαδή $y=f(x)$, τότε από τις ισότητες $g(y)=g\big(f(x)\big)=(g\circ f)(x)=x$ συμπεραίνουμε ότι η g αντιστοιχίζει στην εικόνα y το αρχέτυπό της x, δηλαδή η g είναι η αντίστροφή της f. ■

Επομένως, για μια αμφιμονοσήμαντη και επί απεικόνιση $f: X \to Y$ και την αντίστροφή της f^{-1} ισχύουν:

(8) $f \circ f^{-1} = I_Y$ *και* $f^{-1} \circ f = I_X$,

ενώ για την αμφιμονοσήμαντη και επί απεικόνιση $\varphi: X \to X$ ισχύουν:

(9) $\varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi = I_X$.

Πρόταση 3.4: *Αν οι απεικονίσεις $f: X \to Y$ και $g: Z \to X$ είναι αμφιμονοσήμαντες και επί, τότε $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.*

Απόδειξη: Οι απεικονίσεις f^{-1}, g^{-1}, $(f \circ g)^{-1}: Y \to Z$ και $g^{-1} \circ f^{-1}: Y \to Z$ είναι αμφιμονοσήμαντες και επί. Επομένως, για κάθε $z \in Z$ ισχύουν:

$$\begin{aligned} [(g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g)](z) &= [g^{-1} \circ (f^{-1} \circ f) \circ g](z) = \\ &= [g^{-1} \circ I_X \circ g](z) = (g^{-1} \circ g)(z) = I_Z(z) = z. \end{aligned}$$

Ενώ για κάθε $y \in Y$ ισχύουν:

$$\begin{aligned} [(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1})](y) &= [f \circ (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1}](y) = \\ &= [f \circ I_X \circ f^{-1}](y) = (f \circ f^{-1})(y) = I_Y(y) = y. \end{aligned}$$

Επομένως, σύμφωνα με την 3.3, η $g^{-1} \circ f^{-1}$ είναι η αντίστροφη της $f \circ g$. ■

Δίνονται δύο μη κενά σύνολα K και X. Ονομάζουμε οικογένεια στοιχείων του συνόλου X με σύνολο δεικτών K κάθε απεικόνιση $f: K \to X$ με $f(k) := x_k \in X$ για κάθε $k \in K$ και θα τη συμβολίζουμε με $(x_k)_{k \in K}$ ή, όταν είναι φανερό ότι το σύνολο δεικτών είναι το K, με (x_k). Όταν το K είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$, τότε η οικογένεια ονομάζεται ακολουθία στοιχείων του X (βλ. εκτενέστερα στο Κεφάλαιο 3). Το αρχέτυπο k της εικόνας x_k ονομάζεται δείκτης του x, ενώ το x_k όρος της οικογένειας ή της ακολουθίας ανάλογα.

Με τους πιο πάνω ορισμούς μπορούμε να επεκτείνουμε τους ορισμούς της ενώσεως και της τομής συνόλων στην περίπτωση μιας οικογένειας $(X_k)_{k \in K}$ από υποσύνολα ενός συνόλου Χ, δηλαδή $X_k \in \mathcal{P}(X)$ για κάθε $k \in K$:

$$\bigcup_{k \in K} X_k := \{x \in X : \exists\, k \in K \; x \in X_k\},$$

$$\bigcap_{k \in K} X_k := \{x \in X : \forall\, k \in K \; x \in X_k\}.$$

Ασκήσεις:

1) Δίνεται η απεικόνιση $f: X \to Y$. Να αποδείξετε την ισοδυναμία των προτάσεων:
   - (i) Η απεικόνιση f είναι αμφιμονοσήμαντη.
   - (ii) Για κάθε υποσύνολο A του X ισχύει $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$.

(iii) Για κάθε $A, B \quad X$ ισχύει $f(A \quad B) = f(A) \quad f(B)$.

(iv) Για κάθε $A, B \quad X$ με $A \quad B = \Delta$ ισχύει $f(A) \quad f(B) = \Delta$.

(v) Για κάθε $A, B \quad X$ με $A \quad B$ ισχύει $f(A \backslash B) = f(A) \backslash f(B)$.

2) Δώστε παραδείγματα απεικονίσεων $f\colon X \quad Y$ και υποσυνόλων $A \quad X$ για τα οποία να ισχύουν:

(i) $f(X \backslash A) \quad Y \backslash f(A)$,

(ii) $f(X \backslash A) \ldots Y \backslash f(A)$.

[Υπόδ. Αποδείξτε και χρησιμοποιείστε τον εγκλεισμό $Y \backslash f(A) \quad \big(Y \backslash f(X)\big) \quad f(X \backslash A)$].

3) Δίνεται η απεικόνιση $f\colon X \quad Y$ και $Z \quad X$. Αποδείξτε ότι $Y \backslash f(Z) \quad f(X \backslash Z)$, όταν, και μόνον όταν, η f είναι απεικόνιση επί.

4) Δίνονται τα σύνολα X_1, X_2, Y_1, Y_2 με $X_1 \quad X_2 = \Delta$ και $Y_1 \quad Y_2 = \Delta$ και οι αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις $f_1\colon X_1 \quad Y_1$, $f_2\colon X_2 \quad Y_2$. Να αποδείξετε ότι η απεικόνιση

$$f\colon X_1 \quad X_2 \quad Y_1 \quad Y_2 \quad \text{με} \quad f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \quad X_1 \\ f_2(x), & x \quad X_2 \end{cases}$$

είναι επίσης αμφιμονοσήμαντη.

5) Αν οι απεικονίσεις $f_i\colon X_i \quad Y_i$, $I = 1, 2$, είναι αμφιμονοσήμαντες (αντ. αμφιμονοσήμαντες και επί), αποδείξτε ότι και η απεικόνιση

$$f\colon X_1 \quad X_2 \quad Y_1 \quad Y_2 \quad \text{με} \quad f\big((x_1, x_2)\big) = \big(f_1(x_1), f_2(x_2)\big)$$

είναι αμφιμονοσήμαντη (αντ. αμφιμονοσήμαντη και επί).

6) Να αποδείξετε ότι για τις απεικονίσεις $f, g\colon X \quad X$, όπου $X = \{\alpha, \beta\}$, με $f(\alpha) = \beta$, $f(\beta) = \alpha$ και $g(\alpha) = g(\beta) = \alpha$ δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα για τη σύνθεση των απεικονίσεων, δηλαδή $f \circ g \pi g \circ f$.

7) Δίνεται η απεικόνιση $f\colon X \quad Y$. Να αποδείξετε ότι:

(i) Αν η $f \circ g$ είναι απεικόνιση επί, τότε και η f είναι επί και

(ii) Αν η $f \circ g$ είναι αμφιμονοσήμαντη, τότε και g είναι αμφιμονοσήμαντη.

8) Για κάθε υποσύνολο A ενός συνόλου E ονομάζουμε **χαρακτηριστική συνάρτηση** του συνόλου Α τη συνάρτηση

$$\mathcal{X}_A\colon \mathcal{P}(E) \quad \mathbb{R} \quad \text{με} \quad \mathcal{X}_A(x) := \begin{cases} 1, & x \quad A \\ 0, & x \quad E \backslash A \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι για $A, B \quad E$ και κάθε $x \quad E$ ισχύουν:

(i) $\mathcal{X}_\Delta(x) = 0$, $\mathcal{X}_E(x) = 1$.

(ii) $\mathcal{X}_A(x) + \mathcal{X}_{E \backslash A}(x) = 1$.

(iii) $\mathcal{X}_{A \quad B}(x) = \mathcal{X}_A(x) \cdot \mathcal{X}_B(x)$, $\mathcal{X}_{A \quad B}(x) = \mathcal{X}_A(x) + \mathcal{X}_B(x) - \mathcal{X}_A(x) \cdot \mathcal{X}_B(x)$.

(iv) $\mathcal{X}_{A \backslash B}(x) = \mathcal{X}_A(x) - \mathcal{X}_{A \quad B}(x)$.

Άσκηση 1-6 Αφού το σύνολο τιμών της $f\circ g$ είναι $\{\beta\}$ και το σύνολο τιμών της $g\circ f$ είναι $\{\alpha\}$. ■

Άσκηση 1-7

(i) Αν η $f\circ g\colon Z\to Y$ είναι απεικόνιση επί, τότε για κάθε $y\in Y$ υπάρχει $z\in Z$ τέτοιο, ώστε $(f\circ g)(z) = f(g(z)) = y$. Επομένως υπάρχει $x = g(z)\in X$ για το οποίο $f(x) = = y$, που σημαίνει ότι η $f\colon X\to Y$ είναι απεικόνιση επί.

(ii) Αν η $f\circ g\colon Z\to Y$ είναι αμφιμονοσήμαντη, τότε για $z_1, z_2\in Z$, με $z_1\neq z_2$, θα ισχύει $(f\circ g)(z_1) = f(g(z_1)) \neq (f\circ g)(z_2) = f(g(z_2))$, που ισχύει όταν $g(z_1) \neq g(z_2)$ και σημαίνει ότι η g είναι αμφιμονοσήμαντη. ■

Κεφάλαιο 2

Πραγματικοί αριθμοί

Άσκηση 2-6 Αν Y είναι άνω φραγμένο, τότε υπάρχει το $\sup Y$ και για κάθε $y\in Y$ ισχύει $y\leq \sup Y$. Επομένως και για κάθε $x\in X$ θα ισχύει $x\leq \sup Y$, δηλαδή το $\sup Y$ είναι ένα άνω φράγμα του X και ισχύει $\sup X\leq \sup Y$.

Ανάλογη είναι και η απόδειξη για το *infimum*. ■

Άσκηση 2-7 Ισχύουν οι προφανείς σχέσεις

$$\sup X\leq \max\{\sup X, \sup Y\},\ \sup Y\leq \max\{\sup X, \sup Y\}$$

και

$$\sup(X\cup Y)\leq \max\{\sup X, \sup Y\}.$$

Εξάλλου ένεκα της ασκ. 6 ισχύουν οι $\sup X\leq \sup(X\cup Y)$ και $\sup Y\leq$ $\leq \sup(X\cup Y)$, που σημαίνει $\max\{\sup X, \sup Y\}\leq \sup(X\cup Y)$.

Επομένως ισχύει η ισότητα $\sup(X\cup Y) = \max\{\sup X, \sup Y\}$.

Ανάλογη είναι η απόδειξη και για το κατώτερο πέρας. ■

Άσκηση 2-10 (*Πλάγια απόδειξη*)

(1) Υποθέτουμε ότι $\alpha > 0$, τότε για κάθε $\beta\in\mathbb{R}$, σύμφωνα με την Αρχιμήδεια ιδιότητα, υπάρχει φυσικός αριθμός ν_0 τέτοιος, ώστε για κάθε $\nu\geq \nu_0$ να ισχύει $\beta < \nu\alpha$. Επομένως ισχύει η πρόταση (1).

(2) Υποθέτουμε ότι $\alpha > 1$. Τότε σύμφωνα με το πόρισμα 3.1 για κάθε $\beta\in\mathbb{R}$ υπάρχει ν_0 τέτοιος, ώστε για κάθε $\nu\geq \nu_0$ να ισχύει $\alpha^\nu > \beta$. Επομένως ισχύει η πρόταση.

(3) Υποθέτουμε ότι $\alpha>0$. Τότε για κάθε $0<\varepsilon<\alpha$ δεν ισχύει $0\leq\alpha<\varepsilon$. ■

Άσκηση 2-12 Επειδή κάθε $x\in X$ (αντ. $y\in Y$) είναι κάτω (αντ. άνω) φράγμα του Y

(αντ. X), τότε ισχύει $supX \leq infY$. Αν $supX = infY$, τότε ο αριθμός $\tau = supX = infY$ είναι ο ζητούμενος και μοναδικός. Αν $supX < infY$, τότε κάθε πραγματικός τ, για τον οποίον ισχύει $supX < \tau < infY$, ικανοποιεί την πρόταση.

Άσκηση 2-13 Σύμφωνα με την πρόταση 3.4 μεταξύ των άνισων πραγματικών αριθμών τ–1 και *τα* τ υπάρχουν άπειροι ρητοί αριθμοί, που σημαίνει ότι το σύνολο A δεν είναι κενό και είναι άνω φραγμένο. Επομένως υπάρχει το ανώτερο πέρας του A και ισχύει $supA \leq \tau$. Αν $supA < \tau$, τότε θα υπάρχει ρητός αριθμός ρ τέτοιος, ώστε $supA < \rho < \tau$. Αυτό όμως θα σημαίνει ότι $\rho \in A$ και $\rho \notin A$, που είναι άτοπο και επομένως $supA = \tau$.

Με ανάλογους συλλογισμούς αποδεικνύεται ότι $infB = \tau$. ■

Άσκηση 2-14 *(Συνέχεια της υπόδειξης)*. Επειδή $\gamma = supA > \alpha_\nu$, υπάρχει $x \in A$ με $\alpha_\nu < x < \gamma < \beta_\nu$, που σημαίνει ότι το διάστημα $[\alpha, x]$ έχει πεπερασμένη κάλυψη, οπότε και το $[\alpha, \gamma]$ έχει πεπερασμένη κάλυψη, οπότε $\gamma \in A$.

Αν $\gamma < \beta$, τότε $\alpha_\nu < \gamma < \beta < \beta_\nu$ ή $\alpha_\nu < \gamma < \beta_\nu < \beta$. Και στις δύο περιπτώσεις υπάρχει $y \in [\alpha, \beta]$ με $\alpha_\nu < \gamma < y < \beta_\nu$, το οποίο σημαίνει ότι το $y \in A$ και $\gamma < y$. Αυτό όμως δεν είναι δυνατόν, αφού $\gamma = supA$. Επομένως $\beta = \gamma \in A$ και το $[\alpha, \beta]$ έχει πεπερασμένη κάλυψη. ■

Κεφάλαιο 3

Ακολουθίες πραγματικών αριθμών

Άσκηση 3-3 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0$. Οι όροι $P(\alpha_\nu)$ *της* ακολουθίας $(P(\alpha_\nu))$ έχουν τη μορφή

$$P(\alpha_\nu) = A_n \alpha_\nu^n + A_{n-1}\alpha_\nu^{n-1} + \dots + A_1 \alpha_\nu + A_0, \quad n \text{ σταθερός φυσικός αριθμός,}$$

δηλαδή είναι άθροισμα n+1 ακολουθιών της μορφής $\left(A_k \alpha_\nu^k\right)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, κάθε μια από τις οποίες συγκλίνει στο όριο $A_k \alpha^k$. Επομένως

$$P(\alpha_\nu) = A_n \alpha_\nu^n + A_{n-1}\alpha_\nu^{n-1} + \dots + A_1 \alpha_\nu + A_0 \to P(\alpha) = A_n \alpha^n + A_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + A_1 \alpha + A_0.$$

Όπως θα δούμε στο κεφάλαιο 6 τα πολυώνυμα είναι συνεχείς συναρτήσεις και το ζητούμενο της ασκήσεως είναι βασική ιδιότητα των συνεχών συναρτήσεων. ■

Άσκηση 3-4 Αν $\xi \in \mathbb{R}$ είναι σημείο συσσωρεύσεως του συνόλου A, τότε σε κάθε ένα από τα διαστήματα $\left(\xi - \frac{1}{\nu}, \xi + \frac{1}{\nu}\right)$, $\nu \in \mathbb{N}$, υπάρχουν άπειρα στοιχεία του A, από τα οποία επιλέγουμε ένα, το $\alpha_\nu \neq \xi$. Η ακολουθία (α_ν) συγκλίνει στο ξ, αφού

για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $\nu_0\in\mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε για κάθε $\nu\geq\nu_0$ να ισχύει $\frac{1}{\nu}<\varepsilon$. Επομένως για κάθε $\nu\geq\nu_0$ να ισχύει $|\alpha_\nu-\xi|<\frac{1}{\nu}<\varepsilon$, που σημαίνει $\alpha_\nu\to\xi$.

Αντίστροφα, αν $\alpha_\nu\to\xi$, $\alpha_\nu\in A$ και $\alpha_\nu\neq\xi$, τότε σε κάθε περιοχή του ξ, υπάρχουν άπειρα στοιχεία της ακολουθίας που ανήκουν σ' αυτήν, που σημαίνει ότι το ξ είναι σημείο συσσωρεύσεως του συνόλου A. ■

Άσκηση 3-5 Στην περίπτωση αυτή, σύμφωνα με την πρόταση 3.1, υπάρχουν άπειρα στοιχεία $\alpha\in A$ τέτοια, ώστε $\xi-\frac{1}{\nu}<\alpha<\xi$ για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$. Για κάθε ν επιλέγουμε ένα τέτοιο στοιχείο, το α_ν. Η ακολουθία (α_ν) συγκλίνει στο ξ. ■

Άσκηση 3-6 Για κάθε $\nu, \mu\in\mathbb{N}$, $\nu<\mu$ ισχύουν

$$|\alpha_\nu-\alpha_\mu|\leq|\alpha_\nu-\alpha_{\nu+1}|+|\alpha_{\nu+1}-\alpha_{\nu+2}|+\ldots+|\alpha_{\mu-1}-\alpha_\mu|\leq\frac{\alpha}{2^\nu}+\frac{\alpha}{2^{\nu+1}}+\ldots+\frac{\alpha}{2^{\mu-1}}\leq$$

$$\leq\frac{\alpha}{2^\nu}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{\mu-\nu-1}}\right)\leq\frac{\alpha}{2^{\nu-1}}.$$

Υπάρχει κατάλληλο $\nu_0\in\mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε για δοθέν $\varepsilon>0$ να ισχύει $\frac{\alpha}{2^{\nu-1}}<\varepsilon$, που σημαίνει ότι η ακολουθία (α_ν) συγκλίνει.

Σημείωση: Μελετήστε το σχόλιο στην πρόταση 2.5. ■

Άσκηση 3-8 Για τις ακολουθίες αυτές ισχύουν $\alpha_1\leq\alpha_2\leq\ldots\leq\alpha_\nu\leq\ldots\leq\ldots\leq\beta_\nu\leq\ldots\leq\beta_1$, που σημαίνει ότι η (α_ν) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από το β_1, ενώ η (β_ν) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από το α_1. Επομένως συγκλίνουν και οι δύο ακολουθίες στα όρια α και β αντίστοιχα.

Η ακολουθία μη αρνητικών όρων $(\beta_\nu-\alpha_\nu)$, οποία ως διαφορά συγκλινουσών ακολουθιών συγκλίνει και μάλιστα στο $\beta-\alpha\geq0$, που σημαίνει $\lim\beta_\nu\geq\lim\alpha_\nu$ (βλ. 3.(7)). ■

Άσκηση 3-10 Η απάντηση είναι άμεση συνέπεια των ανισοτήτων

$$\gamma\leq\sqrt[\nu]{\alpha^\nu+\beta^\nu+\gamma^\nu}\leq\gamma\cdot\sqrt[\nu]{3}\quad\text{και του ορίου}\quad\sqrt[\nu]{3}\to1.\ ■$$

Ασκήσεις 3-14-17 Είναι ειδικές περιπτώσεις των πράξεων της παραγράφου 9{(1), ..., (13)}. ■

Άσκηση 3-18 Οι ανισότητες τις ασκήσεως είναι ισοδύναμες με τις ανισότητες

$\frac{1}{\left(\sqrt[\nu]{\nu}\right)^{\kappa}} < \sqrt[\nu]{\alpha_\nu} < \left(\sqrt[\nu]{\nu}\right)^{\kappa}$ από τις οποίες για σταθερό κ προκύπτει (βλ. 3.(3) και 5.1) $\lim\limits_{\nu} \sqrt[\nu]{\alpha_\nu} = 1$. ■

Απόδειξη Πρότασης 10.4. *Για κάθε ακολουθία (α_ν) θετικών αριθμών ισχύουν:*

$$\underline{\lim}\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} \leq \underline{\lim}\sqrt[\nu]{\alpha_\nu} \leq \overline{\lim}\sqrt[\nu]{\alpha_\nu} \leq \overline{\lim}\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}.$$

Απόδειξη. Θα παραθέσουμε την απόδειξη μόνο της πρώτης ανισότητας.

Αν $\underline{\lim}\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = 0$, τότε η ανισότητα είναι προφανής.

Αν $\underline{\lim}\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} \neq 0$, τότε για κάθε $\lambda>0$, με $0 < \lambda < \underline{\lim}\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}$, υπάρχει ν_0 τέτοιο, ώστε για κάθε $\nu \geq \nu_0$ να ισχύει

$$\alpha_\nu \geq \alpha_{\nu-1}\lambda \geq \alpha_{\nu-2}\lambda^2 \geq \ldots \geq \alpha_{\nu_0}\lambda^{\nu-\nu_0} \quad \text{ή} \quad \sqrt[\nu]{\alpha_\nu} \geq \lambda\sqrt[\nu]{\alpha_{\nu_0}\lambda^{-\nu_0}},$$

από την οποία προκύπτει

$$\underline{\lim}\sqrt[\nu]{\alpha_\nu} \geq \lambda\underline{\lim}\sqrt[\nu]{\alpha_{\nu_0}\lambda^{-\nu_0}} = \lambda\lim\sqrt[\nu]{\alpha_{\nu_0}\lambda^{-\nu_0}} = \lambda.$$

Επειδή η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε $\lambda < \underline{\lim}\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}$, έπεται ότι ισχύει και

$$\underline{\lim}\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} \leq \underline{\lim}\sqrt[\nu]{\alpha_\nu}. \blacksquare$$

Άσκηση 3-19 Θεωρούμε την ακολουθία $\alpha_\nu = \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, η οποία συγκλίνει στο e (βλ. παράδ. 5.2), και την ακολουθία $\beta_\nu = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\nu$. Με επαγωγή είναι εύκολο να αποδείξουμε την ισότητα

$$\beta_\nu = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \ldots \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu = \frac{(\nu+1)^{\nu+1}}{(\nu+1)!}.$$

Επειδή $\lim\frac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu} = \lim\alpha_\nu = \lim\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu+1} = e$, σύμφωνα με το παρ.10.1, θα ισχύει $\lim\sqrt[\nu]{\beta_\nu} = \lim\sqrt[\nu]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\nu} = \lim\frac{\nu+1}{\sqrt[\nu]{(\nu+1)!}}\sqrt[\nu]{\nu+1} = e$ και $\lim\frac{\nu}{\sqrt[\nu]{\nu!}} = e$. ■

Άσκηση 3-20 Η ακολουθία $\gamma_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ είναι αύξουσα, ενώ η ακολουθία $\delta_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ είναι φθίνουσα (βλ. Α2 πιο κάτω) και συγκλίνουν στον *e,* οπότε ισχύουν οι ανισότητες $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ για κάθε *n.*

Η ακολουθία $\alpha_n = \frac{n^n}{e^n}\cdot\frac{1}{n!}$ είναι φθίνουσα, αφού $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = ... = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{e} < 1$ και η ακολουθία $\beta_n = n\cdot\alpha_n$ είναι αύξουσα, αφού $\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = ... = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{e} > 1$.

Επομένως

$$\alpha_n < \alpha_1 = \frac{1}{e} = \beta_1 < \beta_n \text{ ή } \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} < \frac{1}{e} < n\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} \text{ ή } \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e < n! < \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot ne. \ \blacksquare$$

Άσκηση 3-21 (*Λήμμα του Stolz):* Υποθέτουμε ότι $\lambda\in\mathbb{R}$. Για $\varepsilon>0$ υπάρχει $\nu_0\in\mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε για κάθε $\nu \geq \nu_0$ να ισχύουν

$$\lambda-\varepsilon < \frac{\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu}{\beta_{\nu+1}-\beta_\nu} < \lambda+\varepsilon$$

ή
$$(\lambda-\varepsilon)(\beta_{\nu+1}-\beta_\nu) < \alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu < (\lambda+\varepsilon)(\beta_{\nu+1}-\beta_\nu)$$

Αθροίζοντας τις ανισότητες από ν_o μέχρι κ–1 και διαιρώντας με β_κ παίρνουμε

$$(\lambda-\varepsilon)\left(1-\frac{\beta_{\nu_0}}{\beta_\kappa}\right)+\frac{\alpha_{\nu_0}}{\beta_\kappa} < \frac{\alpha_\kappa}{\beta_\kappa} < (\lambda+\varepsilon)\left(1-\frac{\beta_{\nu_0}}{\beta_\kappa}\right)+\frac{\alpha_{\nu_0}}{\beta_\kappa},$$

από τις οποίες συμπεραίνουμε ότι $\lambda-\varepsilon \leq \lim\limits_{\kappa\to\infty}\frac{\alpha_\kappa}{\beta_\kappa} \leq \lambda+\varepsilon$, που σημαίνει ότι ισχύει $\lim\limits_{\kappa}\frac{\alpha_\kappa}{\beta_\kappa} = \lambda$.

Υποθέτουμε ότι $\lambda = +\infty$. Για $A>0$ υπάρχει φυσικός $\nu_1(A)$ τέτοιος, ώστε για κάθε $\nu \geq \nu_1(A)$ να ισχύει $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu > A(\beta_{\nu+1}-\beta_\nu)$. Αθροίζοντας την τελευταία ανισότητα από ν_1 ως κ–1 παίρνουμε

$$\alpha_\kappa - \alpha_{\nu_1} > A(\beta_\kappa - \beta_{\nu_1}) \text{ ή } \frac{\alpha_\kappa}{\beta_\kappa} > \frac{\alpha_{\nu_1}}{\beta_\kappa} + A\left(1-\frac{\beta_{\nu_1}}{\beta_\kappa}\right).$$

Επειδή $\beta_\kappa \to +\infty$ υπάρχει φυσικός αριθμός ν_2 τέτοιος, ώστε για κάθε $\kappa>\nu_2$ να ισχύουν $\frac{\alpha_{\nu_1}}{\beta_\kappa} > -1$ και $1-\frac{\beta_{\nu_1}}{\beta_\kappa} > \frac{1}{2}$. Επομένως για κάθε $\kappa > max\{\nu_1, \nu_2\}$ ισχύει

$\frac{\alpha_\kappa}{\beta_\kappa} > -1 + \frac{1}{2}A$, που σημαίνει ότι $\frac{\alpha_\kappa}{\beta_\kappa} \to +\infty$.

Ανάλογη είναι και η απόδειξη στην περίπτωση που $\lambda = -\infty$. ■

Άσκηση 3-22

(i) Για τις ακολουθίες $\alpha_\nu = x_1 + 2^\kappa x_2 + \ldots + \nu^\kappa x_\nu$ και $\beta_\nu = \nu^{\kappa+1}$, που ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του *λήμματος Stolz,* εφαρμόζουμε το λήμμα. Θεωρούμε τις ισότητες

(*) $$\frac{\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu}{\beta_{\nu+1} - \beta_\nu} = \frac{(\nu+1)^\kappa x_{\nu+1}}{(\nu+1)^{\kappa+1} - \nu^{\kappa+1}}.$$

Με τη βοήθεια του διωνύμου του Νεύτωνα παίρνουμε την ακολουθία

$$\frac{(\nu+1)^{\kappa+1} - \nu^{\kappa+1}}{(\nu+1)^\kappa} = (\kappa+1)\left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^\kappa + \frac{(\kappa+1)\kappa}{2}\frac{1}{\nu}\left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^\kappa + \ldots + \frac{1}{(\nu+1)^\kappa},$$

η οποία συγκλίνει στο κ+1.

Επομένως $$\lim_\nu \frac{\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu}{\beta_{\nu+1} - \beta_\nu} = \frac{x}{\kappa+1} \quad \text{και} \quad \lim_\nu \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = \frac{x}{\kappa+1}.$$

Οι περιπτώσεις (ii) και (iii) είναι συνέπειες της (i) για x_ν=1, $\nu \in \mathbb{N}$, και για κ=1.

Η περίπτωση (iv) είναι ανάλογη της (i). ■

Άσκηση 3-23

(i) Η ακολουθία (α_ν) αποτελείται από τις συγκλίνουσες υπακολουθίες

$\alpha_{2\nu} = 2 + \frac{1}{2\nu}$ και $\alpha_{2\nu-1} = -\frac{1}{2\nu-1}$, οι οποίες συγκλίνουν στο 2 και 0 αντίστοιχα. Επομένως $\overline{\lim}\alpha_\nu = 2$ και $\underline{\lim}\alpha_\nu = 0$.

(ii) Επειδή $\alpha_\nu = \begin{cases} \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος} \\ \left(1-\frac{1}{\nu}\right)^\nu, & \text{αν } \nu \text{ περιττός} \end{cases}$, $\lim_\nu\left(1+\frac{1}{\nu}\right) = e$ και $\lim_\nu\left(1-\frac{1}{\nu}\right)^\nu = e^{-1}$

είναι $\overline{\lim}\alpha_\nu = e$ και $\underline{\lim}\alpha_\nu = \frac{1}{e}$.

(iii) Επειδή $\alpha_\nu = \begin{cases} 0, & \text{αν } \nu = 3\kappa \\ \frac{1}{3}, & \text{αν } \nu = 3\kappa+1 \\ \frac{2}{3}, & \text{αν } \nu = 3\kappa+2 \end{cases}$ η ακολουθία αποτελείται από τις υπακο-

λουθίες $(\alpha_{3\kappa})$, $(\alpha_{3\kappa+1})$ και $(\alpha_{3\kappa+2})$, που συγκλίνουν στο 0, $\frac{1}{3}$ και $\frac{2}{3}$ αντίστοιχα. Επομένως $\overline{lim}\alpha_\nu = 0$ και $\underline{lim}\alpha_\nu = \frac{2}{3}$. ■

Άσκηση 3-24 *Υπόδειξη:* Χρησιμοποιείστε την ειδική περίπτωση της προτάσεως της § 10, όπου $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \dots = \frac{\nu+1}{2\nu+3}$. ■

Άσκηση 3-25 Θα παραθέσουμε μόνο την απόδειξη της ανισότητας (ii).
Υποθέτουμε ότι $\underline{lim}\alpha_\nu + \underline{lim}\beta_\nu > \underline{lim}(\alpha_\nu + \beta_\nu)$, τότε υπάρχει λ με

$$\underline{lim}\alpha_\nu + \underline{lim}\beta_\nu > \lambda > \underline{lim}(\alpha_\nu + \beta_\nu).$$

Υπάρχουν άπειροι όροι της ακολουθίας $(\alpha_\nu + \beta_\nu)$ με $\alpha_\nu + \beta_\nu < \lambda$, από τους οποίους άπειροι όροι της ακολουθίας (α_ν), οι (α_{ν_κ}) συγκλίνουν, έστω στο α. Η αντίστοιχη υπακολουθία (β_{ν_κ}) περιέχει μια υπακολουθία (β_{ν_μ}) που συγκλίνει, έστω στο β.
Για τα α, β ισχύουν

$$\alpha_{\nu_\mu} + \beta_{\nu_\mu} \to \alpha + \beta \le \lambda < \underline{lim}\alpha_\nu + \underline{lim}\beta_\nu \quad \text{και} \quad \alpha \ge \underline{lim}\alpha_\nu \quad \text{και} \quad \beta \ge \underline{lim}\beta_\nu,$$

που σημαίνει $\alpha+\beta \ge \underline{lim}\alpha_\nu + \underline{lim}\beta_\nu$. Αυτό είναι άτοπο και επομένως ισχύει η ανισότητα $\underline{lim}\alpha_\nu + \underline{lim}\beta_\nu \le \underline{lim}(\alpha_\nu + \beta_\nu)$.
Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύονται και οι άλλες ανισότητες. ■

Συμπληρωματικές Ασκήσεις 3ου Κεφαλαίου

Άσκηση 3-Α1 *Αποδείξτε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $\alpha>1$ η* ακολουθία (A_n), με $A_n = \frac{n^k}{\alpha^n}$, *συγκλίνει στο* 0.

Απάντηση: Θέτουμε $\alpha = 1+\beta$, όπου $\beta > 0$, οπότε το διώνυμο του Newton για κάθε $n > 2k$ δίνει

$$(*) \qquad (1+\beta)^n > \binom{n}{k+1}\beta^{k+1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}\beta^{k+1} > \frac{n^{k+1}\beta^{k+1}}{2^{k+1}(k+1)!},$$

αφού για κάθε λ, με $0 \le \lambda \le k$, ισχύει $n - \lambda > \frac{n}{2}$.

Από τις σχέσεις (*) προκύπτει $0<\dfrac{n^k}{\alpha^n}<\dfrac{2^{k+1}(k+1)!}{\beta^{k+1}}\cdot\dfrac{1}{n}$, από την οποία παίρνουμε

$$0\leq \lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{\alpha^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{k+1}(k+1)!}{\beta^{k+1}}\cdot\frac{1}{n}=\frac{2^{k+1}(k+1)!}{\beta^{k+1}}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\,.\ \blacksquare$$

Άσκηση 3-A2 Δίνονται οι ακολουθίες $\gamma_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ και $\delta_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$.

Αποδείξτε ότι

(i) Η ακολουθία (γ_n) είναι γνησίως αύξουσα, η ακολουθία (δ_n) γνησίως φθίνουσα και για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ισχύει $\gamma_n<e<\delta_n$.

(ii) Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ισχύουν (παρεμβολή του $n!$)

$$\frac{(n+1)^n}{n!}<e^n<\frac{(n+1)^{n+1}}{n!}\quad \text{και}\quad e^{-n}(n+1)^n<n!<e^{-n}(n+1)^{n+1}$$

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$.

Λύση

(i) Για $n\geq 2$, σύμφωνα με την *ανισότητα Bernoulli* (2.2) ισχύουν

$$\frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}}=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\cdot\frac{n}{n-1}>\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{n}{n-1}=1$$

$$\frac{\delta_{n-1}}{\delta_n}=\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}>\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\cdot\frac{n-1}{n}=1,$$

από τις οποίες συμπεραίνουμε την μονοτονία των ακολουθιών. Επειδή ακόμη $\gamma_n\to e$ και $\delta_n\to e$ προκύπτει και η $\gamma_n<e<\delta_n$.

(ii) Αν πολλαπλασιάσουμε τις ανισότητες $\gamma_\nu<e<\delta_\nu$, για $\nu=1,2,\dots,n$, τότε μετά τις πράξεις θα προκύψουν οι ανισότητες.

(iii) Το όριο είναι συνέπεια των ανισοτήτων της (ii).

Σχόλιο: Συνέπεια των ανισοτήτων της ασκήσεως 20 και της ***A2*** είναι οι

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^n<e\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<ne\left(\frac{n}{e}\right)^n<\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}\quad\blacksquare$$

Άσκηση 3-Α3 *Να υπολογιστεί το όριο της ακολουθίας με γενικό όρο*

$$S_n = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{2}{1+\sqrt{2}} + \frac{3}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{n}{1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}\right).$$

Λύση: Θεωρούμε τις ακολουθίες $\alpha_n = n$ και $\beta_n = 1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}$, για τις οποίες ισχύει το *λήμμα του Stolz,* δηλαδή

$$\frac{\alpha_{n+1}-\alpha_n}{\beta_{n+1}-\beta_n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0 \;\Rightarrow\; \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{n}{1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}} \to 0\,.$$

Θεωρούμε ακόμη τις ακολουθίες $\gamma_n = 1 + \frac{2}{1+\sqrt{2}} + \ldots + \frac{n}{1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}$ και $\delta_n = n$,

στις οποίες εφαρμόζουμε πάλι το λήμμα του Stolz, οπότε έχουμε

$$\frac{\gamma_{n+1}-\gamma_n}{\delta_{n+1}-\delta_n} = \frac{\dfrac{n+1}{1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n+1}}}{1} \to 0, \quad \text{οπότε και } \frac{\gamma_n}{\delta_n} \to 0.$$

Επομένως και

$$\lim_n \frac{1}{n}\left(1 + \frac{2}{1+\sqrt{2}} + \frac{3}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{n}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}}\right) = 0\,.$$

Σημείωση: Το παράδειγμα 8.10 μπορεί να αποδειχθεί και με τη βοήθεια του *λήμματος Stolz* για τις ακολουθίες $A_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ και $\beta_n = n$, για τις οποίες ισχύει $\frac{A_{n+1}-A_n}{\beta_{n+1}-\beta_n} = \frac{\alpha_{n+1}}{1} \to \alpha$, οπότε και $\frac{A_n}{n} = \frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}{n} \to \alpha$. ■

Άσκηση 3-Α4 *Αν η ακολουθία (α_n) συγκλίνει στο θετικό αριθμό α, αποδείξτε ότι και η ακολουθία*

$$S_n = \left(\frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_1+\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{2n} + \ldots + \frac{\alpha_1+\sqrt{\alpha_1\alpha_2}+\sqrt[3]{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}+\ldots+\sqrt[n]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}}{n^2}\right)$$

συγκλίνει στο α.

Απόδειξη: Σύμφωνα με το παράδειγμα 10.1 η ακολουθία $\left(\sqrt[n]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}\right)$ συγκλίνει στο *α.* Ενώ σύμφωνα με το παράδειγμα 8.10 και η ακολουθία (A_n), με $A_n = \frac{\alpha_1+\sqrt{\alpha_1\alpha_2}+\ldots+\sqrt[n]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}}{n}$, συγκλίνει στο *α.* Επειδή είναι

$$S_n = \frac{1}{n}\left(A_1 + A_2 + ... + A_n\right) =$$
$$= \left(\frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{2n} + ... + \frac{\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1\alpha_2} + ... + \sqrt[n]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}}{n^2}\right)$$

έπεται ότι και η ακολουθία (S_n) συγκλίνει στο *α*. ■

Άσκηση 3-Α5 Για τους θετικούς αριθμούς *α, β* και τον πραγματικό αριθμό $\tau \neq 0$ ονομάζουμε *μέσο τάξεως τ των αριθμών α, β* την ποσότητα

$$M_\tau(\alpha,\ \beta) = \left(\frac{\alpha^\tau + \beta^\tau}{2}\right)^{\frac{1}{\tau}}.$$

Για τ=1, έχουμε τον *αριθμητικό μέσο* των *α, β,* για $\tau = 2$ τον *μέσο τετραγωνικό* και για $\tau = -1$ τον *αρμονικό μέσο τους.*

(i) Αποδείξτε ότι αν $0 < \alpha < \beta$, τότε $\alpha < M_\tau(\alpha,\beta) < \beta$.

(ii) Αν $0 < \alpha < \beta$, υπολογίστε τα όρια των ακολουθιών $\{M_n(\alpha,\beta)\}$ και $\{M_{-n}(\alpha,\beta)\}$.

Λύση:

(i) Οι ανισότητες είναι άμεσες συνέπειες των ανισοτήτων

$$\alpha = \left(\frac{\alpha^\tau + \alpha^\tau}{2}\right)^{\frac{1}{\tau}} < \left(\frac{\alpha^\tau + \beta^\tau}{2}\right)^{\frac{1}{\tau}} = M_\tau(\alpha,\beta) < \left(\frac{\beta^\tau + \beta^\tau}{2}\right)^{\frac{1}{\tau}} = \beta.$$

(ii) Επειδή $M_n(\alpha,\beta) = \beta\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\sqrt[n]{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n + 1}$, $\frac{\alpha}{\beta} < 1$, $\sqrt[n]{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n + 1} \to 1$ και $\sqrt[n]{2} \to 1$

έχουμε $\lim_n M_n(\alpha,\beta) = \beta$.

Αν θέσουμε $A = \frac{1}{\alpha}$ και $B = \frac{1}{\beta}$, τότε $0 < B < A$ και $M_{-n}(\alpha,\beta) = \frac{1}{M_n(A,B)}$,

οπότε

$$\lim_n M_{-n}(\alpha,\beta) = \lim_n \frac{1}{M_n(A,B)} = \frac{1}{A} = \alpha.$$

Σχόλιο: Μπορούμε να εφαρμόσουμε την ειδική περίπτωση της προτάσεως της παραγράφου 10 για την ακολουθία $S_n(\alpha,\beta) = \frac{\alpha^n + \beta^n}{2}$. Επειδή

$$\lim_n \frac{S_{n+1}(\alpha,\beta)}{S_n(\alpha,\beta)} = \beta \lim_n \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}+1}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n}+1} = \beta \Rightarrow \lim_n M_n(\alpha,\beta) = \lim_n \sqrt[n]{S_n(\alpha,\beta)} = \beta. \blacksquare$$

Άσκηση 3-Α6 Για $\alpha>0$ και $x_0>0$, ο αναδρομικός τύπος

(*) $$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right), \text{ για } n = 0, 1, 2, \ldots$$

ορίζει μια ακολουθία, της οποίας για $\alpha=2$ και $x_0=1$, οι δύο πρώτοι όροι είναι

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{1}\right) = \frac{3}{2} = 1{,}5, \quad x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{2\cdot 2}{3}\right) = \frac{17}{12} = 1{,}416\ldots$$

Αποδείξτε ότι για οποιοδήποτε $x_0>0$ η ακολουθία (*) συγκλίνει στην $\sqrt{\alpha}$.

Απόδειξη: Με επαγωγή αποδεικνύεται ότι για κάθε n ισχύει $x_n>0$. Ακόμη ισχύει $x_n \geq \sqrt{\alpha}$ για $n = 1, 2, \ldots$, αφού

$$x_n^2 - \alpha = \frac{1}{4}\left(x_{n-1} + \frac{\alpha}{x_{n-1}}\right)^2 - \alpha = \frac{1}{4}\left(x_{n-1} - \frac{\alpha}{x_{n-1}}\right)^2 \geq 0.$$

Για $n = 1, 2, \ldots$ η ακολουθία είναι φθίνουσα, αφού $x_n - x_{n+1} = \frac{1}{2x_n}(x_n^2 - \alpha) \geq 0.$

Επομένως η ακολουθία (x_n) συγκλίνει, έστω στο $x \geq \sqrt{\alpha}$, οπότε λαμβάνοντας τα όρια της (*) παίρνουμε τη σχέση

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{x}\right), \quad \text{που σημαίνει } x = \sqrt{\alpha}.$$

Παρατήρηση: Για το *σφάλμα προσέγγισης* $\Delta_n = x_n - \sqrt{\alpha}$ με επανάληψη της (*) παίρνουμε $\Delta_{n+1} = \frac{1}{2x_n}\Delta_n^2$, που ένεκα της $x_n \geq \sqrt{\alpha}$ για κάθε $n\geq 1$ μας δίνει

(**) $$|\Delta_{n+1}| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\Delta_n^2 .$$

Επαναλαμβάνοντας την ανισότητα αυτή παίρνουμε το σφάλμα προσέγγισης

$$|\Delta_{n+1}| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\right)^{1+2+\ldots+2^{n-1}} \cdot \Delta_1^{2^n} = \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\right)^{2^n-1} \cdot \Delta_1^{2^n} ,$$

το οποίο για $\alpha=2$ και σημείο εκκίνησης $x_0=1$, μας δίνει τα σφάλματα