Γ. ΠΑΝΤΕΛΙΔΗ
Καθηγητή Ε.Μ.Π.
Δ. ΚΡΑΒΒΑΡΙΤΗ
Αν. Καθηγητή Ε.Μ.Π.
Β. ΝΑΣΟΠΟΥΛΟΥ
Επ. Καθηγητή Ε.Μ.Π.

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
ΑΘΗΝΑ 1993

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό εισάγει το σπουδαστή και γενικότερα τον αναγνώστη στη θεωρία και τις εφαρμογές των συναρτήσεων μιγαδικής μεταβλητής. Για την κατανόηση του περιεχομένου του βιβλίου απαιτείται γνώση των βασικών εννοιών, προτάσεων και θεωρημάτων της Πραγματικής Αναλύσεως

Η θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων είναι από τους πιο σημαντικούς κλάδους των Μαθηματικών, γιατί οι μέθοδοί της χρησιμοποιούνται για την επίλυση προβλημάτων Υδροδυναμικής, Αεροδυναμικής, Θεωρίας Ελαστικότητος, Ηλεκτροδυναμικής κ.ά. Πολλά προβλήματα της Μηχανικής και της Φυσικής οδηγούν στη διαφορική εξίσωση Laplace που η επίλυσή της είναι στενά συνδεδεμένη με μια βασική κατηγορία μιγαδικών συναρτήσεων, τις ολόμορφες συναρτήσεις.

Οι διάφορες έννοιες αναπτύσσονται με απλό και, όσο είναι δυνατό, με εύληπτο τρόπο και παρατίθενται αρκετά παραδείγματα για την εμπέδωση των εννοιών αυτών. Στο τέλος του βιβλίου δίνεται για εξάσκηση ικανοποιητικός αριθμός ασκήσεων κατανεμημένες κατά κεφάλαιο.

Στο Κεφάλαιο 1 εισάγονται οι μιγαδικοί αριθμοί και η γεωμετρική παράστασή τους, ενώ στο Κεφάλαιο 2 ορίζεται η σύγκλιση ακολουθίας και σειράς μιγαδικών αριθμών.

Στο Κεφάλαιο 3 μελετώνται οι οριακές τιμές και η συνέχεια μιγαδικών συναρτήσεων. Οι σειρές μιγαδικών συναρτήσεων μελετώνται επίσης στο κεφάλαιο αυτό. Η διαφορισιμότητα μιγαδικών συναρτήσεων και οι συνθήκες διαφορισιμότητας δίνονται στο Κεφάλαιο 4, όπου ορίζεται και η έννοια της ολόμορφης συναρτήσεως.

Το μιγαδικό ολοκλήρωμα εισάγεται στο Κεφάλαιο 5, όπου αποδεικνύεται το βασικό θεώρημα Cauchy-Goursat και δίνονται οι βασικές συνέπειες του θεωρήματος αυτού.

Στα Κεφάλαια 6 και 8 μελετώνται οι σειρές Taylor και Laurent ολόμορφων συναρτήσεων, ενώ στο Κεφάλαιο 7 ορίζονται οι στοιχειώδεις υπερβατικές συναρτήσεις της Μιγαδικής Αναλύσεως ως επεκτάσεις των αντίστοιχων υπερβατικών συναρτήσεων της Πραγματικής Αναλύσεως.

Στο Κεφάλαιο 9 παρατίθεται η θεωρία και οι εφαρμογές των ολοκληρωτικών

υπολοίπων.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 10 εισάγεται η έννοια της σύμμορφης απεικονίσεως και μελετώνται οι μετασχηματισμοί Möbius και Schwarz-Cristoffel.

Σε επόμενο τεύχος θα παρουσιάσουμε εφαρμογές των σύμμορφων απεικονίσεων στη Μηχανική και τη Φυσική.

Ευχαριστούμε θερμά τον εκδοτικό οίκο ΖΗΤΗ για το ενδιαφέρον που έδειξε να αναλάβει την έκδοση του παρόντος βιβλίου.

Αθήνα, Μάιος 1993 Οι συγγραφείς

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1$^{\text{ο}}$

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1.1 Το σώμα των μιγαδικών αριθμών

Είναι γνωστό ότι η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός στο $\mathbb{R}$ είναι πράξεις αντιμεταθετικές και προσεταιριστικές και επιπλέον ο πολλαπλασιασμός είναι πράξη επιμεριστική ως προς την πρόσθεση, δηλ. για κάθε $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ ισχύουν:

$\alpha+\beta=\beta+\alpha$, $\quad\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$ (αντιμεταθετική ιδιότητα) (1)

$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$, $\quad\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$ (προσεταιριστική ιδιότητα) (2)

$\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$ (επιμεριστική ιδιότητα) (3)

Εξάλλου υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ οι αριθμοί 0 και 1 που είναι τα ουδέτερα στοιχεία ως προς τις πράξεις αυτές, δηλ. για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ ισχύουν:

$$\alpha+0=\alpha, \qquad \alpha\cdot 1=\alpha. \tag{4}$$

Τέλος, για κάθε πραγματικό αριθμό α υπάρχουν ο αντίθετός του $-\alpha$ και ο αντίστροφός του $\frac{1}{\alpha}$, όταν $\alpha\neq 0$, δηλ.

$$\alpha+(-\alpha)=0, \qquad \alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1. \tag{5}$$

Ένα σύνολο στο οποίο έχουν οριστεί δύο πράξεις, **πρόσθεση** και **πολλαπλασιασμός**, που ικανοποιούν τις παραπάνω ιδιότητες ονομάζεται **σώμα**.

Η εξίσωση

$$x^2+1=0 \tag{6}$$

δεν έχει ρίζα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, γιατί για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $x^2+1>0$. Έτσι είναι ανάγκη να **επεκτείνουμε** το σώμα των πραγματικών αριθμών σε ένα σώμα, όπου η εξίσωση (6) να έχει λύση.

Για το σκοπό αυτό θεωρούμε το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών (x,y), $x,y\in\mathbb{R}$, με **ισότητα:**

$$(x,y)=(x',y') \Leftrightarrow x=x' \text{ και } y=y' \tag{7}$$

και πράξεις:

πρόσθεση $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$ (8)

πολλαπλασιασμός $(x,y)\cdot(x',y')=(xx'-yy',xy'+x'y)$ (9)

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός που ορίζουν οι (8) και (9) ικανοποιούν τις ιδιότητες (1)-(3). Εξάλλου το (0,0) είναι το **ουδέτερο στοιχείο ως προς την πρόσθεση** και το (1,0) είναι το **ουδέτερο στοιχείο ως προς τον πολλαπλασιασμό**, αφού

$$(x,y)+(0,0)=(x,y) \qquad \text{και} \qquad (x,y)\cdot(1,0)=(x,y).$$

Τέλος το **αντίθετο** του (x,y) είναι το $(-x,-y)$, ενώ το **αντίστροφο** του $(x,y)\neq(0,0)$ είναι το

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right),$$

γιατί

$$(x,y)+(-x,-y)=(0,0) \qquad \text{και} \qquad (x,y)\cdot\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)=(1,0).$$

Έτσι ισχύουν και ιδιότητες (4) και (5), που σημαίνει ότι το σύνολο $\{(x,y):\ x,y\in\mathbb{R}\}$ εφοδιασμένο με τις πράξεις που ορίζονται από τις σχέσεις (8) και (9) είναι σώμα, το **σώμα των μιγαδικών αριθμών**, και συμβολίζεται με $\mathbb{C}$. Τα στοιχεία του $\mathbb{C}$ ονομάζονται **μιγαδικοί αριθμοί.**

Το σώμα $\mathbb{C}$ είναι μια **επέκταση** του σώματος των πραγματικών αριθμών, όταν μπορούμε να ταυτίσουμε το $\mathbb{R}$ με ένα υποσύνολο $\mathbb{C}_o$ του $\mathbb{C}$ που, εφοδιασμένο με τις πράξεις τις πρόσθεσεως (8) και του πολλαπλασιασμού (9), να είναι σώμα. Η ταύτιση αυτή νοείται με την έννοια ότι υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του $\mathbb{C}_o$ επί του $\mathbb{R}$, που απεικονίζει το άθροισμα και το γινόμενο δύο στοιχείων του $\mathbb{C}_o$ στο άθροισμα και το γινόμενο των αντίστοιχων στοιχείων του $\mathbb{R}$.

Ως $\mathbb{C}_o$ παίρνουμε το σύνολο όλων των μιγαδικών αριθμών της μορφής $(x,0)$ που, εφοδιασμένο με τις πράξεις της προσθέσεως (8) και του πολλαπλασιασμού (9), είναι σώμα, γιατί

(i) $(x,0)+(x',0)=(x+x',0)\in\mathbb{C}_o$, $\qquad (x,0)\cdot(x',0)=(xx',0)\in\mathbb{C}_o$

και

(ii) το αντίθετο $(-x,0)$ ενός στοιχείου $(x,0)$ του $\mathbb{C}_o$ και το αντίστροφό του $(\frac{1}{x},0)$, όταν $(x,0)\neq(0,0)$, είναι στοιχεία του $\mathbb{C}_o$.

Μπορούμε τώρα να ταυτίσουμε, με την παραπάνω έννοια, το $\mathbb{C}_o$ με το $\mathbb{R}$. Πράγματι, η απεικόνιση

$$\varphi:\mathbb{C}_o \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{με} \quad \varphi(x,0)=x,$$

που είναι προφανώς αμφιμονοσήμαντη και επί, απεικονίζει το άθροισμα και το γινόμενο δύο στοιχείων του $\mathbb{C}_o$ στο άθροισμα και το γινόμενο των αντίστοιχων εικόνων τους στο $\mathbb{R}$, αφού

$$\varphi((x,0)+(x',0))=\varphi(x+x',0)=x+x'=\varphi(x,0)+\varphi(x',0)$$

και

$$\varphi((x,0)\cdot(x',0))=\varphi(xx',0)=xx'=\varphi(x,0)\cdot\varphi(x',0).$$

Στα επόμενα, **με την έννοια της παραπάνω ταυτίσεως**, για το μιγαδικό αριθμό $(x,0)$ θα γράφουμε x. Ειδικότερα για τους μιγαδικούς $(0,0)$ και $(1,0)$ θα γράφουμε 0 και 1 αντίστοιχα. Έτσι για κάθε $k\in\mathbb{R}$ και $(x,y)\in\mathbb{C}$ έχουμε $k\cdot(x,y)=(k,0)\cdot(x,y)=(kx,ky)$ και $(x,y)\cdot k=(x,y)\cdot(k,0)=(kx,ky)$, δηλ.

$$k\cdot(x,y)=(x,y)\cdot k=(kx,ky). \tag{10}$$

Σημείωση: Στο εξής θα παραλείπουμε το σύμβολο του πολλαπλασιασμού "·" μεταξύ δύο μιγαδικών αριθμών.

Με i συμβολίζουμε το μιγαδικό αριθμό $(0,1)$, που ονομάζεται **φανταστική μονάδα**, οπότε για κάθε $k\in\mathbb{R}$ από την (10) βρίσκουμε $ki=ik=(0,k)$. Κάθε αριθμός της μορφής ki, με $k\in\mathbb{R}$, ονομάζεται **φανταστικός αριθμός** και το σύνολό τους συμβολίζεται με $\mathbb{I}$. Με τη βοήθεια της φανταστικής μονάδας ο μιγαδικός αριθμός $z=(x,y)$ παίρνει την ακόλουθη συνήθη μορφή:

$$z=(x,y)=(x,0)+(0,y)=x+iy=x+yi,$$

δηλ.

$$z=x+iy. \tag{11}$$

Τονίζουμε ότι στη μορφή (11) του μιγαδικού αριθμού z τα x και y είναι πραγματικοί αριθμοί. Το x (αντ. y) ονομάζεται **πραγματικό** (αντ. **φανταστικό**) **μέρος** του z και συμβολίζεται με $\mathrm{Re}(z)$ (αντ. $\mathrm{Im}(z)$), δηλ.

$$x=\mathrm{Re}(z), \qquad y=\mathrm{Im}(z). \tag{12}$$

Η φανταστική μονάδα i είναι μια ρίζα της εξισώσεως (6), αφού

$i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1$, δηλ.

$$i^2=-1. \tag{13}$$

θα δούμε αργότερα (βλ. πρόταση 5.6.2) ότι όχι μόνο η εξίσωση (6) έχει λύση στο $\mathbb{C}$ αλλά και κάθε πολυωνυμική εξίσωση με μιγαδικούς συντελεστές.

Χρησιμοποιώντας τη συνήθη μορφή του μιγαδικού αριθμού οι ισότητες (8), (9) και (10) παίρνουν την ακόλουθη μορφή

$$(x+iy)+(x'+iy')=(x+x')+i(y+y'), \tag{14}$$

$$(x+iy)(x'+iy')=(xx'-yy')+i(xy'+x'y), \tag{15}$$

$$k(x+iy)=(kx)+i(ky), \quad k\in\mathbb{R}. \tag{16}$$

O αντίθετος του $z=x+iy$ είναι ο $-z=-x-iy$ και ο αντίστροφός του, όταν $z\neq0$, είναι ο

$$z^{-1}=\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{-y}{x^2+y^2} \tag{17}$$

Η **διαφορά** και το **πηλίκον** δύο μιγαδικών αριθμών $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$ ορίζονται με τον ακόλουθο τρόπο:

$$z_1-z_2=z_1+(-z_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2) \tag{18}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=z_1z_2^{-1}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2} \quad (z_2\neq0). \tag{19}$$

Στο σώμα $\mathbb{C}$ ισχύει:

$$z_1z_2=0 \iff z_1=0 \text{ ή } z_2=0, \tag{20}$$

γιατί, αν $z_1\neq0$, τότε υπάρχει ο αντίστροφός του z_1^{-1}, οπότε

$$z_2=z_2\cdot1=z_2(z_1\cdot z_1^{-1})=(z_2\cdot z_1)z_1^{-1}=0\cdot z_1^{-1}=0.$$

Συζυγής του μιγαδικού αριθμού $z=x+iy$ ονομάζεται ο μιγαδικός αριθμός $x-iy$ και συμβολίζεται με $\bar{z}$, δηλ.

$$\bar{z}=\overline{x+iy}=x-iy. \tag{21}$$

Προφανώς ισχύει $\bar{\bar{z}}=z$.

Μέτρο του μιγαδικού αριθμού $z=x+iy$ ονομάζεται ο μη αρνητικός αριθμός $\sqrt{x^2+y^2}$ και συμβολίζεται με $|z|$, δηλ.

$$|z|=|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{22}$$

Προφανώς ισχύουν $|z|=|\bar{z}|=|-z|$.
Αν $z=x+iy$, τότε $z+\bar{z}=2x$, $z-\bar{z}=2iy$ και $z\bar{z}=x^2+y^2$. Επομένως

$$\mathrm{Re}(z)=\frac{z+\bar{z}}{2}, \tag{23}$$

$$\mathrm{Im}(z)=\frac{z-\bar{z}}{2i}, \tag{24}$$

$$|z|^2=z\bar{z}. \tag{25}$$

Για ένα μιγαδικό αριθμό z βρίσκουμε εύκολα από τις (24) και (23) τις παρακάτω αντίστοιχες ισοδυναμίες:

$$z\in\mathbb{R} \iff z=\bar{z}, \tag{26}$$

$$z\in\mathbb{I} \iff z=-\bar{z}. \tag{27}$$

Από τον ορισμό του συζυγούς ενός μιγαδικού αριθμού προκύπτουν εύκολα οι ισότητες

$$\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2,\quad \overline{z_1-z_2}=\bar{z}_1-\bar{z}_2,\quad \overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2,\quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2},\ (\text{όταν } z_2\neq 0). \tag{28}$$

Παράδειγμα 1. Αν $z_1,z_2\in\mathbb{C}$, με $z_1+z_2\in\mathbb{R}$ και $z_1\bar{z}_2\in\mathbb{R}$, τότε οι αριθμοί z_1,z_2 είναι αντίθετοι ή και οι δύο πραγματικοί.

Απόδειξη: Αφού οι $w_1=z_1+z_2$ και $w_2=z_1\bar{z}_2$ είναι πραγματικοί αριθμοί πρέπει $w_k=\bar{w}_k$, $k=1,2$, δηλ. $z_1+z_2=\bar{z}_1+\bar{z}_2$ και $z_1\bar{z}_2=\bar{z}_1z_2$. Η δεύτερη σχέση λόγω της πρώτης γράφεται

$$(\bar{z}_1+\bar{z}_2-z_2)\bar{z}_2=\bar{z}_1z_2 \quad ή \quad (\bar{z}_1-z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)=0,$$

δηλ. $\bar{z}_2=z_2$ ή $\overline{z_1+z_2}=0$, που σημαίνει $z_2\in\mathbb{R}$ ή $z_1=-z_2$. Όταν $z_2\in\mathbb{R}$, τότε και $z_1\in\mathbb{R}$. Επομένως οι z_1,z_2 είναι αντίθετοι ή και οι δύο είναι πραγματικοί αριθμοί.

□□□

Με τη βοήθεια της ιδιότητας (25) βρίσκουμε:

$$|z_1z_2|^2=(z_1z_2)(\overline{z_1z_2})=(z_1z_2\bar{z}_1\bar{z}_2)=(z_1\bar{z}_1)(z_2\bar{z}_2)=|z_1|^2|z_2|^2,$$

δηλ.

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|. \tag{29}$$

Ομοια αποδεικνύεται για $z_1 \neq 0$ η ιδιότητα:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}. \tag{30}$$

Επειδή για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύουν:

$$\left.\begin{matrix} |Re(z)|^2 \\ |Im(z)|^2 \end{matrix}\right\} \leq |z|^2 = [Re(z)]^2 + [Im(z)]^2 \leq \Big[|Re(z)| + |Im(z)|\Big]^2,$$

έχουμε τις ανισότητες:

$$\max\Big\{|Re(z)|, |Im(z)|\Big\} \leq |z| \leq |Re(z)| + |Im(z)|. \tag{31}$$

Για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ισχύουν:

τριγωνική ανισότητα $\quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad$ (32)

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \tag{33}$$

Η τριγωνική ανισότητα γενικεύεται, με τη βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής, και για άθροισμα οποιουδήποτε πεπερασμένου πλήθους προσθετέων:

$$|z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu| \leq |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_\nu|. \tag{34}$$

Οι αποδείξεις των (32), (33) και (34) δίνονται ως ασκήσεις.

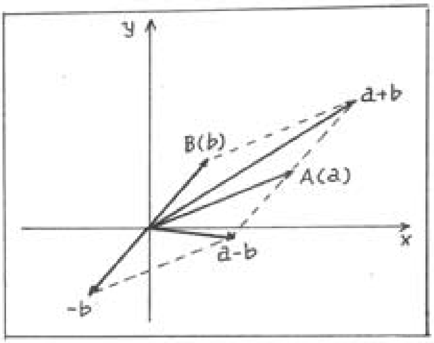
1.2 Γεωμετρική παράσταση των μιγαδικών αριθμών. Επίπεδο Gauss

Ονομάζουμε **γεωμετρική εικόνα** του μιγαδικού αριθμού $z = x + iy$ το σημείο $M(x, y)$ του καρτεσιανού επιπέδου xOy. Με τον τρόπο αυτό σε κάθε μιγαδικό αριθμό αντιστοιχεί ένα σημείο του επιπέδου και αντίστροφα. Στα επόμενα θα χρησιμοποιούμε τους όρους "σημείο του επιπέδου" και "μιγαδικός αριθμός" χωρίς διάκριση.

Επειδή οι εικόνες των πραγματικών αριθμών $x + i0$, βρίσκονται πάνω στον άξονα των x, ο άξονας αυτός ονομάζεται **πραγματικός άξονας**, ενώ ο άξονας των y ονομάζεται **φανταστικός άξονας**, γιατί περιέχει τις εικόνες όλων των φανταστικών αριθμών $0 + iy$. Το επίπεδο αυτό που περιέχει τις εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z = x + iy$, ονομάζεται **μιγαδικό επίπεδο** ή

επίπεδο Gauss ή **z-επίπεδο.** Πολλές φορές για να διακρίνουμε το z-επίπεδο από ένα άλλο μιγαδικό επίπεδο, που περιέχει τις εικόνες των μιγαδικών αριθμών $w=u+iv$, το ονομάζουμε w-επίπεδο.

Ταυτίζουμε το μιγαδικό αριθμό $z=x+iy$ με το διάνυσμα θέσεως $\overline{OM}$ του σημείου $M(x,y)$. Η ταύτιση αυτή είναι κατάλληλη για τη γεωμετρική παράσταση των πράξεων των μιγαδικών αριθμών, π.χ. στο διάνυσμα θέσεως $\overline{OA}$, που αντιστοιχεί στον μιγαδικό αριθμό a, προσθέτουμε το διάνυσμα θέσεως $\overline{OB}$, που αντιστοιχεί στον μιγαδικό αριθμό b. Το διάνυσμα $\overline{OA}+\overline{OB}$ αντιστοιχεί στον μιγαδικό αριθμό $a+b$. Ενώ το διάνυσμα $\overline{OA}-\overline{OB}$ αντιστοιχεί στον μιγαδικό αριθμό $a-b$ (σχ. 1).



Σχ.1

Στα επόμενα θα χρησιμοποιούμε, χωρίς ειδικότερη αναφορά, ισοδύναμα τις εκφράσεις "το διάνυσμα θέσεως $\overline{OM}$ που αντιστοιχεί στον $z=x+iy$" και "το διάνυσμα z".

Σημείωση: Το σύνολο $\mathbb{C}$ εφοδιασμένο με τις πράξεις 1.(14) και 1.(16) είναι ένας γραμμικός χώρος πάνω στον $\mathbb{R}$ διαστάσεως 2. Μια βάση του χώρου αυτού αποτελεί το σύνολο $\{1=1+i0, i=0+i\}$. Η ισότητα

$$<x_1+iy_1, x_2+iy_2>=x_1x_2+y_1y_2$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στο γραμμικό χώρο $\mathbb{C}$ και μάλιστα για $z=x+iy$ έχουμε

$$\|z\|=\|x+iy\|=\sqrt{<x+iy,x+iy>}=\sqrt{x^2+y^2}=|z|,$$

δηλ. το εσωτερικό γινόμενο εισάγει μια νορμ πάνω στο $\mathbb{C}$, η οποία ταυτίζεται με το μέτρο. Ο $\mathbb{C}$ είναι επίσης ένα γραμμικός χώρος πάνω στο $\mathbb{C}$ διαστάσεως 1.

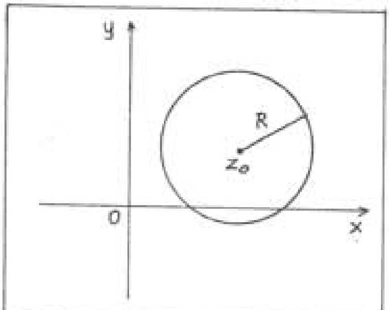
Το μέτρο $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ του μιγαδικού αριθμού $z=x+iy$ ερμηνεύεται επομένως ως η απόσταση του σημείου $M(x,y)$ από την αρχή $O(0,0)$ ή ως το μήκος του αντίστοιχου διανύσματος $\overline{OM}$. Η απόσταση των μιγαδικών αριθμών $z_1=x_1+iy_1$ και $z_2=x_2+iy_2$ δίνεται από τον τύπο

$$|z_1-z_2|=|(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

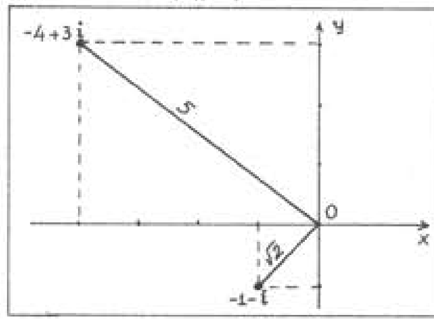
και επομένως είναι ίση με την απόσταση των εικόνων τους $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$.

Το σύνολο των αριθμών z που ικανοποιούν την σχέση $|z|=1$ παριστάνει τον κύκλο με κέντρο την αρχή O και ακτίνα 1. Ενώ οι μιγαδικοί αριθμοί z που ικανοποιούν τη σχέση $|z-z_o|=R$ βρίσκονται πάνω στον κύκλο με κέντρο το z_o και ακτίνα R (σχ.2).

Επειδή $|-4+3i|=5>|-1-i|=\sqrt{2}$ το σημείο $-1-i$ του μιγαδικού επιπέδου βρίσκεται πλησιέστερα στην αρχή O από το σημείο $-4+3i$ (σχ.3).



Σχ.2



Σχ.3

Οι εικόνες των z και $\bar{z}$ (αντ. z και -z) στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα (αντ.ως προς την αρχή O).

Παράδειγμα 1. Τα διανύσματα θέσεως των εικόνων των $z_1,z_2\in\mathbb{C}\backslash(0)$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι κάθετα, όταν, και μόνον όταν, $z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=0$.

Απόδειξη: Αν θέσουμε $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$, τότε τα σημεία $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ είναι εικόνες των z_1,z_2 αντίστοιχα. Είναι γνωστό ότι τα διανύσματα $\overline{OP}_1=(x_1,y_1)$, $\overline{OP}_2=(x_2,y_2)$ είναι κάθετα, όταν, και μόνον όταν, $x_1x_2+y_1y_2=0$.

Επειδή $x_k=\dfrac{z_k+\bar{z}_k}{2}$ και $y_k=\dfrac{z_k-\bar{z}_k}{2i}$, k=1,2, η προηγούμενη σχέση ισοδύναμα γράφεται:

$$\frac{z_1+\bar{z}_1}{2}\cdot\frac{z_2+\bar{z}_2}{2}+\frac{z_1-\bar{z}_1}{2i}\cdot\frac{z_2-\bar{z}_2}{2i}=0 \quad ή \quad (z_1+\bar{z}_1)(z_2+\bar{z}_2)-(z_1-\bar{z}_1)(z_2-\bar{z}_2)=0$$

$$ή \quad z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=0.$$

□□□

Παράδειγμα 2. Αν z_o είναι σταθερός μιγαδικός αριθμός, τότε μια ευθεία του μιγαδικού επιπέδου που είναι κάθετη στο διάνυσμα z_o έχει εξίσωση της μορφής

$$\bar{z}_o z+z_o\bar{z}+k=0,\ (k\in\mathbb{R}).$$

Απόδειξη: Έστω $z_o=\alpha+i\beta$. Τότε το διάνυσμα θέσεως $\overline{OP}$ του αντίστοιχου σημείου $P(\alpha,\beta)$ έχει συντεταγμένες (α,β). Η εξίσωση μιας ευθείας (ε) που είναι κάθετη στο διάνυσμα $\overline{OP}=(\alpha,\beta)$ είναι της μορφής

(*) $$\alpha x+\beta y+\gamma=0,\ \text{όπου } \gamma\in\mathbb{R}.$$

Ο $z=x+iy$ είναι σημείο της ευθείας (ε), όταν, και μόνον όταν, η εικόνα του $M(x,y)$ ανήκει στην (ε), δηλ. όταν τα $x=\frac{z+\bar{z}}{2}$ και $y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$ επαληθεύουν την (*), δηλ.

$$\alpha\frac{z+\bar{z}}{2}+\beta\frac{z-\bar{z}}{2i}+\gamma=0 \ \text{ ή } \ \alpha(z+\bar{z})-i\beta(z-\bar{z})+2\gamma=0 \ \text{ ή } \ (\alpha+i\beta)\bar{z}+(\alpha-i\beta)z+2\gamma=0$$

ή $\bar{z}_o z+z_o\bar{z}+k=0$, όπου $k=2\gamma$. □□□

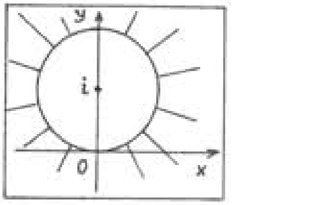
Παράδειγμα 3. Βρείτε στο μιγαδικό επίπεδο τους z που ικανοποιούν την ανισότητα $|z|^2\geq 2\mathrm{Im}(z)$.

Λύση: Η δοθείσα ανισότητα γράφεται ισοδύναμα:

$$z\bar{z}\geq 2\frac{z-\bar{z}}{2i} \ \text{ ή } \ z\bar{z}\geq -i(z-\bar{z}) \ \text{ ή } \ z(\bar{z}+i)-i\bar{z}-i^2\geq 1 \ \text{ ή } \ (\bar{z}+i)(z-i)\geq 1$$

ή $(\overline{z-i})(z-i)\geq 1$ ή $|z-i|^2\geq 1$ ή $|z-i|\geq 1$.

Επομένως οι z που ικανοποιούν τη δοθείσα ανισότητα βρίσκονται πάνω και στο εξωτερικό του κύκλου με κέντρο το i και ακτίνα 1 (σχ.4).



Σχ.4

Παράδειγμα 4. Δείξτε ότι η εξίσωση ενός κύκλου στο μιγαδικό επίπεδο είναι της μορφής

$$z\bar{z}+b\bar{z}+\bar{b}z+k=0,$$

όπου k σταθερός πραγματικός αριθμός και b σταθερός μιγαδικός αριθμός με $k\leq|b|^2$.

Απόδειξη: Ο κύκλος με κέντρο z_o και ακτίνα R έχει εξίσωση $|z-z_o|=R$ ή

$$(z-z_o)(\bar{z}-\bar{z}_o)=R^2 \ \text{ ή } \ z\bar{z}-\bar{z}_o z-z_o\bar{z}+|z_o|^2-R^2=0 \ \text{ ή } \ z\bar{z}+b\bar{z}+\bar{b}z+k=0,$$

με $b=-z_o$ και $k=|z_o|^2-R^2$, απ' όπου προκύπτει $0\leq R^2=|b|^2-k$, δηλ. $k\leq|b|^2$.

Αντίστροφα, η εξίσωση $z\bar{z}+b\bar{z}+\bar{b}z+k=0$, με $k\le|b|^2$, είναι εξίσωση κύκλου, γιατί αυτή ισοδύναμα γράφεται:

$$\bar{z}(z+b)+\bar{b}(z+b)=|b|^2-k \quad ή \quad (z+b)(\bar{z}+\bar{b})=R^2 \quad ή \quad |z-z_o|=R,$$

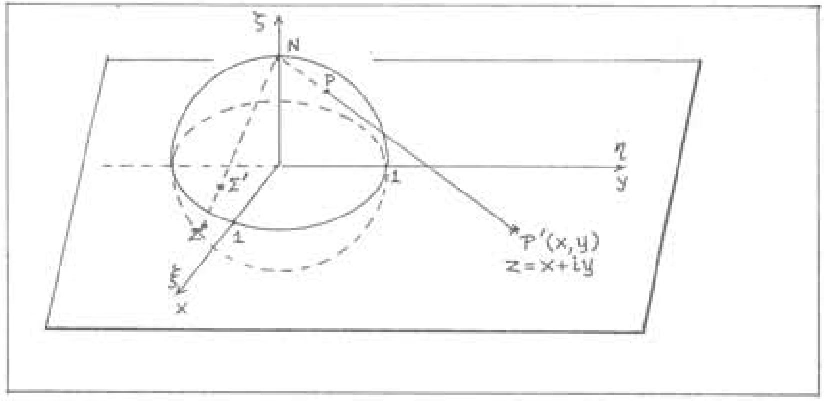
όπου $z_o=-b$ και $R=\sqrt{|b|^2-k}$.

□□□

Θα παρουσιάσουμε εδώ πως τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου βρίσκονται σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με τα σημεία μιας σφαίρας. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε τον τρισδιάστατο χώρο εφοδιασμένο με ένα τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων Οξηζ και τη μοναδιαία σφαίρα S με εξίσωση

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1.$$

Επιπλέον υποθέτουμε ότι το επίπεδο ζ=0 (ισημερινό επίπεδο) είναι το μιγαδικό επίπεδο με πραγματικό άξονα Οx και φανταστικό άξονα Οy ταυτιζόμενους αντίστοιχα με τους άξονες Οξ και Οη (σχ.5).



Σχ. 5

Έστω το σημείο N(0,0,1) (βόρειος πόλος). Αν P(ξ,η,ζ) είναι ένα διαφορετικό από το N σημείο της S, τότε η ημιευθεία NP τέμνει το μιγαδικό επίπεδο στο σημείο P΄(x,y) (βλ. σχ. 5). Έτσι στο σημείο P της S αντιστοιχεί μοναδικός μιγαδικός αριθμός z=x+iy. Αντίστροφα, σε κάθε σημείο P΄ του μιγαδικού επιπέδου αντιστοιχεί μοναδικό σημείο P της S, το σημείο τομής της NP΄ με τη σφαίρα S. Επομένως το σύνολο S\{(0,0,1)} βρίσκεται σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με το σύνολο των σημείων του μιγαδικού επιπέδου.

Τα σημεία του κάτω ημισφαιρίου, όπως το Σ στο σχήμα 5, αντιστοιχίζον-

ται σε μιγαδικούς αριθμούς που βρίσκονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου $|z|=1$, ενώ τα σημεία του άνω ημισφαιρίου, εκτός από το N, σε μιγαδικούς αριθμούς στο εξωτερικό του. Μάλιστα όσο το σημείο P της S πλησιάζει το βόρειο πόλο N το μέτρο του αντίστοιχου μιγαδικού αριθμού z τείνει στο άπειρο. Για λόγους πληρότητος, θα αντιστοιχίσουμε τον εξαιρεθέντα βόρειο πόλο N σε ένα "σημείο" του μιγαδικού επιπέδου που το ονομάζουμε **"σημείο στο άπειρο"** και το συμβολίζουμε με ∞. Το μιγαδικό επίπεδο μαζί με το "σημείο στο άπειρο" Ονομάζεται **επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο** ή **επεκτεταμένο επίπεδο Gauss**. Η σφαίρα S ονομάζεται **σφαίρα Riemann** και η αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση των σημείων της με τα σημεία του επεκτεταμένου μιγαδικού επιπέδου **στερεογραφική προβολή** .
Η απεικόνιση αυτή είναι ένας **ομοιομορφισμός**[1] του συνόλου $S\setminus\{(0,0,1)\}$ στο μιγαδικό επίπεδο και δίνεται από τις ισότητες

$$\xi=\frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}},\quad \eta=\frac{z-\bar{z}}{i(1+z\bar{z})},\quad \zeta=\frac{z\bar{z}-1}{1+z\bar{z}}.$$

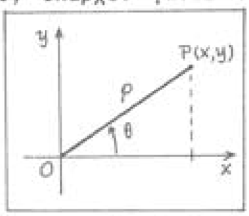
1.3 Τριγωνομετρική μορφή και ρίζες μιγαδικού αριθμού

Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z=x+iy\neq0$, οπότε $|z|=\rho\neq0$, υπάρχει γωνία θ τέτοια, ώστε

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta. \tag{1}$$

Κάθε γωνία θ, που ικανοποιεί τις σχέσεις (1) ονομάζεται **όρισμα** του μιγαδικού αριθμού z και το σύνολο όλων των ορισμάτων

Σχ.1



του z συμβολίζεται με argz. Προφανώς η διαφορά δύο ορισμάτων του z (μετρουμένων σε ακτίνια) είναι ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π. Ονομάζουμε **πρωτεύον όρισμα** του μιγαδικού αριθμού z, που το συμβολίζουμε με Argz, το μοναδικό όρισμα του z που ανήκει στο διάστημα $(-\pi,\pi]$, δηλ.

$$-\pi < \mathrm{Arg}z \leq \pi.$$

Για το μιγαδικό αριθμό $z=0$, που έχει μέτρο 0, όρισμα δεν ορίζεται.
Με τη βοήθεια των σχέσεων (1) ο z γράφεται

$$z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta), \tag{2}$$

[1] Βλέπε σχετικά ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙΙ, σελ. 65.

που ονομάζεται **τριγωνομετρική μορφή** του μιγαδικού αριθμού z.

Επειδή ίσοι μιγαδικοί αριθμοί έχουν την ίδια εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο συμπεραίνουμε ότι οι μιγαδικοί αριθμοί σε τριγωνομετρική μορφή

$$z_1=\rho_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1) \quad \text{και} \quad z_2=\rho_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

είναι ίσοι, όταν, και μόνον όταν,

$$\rho_1=\rho_2 \quad \text{και} \quad \theta_2-\theta_1=2k\pi, \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

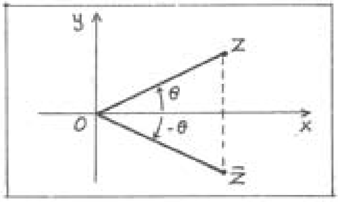
Επειδή οι $z,\bar{z}$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα (βλ. σχ.2) ισχύει

$$\operatorname{Arg}\bar{z}=-\operatorname{Arg}z.$$

Η προηγούμενη ισότητα δεν ισχύει, όταν ο z είναι αρνητικός πραγματικός αριθμός, αφού τότε $\operatorname{Arg}z=\pi$.

Επομένως, όταν $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$, τότε

$$\bar{z}=\rho\left(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\right).$$



Σχ.2

Εύκολα συμπεραίνουμε από τα παραπάνω ότι, για να είναι μια έκφραση της μορφής $\tau(\cos\theta+i\sin\theta)$ τριγωνομετρική μορφή ενός μιγαδικού αριθμού, πρέπει και αρκεί $\tau>0$.

Παρατήρηση: Όταν στο εξής γράφουμε "ο μιγαδικός αριθμός z έχει την ακόλουθη τριγωνομετρική μορφή", τότε αυτόματα θεωρούμε ότι $z\neq0$.

Παράδειγμα 1. Ο μιγαδικός αριθμός $1+i$ έχει μέτρο $\sqrt{2}$, οπότε γράφεται σε τριγωνομετρική μορφή με τον ακόλουθο τρόπο:

$$1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

□□□

Παράδειγμα 2. Ο μιγαδικός αριθμός $z=-2(\cos\theta+i\sin\theta)$ έχει μέτρο 2 και όρισμα $\theta-\pi$, αφού γράφεται με τη μορφή $z=2\left(\cos(\theta-\pi)+i\sin(\theta-\pi)\right)$.

Εξάλλου ο $z=-2(\cos\theta-i\sin\theta)$ έχει μέτρο 2 και όρισμα $\pi-\theta$, αφού γράφεται $z=2\left(\cos(\pi-\theta)+i\sin(\pi-\theta)\right)$.

□□□

Για τους μιγαδικούς αριθμούς z_1,z_2 σε τριγωνομετρική μορφή

$$z_1=\rho_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),\quad z_2=\rho_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

ισχύει

$$z_1\cdot z_2=\rho_1\rho_2\left[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)\right],$$