

Γ. Ν. ΠΑΝΤΕΛΙΑΝ  
ΚΑΘΗΓΗΤΗ Ε.Μ. ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΤΟΜΟΣ I & II

 ΕΚΔΟΣΕΙΣ  
**ΖΗΤΗ**

ΑΘΗΝΑ 1996

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ο τόμος αυτός είναι η συγχώνευση, με ορισμένες βελτιώσεις, τροποποιήσεις και συμπληρώσεις, των βιβλίων μου *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι* και *ΙΙ*, που κυκλοφορούν από το 1981. Περιέχει το Διαφορικό και Ολοκληρωτικό Λογισμό συναρτήσεων μιας μεταβλητής, τις Σειρές Πραγματικών αριθμών, τις Ακολουθίες και Σειρές συναρτήσεων, τις δυναμοσειρές, τις Σειρές *Fourier* και τα Γενικευμένα ολοκληρώματα.

Για τη βαθύτερη κατανόηση των προτάσεων παραθέτουμε συνήθως μετά από κάθε πρόταση, παρατηρήσεις και πολλά παραδείγματα, που υποδεικνύουν στον αναγνώστη τις σχέσεις μεταξύ των διαφόρων εννοιών, τα σημεία όπου μπορεί να υπάρξει παρανόηση και, τέλος, τον πρακτικό τρόπο εφαρμογής των προτάσεων και τύπων.

Στο παράρτημα παρατίθενται οι εκτενείς αποδείξεις ορισμένων σημαντικών προτάσεων, που σε πρώτη ανάγνωση μπορούν να παραληφθούν χωρίς να βλάπτεται η συνέχεια της μελέτης του βιβλίου. Στο τέλος του βιβλίου υπάρχουν πίνακες των παραγώγων και των ολοκληρωμάτων στοιχειωδών συναρτήσεων.

Το σύγγραμμα διαπνέεται από την αρχή: Η σαφής και ακριβής απόδειξη είναι καθολικά εφαρμόσιμη· ενώ μια καλά θεμελιωμένη εφαρμογή είναι αποτελεσματική.

Επισημαίνουμε την έννοια των εκφράσεων και των συμβολισμών:

Πρόταση 5.3: η πρόταση 5.3 του παρόντος κεφαλαίου.

Πόρισμα VI.2.5: το πόρισμα 2.5 του κεφαλαίου VI.

▲ : τέλος αποδείξεως προτάσεως.

● : τέλος παραδείγματος ή παρατηρήσεως.

Θεωρώ υποχρέωσή μου να ευχαριστήσω τους κ.κ. *Ι. Δημητρόπουλο*, επιστημονικό συνεργάτη, *Δ. Κραθβαρίτη*, Αναπληρωτή Καθηγητή, και *Β. Νασόπουλο*, Επίκουρο Καθηγητή, για τη διεξοδική ανάγνωση των χειρογράφων, τις υποδείξεις τους και τη συμβολή τους στην άρτια εμφάνιση της πρώτης εκδόσεως του βιβλίου αυτού. Ακόμη πρέπει να ευχαριστήσω τον εκδοτικό οίκο *ΖΗΤΗ*, που ανέλαβε τη συνέχιση της εκδόσεως του βιβλίου αυτού.

Αθήνα, Οκτώβριος 1989

Γ. Ν. Παντελίδης

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι. ΕΝΝΟΙΕΣ ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ ΚΑΙ ΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

	σελ.
1. Σύνολα .....	13
2. Καρτεσιανό γινόμενο συνόλων .....	15
3. Φυσικοί αριθμοί .....	16
4. Μαθηματική λογική .....	16
5. Ασκήσεις .....	19

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ. ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

1. Γενικά - ορισμοί .....	23
2. Αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση - Αντίστροφη απεικόνιση .....	27
3. Σύνθεση απεικονίσεων .....	28
4. Η έννοια της οικογένειας στοιχείων συνόλου .....	31
5. Ισοδύναμο και αριθμήσιμα σύνολα .....	32
6. Ασκήσεις .....	33

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ. ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1. Αξιώματα πεδίου και διατάξεως .....	39
2. Αξίωμα του ελάχιστου άνω φράγματος .....	41
3. Ρίζες πραγματικών αριθμών .....	44
4. Αρχιμήδεια ιδιότητα πραγματικών αριθμών .....	46
5. Διαστήματα .....	49
6. Η αρχή του εγκλωβισμού .....	50
7. Θεώρημα Heine - Borel .....	52
8. Δυαδική και δεκαδική γραφή των πραγματικών αριθμών .....	53
9. Γεωμετρική παράσταση του $\mathbb{R}$ , $\mathbb{R}^2$ , $\mathbb{R}^3$ .....	55
10. Τοπολογική δομή του $\mathbb{R}$ .....	57
11. Θεώρημα Bolzano - Weierstrass .....	61
12. Ασκήσεις .....	62

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙV. ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. Γενικά - ορισμοί .....	67
2. Συγκλίνουσες ακολουθίες .....	69

3. Λήμμα Cesaro .....	71
4. Ακολουθίες Cauchy .....	72
5. Πράξεις μεταξύ συγκλινουσών ακολουθιών .....	74
6. Αποκλίνουσες ακολουθίες .....	76
7. Πράξεις μεταξύ ακολουθιών που έχουν όριο στο $\mathbb{R}$ .....	78
8. Χαρακτηριστικά παραδείγματα ακολουθιών .....	80
9. Δυνάμεις με πραγματικούς εκθέτες .....	84
10. Λογάριθμοι .....	87
11. Αναδιάταξη ακολουθιών .....	90
12. Ειδικά παραδείγματα ακολουθιών .....	91
13. Δυνάμεις στο σύνολο $\mathbb{R}$ .....	96
14. Κατώτερο και ανώτερο όριο ακολουθίας .....	98
15. Ασκήσεις .....	102

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ V. ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Γενικά .....	107
2. Πράξεις μεταξύ συναρτήσεων .....	111
3. Μονότονες συναρτήσεις .....	113
4. Ασκήσεις .....	116

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI. ΟΡΙΑΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

1. Γενικά - ορισμοί .....	121
2. Μελέτη οριακών τιμών με τη βοήθεια ακολουθιών .....	125
3. Πλευρικές οριακές τιμές .....	129
4. Ιδιότητες οριακών τιμών .....	133
5. Τοπική συμπεριφορά συναρτήσεων .....	135
6. Πράξεις με συναρτήσεις που έχουν οριακή τιμή .....	136
7. Ασκήσεις .....	140

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII. ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Γενικά - ορισμοί .....	145
2. Πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις .....	150
3. Τοπική συμπεριφορά συνεχών συναρτήσεων .....	152
4. Πλευρική συνέχεια συναρτήσεων .....	153
5. Ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων .....	154
6. Ομοιόμορφη συνέχεια .....	159
7. Σημεία ασυνέχειας συναρτήσεως .....	162
8. Στοιχειώδεις συναρτήσεις .....	166
9. Ασκήσεις .....	172

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ VIII. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

1. Γενικά .....	177
2. Η έννοια της παραγώγου .....	178
3. Εφαπτομένη και κάθετη ευθεία του γραφήματος μιας συναρτήσεως .....	183
4. Πλευρικές παράγωγοι .....	188
5. Παράγωγος συναρτήσεων σε ένα σύνολο .....	192
6. Παράγωγοι στοιχειωδών συναρτήσεων I .....	192
7. Κανόνες παραγωγίσεως .....	195
8. Παράγωγοι στοιχειωδών συναρτήσεων II .....	200
9. Θεώρημα Rolle .....	205
10. Θεώρημα μέσης τιμής .....	212
11. Συνέπειες των θεωρημάτων μέσης τιμής .....	217
12. Παράγωγοι ανωτέρας τάξεως .....	221
13. Τύπος του Taylor .....	227
14. Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις .....	236
15. Σημεία τοπικών ακροτάτων συναρτήσεως .....	243
16. Ασύμπτωτες του γραφήματος μιας συναρτήσεως .....	250
17. Μελέτη του γραφήματος συναρτήσεως .....	252
18. Ο κανόνας του l' Hospital .....	259
19. Διαφορικό συναρτήσεως .....	270
20. Διαφορικό ανωτέρας τάξεως συναρτήσεως .....	274
21. Ασκήσεις .....	275

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ IX. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ RIEMANN ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Στοιχεία από τη θεωρία μέτρου .....	283
2. Το ορισμένο ολοκλήρωμα .....	291
3. Κριτήρια ολοκληρωσιμότητας .....	296
4. Κλάσεις ολοκληρώσιμων συναρτήσεων .....	301
5. Κριτήριο Lebesgue .....	304
6. Ιδιότητες του ολοκληρώματος .....	305
7. Ιδιότητες μονοτονίας του ολοκληρώματος .....	310
8. Θεωρήματα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού .....	312
9. Το αόριστο ολοκλήρωμα .....	314
10. Το αόριστο ολοκλήρωμα στοιχειωδών συναρτήσεων .....	322
11. Μέθοδοι ολοκληρώσεως .....	324
12. Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων .....	338
13. Ολοκληρώματα που ανάγονται σε ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων .....	345
14. Ολοκληρώματα που εξαρτιώνται από παράμετρο .....	359
15. Ασκήσεις .....	364

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ Χ. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

1. Εμβαδόν επίπεδου χωρίου .....	372
2. Εμβαδόν χωρίου που περιορίζεται από καμπύλη σε πολικές συντεταγμένες ...	378
3. Μήκος τόξου καμπύλης .....	382
4. Εμβαδόν επιφάνειας από περιστροφή .....	391
5. Όγκος σωμάτων. Όγκος σωμάτων από περιστροφή .....	394
6. Κέντρο θάρους (ή μάζας) .....	398
7. Έργο δυνάμεως .....	401
8. Ασκήσεις .....	403

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΧΙ. ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. Γενικά .....	407
2. Κριτήρια ομοιόμορφης συγκλίσεως .....	412
3. Πράξεις μεταξύ ομοιόμορφα συγκλινουσών ακολουθιών .....	416
4. Συνέπειες της ομοιόμορφης συγκλίσεως .....	418
5. Ασκήσεις .....	422

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΧΙΙ. ΣΕΙΡΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. Γενικά - Ορισμοί .....	427
2. Σειρές μη αρνητικών όρων .....	430
3. Εναλλάσσουσες σειρές .....	435
4. Σύγκλιση υπό συνθήκη και απόλυτη σύγκλιση σειράς .....	437
5. Κριτήρια απόλυτου συγκλίσεως .....	443
6. Ασκήσεις .....	451

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΧΙΙΙ. ΣΕΙΡΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. Ορισμοί - Κριτήρια συγκλίσεως .....	457
2. Συνέπειες της ομοιόμορφης συγκλίσεως .....	463
3. Ασκήσεις .....	466

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΧΙV. ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ

1. Ακτίνα και διάστημα συγκλίσεως δυναμοσειράς .....	469
2. Ομοιόμορφη σύγκλιση δυναμοσειράς .....	473
3. Πράξεις μεταξύ δυναμοσειρών .....	477
4. Θεώρημα Abel .....	484
5. Σειρές Taylor και Mac - Laurin .....	487
6. Ασκήσεις .....	496

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ XV. ΣΕΙΡΕΣ FOURIER

1. Ορισμοί - Γενικά .....	502
2. Η έννοια της σειράς Fourier .....	505
3. Προσέγγιση συναρτήσεως με τριγωνικά πολυώνυμα .....	509
4. Σύγκλιση της σειράς Fourier .....	511
5. Ασκήσεις .....	525

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ XVI. ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ Η ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ CAUCHY - RIEMANN

1. Γενικά - Ορισμοί .....	531
2. Κριτήρια συγκλίσεως .....	537
3. Γενικευμένα ολοκληρώματα που εξαρτιώνται από παράμετρο .....	546
4. Ασκήσεις .....	555

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ .....	557
-----------------	-----

ΠΙΝΑΚΑΣ Α (Παραγώγων) .....	385
ΠΙΝΑΚΑΣ Β (Παραγώγων νιοστής τάξεως) .....	587
ΠΙΝΑΚΑΣ Γ (Αόριστων ολοκληρωμάτων) .....	589

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ .....	595
--------------------	-----

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΡΩΝ .....	597
----------------------	-----

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

---

### ΕΝΝΟΙΕΣ ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ ΚΑΙ ΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

#### 1. Σύνολα

Οι αρχές της Θεωρίας συνόλων και κυρίως η εννοιολογική θεώρησή τους δε θα μας απασχολήσουν, γιατί δεν είναι στόχος αυτού του βιβλίου. Κατά τον *Cantor*, το σύνολο ορίζεται σαν συλλογή απο ορισμένα τελείως καθορισμένα αντικείμενα η επινοήματα του νου μας σε μία ολότητα. Τα αντικείμενα η επινοήματα, που αποτελούν το σύνολο, ονομάζονται **στοιχεία** η **σημεία** του συνόλου. Τα στοιχεία ενός συνόλου μπορούν νά είναι αριθμοί, διανύσματα, λογικές προτάσεις, γεγονότα, συναρτήσεις, σημεία ενός επιπέδου η μιας ευθείας κ.τ.λ. Αν  $X$  είναι ένα σύνολο, τότε η σχέση  $x \in X$  σημαίνει ότι το στοιχείο  $x$  ανήκει στο σύνολο  $X$  η άρνηση αυτής της σχέσεως συμβολίζεται με  $x \notin X$ .

Αν  $X$  και  $Y$  είναι δύο σύνολα, τότε η σχέση  $X \subset Y$  σημαίνει οτι κάθε στοιχείο του  $X$  είναι και στοιχείο του  $Y$ , οπότε λέμε οτι το σύνολο  $X$  είναι **υποσύνολο** του  $Y$ . Η άρνηση της σχέσεως  $X \subset Y$  συμβολίζεται με  $X \not\subset Y$ , που σημαίνει οτι υπάρχει ενα τουλάχιστο στοιχείο του  $X$  που δεν ανήκει στο  $Y$ . Είναι φανερό ότι ισχύουν :

$$X \subset X$$

Αν  $X \subset Y$  και  $Y \subset Z$ , τότε  $X \subset Z$ .

Αν  $X \subset Y$  και  $Y \subset X$ , τότε  $X = Y$ , δηλ. δυο σύνολα  $X, Y$  είναι ίσα, οταν περιέχουν ακριβώς τά ίδια στοιχεία.

Αν  $X$  είναι ενα σύνολο και  $P$  μία ιδιότητα, τότε υπάρχει ένα τελείως καθορισμένο υποσύνολο του  $X$ , που αποτελείται από εκείνα τα στοιχεία  $x \in X$  που ικανοποιούν την ιδιότητα  $P$ : το υποσύνολο αυτό το συμβολίζουμε  $\{x \in X : P(x)\}$ . Ετσι π.χ.  $X = \{x \in X : x = x\}$ . Θεωρούμε την ύπαρξη συνόλου που δεν έχει κανένα στοιχείο, το **κενό σύνολο**, που το συμβολίζουμε με  $\emptyset$  και είναι υποσύνολο οποιουδήποτε συνόλου.



Αν  $a$  είναι ένα αντικείμενο ή επινόημα, τότε  $\{a\}$  είναι το σύνολο με μοναδικό στοιχείο το  $a$ , επομένως  $a \neq \{a\}$ .

Για κάθε σύνολο  $X$  υπάρχει ένα τελείως ορισμένο σύνολο με στοιχεία όλα τα υποσύνολα του  $X$ , που ονομάζεται **δυναμοσύνολο** του  $X$  και συμβολίζεται με  $\mathcal{P}(X)^*$ . Είναι φανερό ότι  $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$  και  $X \in \mathcal{P}(X)$ . Οι σχέσεις  $x \in X$  και  $\{x\} \in \mathcal{P}(X)$  είναι ισοδύναμες καθώς επίσης και οι σχέσεις  $X \subset Y$  και  $X \in \mathcal{P}(Y)$ .

Στην περίπτωση που το σύνολο  $X$  έχει  $n$  στοιχεία, τότε το δυναμοσύνολο  $\mathcal{P}(X)$  έχει  $2^n$  στοιχεία (γιατί;).

Αν  $X, Y$  είναι δύο σύνολα, τότε η **ένωσή** τους, που συμβολίζεται με  $X \cup Y$ , είναι το σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία που ανήκουν στο  $X$  ή στο  $Y$  ή συγχρόνως στο  $X$  και στο  $Y$ . Ενώ η **τομή** τους, που συμβολίζεται με  $X \cap Y$ , είναι το σύνολο που αποτελείται από όλα τα στοιχεία που ανήκουν και στο  $X$  και στο  $Y$ . Αν τα σύνολα  $X, Y$  δεν έχουν κοινά στοιχεία, δηλ.  $X \cap Y = \emptyset$ , τότε λέμε ότι αυτά είναι **ξένα μεταξύ** τους. Η ένωση και η τομή συνόλων μπορεί να δοθεί συμβολικά ως εξής :

$$X \cup Y := \{x : x \in X \text{ ή } x \in Y\}$$

$$X \cap Y := \{x : x \in X \text{ και } x \in Y\}.$$

Η ένωση και η τομή συνόλων μπορεί να επεκταθεί και σε πεπερασμένου πλήθους σύνολα  $X_1, X_2, \dots, X_n$  :

$$\bigcup_{i=1}^n X_i = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n = \{x : \text{υπάρχει ένα } j \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ με } x \in X_j\}$$

$$\bigcap_{i=1}^n X_i = X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n = \{x : x \in X_j \text{ για κάθε } j \in \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

Αν  $X, Y$  είναι δύο σύνολα, τότε ονομάζουμε **διαφορά** του  $Y$  από το  $X$  και το συμβολίζουμε με  $X \setminus Y$  το σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία του  $X$  που δεν ανήκουν στο  $Y$ , δηλ.  $X \setminus Y = \{x \in X : x \notin Y\}$ . Στην περίπτωση που  $Y \subset X$ , τότε η διαφορά  $X \setminus Y$  ονομάζεται **συμπλήρωμα** του  $Y$  ως προς το  $X$  και συμβολίζεται με  ${}_X C Y$  ή όταν είναι γνωστό ότι η διαφορά λαμβάνεται ως προς το σύνολο  $X$ , τότε γράφουμε  $CY$ .

Οι παρακάτω σχέσεις είναι συνέπειες των ορισμών :

$$X \setminus X = \emptyset, \quad X \setminus \emptyset = X$$

$$X \cup X = X, \quad X \cap X = X$$

---

\* Δεν μπορούμε να θεωρήσουμε «το σύνολο όλων των συνόλων» (παράδοξο του *Russel*).

$$X \cup Y = Y \cup X, \quad X \cap Y = Y \cap X$$

**Οι σχέσεις**  $X \subset Y$ ,  $X \cup Y = Y$ ,  $X \cap Y = X$  **είναι ισοδύναμες.**

$$X \subset X \cup Y, \quad X \cap Y \subset X$$

**Εξάλλου ισχύουν οι τύποι** *De Morgan*

$$X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z), \quad X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$$

**Ειδικότερα:** αν  $X, Y$  είναι υποσύνολα ενός συνόλου  $E$ , τότε

$$C(CX) = X, \quad C(X \cup Y) = CX \cap CY, \quad C(X \cap Y) = CX \cup CY.$$

$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap Z$ ,  $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup Z$ , οπότε μπορούμε να γράφουμε  $X \cup Y \cup Z$ ,  $X \cap Y \cap Z$  (προσεταιριστική ιδιότητα).

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z), \quad X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \text{ (επιμεριστική ιδιότητα)}.$$

## 2. Καρτεσιανό γινόμενο συνόλων

Αν  $X, Y$  είναι δυο ξένα ή μη μεταξύ τους σύνολα, τότε το σύνολο που αποτελείται από τα ζεύγη  $(x, y)$  με  $x \in X$  και  $y \in Y$  ονομάζεται **καρτεσιανό γινόμενο** των  $X$  και  $Y$  και συμβολίζεται με  $X \times Y$ , δηλ.  $X \times Y := \{(x, y) : x \in X \text{ και } y \in Y\}$ .

Στα ζεύγη  $(x, y)$  που είναι στοιχεία του γινομένου  $X \times Y$ , το πρώτο (αντ. δεύτερο) στοιχείο  $x$  (αντ.  $y$ ) είναι πάντα στοιχείο του  $X$  (αντ.  $Y$ ) και ονομάζονται πρώτη (αντ. δεύτερη) συνιστώσα του  $(x, y)$ . Στο καρτεσιανό γινόμενο  $X \times Y$  η ισότητα  $(x, y) = (a, \beta)$  ισχύει, όταν, και μόνο όταν,  $x = a$  και  $y = \beta$ . Τα ζεύγη  $(x, y)$  του καρτεσιανού γινομένου με τις παραπάνω ιδιότητες ονομάζονται **διατεταγμένα**.

Για το καρτεσιανό γινόμενο ισχύουν :

$$X \times Y = \emptyset, \text{ όταν, και μόνο όταν, } X = \emptyset \text{ ή } Y = \emptyset.$$

Αν  $X \times Y \neq \emptyset$ , τότε  $X_1 \times Y_1 \subset X \times Y$ , όταν, και μόνο όταν,  $X_1 \subset X$  και  $Y_1 \subset Y$ .

$$(A \times X) \cup (B \times X) = (A \cup B) \times X$$

$$(A \times X) \cap (B \times Y) = (A \cap B) \times (X \cap Y)$$

Αν  $X, Y \neq \emptyset$ , τότε  $X \times Y = Y \times X$ , όταν, και μόνο όταν,  $X = Y$ .

Ανάλογα ορίζεται το καρτεσιανό γινόμενο πεπερασμένου πλήθους συνόλων  $X_1, X_2, \dots, X_v$ :

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_v := \{(x_1, x_2, \dots, x_v) : x_j \in X_j, j = 1, 2, \dots, v\}.$$

Αν  $X_1 = X_2 = \dots = X_v = X$ , τότε γράφουμε  $X \times X \times \dots \times X = X^v$ .

### 3. Φυσικοί αριθμοί

Οι απλούστεροι αριθμοί που γνωρίζουμε είναι οι φυσικοί αριθμοί, που το σύνολό τους συμβολίζεται με  $\mathbb{N}$ , και εισάγονται στα Μαθηματικά με τη βοήθεια αξιωμάτων. Ένα τέτοιο σύστημα αξιωμάτων είναι το σύστημα των *Dedekind* και *Peano*. Εφοδιάζουμε το σύνολο  $\mathbb{N}$  με δύο πράξεις συνθέσεως, την πρόσθεση «+» και τον πολλαπλασιασμό «·». Έτσι σε κάθε ζεύγος φυσικών αριθμών  $\kappa, \nu$  αντιστοιχίζουμε το άθροισμά τους  $\kappa + \nu \in \mathbb{N}$  και το γινόμενό τους  $\kappa \cdot \nu \in \mathbb{N}$ . Με τη βοήθεια των πράξεων στο  $\mathbb{N}$  τα αξιώματα *Dedekind* - *Peano* διατυπώνονται ως εξής :

$$(IN1) \quad 1 \in \mathbb{N}$$

$$(IN2) \quad (i) \quad \text{Αν } \nu \in \mathbb{N}, \text{ τότε } \nu + 1 \in \mathbb{N} \text{ (ο αριθμός } \nu + 1 \text{ ονομάζεται επόμενος του } \nu).$$

$$(ii) \quad \text{Αν } \nu, \mu \in \mathbb{N}, \text{ τότε } \nu + 1 \neq 1 \text{ και } \nu = \mu, \text{ όταν, και μόνο όταν, } \nu + 1 = \mu + 1.$$

$$(IN3) \quad \text{Αν για κάποιο υποσύνολο } M \text{ του } \mathbb{N} \text{ ισχύουν:}$$

$$(i) \quad 1 \in M \text{ και}$$

$$(ii) \quad \text{αν } \nu \in M, \text{ τότε και } \nu + 1 \in M,$$

$$\text{τότε } M = \mathbb{N}.$$

Στο σύνολο των φυσικών αριθμών  $\mathbb{N}$  μπορούμε να εισάγουμε μια σχέση:  $\nu < \mu$  (διαβ.  $\nu$  μικρότερο του  $\mu$ ), όταν, και μόνο όταν, υπάρχει φυσικός αριθμός  $\kappa$  τέτοιος, ώστε  $\nu + \kappa = \mu$ .

Το σύνολο  $\mathbb{N}$  εφοδιασμένο με τη σχέση διατάξεως  $\nu \leq \kappa$  ( $\nu < \kappa$  ή  $\nu = \kappa$ ) είναι **ολικά ή γραμμικά διατεταγμένο**, δηλ.

α) για κάθε  $\nu, \mu \in \mathbb{N}$  ισχύει μόνο μια από τις σχέσεις  $\nu < \mu$ ,  $\nu = \mu$ ,  $\mu < \nu$

β) για κάθε  $\nu \in \mathbb{N}$  ισχύει  $\nu \leq \nu$  (ανακλαστική ιδιότητα)

γ) αν  $\nu \leq \kappa$  και  $\kappa \leq \mu$ , τότε  $\nu \leq \mu$  (μεταβατική ιδιότητα)

δ) αν  $\nu \leq \kappa$  και  $\kappa \leq \nu$ , τότε  $\nu = \kappa$  (αντισυμμετρική ιδιότητα).

Έτσι ισχύει  $1 < 2 < 3 < \dots < \nu < \nu + 1 < \dots$ .

### 4. Μαθηματική λογική

Μια πρόταση, με τη συντακτική της έννοια, που έχει την ιδιότητα να είναι αληθής (Α) ή ψευδής (Ψ), είναι μια **λογική πρόταση** ή, πιο απλά, **πρόταση**. Ενώ ένας **προτασιακός τύπος** είναι μια πρόταση, με τη συντακτική της έννοια, στην οποία εμφανίζονται μια ή περισσότερες μεταβλητές, ακαθόριστα σύμβολα, και που γίνεται λογική πρόταση, αν στη

θέση των μεταβλητών θάλουμε στοιχεία από ένα σύνολο τελείως καθορισμένο, π.χ. από το σύνολο  $\mathbb{R}$  ή το  $\mathbb{N}$ . Αν  $P(x)$  είναι ένας προτασιακός τύπος και  $X$  είναι το σύνολο που διατρέχει η μεταβλητή  $x$ , τότε λέμε ότι ο προτασιακός τύπος  $P(x)$  είναι ορισμένος στο  $X$ . Το υποσύνολο  $Y$  του  $X$  που αποτελείται από όλα τα στοιχεία  $x \in X$  για τα οποία η  $P(x)$  είναι αληθής πρόταση ονομάζεται **σύνολο αλήθειας** του προτασιακού τύπου και συμβολίζεται  $\{x \in X : P(x)\}$ .

Αν  $\pi, \tau$  είναι λογικές προτάσεις, τότε αρνούμενοι ή συσχετίζοντας τις προτάσεις παίρνουμε νέες λογικές προτάσεις :

**Άρνηση** :  $\neg \pi$  (διαβ. όχι  $\pi$ ) είναι πρόταση αληθής, μόνο όταν η  $\pi$  είναι ψευδής.

**Σύζευξη** :  $\pi \wedge \tau$  (διαβ.  $\pi$  και  $\tau$ ) είναι πρόταση αληθής, μόνο όταν τόσο η  $\pi$  όσο και η  $\tau$  είναι αληθής.

**Διάζευξη** :  $\pi \vee \tau$  (διαβ.  $\pi$  ή  $\tau$ ) είναι πρόταση ψευδής, μόνο όταν τόσο η  $\pi$  όσο και η  $\tau$  είναι ψευδής.

**Συνεπαγωγή** :  $\pi \Rightarrow \tau$  (διαβ. αν  $\pi$ , τότε  $\tau$ ) είναι πρόταση ψευδής, μόνο όταν η  $\pi$  είναι αληθής και η  $\tau$  ψευδής.

**Ισοδυναμία** :  $\pi \Leftrightarrow \tau$  (διαβ.  $\pi$ , όταν, και μόνο όταν,  $\tau$ ) είναι πρόταση αληθής, μόνο όταν οι  $\pi, \tau$  είναι και οι δύο αληθείς ή και οι δύο ψευδείς.

Δυο συνδέσεις λογικών προτάσεων  $a_1(\pi, \tau, \sigma, \dots)$ ,  $a_2(\pi, \tau, \sigma, \dots)$  ονομάζονται λογικά ισοδύναμες, όταν για οποιεσδήποτε προτάσεις  $\pi, \tau, \sigma, \dots$  ισχύει  $a_1(\pi, \tau, \sigma, \dots) \Leftrightarrow a_2(\pi, \tau, \sigma, \dots)$ , οπότε γράφουμε  $a_1 \equiv a_2$ .

Είναι δυνατό να έχουμε και συνδυασμούς των παραπάνω σχέσεων μεταξύ τους. Έτσι ισχύουν :

$$(1) \quad [(\pi \Rightarrow \tau) \wedge (\tau \Rightarrow \sigma)] \Rightarrow (\pi \Rightarrow \sigma), \text{ νόμος του συλλογισμού}$$

$$(2) \quad \neg(\pi \vee \tau) \equiv \neg\pi \wedge \neg\tau, \quad \neg(\pi \wedge \tau) \equiv \neg\pi \vee \neg\tau, \text{ (άρνηση)}$$

$$(3) \quad (\pi \Rightarrow \tau) \equiv \neg(\pi \wedge \neg\tau)$$

$$\neg(\pi \Rightarrow \tau) \equiv \pi \wedge \neg\tau$$

$$(4) \quad (\pi \Rightarrow \tau) \equiv (\neg\tau \Rightarrow \neg\pi)$$

$$(5) \quad (\pi \Leftrightarrow \tau) \equiv [(\pi \Rightarrow \tau) \wedge (\tau \Rightarrow \pi)]$$

Για συντομογραφία θα χρησιμοποιήσουμε δυο σύμβολα, τους ποσοδείκτες

$$\bigwedge_{x \in X} \eta \quad \forall x \in X, \text{ που διαβάζεται : για κάθε } x \in X$$

$$\bigvee_{x \in X} \eta \quad \exists x \in X, \text{ που διαβάζεται: υπάρχει τουλάχιστο ένα } x \in X$$

Σε αναλογία με την ισοδυναμία (2) δίνουμε τώρα τις παρακάτω ισοδυναμίες :

$$(6) \quad \begin{aligned} > \left( \bigwedge_{x \in X} P(x) \right) \equiv \bigvee_{x \in X} > P(x) \\ > \left( \bigvee_{x \in X} P(x) \right) \equiv \bigwedge_{x \in X} > P(x), \end{aligned}$$

όπου  $P(x)$  είναι ένας προτασιακός τύπος ορισμένος στο σύνολο  $X$ .

Αν  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$  είναι προτασιακοί τύποι ορισμένοι στο ίδιο σύνολο  $X$  με σύνολα αλήθειας  $A$ ,  $B$ , τότε ισχύουν :

$$(7) \quad \{ x \in X : > \alpha(x) \} = C_X A$$

$$(8) \quad \{ x \in X : \alpha(x) \wedge \beta(x) \} = A \cap B$$

$$(9) \quad \{ x \in X : \alpha(x) \vee \beta(x) \} = A \cup B$$

$$(10) \quad \alpha(x) \Rightarrow \beta(x), \text{ όταν, και μόνο όταν, } A \subset B$$

$$(11) \quad \alpha(x) \Leftrightarrow \beta(x), \text{ όταν, και μόνο όταν, } A = B.$$

Οι μαθηματικές προτάσεις αποτελούνται από μια υπόθεση ( $Y$ ) και ένα συμπέρασμα ( $\Sigma$ ) και ζητάμε να αποδείξουμε την αλήθεια:

α) **της συνεπαγωγής** :  $Y \Rightarrow \Sigma$ , δηλ. «αν ισχύει η  $Y$ , τότε ισχύει το  $\Sigma$ » ή «το  $\Sigma$  είναι αναγκαία συνθήκη για την  $Y$ » ή «η  $Y$  είναι ικανή συνθήκη για το  $\Sigma$ ».

β) **της ισοδυναμίας** :  $Y \Leftrightarrow \Sigma$ , δηλ. «ισχύει η  $Y$ , όταν, και μόνο όταν, ισχύει το  $\Sigma$ » ή «η  $Y$  είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για το  $\Sigma$ ».

Για την απόδειξη της συνεπαγωγής χρησιμοποιούμε βασικά τις παρακάτω τρεις αποδεικτικές μεθόδους, ενώ για την απόδειξη της ισοδυναμίας χρησιμοποιούμε διάφορους συνδυασμούς των μεθόδων αυτών.

**I. Η ευθεία απόδειξη** : Η ευθεία απόδειξη αποσκοπεί στο να βρούμε το συμπέρασμα ( $\Sigma$ ) από την υπόθεση ( $Y$ ) χρησιμοποιώντας τα αντίστοιχα αξιώματα και τις προτάσεις, που είναι ήδη γνωστές, δηλ. την απόδειξη της αλήθειας του  $\Sigma$  με τη βοήθεια επιτρεπτών πράξεων.

**II. Η πλάγια απόδειξη** : Η απόδειξη αυτή στηρίζεται στη λογική ισοδυναμία (4)  $(Y \Rightarrow \Sigma) \equiv (>\Sigma \Rightarrow >Y)$ , δηλ. αν υποθέσουμε ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα, τότε αποδεικνύουμε ότι δεν ισχύει και η υπόθεση.