Γ. Ν. ΠΑΝΤΕΛΙΔΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΗ Ε.Μ.ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΤΟΜΟΣ Ι & ΙΙ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
ΑΘΗΝΑ 1996

# *ΠΡΟΛΟΓΟΣ*

*Ο τόμος αυτός είναι η συγχώνευση, με ορισμένες βελτιώσεις, τροποποιήσεις και συμπληρώσεις, των βιβλίων μου ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ I και II, που κυκλοφορούν από το 1981. Περιέχει το Διαφορικό και Ολοκληρωτικό Λογισμό συναρτήσεων μιας μεταβλητής, τις Σειρές Πραγματικών αριθμών, τις Ακολουθίες και Σειρές συναρτήσεων, τις δυναμοσειρές,τις Σειρές* Fourier *και τα Γενικευμένα ολοκληρώματα.*

*Για τη βαθύτερη κατανόηση των προτάσεων παραθέτουμε συνήθως μετά από κάθε πρόταση, παρατηρήσεις και πολλά παραδείγματα, που υποδεικνύουν στον αναγνώστη τις σχέσεις μεταξύ των διαφόρων εννοιών, τα σημεία όπου μπορεί να υπάρξει παρανόηση και, τέλος, τον πρακτικό τρόπο εφαρμογής των προτάσεων και τύπων.*

*Στο παράρτημα παρατίθενται οι εκτενείς αποδείξεις ορισμένων σημαντικών προτάσεων, που σε πρώτη ανάγνωση μπορούν να παραληφθούν χωρίς να βλάπτεται η συνέχεια της μελέτης του βιβλίου. Στο τέλος του βιβλίου υπάρχουν πίνακες των παραγώγων και των ολοκληρωμάτων στοιχειωδών συναρτήσεων.*

*Το σύγγραμμα διαπνέεται από την αρχή: Η σαφής και ακριβής απόδειξη είναι καθολικά εφαρμόσιμη· ενώ μια καλά θεμελιωμένη εφαρμογή είναι αποτελεσματική.*

*Επισημαίνουμε την έννοια των εκφράσεων και των συμβολισμών:*

*Πρόταση 5.3: η πρόταση 5.3 του παρόντος κεφαλαίου.*

*Πόρισμα VI.2.5:* το πόρισμα 2.5 του κεφαλαίου *VI.*

▲ *: τέλος αποδείξεως προτάσεως.*

● *: τέλος παραδείγματος ή παρατηρήσεως.*

*Θεωρώ υποχρέωσή μου να ευχαριστήσω τους κ.κ. Ι. Δημητρόπουλο, επιστημονικό συνεργάτη, Δ. Κραββαρίτη, Αναπληρωτή Καθηγητή, και Β. Νασόπουλο, Επίκουρο Καθηγητή, για τη διεξοδική ανάγνωση των χειρογράφων, τις υποδείξεις τους και τη συμβολή τους στην άρτια εμφάνιση της πρώτης εκδόσεως του βιβλίου αυτού. Ακόμη πρέπει να ευχαριστήσω τον εκδοτικό οίκο ΖΗΤΗ, που ανέλαβε τη συνέχιση της εκδόσεως του βιβλίου αυτού.*

*Αθήνα, Οκτώβριος 1989* — *Γ. Ν. Παντελίδης*

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VIII. **ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ**



ΚΕΦΑΛΑΙΟ IX. **ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ** RIEMANN **ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Χ. **ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ**



ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΧΙ. **ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ**



ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΧΙΙ. **ΣΕΙΡΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ**



ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΧΙΙ. **ΣΕΙΡΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ**



ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΧΙV. **ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

# ΕΝΝΟΙΕΣ ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ ΚΑΙ ΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

## 1. Σύνολα

Οι αρχές της Θεωρίας συνόλων και κυρίως η εννοιολογική θεώρησή τους δε θα μας απασχολήσουν, γιατί δεν είναι στόχος αυτού του βιβλίου. Κατά τον *Cantor*, το σύνολο ορίζεται σαν συλλογή απο ορισμένα τελείως καθορισμένα αντικείμενα η επινοήματα του νου μας σε μιά ολότητα. Τα αντικείμενα η επινοήματα, που αποτελούν το σύνολο, ονομάζονται **στοιχεία** η **σημεία** του συνόλου. Τα στοιχεία ενός συνόλου μπορούν νά είναι αριθμοί, διανύσματα, λογικές προτάσεις, γεγονότα, συναρτήσεις, σημεία ενός επιπέδου η μιας ευθείας κ.τ.λ. Αν $X$ είναι ένα σύνολο, τότε η σχέση $x \in X$ σημαίνει ότι το στοιχειο $x$ ανήκει στο σύνολο $X$· η άρνηση αυτής της σχέσεως συμβολίζεται με $x \notin X$.

Αν $X$ καί $Y$ εἶναι δύο σύνολα, τότε η σχέση $X \subset Y$ σημαίνει οτι κάθε στοιχείο του $X$ είναι και στοιχείο του $Y$, οπότε λέμε οτι το σύνολο $X$ είναι **υποσύνολο** του $Y$. Η άρνηση της σχέσεως $X \subset Y$ συμβολίζεται με $X \not\subset Y$, που σημαίνει οτι υπάρχει ενα τουλάχιστο στοιχείο του $X$ που δεν ανήκει στό $Y$. Είναι φανερό ότι ισχύουν :

$X \subset X$

**Αν** $X \subset Y$ **και** $Y \subset Z$, **τότε** $X \subset Z$.

**Αν** $X \subset Y$ **και** $Y \subset X$, **τότε** $X = Y$, **δηλ. δυο σύνολα** $X$, $Y$ **είναι ίσα, οταν περιέχουν ἀκριβῶς τά ἴδια στοιχεία.**

Αν $X$ είναι ενα σύνολο και $P$ μιά ιδιότητα, τότε υπάρχει ένα τελείως καθορισμένο υποσύνολο του $X$, που αποτελείται από εκείνα τα στοιχεία $x \in X$ που ικανοποιούν την ιδιότητα $P$· το υποσύνολο αυτό το συμβολίζουμε $\{ x \in X : P(x) \}$. Ετσι π.χ. $X = \{ x \in X : x = x \}$. Θεωρούμε την ύπαρξη συνόλου που δεν έχει κανένα στοιχειο, το **κενό σύνολο,** που το συμβολίζουμε με $\varnothing$ και είναι υποσύνολο οποιουδήποτε συνόλου.

Αν $a$ είναι ένα αντικείμενο ή επινόημα, τότε $\{ a \}$ είναι το σύνολο με μοναδικό στοιχείο το $a$, επομένως $a \neq \{ a \}$.
Γιά κάθε σύνολο $X$ υπάρχει ένα τελείως ορισμένο σύνολο με στοιχεία όλα τα υποσύνολα του $X$, που ονομάζεται **δυναμοσύνολο** του $X$ και συμβολίζεται με $\wp(X)$*. Είναι φανερό οτι $\emptyset \in \wp(X)$ και $X \in \wp(X)$. Οι σχέσεις $x \in X$ και $\{ x \} \in \wp(X)$ είναι ισοδύναμες καθώς επίσης και οι σχέσεις $X \subset Y$ και $X \in \wp(Y)$.
Στην περίπτωση που το σύνολο $X$ έχει ν στοιχεία, τότε το δυναμοσύνολο $\wp(X)$ έχει $2^{\nu}$ στοιχεία (γιατί;).
Αν $X$, $Y$ είναι δύο σύνολα, τότε η **ένωσή** τους, που συμβολίζεται με $X \cup Y$, είναι το σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία που ανήκουν στο $X$ ή στο $Y$ ή συγχρόνως στο $X$ και στο $Y$. Ενώ η **τομή** τους, που συμβολίζεται μέ $X \cap Y$, είναι το σύνολο που αποτελείται από όλα τα στοιχεία πού ανήκουν και στο $X$ και στο $Y$. Αν τα σύνολα $X$, $Y$ δεν έχουν κοινά στοιχεία, δηλ. $X \cap Y = \emptyset$, τότε λέμε οτι αυτά είναι **ξένα μεταξύ** τους. Η ένωση και η τομή συνόλων μπορεί να δοθεί συμβολικά ως εξής :

$$X \cup Y := \{ x : x \in X \text{ ή } x \in Y \}$$
$$X \cap Y := \{ x : x \in X \text{ και } x \in Y \}.$$

Η ένωση και η τομή συνόλων μπορεί να επεκταθεί και σε πεπερασμένου πλήθους σύνολα $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ :

$$\bigcup_{i=1}^{\nu} X_i = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_\nu = \left\{ x: \text{υπάρχει ένα } j \in \{1, 2, \ldots, \nu\} \text{ με } x \in X_j \right\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{\nu} X_i = X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_\nu = \left\{ x: x \in X_j \text{ για κάθε } j \in \{1, 2, \ldots, \nu\} \right\}.$$

Αν $X$, $Y$ είναι δύο σύνολα, τότε ονομάζουμε **διαφορά** του $Y$ από το $X$ και το συμβολίζουμε με $X \setminus Y$ το σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία του $X$ που δεν ανήκουν στο $Y$, δηλ. $X \setminus Y = \{ x \in X : x \notin Y \}$. Στην περίπτωση που $Y \subset X$, τότε η διαφορά $X \setminus Y$ ονομάζεται **συμπλήρωμα** του $Y$ ως προς το $X$ και συμβολίζεται με $C_X Y$ ή όταν είναι γνωστό οτι η διαφορά λαμβάνεται ως προς το σύνολο $X$, τότε γράφουμε $CY$.
Οι παρακάτω σχέσεις ειναι συνέπειες των ορισμών :

$$X \setminus X = \emptyset, \quad X \setminus \emptyset = X$$
$$X \cup X = X, \quad X \cap X = X$$

* Δεν μπορούμε να θεωρήσουμε «το σύνολο όλων των συνόλων» (παράδοξο του *Russel*).

$X \cup Y = Y \cup X$, $X \cap Y = Y \cap X$

**Οι σχέσεις** $X \subset Y$, $X \cup Y = Y$, $X \cap Y = X$ **είναι ισοδύναμες.**

$X \subset X \cup Y$, $X \cap Y \subset X$

**Εξάλλου ισχύουν οι τύποι** *De Morgan*

$X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$, $X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$

**Ειδικότερα· αν** $X$, $Y$ **είναι υποσύνολα ενός συνόλου** $E$, **τότε** $C\,(CX)=X$, $C\,(X \cup Y) = CX \cap CY$, $C\,(X \cap Y) = CX \cup CY$.

$X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$, $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$, **οπότε μπορούμε να γράφουμε** $X \cup Y \cup Z$, $X \cap Y \cap Z$ **(προσεταιριστική ιδιότητα).**

$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$, $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ **(επιμεριστική ιδιότητα).**

## 2. Καρτεσιανό γινόμενο συνόλων

Αν $X$, $Y$ είναι δυο ξένα ή μη μεταξύ τους σύνολα, τότε το σύνολο που αποτελείται από τα ζεύγη $(x, y)$ με $x \in X$ και $y \in Y$ ονομάζεται **καρτεσιανό γινόμενο** των $X$ και $Y$ και συμβολίζεται με $X \times Y$, δηλ. $X \times Y :=$ $= \{(x, y) : x \in X \text{ καί } y \in Y\}$.

Στα ζεύγη $(x, y)$ που είναι στοιχεία του γινομένου $X \times Y$, το πρώτο (αντ. δεύτερο) στοιχείο $x$ (αντ. $y$) είναι πάντα στοιχείο του $X$ (αντ. $Y$) και ονομάζονται πρώτη (αντ. δεύτερη) συνιστώσα του $(x, y)$. Στο καρτεσιανό γινόμενο $X \times Y$ η ισότητα $(x, y) = (\alpha, \beta)$ ισχύει, όταν, και μόνο όταν, $x = \alpha$ και $y = \beta$. Τα ζεύγη $(x, y)$ του καρτεσιανού γινομένου με τις παραπάνω ιδιότητες ονομάζονται **διατεταγμένα.**

Για το καρτεσιανό γινόμενο ισχύουν :

$X \times Y = \emptyset$, **όταν, και μόνο όταν,** $X = \emptyset$ **ή** $Y = \emptyset$.

**Αν** $X \times Y \neq \emptyset$, **τότε** $X_1 \times Y_1 \subset X \times Y$, **όταν, και μόνο όταν,** $X_1 \subset X$ **και** $Y_1 \subset Y$.

$(A \times X) \cup (B \times X) = (A \cup B) \times X$

$(A \times X) \cap (B \times Y) = (A \cap B) \times (X \cap Y)$

**Αν** $X$, $Y \neq \emptyset$, **τότε** $X \times Y = Y \times X$, **όταν, και μόνο όταν,** $X = Y$.

Ανάλογα ορίζεται το καρτεσιανό γινόμενο πεπερασμένου πλήθους συνόλων $X_1$, $X_2$, ..., $X_\nu$:

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_\nu := \{(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) : x_j \in X_j,\ j = 1, 2, \ldots, \nu\}.$$

Αν $X_1 = X_2 = \cdots = X_\nu = X$, τότε γράφουμε $X \times X \times \cdots \times X = X^\nu$.

## 3. Φυσικοί αριθμοί

Οι απλούστεροι αριθμοί που γνωρίζουμε είναι οι φυσικοί αριθμοί, που το σύνολό τους συμβολίζεται με $\mathbb{N}$, και εισάγονται στα Μαθηματικά με τη βοήθεια αξιωμάτων. Ενα τέτοιο σύστημα αξιωμάτων ειναι το σύστημα των *Dedekind* και *Peano*. Εφοδιάζουμε το σύνολο $\mathbb{N}$ με δύο πράξεις συνθέσεως, την πρόσθεση «+» και τον πολλαπλασιασμό «·». Έτσι σε κάθε ζεύγος φυσικών αριθμών $\kappa$, $\nu$ αντιστοιχίζουμε το αθροισμά τους $\kappa+\nu \in \mathbb{N}$ και το γινόμενό τους $\kappa \cdot \nu \in \mathbb{N}$. Με τη βοήθεια των πράξεων στο $\mathbb{N}$ τα αξιώματα *Dedekind - Peano* διατυπώνονται ως εξής :

($\mathbb{N}1$) $1 \in \mathbb{N}$

($\mathbb{N}2$) (i) **Αν** $\nu \in \mathbb{N}$, **τότε** $\nu+1 \in \mathbb{N}$ **(ο αριθμός** $\nu+1$ **ονομάζεται επόμενος του** $\nu$**).**

(ii) **Αν** $\nu$, $\mu \in \mathbb{N}$, **τότε** $\nu+1 \neq 1$ **και** $\nu = \mu$, **όταν, και μόνο όταν,** $\nu+1 = \mu+1$.

($\mathbb{N}3$) **Αν για κάποιο υποσύνολο** $M$ **του** $\mathbb{N}$ **ισχύουν:**

(i) $1 \in M$ **και**

(ii) **αν** $\nu \in M$, **τότε και** $\nu+1 \in M$ ,

**τότε** $M = \mathbb{N}$.

Στο σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ μπορούμε να εισάγουμε μια σχέση: $\nu < \mu$ (διαβ. $\nu$ μικρότερο του $\mu$), όταν, και μόνο όταν, υπάρχει φυσικός αριθμός $\kappa$ τέτοιος, ώστε $\nu+\kappa=\mu$.

Το σύνολο $\mathbb{N}$ εφοδιασμένο με τη σχέση διατάξεως $\nu \leqq \kappa$ ($\nu < \kappa$ ή $\nu = \kappa$) ειναι **ολικά ή γραμμικά διατεταγμένο**, δηλ.

α) για κάθε $\nu, \mu \in \mathbb{N}$ ισχύει μόνο μια από τις σχέσεις $\nu<\mu$, $\nu=\mu$, $\mu<\nu$

β) για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ισχύει $\nu \leqq \nu$ (ανακλαστική ιδιότητα)

γ) αν $\nu \leqq \kappa$ και $\kappa \leqq \mu$, τότε $\nu \leq \mu$ (μεταβατική ιδιότητα)

δ) αν $\nu \leqq \kappa$ και $\kappa \leqq \nu$, τότε $\nu = \kappa$ (αντισυμμετρική ιδιότητα).

Έτσι ισχύει $1 < 2 < 3 < \cdots < \nu < \nu+1 < \cdots$.

## 4. Μαθηματική λογική

Μια πρόταση, με τη συντακτική της έννοια, που έχει την ιδιότητα να είναι αληθής (Α) ή ψευδής (Ψ), είναι μια **λογική πρόταση** ή, πιο απλά, **πρόταση**. Ενώ ένας **προτασιακός τύπος** είναι μια πρόταση, με τη συντακτική της έννοια, στην οποία εμφανίζονται μια η περισσότερες μεταβλητές, ακαθόριστα σύμβολα, και που γίνεται λογική πρόταση, αν στη

θέση των μεταβλητών βάλουμε στοιχεία από ένα σύνολο τελείως καθορισμένο, π.χ. από το σύνολο $\mathbb{R}$ η το $\mathbb{N}$. Αν $P(x)$ ειναι ένας προτασιακός τύπος και $X$ ειναι το σύνολο που διατρέχει η μεταβλητή $x$, τότε λέμε οτι ο προτασιακός τύπος $P(x)$ είναι ορισμένος στο $X$. Το υποσύνολο $Y$ του $X$ που αποτελείται από όλα τα στοιχεία $x \in X$ για τα οποία η $P(x)$ είναι αληθής πρόταση ονομάζεται **σύνολο αλήθειας** του προτασιακού τύπου και συμβολίζεται $\{x \in X : P(x)\}$.

Αν π, τ είναι λογικές προτάσεις, τότε αρνούμενοι ή συσχετίζοντας τις προτάσεις παίρνουμε νέες λογικές προτάσεις :

**Άρνηση :** $>\pi$ (διαβ. όχι π) είναι πρόταση αληθής, μόνο όταν η π είναι ψευδής.

**Σύζευξη :** $\pi \wedge \tau$ (διαβ. π και τ) είναι πρόταση αληθής, μόνο όταν τόσο η π όσο και η τ είναι αληθής.

**Διάζευξη :** $\pi \vee \tau$ (διαβ. π η τ) είναι πρόταση ψευδής, μόνο όταν τόσο η π όσο και η τ ειναι ψευδής.

**Συνεπαγωγή :** $\pi \Rightarrow \tau$ (διαβ. αν π, τότε τ) είναι πρόταση ψευδής, μόνο όταν η π είναι αληθής και η τ ψευδής.

**Ισοδυναμία :** $\pi \Leftrightarrow \tau$ (διαβ. π, όταν, και μόνο οταν, τ) είναι πρόταση αληθής, μόνο όταν οι π, τ είναι και οι δύο αληθείς η και οι δύο ψευδείς.

Δυο συνδέσεις λογικών προτάσεων $\alpha_1(\pi, \tau, \sigma, \ldots)$, $\alpha_2(\pi, \tau, \sigma, \ldots)$ ονομάζονται λογικά ισοδύναμες, όταν για οποιεσδήποτε προτάσεις π, τ, σ,... ισχύει $\alpha_1(\pi, \tau, \sigma, \ldots) \Leftrightarrow \alpha_2(\pi, \tau, \sigma, \ldots)$, οπότε γράφουμε $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ .

Είναι δυνατό να έχουμε και συνδυασμούς των παραπάνω σχέσεων μεταξύ τους. Έτσι ισχύουν :

(1) $[(\pi \Rightarrow \tau) \wedge (\tau \Rightarrow \sigma)] \Rightarrow (\pi \Rightarrow \sigma)$, νόμος του συλλογισμού

(2) $>(\pi \vee \tau) \equiv \; >\pi \wedge >\tau, \quad >(\pi \wedge \tau) \equiv \; >\pi \vee >\tau$ , (άρνηση)

(3) $(\pi \Rightarrow \tau) \equiv \; >(\pi \wedge >\tau)$

$>(\pi \Rightarrow \tau) \equiv \pi \wedge >\tau$

(4) $(\pi \Rightarrow \tau) \equiv (>\tau \Rightarrow \; >\pi)$

(5) $(\pi \Leftrightarrow \tau) \equiv [(\pi \Rightarrow \tau) \wedge (\tau \Rightarrow \pi)]$

Για συντομογραφία θα χρησιμοποιήσουμε δυο σύμβολα, τους ποσοδείκτες

$\bigwedge_{x \in X}$ η $\forall x \in X$ , που διαβάζεται : για κάθε $x \in X$

$\bigvee_{x \in X}$ η $\exists x \in X$ , που διαβάζεται: υπάρχει τουλάχιστο ένα $x \in X$

Σε αναλογία με την ισοδυναμία (2) δίνουμε τώρα τις παρακάτω ισοδυναμίες :

$$(6) \qquad \rceil \Big( \bigwedge_{x \in X} P(x) \Big) \equiv \bigvee_{x \in X} \rceil P(x)$$

$$\rceil \Big( \bigvee_{x \in X} P(x) \Big) \equiv \bigwedge_{x \in X} \rceil P(x),$$

όπου $P(x)$ ειναι ένας προτασιακός τύπος ορισμένος στο σύνολο $X$.

Αν $\alpha(x)$, $\beta(x)$ ειναι προτασιακοί τύποι ορισμένοι στο ίδιο σύνολο $X$ με σύνολα αλήθειας $A$, $B$, τότε ισχύουν :

(7) $\{ x \in X : \rceil \alpha(x) \} = C_X A$

(8) $\{ x \in X : \alpha(x) \wedge \beta(x) \} = A \cap B$

(9) $\{ x \in X : \alpha(x) \vee \beta(x) \} = A \cup B$

(10) $\alpha(x) \Rightarrow \beta(x)$, όταν, και μόνο όταν, $A \subset B$

(11) $\alpha(x) \Leftrightarrow \beta(x)$, όταν, και μόνο όταν, $A = B$.

Οι μαθηματικές προτάσεις αποτελουνται από μια υπόθεση (Υ) και ένα συμπέρασμα (Σ) και ζηταμε να αποδείξουμε την αλήθεια:

α) **της συνεπαγωγης** : Υ ⇒ Σ, δηλ. «αν ισχύει η Υ, τότε ισχύει το Σ» ή «το Σ ειναι αναγκαία συνθήκη για την Υ» ή «η Υ ειναι ικανή συνθήκη για το Σ».

β) **της ισοδυναμίας** : Υ ⇔ Σ, δηλ. «ισχύει η Υ, όταν, και μόνο όταν, ισχύει το Σ» η «η Υ ειναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για το Σ».

Για την απόδειξη της συνεπαγωγης χρησιμοποιουμε βασικά τις παρακάτω τρεις αποδεικτικές μεθόδους, ενω για την απόδειξη της ισοδυναμίας χρησιμοποιουμε διάφορους συνδυασμούς των μεθόδων αυτων.

I. **Η ευθεία απόδειξη :** Η ευθεία απόδειξη αποσκοπει στο να βρουμε το συμπέρασμα (Σ) από την υπόθεση (Υ) χρησιμοποιώντας τα αντίστοιχα αξιώματα και τις προτάσεις, που ειναι ηδη γνωστές, δηλ. την απόδειξη της αλήθειας του Σ με τη βοήθεια επιτρεπτων πράξεων.

II. **Η πλάγια απόδειξη :** Η απόδειξη αυτή στηρίζεται στη λογική ισοδυναμία (4) (Υ ⇒ Σ) ≡ (⌉Σ ⇒ ⌉Υ), δηλ. αν υποθέσουμε οτι δεν ισχύει το συμπέρασμα, τότε αποδεικνύουμε οτι δεν ισχύει και η υπόθεση.