Πρόδρομος Χαρ. Παπαδόπουλος

Οι Δίδυμοι του Απείρου και η Εικασία Riemann

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Ημερομηνία έκδοσης: 15 Ιουλίου 2015.

ISBN 978-960-456-447-7

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση
Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ:
Αρμενοπούλου 27, 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ.: 2310.203.720, Fax: 2310.211.305 • e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΠΩΛΗΣΗ ΛΙΑΝΙΚΗ-ΧΟΝΔΡΙΚΗ:
Χαριλάου Τρικούπη 22, 106 79 Αθήνα
Τηλ.-Fax: 210.3816.650 • e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

Εις την Τριαδική Μονάδα

Εισαγωγή

1. Τι περιλαμβάνει αυτό το βιβλίο

Το βιβλίο αυτό αποτελείται από 4 Κεφάλαια. Στο 1^{ο} Κεφάλαιο μετά από εκτενή εισαγωγή, που περιέχει μερικά πρωτότυπα προβλήματα μαθηματικών, παρουσιάζεται η λύση δύο άλυτων μέχρι σήμερα προβλημάτων των μαθηματικών: Του προβλήματος των Διδύμων Πρώτων Ακεραίων και της υπόθεσης Riemann. Οι λύσεις στηρίζονται σε μια νέα μεθοδολογία, στη βάση της θεωρίας των πιθανοτήτων και της πληροφορίας, που μπορεί να ανοίξει και ένα νέο πεδίο έρευνας στην διατήρηση της πληροφορίας σε «κλειστά» σύνολα ή συστήματα.

Στο 2^{ο} Κεφάλαιο εκτίθεται μια καινοτόμος παιδαγωγική μέθοδος διδασκαλίας της κλασικής μηχανικής, αλλά και μερικών στοιχείων της Σχετικότητας και Κβαντικής - Στατιστικής Φυσικής. Η αναλυτική αυτή μέθοδος διδασκαλίας είναι από τη μια μεριά εισαγωγή στα επόμενα δύο Κεφάλαια του βιβλίου, και από την άλλη μεριά είναι μια πρόταση διδασκαλίας για το Λύκειο, αλλά και για τις σχολές Θετικών Επιστημών και τους μηχανικούς.

Στο 3^{ο} Κεφάλαιο εκτίθεται, με έναν τρόπο ιδιόρρυθμα εποπτικό, η ειδική και η γενική θεωρία της σχετικότητας του Einstein, με εφαρμογές στις μαύρες τρύπες και στην Κοσμολογία. Το 3^{ο} Κεφάλαιο μαζί με το 2^{ο} Κεφάλαιο, καθώς και την Εισαγωγή του 4^{ου} κεφαλαίου, συμπεριλαμβάνει κατά την γνώμη μου το μεγαλύτερο αλλά και το πιο βασικό κομμάτι από το γνωστικό τμήμα που θα έπρεπε να απαιτεί η παραχώρηση πτυχίου στους φυσικούς και όχι μόνον. Κατά την γνώμη μου θα έπρεπε και στα τρία πρώτα χρόνια προπτυχιακών σπουδών να διδάσκεται: γενική φυσική, σχετικότητα, και κβαντική φυσική, με πολυάριθμες εφαρμογές και πειράματα, καθώς και η ιστορία της Φυσικής και των Μαθηματικών, ώστε ο μέσος φυσικός να αποκτά το ελάχιστο σύγχρονο θεωρητικό και φιλοσοφικό υπόβαθρο της επιστήμης του.

Τέλος, στην Εισαγωγή του 4^{ου} Κεφαλαίου παρουσιάζονται τα βασικά στοιχεία της κβαντικής Φυσικής, που είναι απαραίτητα στην ολοκληρωμένη γνώση φυσικής ενός σύγχρονου φυσικού, ή σύγχρονου χημικού, αλλά και μηχανικού. Στο υπόλοιπο μέρος του 4^{ου} Κεφαλαίου εκτίθενται δύο πρωτότυπα άρθρα του συγγραφέα: Στο πρώτο από αυτά επιχειρείται ένας υπολογισμός της συνολικής ενέργειας του σύμπαντος και στη

βάση αυτή δίνεται μια πιθανή εξήγηση του σύγχρονου μυστηρίου της σκοτεινής ύλης και ενέργειας του κόσμου, που είναι ένας άλυτος γρίφος. Το δεύτερο άρθρο είναι μια βελτίωση του άρθρου που δημοσίευσα για πρώτη φορά στο βιβλίο μου «Be Shadowed by real time», Εκδόσεις Ζήτη, 2005. Το άρθρο αυτό πραγματεύεται ένα κβαντικό φαινόμενο πάνω ακριβώς στον ορίζοντα μιας μαύρης τρύπας, που μπορεί να εξηγήσει την κολοσσιαία εκπομπή ακτινοβολίας από τους δίσκους συσσώρευσης ύλης γύρω απ' αυτές. Μια πράγματι μυστηριώδη εκπομπή, όπως π.χ στον Κύκνο X-1, στους κβάζαρς κλπ, που η σύγχρονη αστροφυσική αφήνει ανεπαρκώς ερμηνευμένη.

2. Σε ποιους απευθύνεται το βιβλίο αυτό

Ο συγγραφέας στο βιβλίο αυτό πρωτίστως θέλει να παρουσιάσει την λύση των δύο άλυτων προβλημάτων μαθηματικών, του προβλήματος των διδύμων πρώτων αριθμών και της υπόθεσης Riemann. Επομένως το πολυθεματικό βιβλίο απευθύνεται σε όλους γενικά τους μαθηματικούς. Απευθύνεται ακόμη και σε οποιονδήποτε άλλον γνωρίζει μαθηματικά και ενδιαφέρεται για τα προβλήματα αυτά. Ακόμη, προτείνεται σε όλους όσους κατέχουν άριστα τα μαθηματικά Λυκείου και επιθυμούν να γνωρίσουν την σχετικότητα και την Κβαντική Φυσική στην βάση ανώτερων μαθηματικών, διότι όλα τα απαραίτητα στοιχεία για τον σκοπό αυτό αναπτύσσονται μέσα από πρωτότυπες μεθόδους διδασκαλίας. Άρα ο συγγραφέας απευθύνει το έργο του αυτό σε δασκάλους Φυσικής και Μαθηματικών, σε φοιτητές Θετικών Επιστημών και μηχανικούς. Αν είστε μαθητής Λυκείου μπορείτε απλώς να αρχίσετε με το 2^{ο} Κεφάλαιο, διότι όπως φαίνεται και στον τίτλο του Κεφαλαίου, ένας στόχος του είναι και οι πανελλαδικές εξετάσεις. Ακόμη, επειδή στην εισαγωγή του 1^{ου} Κεφαλαίου, αλλά και αλλού, υπάρχουν τομές σε φιλοσοφικά και υπαρξιακά θέματα μέσα από τον μεγεθυντικό φακό της σύγχρονης φυσικής και των μαθηματικών, το βιβλίο αυτό απευθύνεται στους φιλόσοφους που έχουν γνώσεις βασικών μαθηματικών. Τέλος, το βιβλίο απευθύνεται σε φυσικούς και αστροφυσικούς που ενδιαφέρονται για τα δύο πρωτόπα άρθρα του 4^{ου} Κεφαλαίου που σχολιάσαμε στην προηγούμενη ενότητα.

3. Πώς μπορεί να μελετηθεί το βιβλίο αυτό

Αν θέλετε να μελετήσετε τις λύσεις των δύο άλυτων προβλημάτων και διαθέτετε γνώσεις της θεωρίας των πιθανοτήτων και της πληροφορίας, μπορείτε να αποφύγετε να διαβάσετε την Εισαγωγή 1 του 1^{ου} Κεφαλαίου, όπου αναπτύσσονται οι έννοιες αυτές. Μπορείτε έτσι να ξεκινήσετε με την 2^{η} Ενότητα και αποφεύγοντας και την 3^{η} Ενότητα (απ' όπου μπορείτε να διαβάσετε μερικές μόνον από τις πρώτες της σελίδες) μελετήστε την 4^{η} και 5^{η} Ενότητα του 1^{ου} Κεφαλαίου. Στην συνέχεια, είναι σκόπιμο να μελετήστε και την 3^{η} Ενότητα του Κεφαλαίου αυτού, όπου υπάρχει διαφορετική οπτική

γωνία θεώρησης του θέματος, αλλά και η προέκταση της μεθοδολογίας λύσης σε γενικότερα προβλήματα της θεωρίας συνόλων και της κβαντικής πληροφορίας.

Αν ενδιαφέρεστε για τη φυσική και είστε μαθητής Λυκείου, ξεκινήστε με το $2^{ο}$ Κεφάλαιο και συνεχίστε στο $3^{ο}$ και $4^{ο}$. Φυσικά μπορείτε αμέσως μετά το $2^{ο}$ Κεφάλαιο να μελετήσετε την εισαγωγή του $4^{ου}$ Κεφαλαίου. Για την μελέτη των δύο πρωτότυπων άρθρων της Αστροφυσικής όμως χρειάζεστε και γνώσεις σχετικότητας, που δίνονται στο $3^{ο}$ Κεφάλαιο. Αν όμως είστε κάτοχος πτυχίου Θετικών Επιστημών ή μηχανικός, μπορείτε να ξεκινήσετε την μελέτη της φυσικής από το $3^{ο}$ Κεφάλαιο.

* Κάθε Κεφάλαιο του βιβλίου αποτελείται από αριθμημένες Ενότητες. Η αρίθμηση των μαθηματικών σχέσεων κάθε Ενότητας περιέχει 2 ακέραιους αριθμούς. Ο πρώτος από αυτούς είναι ο αύξοντας αριθμός της ενότητας του κεφαλαίου αυτού **και δεν θα πρέπει να συγχέεται** με τις άλλες ενότητες, που έχουν τον ίδιο αύξοντα αριθμό αλλά ανήκουν σε άλλα Κεφάλαια. Γι' αυτό και όπου γίνεται αναφορά σε σχέσεις άλλων κεφαλαίων αναφέρεται ρητά και το συγκεκριμένο, άλλο, Κεφάλαιο, προς αποφυγήν σύγχυσης. Ο επόμενος ακέραιος αριθμός (από τους δύο) είναι προφανώς ο αύξοντας αριθμός της σχέσης της συγκεκριμένης ενότητας.

4. Μερικά τελευταία σχόλια

Σε αρκετές περιπτώσεις θυσιάστηκε η επιστημονική ακρίβεια στον βωμό της κατανόησης. Αυτό κάνει τις έννοιες πιο ελαστικές, αλλά αυτό δεν είναι καινοτομία, είναι μέθοδος διδασκαλίας που σέβεται την φύση ανέλιξης του ανθρώπινου νου. Σαν παράδειγμα θα αναφέρω την μέθοδο παρουσίασης των τελεστών και των ιδιοτήτων τους στο $2^{ο}$ Κεφάλαιο, καθώς και τον τρόπο διδασκαλίας των διανυσμάτων στο ίδιο Κεφάλαιο, ώστε τα τετραδιανύσματα και οι τανυστές στο επόμενο Κεφάλαιο να είναι μια απλή, φυσική, επέκταση τους. Ακόμη, αν και τα γνωστά καρτεσιανά συστήματα αναφοράς ορίζονται σαν ορθοκανονικά συστήματα αξόνων μέσα σε Ευκλείδειους χώρους (πολλαπλότητες) έως τριών διαστάσεων, ο όρος «καρτεσιανό» επεκτάθηκε και στον Ευκλείδειο μας χωρόχρονο, όπου όμως ταυτίσθηκε με τον τετριμμένο όρο «αδρανειακό» (σύστημα αναφοράς), με φανταστική την διάσταση του χρόνου. Αυτό το μοντέλο αντιστοιχεί στο δισδιάστατο γνωστό μιγαδικό επίπεδο, μια έννοια καλά κατανοητή.

Στο βιβλίο αυτό αναλύονται και μερικές έννοιες που απουσιάζουν από την γνωστή βιβλιογραφία, όπως π.χ, είναι η έννοια της συνολικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας, που από τη μια μεριά οφείλει να είναι αρνητική, από την άλλη όμως περιέχει και έναν επίσης αρνητικό όρο που πρέπει να απορρέει απ τη δράση ολοκλήρου του σύμπαντος, οδηγώντας έτσι σε ένα ριζοσπαστικό συμπέρασμα... (βλέπε στο πρώτο άρθρο του $4^{ου}$ Κεφαλαίου). Ακόμη, δόθηκε ιδιαίτερη έμφαση στο θέμα της εντροπίας-μέσης πληρο-

φορίας ενός συστήματος, πράγμα που σχετίζεται με τη λύση των δύο άλυτων προβλημάτων των μαθηματικών. Η συσχέτιση αυτή αναδεικνύει, έστω και αρχικά σαν εικασία, αυτό που η ανολοκλήρωτη θεωρία των υπερχορδών σήμερα προσπαθεί να προσεγγίσει: Ένα μοντέλο ανοικτού πληροφοριακά σύμπαντος, που αντλεί, σαν με ομφάλιο λώρο, εντροπία-πληροφορία από έναν αιώνιο και άπειρο υπερκόσμο. Το σύμπαν μοιάζει έτσι, στις μετρήσεις ενός πεπερασμένου παρατηρητή, με την αέναη άρση εκφυλισμένων καταστάσεων από το νοερό κόσμο των μαθηματικών και της κβαντικής πληροφορίας. Ακόμη, στο μοντέλο η αναγκαιότητα ενός υπερπαρατηρητή για την ύπαρξη του κόσμου αποδεικνύεται εδώ με λογική συνέπεια. Ο νοερός αυτός κόσμος άπειρης εντροπίας- μέσης πληροφορίας δείχνει να έχει σχέση με το θεώρημα της μη πληρότητας του Gödel.

* Στο τέλος του βιβλίου, όπως συνηθίζεται, εκτίθενται μερικά από τα συγγράμματα που η μελέτη τους έπαιξε βοηθητικό ρόλο στην εκπόνηση αυτού του έργου. Αρκετά από αυτά, μολονότι έχουν το τετριμμένο περιεχόμενο ενός προπτυχιακού μαθήματος, αναφέρθηκαν, επειδή νομίζω πως μπορεί να αποτελέσουν υλικό στήριξης στη μελέτη του παρόντος βιβλίου.

Για την κατανόηση τόσο της λύσης των άλυτων προβλημάτων των Μαθηματικών στο $1^{ο}$ Κεφάλαιο, όσο και των πρωτότυπων άρθρων της Φυσικής στο $4^{ο}$, απαιτούνται όπως είπαμε κατ' αρχήν από τη μεριά σας μόνον γνώσεις Λυκείου, διότι όλοι οι άλλοι απαραίτητοι γνωστικοί κρίκοι της αλυσίδας (για το σκοπό αυτό) συναρμολογούνται στο βιβλίο αυτό επιμελώς. Όμως οι λογικοί και στοχαστικοί κρίκοι, που είναι θέμα ωριμότητας της σκέψης, δεν είναι δυνατόν να καλυφθούν ούτε σε ένα σύγγραμμα χιλιάδων σελίδων. Αυτή όμως είναι μια πρόκληση αντάξια των φιλοδοξιών σας.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Το Πρόβλημα των Δίδυμων Πρώτων Ακέραιων Αριθμών και η Υπόθεση Riemann. Δύο άλυτα προβλήματα

Κεφάλαιο 2

Το Τέταρτο Θέμα των Πανελλαδικών Εξετάσεων

Κεφάλαιο 3

Η Θεωρία της Σχετικότητας

Κεφάλαιο 1

Το Πρόβλημα των Δίδυμων Πρώτων Ακέραιων Αριθμών και η Υπόθεση Riemann

Δύο άλυτα προβλήματα

Η αντικειμενική πραγματικότητα ψηλαφίζεται
μόνον με την ποίηση και τα μαθηματικά.

Werner Heisenberg

1.1 Εισαγωγή στο πρόβλημα και εφαρμογές της θεωρίας των πιθανοτήτων

Ο Έλληνας μαθηματικός Ευκλείδης, χιλιάδες χρόνια πριν, απέδειξε ότι οι πρώτοι ακέραιοι αριθμοί 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, κλπ, δηλαδή οι θετικοί ακέραιοι που διαιρούνται (ακέραια) μόνον με τον εαυτό τους και τη μονάδα είναι άπειροι. Η μεγαλοφυής απόδειξη του είναι εξαιρετικά απλή. Στηρίζεται στη μέθοδο που εφηύραν οι Έλληνες και είναι γνωστή σαν «η εις άτοπον απαγωγή». Στην περίπτωση μας ο Ευκλείδης έκανε, όπως απαιτεί η μέθοδος αυτή, ακριβώς την αντίθετη υπόθεση και προσπάθησε να οδηγηθεί μετά σε άτοπο, δηλαδή σε ένα εντελώς παράλογο συμπέρασμα. Πράγματι, έστω ότι υπάρχει κάποιος πρώτος, έστω q_ν, που είναι ο μέγιστος όλων των πρώτων. Τότε ο ακέραιος $Q = q_1 q_2 q_3 \ldots q_\nu + 1$, με $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_\nu$ την ακολουθία όλων των ακεραίων πρώτων της υπόθεσης μας, θα είναι επίσης πρώτος, διότι ο πρώτος όρος του Q διαιρείται με όλους τους πρώτους, ενώ ο δεύτερος του, η μονάδα, δεν διαιρείται με κανέναν από αυτούς και έτσι ο ακέραιος Q δεν θα διαιρείται με κανέναν πρώτο αριθμό από την ακολουθία $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_\nu$ των πρώτων. Αφού όμως με βάση την υπόθεση μας βρήκαμε έναν πρώτο, τον Q, που είναι μεγαλύτερος του υποτιθέμενου μεγίστου q_ν, η υπόθεση μας «πώς ο ακέραιος q_ν είναι μέγιστος πρώτος» θα είναι άτοπη, δηλαδή παράλογη και έτσι απορρίπτεται. Στο εξής θα μιλάμε μόνο για ακέραιες διαιρέσεις, εκτός αν υπονοείται ή διευκρινίζεται το αντίθετο.

Βέβαια, πρέπει να αποκλεισθεί η αιχμηρή περίπτωση όπου ένας ακέραιος β_1 μεγαλύτερος του q_ν και μικρότερος του Q **διαιρεί ακέραια τον θετικό αυτό ακέραιο** Q. Εάν συνέβαινε αυτό, τότε ο νέος θετικός ακέραιος β_1 **δεν θα διαιρείται** με κανέναν πρώτο q_ρ από τους $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_\nu$, όπως μπορούμε να δείξουμε με τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής. Πράγματι, αν συνέβαιναν και τα 2 τότε θα ίσχυαν:

$$\beta_1 = \pi_1 q_\rho, \; Q = q_1 q_2 q_3 \ldots q_\nu + 1 = \pi_2 \beta_1,$$

και επομένως τότε θα έχουμε:

$$(\pi_1 \pi_2 - q_1 q_2 q_3 \ldots q_{\rho-1} q_{\rho+1} \ldots q_\nu) q_\rho = 1,$$

που είναι άτοπο, διότι η μονάδα δεν διαιρείται με τον $q_\rho \neq 1$.

Τώρα ο β_1 θα ήταν είτε πρώτος, που οδηγεί πάλι την αρχική υπόθεση, (ότι δηλαδή ο q_ν είναι το άνω φράγμα όλων των πρώτων), σε άτοπο, είτε όχι και θα διαιρείται με έναν άλλον μικρότερο του θετικό ακέραιο β_2. Οπότε αν δεν είναι ο νέος θετικός ακέραιος β_2 πρώτος και μεγαλύτερος του q_ν, (που οδηγεί ξανά σε άτοπο την αρχική υπόθεση), θα πρέπει να διαιρείται ο β_2, (ως μη πρώτος), με έναν μικρότερο του θετικό ακέραιο αριθμό β_3 κ.ο.κ. και θα φθάσουμε έτσι τελικά σε έναν θετικό ακέραιο β_μ που

θα είναι αναγκαστικά ένας από τους $q_1, q_2, q_3, ..., q_\nu$, έστω ο πρώτος q_λ (με $1 \le \lambda \le \nu$) και λόγω της αναδρομικής διαδικασίας διαιρετότητας θα είναι αυτός ο q_λ σίγουρα και **διαιρέτης** του β_1, πράγμα **αδύνατο** όπως είπαμε πιο πάνω. Έτσι η αρχική μας υπόθεση οδηγείται και πάλι σε άτοπο!

Συμπεραίνουμε ότι ισχύει η αντίθετη υπόθεση, ότι δηλαδή η ακολουθία των πρώτων δεν έχει άνω φράγμα και οι όροι της είναι άπειροι! Αυτό όμως είναι ένα συγκλονιστικό συμπέρασμα της θεωρίας αριθμών που θεμελίωσε ο μεγάλος μαθηματικός. Αν σας ρωτούσαν για παράδειγμα, υπάρχει κάποιος ακέραιος πρώτος που το μήκος γραφής του νάναι περίπου όσο η περιφέρεια της Γης ενώ το μέγεθος των ψηφίων του νάναι όσο το μέγεθος των ακεραίων σε αυτό εδώ το κείμενο, η απάντηση θάταν Ναι. Δηλαδή υπάρχει πράγματι τέτοιος ασύλληπτα μεγάλος ακέραιος αριθμός που δεν θα διαιρείται ακέραια με κανέναν μικρότερο του ακέραιο, εκτός φυσικά της μονάδος. Και αν η ερώτηση απευθυνόταν σε μήκος όσο το μέγεθος του γνωστού σύμπαντος, 14 περίπου δισεκατομμύρια έτη φωτός, η απάντηση θα ήταν πάλι καταφατική, κ.ο.κ. Στα παρακάτω όταν θα χρησιμοποιούμε χάριν συντομίας τη λέξη «ακέραιος» αριθμός, θα εννοούμε έναν θετικό ακέραιο, γιατί θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με θετικούς ακεραίους αριθμούς. Και μια παρένθεση τώρα:

«Μία αξιόλογη επίσης επίδειξη της **μαθηματικής επαγωγής** είναι και μια απόδειξη, που υπάρχει σε μερικά βιβλία μαθηματικών, ότι η αρμονική σειρά

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\dots \text{ απειρίζεται, ή αλλιώς αποκλίνει.}$$

Η ιδιότητα αυτή θα χρησιμοποιηθεί στις επόμενες ενότητες για τη διερεύνηση του προβλήματος των διδύμων πρώτων. Για την απόδειξη της απόκλισης θα χρησιμοποιήσουμε το γνωστό κριτήριο του Cauchy που θα αναπτύξουμε αμέσως.

Έστω η σειρά $S_n = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu$. Τότε η $S_{n+p} = \sum_{\nu=1}^{n+p} A_\nu$, με $n, p \in N$ θα παριστάνει μια προέκταση της. Αν π.χ. διαλέξω την ακολουθία $A_\nu = \frac{1}{\nu}$, τότε οι όροι της σειράς S_n, που αυτή η ακολουθία ορίζει, θα είναι:

$$S_1 = \frac{1}{1},\ S_2 = \frac{1}{1}+\frac{1}{2},\ S_3 = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3},\ S_4 = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4},\ \dots,\ S_n = S_{n-1}+\frac{1}{n}$$

Θα ορίσουμε τώρα τη νέα σειρά: $S_{n+p} - S_n$, που παριστάνει προφανώς μια αυθαίρετα μεγάλη «ουρά» της σειράς S_n. Η S_n έχει όρους αυξανόμενους, αν $A_\nu > 0,\ \forall \nu \in N$. Επομένως θα μειώνονται οι αντίστοιχοι όροι της σειράς «ουράς», όπως την ορίσαμε. Επομένως η S_n θα συγκλίνει, θα ισχύει δηλαδή $\lim_{n\to\infty} S_n = L \in R$, αν η νέα σειρά «ου-

ρά» $S_{n+p} - S_n$ [της S_n] μπορεί να γίνεται κατά απόλυτη τιμή απεριόριστα όσο μικρή εμείς θέλουμε, πράγμα που θα το ελέγχουμε με έναν πραγματικό αριθμό ε, που θα τείνει για το σκοπό αυτό στο μηδέν. Δηλαδή η σειρά S_n θα συγκλίνει, αν $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists\, m \in N : \left| S_{m+p} - S_m \right| < \varepsilon,\ \forall p \in N \tag{I}$$

Ο αναγνώστης μπορεί να στοχασθεί γιατί ο ορισμός αυτός είναι συνεπής. Δηλαδή για να συγκλίνει η S_n αρκεί να βρούμε μόνον έναν πραγματικό αριθμό $\varepsilon > 0$ που να ικανοποιείται η σχέση (I), και για να μην συγκλίνει η S_n αρκεί να βρούμε ότι για έναν και μόνον $\varepsilon > 0$ δεν ικανοποιείται η (I). Διότι αν π.χ. βρούμε ένα $\varepsilon > 0$ για το οποίο δεν ικανοποιείται η σχέση (I), τότε καθώς το $m \to \infty$, θα παίρνουμε αέναα ένα ολοένα και μικρότερο κομμάτι της «ουράς», που όμως θα παραμένει κατά απόλυτη τιμή συνεχώς μεγαλύτερο του ε, και άρα η ουρά θα έχει κατά απόλυτη τιμή άπειρα μεγάλη τιμή. Αντίστροφα, αν για κάποιο $\varepsilon > 0$ ισχύει η (I), τότε καθώς το $p \to \infty$, θα παίρνουμε ένα ολοένα και μεγαλύτερο κομμάτι της «ουράς», (αφού τώρα υπάρχει $m = m_0 = \text{σταθ.}$), που θα είναι συνεχώς [λόγω της (I)] πεπερασμένο, και έτσι η σειρά θα συγκλίνει, δηλαδή δεν θα απειρίζεται.

Έστω για παράδειγμα ότι θέλουμε να δείξουμε ότι η αρμονική σειρά

$$S_n = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} \text{ αποκλίνει.}$$

Εκλέγω $\varepsilon = 1/2$, θα φανεί παρακάτω γιατί διάλεξα το 1/2. Αν η S_n συγκλίνει, τότε σύμφωνα με τα προηγούμενα θα $\exists\ m \in N$ ώστε να ισχύει:

$$\left| S_{m+p} - S_m \right| < \frac{1}{2},\ \forall p \in N, \quad \text{ή ισοδύναμα}$$

$$\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{m+p} < \frac{1}{2},\ \forall p \in N, \text{ άρα και για } p = m, \text{ δηλαδή}$$

αν η S_n συγκλίνει τότε υποχρεωτικά πρέπει να ισχύει και

$$\left| S_{2m} - S_m \right| = S_{2m} - S_m = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{m+m} < \frac{1}{2} \tag{II}$$

Όμως προφανώς είναι $\dfrac{1}{m+k} > \dfrac{1}{2m},\ \forall k < m$ και $\dfrac{1}{m+k} = \dfrac{1}{2m}$, όταν $k = m$.

Άρα $$S_{2m} - S_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{m+k} > \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2m} = m\frac{1}{2m} = \frac{1}{2} = \varepsilon,$$

οπότε και η σχέση (II) πάνω, που θα όφειλε να ισχύει αν η αρμονική σειρά συνέκλινε, είναι **άτοπη** και έτσι η αρχική μας υπόθεση είναι ψευδής, δηλαδή συμπεραίνουμε ότι η αρμονική σειρά αποκλίνει:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} = \infty \qquad \text{(III)}$$

Θα σημειώσουμε ότι αποκλίνει προς το άπειρο πάρα πολύ αργά. Για να το συνειδητοποιήσουμε αυτό αρκεί να πούμε ότι

$$\sum_{\nu=1}^{1.000} \left(\frac{1}{\nu}\right) < 8 \quad \text{και} \quad \sum_{\nu=1}^{1.000.000} \left(\frac{1}{\nu}\right) < 15 \quad \text{καθώς και} \quad \sum_{\nu=1}^{1.000.000.000} \left(\frac{1}{\nu}\right) < 22$$

πράγμα που μπορείτε να διαπιστώσετε με ένα πρόγραμμα σε υπολογιστή. Αντιλαμβάνεστε ότι η αποκάλυψη της αλήθειας τέτοιων προτάσεων, όπως η ιδιότητα (III) πάνω, με τη χρήση υπολογιστή είναι πρακτικά ανέφικτη.

Πρόβλημα: Να λυθεί η εξίσωση:

$1 + 2x + x^2 + x^3 + x^4 + ... = 0$, στο σύνολο R των πραγματικών αριθμών.

Ακολούθως εξετάστε, αν με αντικατάσταση της λύσης αυτής στην παράσταση $1/(1 + x^2 + x^3 + ...)$ προκύπτει το φ της χρυσής τομής.

Υπόδειξη: Διαπιστώστε ότι ισχύει: $S_n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^n = 1 + xS_n$, ή χρησιμοποιήστε τη σχέση του αθροίσματος ενός πλήθους όρων γεωμετρικής προόδου και αφήστε μετά το n «να τρέξει μέχρι το άπειρο». ◆

Πρόβλημα: Εξετάστε παρομοίως αν ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} i^n \left[\sqrt{2} - \left(\frac{3\pi}{4}\right)^n \frac{1}{n!} \right] = 1$$

Υπόδειξη: Θέστε κατα αρχήν στο άθροισμα S_n, του προηγούμενου προβλήματος, $x = i = \sqrt{-1}$ και λογαριάστε το νέο $S_n - 1$. Στη συνέχεια χρησιμοποιήστε και την τριγωνομετρική μορφή έκφρασης για το άθροισμα αυτό $S_n - 1$, την

$Ae^{i\theta} = A.(\cos\theta + i\sin\theta)$, με $A, \theta \in R$, σε συνδυασμό με το ανάπτυγμα της:

$Ae^a = A.\left(\frac{a^0}{0!} + \frac{a^1}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \frac{a^4}{4!} + \ldots\right)$, $a \in Z$, $A \in R$. Όμως… $|i|$ όχι < 1.

Αποδείξτε την τελευταία σχέση του αθροίσματος με βάση το ανάπτυγμα Taylor. ◆

Κεφάλαιο 2

Το Τέταρτο Θέμα των Πανελλαδικών Εξετάσεων

Νομίζω ότι το σύμπαν τρέφεται με πληροφορία από έναν νοερό και εξωχρονικό κόσμο των άυλων μαθηματικών ή των ιδεών του Πλάτωνα ή των αριθμών του Πυθαγόρα ή των άπειρων ανεξάρτητων μεταξύ τους μαθηματικών προτάσεων του Gödel. Αν είναι έτσι, η συνείδηση του παρατηρητή έχει τον κυρίαρχο ρόλο, ενώ η φθαρτή υλοενέργεια παρουσιάζει, μέσω των θεωρημάτων διατήρησης στη Φυσική, μια ανταύγεια της αιώνιας αφθαρσίας που επικρατεί στον νοερό κόσμο. Μας μένει αρκετός δρόμος ακόμη στην φυσική, για να προσεγγίσουμε αυτή την θεώρηση, ενώ τα μαθηματικά που είναι πιο κοντά στην αλήθεια του νου ίσως να υπόσχονται λίγο περισσότερα.

Είναι το δέντρο της χαρούμενης ζωής όλων όσων διαλέγουν να παραμένουν παιδιά. Αυτό είναι το μυστικό του παιγνιδιού που κρύβεται στην καρδιά κάθε βιωματικής αλήθειας. Κάποτε προσπάθησα να γνωρίσω μια επιστήμη, αλλά ποτέ δεν αναγνώρισα την επιχειρηματική αξία της, επειδή δεν παραιτήθηκα από την ιδέα ότι τα μικρά παιδιά αγαπούν την ελεύθερη σκέψη. Αυτή ζεσταίνει τα σπλάχνα της γης με τον ενθουσιασμό της άνοιξης. Είναι το κελάρυσμα του ρυακιού. Είναι ακριβώς αυτό που αγνοούν οι μισθοφόροι υπάλληλοι του κράτους.

2.1 Εισαγωγή

Ο τίτλος του $2^{ου}$ κεφαλαίου δείχνει αινιγματικός. Ο λόγος που επιλέχθηκε είναι σημειολογικός, επειδή ακριβώς αυτός είναι μια πρόταση για τη φυσική στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Συγκεκριμένα, η πρότασή μου αυτή είναι η διδακτέα ύλη να είναι περίπου ισόποσα μοιρασμένη ανάμεσα στην κλασική φυσική, στην κβαντική φυσική, στην σχετικότητα, και στην ιστορία-φιλοσοφία της φυσικής. Ένα παράδειγμα –μόνο για ειδικά σχολεία;– είναι ένα τρίωρο (ή και τετράωρο) μάθημα φυσικής, όπου θα διδάσκονται τις δύο (ή και τρεις) ώρες, οι τρεις πρώτες αναφερθείσες θεματικές ενότητες, απαραίτητα με την παραπάνω αναλογία και με εργαστηριακή υποστήριξη σε σύγχρονο εργαστήριο φυσικής, ενώ η άλλη ώρα θα διατίθεται για την διδασκαλία της ιστορίας της φυσικής (ίσως και των μαθηματικών) με κατάλληλες προβολές κλπ, και απαραίτητα σε σύνδεση με τη ζωή και τη φιλοσοφία των πρωτοπόρων ερευνητών (τα κίνητρα τους, το πάθος τους και τον αγώνα τους). Αλλά επίσης και σε σύνδεση με γενικότερα ιστορικά και κοινωνικά δρώμενα, που συνόδευσαν –σε ταραγμένους πολλές φορές καιρούς– τις μεγάλες ανακαλύψεις και επομένως σχετίζονται με αυτές. Ακόμη, θα ήταν καλή η συνεργατική δουλειά των μαθητών σε καίρια θέματα, όπως τα μυστήρια του ουρανού, που ανεβάζουν το θερμόμετρο του μαθητικού ενθουσιασμού, ή η άμεση χρήση της φυσικής σε επαγγελματικούς (και επιχειρησιακούς) τομείς, ή οι περιβαντολογικές-κοινωνικές επιπτώσεις από εφαρμογές της επιστήμης αυτής. Όλα αυτά απαιτούν πολύ μεράκι, και χρόνο. Διότι τα χρήματα είναι μάλλον η απατηλή δικαιολογία, αφού συνήθως όταν πλεονάζουν δαπανώνται με το χειρότερο τρόπο για την ανάδειξη των ανθρώπινων παθών, και όχι για τον πολιτισμό και την ανάταση της κοινωνικής ψυχής. Ο λόγος είναι απλός και ειπώθηκε από τον Χριστό χιλιάδες χρόνια πριν: «όπου είναι δοσμένη η καρδιά σας, εκεί βρίσκεται και ο θησαυρός σας». Το τέλος της ιστορίας θα δείξει αν η ζωή ανήκει στους εραστές της ή στους καριερίστες, εκτός… και αν είναι μια μεταφυσική χίμαιρα, που δεν θα δώσει καμία απάντηση ποτέ και σε κανέναν. Επίσης, ο παραπάνω τίτλος έχει να κάνει και με μια εναλλακτική τεχνική λύσης που θα σας προτείνω παρακάτω, και που απλοποιεί «δύσκολα» θέματα που έχουν τεθεί, π.χ. τα τελευταία χρόνια στις πανελλαδικές εξετάσεις σαν τέταρτα θέματα. Ακόμη θα σας δώσω, σαν παράδειγμα, μια σύντομη διδακτική μεθοδολογία πολύ βασικών εννοιών, που θα αποτελέσουν και μια εισαγωγή για τα δύο επόμενα κεφάλαια του βιβλίου αυτού. Όμως πριν ξεκινήσω θα σας ταξιδέψω στα μονοπάτια του γρίφου της μεταφυσικής χίμαιρας, που ανέφερα μόλις.

Φανταστείτε τη στιγμή της συλλήψεως σας. Μόλις «δημιουργηθήκατε» και είστε ένα γονιμοποιημένο κύτταρο. Ας γυρίσουμε το χρόνο, ένα χρόνο πριν. Τι πιθανότητα υπήρχε τότε να γίνει η συγκεκριμένη σας σύλληψη, του συγκεκριμένου ωαρίου με το συγκεκριμένο σπερματοζωάριο για το συγκεκριμένο ζυγωτό κύτταρο, τον εαυτό σας

και όχι άλλον; Ασφαλώς η πιθανότητα αυτή είναι πολύ μικρή. Δηλαδή αυτή θα είναι $p(1) << 1$. Θα πάμε τώρα ακόμη μακρύτερα στο παρελθόν, που δεν υπήρχατε, και θα θέσουμε το ίδιο ερώτημα. Ας πούμε 10 χρόνια πριν τη σύλληψη σας. Τώρα επειδή οι αστάθμητοι παράγοντες, που θα υπεισέρχονται στον καθορισμό του συγκεκριμένου γεγονότος της δικής σας σύλληψης (στην κοιλιά της μητέρας σας), είναι αφάνταστα περισσότεροι, έπεται πως και η νέα πιθανότητα p(10) θα είναι δραματικά μικρότερη της $p(1)$, σχεδόν μηδέν, μα όχι όμως ακριβώς μηδέν. Συνεχίζοντας να ταξιδεύουμε στο μακρινό παρελθόν, η πιθανότητα αυτή θα μικραίνει συνέχεια. Όσοι γνωρίζουν από όρια θα γράψουν με «ασφάλεια»:

$$\lim_{t \to T} p(t) = 0,$$

όπου $T \cong 14 \cdot 10^9$ έτη, είναι η τεκμηριωμένη ηλικία του σύμπαντος.

Δηλαδή καθώς προχωρούμε προς την αυγή της γέννησης του σύμπαντος κόσμου μας, η πιθανότητα να υπάρξετε τείνει στο μηδέν. Και φυσικά πριν δημιουργηθεί ο κόσμος, λόγω απουσίας οποιασδήποτε πληροφορίας, η πιθανότητα αυτή να γεννηθείτε και να υπάρξετε είναι ακριβώς μηδέν. Διότι η πιθανότητα καθορίζεται κάθε φορά μόνον από τη διαθέσιμη πληροφορία για το ίδιο γεγονός αναφοράς*. Επομένως μαθηματικά δεν θα έπρεπε να υπάρχετε. Και όμως υπάρχετε. Θα πάμε τώρα σε ένα μακρινό μέλλον, όπου δεν θα υπάρχετε. Τι πιθανότητα έχετε τώρα να ξανα-υπάρξετε; Ακριβώς μηδέν, λόγω παντελούς έλλειψης πληροφορίας. Όμως η πρώτη περίπτωση μας έδειξε πως η μηδενική πιθανότητα δεν εγγυάται και ένα «μηδενικό αποτέλεσμα». Επομένως το ίδιο μπορεί να συμβεί και για το μέλλον. Δηλαδή είναι πιθανόν, αν όχι σίγουρο, πως θα υπάρξετε ξανά…, σε κάποιον απροσδιόριστο κόσμο. Ποιο λογικό λάθος κάνουμε; Τα συμπεράσματα δικά σας. [Υπόδειξη για τη λύση της αντίφασης: Σκεφθείτε μόνον πως το σύστημα αναφοράς της πληροφορίας $\Pi(t)$ είναι κάθε φορά, όχι εσείς όπου αποκλειστικά αναφέρεται το γεγονός «της ύπαρξης», αλλά ένας οσονδήποτε ικανός στη διασυμπαντική έρευνα πληροφορίας (πεπερασμένος όμως) νοήμων οργανισμός που ζει μέσα στον πεπερασμένο χρόνο t. Και ακόμη * $\Pi(t) = -\log_2 p(t)$ bits. Επίσης σκεφθείτε πως λόγω της κβαντικής αβεβαιότητος (θα την αναλύσουμε παρακάτω), κανένα πλήθος φυσικών μετρήσεων, πριν τη γέννησή σας, πραγματικών ή νοητών, και από καμία πεπερασμένη νοημοσύνη (υποκείμενη στους φυσικούς νόμους), δεν μπορεί να εκτιμήσει τίποτε άλλο παρά μόνον την παραπάνω φθίνουσα πιθανότητα. Αν δηλαδή έδινε κάποιος όλα ανεξαιρέτως τα χαρακτηριστικά σας στην ίδια τη φύση, πριν όμως την γέννησή σας, και η ίδια η φύση θα περιείχε μόνον αυτή την ιδανική πιθανότητα $p(t)$, διότι απλά η κβαντική φυσική έδειξε πως στον κόσμο μας αυτό δεν υπάρχει αιτιοκρατία. Για τη λύση του γρίφου σας προτείνω τέλος να ψάξετε (π.χ. στο Internet) για τον μετασχηματισμό της πιθανότητας $p \to 1$ με την μεσολάβηση της μέτρησης (παρατήρησης). Δείτε π.χ. «το παράδοξο της γάτας του Schrödinger», και αναλογισθείτε

ποιος είναι ο τελικός παρατηρητής στο παραπάνω πρόβλημα. Εξετάστε έτσι, μήπως επειδή δεν ελήφθη υπόψη, οδηγηθήκαμε σε μαθηματική αντίφαση. Έχει σχέση αυτός με τη συνείδησή σας; Έχει σχέση αυτός με τον υπαρξιακό σας γρίφο;]

Στη συνέχεια θα αναφερθώ με 2 παραδείγματα στους 2 πυλώνες της σύγχρονης φυσικής: Της σχετικότητας και της κβαντικής φυσικής. Το πρώτο είναι του Αϊνστάιν, και ονομάζεται «παράδοξο των διδύμων». Είναι αυτό που σηματοδότησε την ειδική θεωρία της σχετικότητας, που δημοσίευσε το 1905. Το δεύτερο παράδειγμα είναι «το άτομο της ύλης», που η ερμηνεία της λειτουργικής του δομής ανέδειξε την κβαντική μηχανική. Τα 2 αυτά πόδια της φυσικής πατούν στέρεα σε πειράματα του $20^{ου}$ αιώνα. Ειλικρινά, οι μόνες γνώσεις που χρειάζεστε στην κατανόηση αυτού του Κεφαλαίου 2 είναι **άριστες γνώσεις φυσικής και μαθηματικών Γυμνασίου και λογική**. Όλα τα άλλα αναλύονται και ορίζονται σαν διαδοχικοί κρίκοι μιας αλυσίδας. Όμως το ελάχιστο κέρδος σας θα είναι –πέρα από ένα άριστο εφόδιο των Πανελλήνιων σας εξετάσεων, αν είστε μαθητής Λυκείου– η ικανότητα σας να μελετάτε με ανώτερα μαθηματικά φυσική, οικονομία, και οτιδήποτε απαιτεί βασικές προπτυχιακές γνώσεις. Μια τέτοια εφαρμογή είναι και τα δύο επόμενα κεφάλαια 3 και 4. Η προσπάθεια μου εδώ είναι: «εφαρμογή μεθόδων διδασκαλίας, που κυρίως εμπνεύστηκα στην προσπάθεια μου να καταστήσω στα παιδιά, δύσκολα θηράματα μάθησης, εύκολη λεία». Και η συνταγή που προτείνω είναι μία και μοναδική: «Κάθε φορά που δεν καταλαβαίνετε κάτι, μετά από σκέψη, αγνοήστε το και πάτε στο επόμενο θέμα, θεωρώντας **ότι κάτι πολύ απλό σας διέφυγε**. Στο τέλος, πάρτε τα πράγματα από την αρχή». Θα διαπιστώσετε έτσι –όπως ακριβώς τα νήπια που μαθαίνουν να μιλούν χωρίς τη βοήθεια δασκάλου– ότι «τα γνωρίζατε όλα. Είναι ένας κόσμος ωραίος και μυστικός, και απλά εσείς, σαν μετά από βαθύ ταξίδι, τον θυμηθήκατε!…»

Πριν όμως από αυτό, θα ήθελα να κάνω μια μικρή αναφορά στο καυτό ζήτημα του χρόνου. Ο χρόνος όπως θα δούμε παρακάτω είναι η τέταρτη γεωμετρική διάσταση του κόσμου. Τι θα συνέβαινε λοιπόν αν ήταν η Τρίτη t; Ας το δούμε. Σχεδιάστε ένα σύστημα τριών αξόνων x, y, t κάθετων ανά δύο. Όπως οι τρεις ακμές ενός κύβου που συναντιόνται σε μια κορυφή του. Έστω Ο το σημείο τομής τους (η κορυφή του κύβου) που είναι η αρχή των αξόνων x, y, t. Σχεδιάστε και μια σφαίρα ακτίνας $R = 1$ με κέντρο το Ο και φαντασθείτε ότι χρωματίζετε με κόκκινο την σφαιρική επιφάνεια εμβαδού $4\pi \cdot R^2$. Παρατηρήστε πως δύο τυχαία σημεία x, y του επιπέδου $x - y$ (των αντίστοιχων αξόνων x, y) αντιστοιχούν σε δύο **διαφορετικές χρονικές στιγμές**. Π.χ. τα δύο σημεία

$$(x = 0,\ y = 0{,}5) \quad \text{και} \quad (x = 0{,}2,\ y = 0{,}2)$$

θα αντιστοιχούν στις τιμές

$$t \cong 0{,}866 \quad \text{και} \quad t \cong 0{,}959\,,$$

διότι η εξίσωση της κόκκινης σφαιρικής επιφάνειας είναι

$$t^2 + x^2 + y^2 = R^2 .$$

Στο σκίτσο αυτό ο χώρος έχει 2 διαστάσεις x, y, αντί για τρεις x, y, z που θα έχει στον πραγματικό μας κόσμο. Αντιλαμβάνεστε επομένως πως κάθε θέση x, y, z του χώρου, μέσα στο τετραδιάστατο σύμπαν μας, των δισεκατομμυρίων γαλαξιών, θα αντιστοιχεί και σε μια διαφορετική χρονική στιγμή t. Η σφαιρική αυτή κόκκινη επιφάνεια εικονίζει τον καμπύλο μας «χώρο», με τους «κόκκινους» γαλαξίες πάνω της, και είναι βυθισμένη σε έναν τετραδιάστατο κόσμο. Μόνο που τα κόκκινα στίγματα που συνθέτουν τους κόκκινους γαλαξίες (σαν χαλκομανίες) είναι γεγονότα τοποθετημένα μέσα στον τετραδιάστατο υπερχώρο (4-βράνη). Η κόκκινη επιφάνεια της υπερσφαίρας λέγεται και 3-σφαίρα. Συμπεραίνουμε έτσι πως **δεν υπάρχει παγκόσμιο τώρα**, αφού κάθε κόκκινο στίγμα αντιστοιχεί και σε μια διαφορετική χρονική στιγμή t. Λέμε πως το φως του Ήλιου μας κάνει 8 περίπου λεπτά για να έρθει από τον Ήλιο στη Γη, και επομένως φανταζόμαστε πως ο Ήλιος μας υπάρχει «τώρα» έτσι όπως θα τον δούμε 8 λεπτά μετά. Και ένα αστέρι που απέχει από τη Γη 4 έτη φωτός υπάρχει «τώρα» όπως θα το δούμε έπειτα από 4 έτη κ.ο.κ. Λάθος! Διότι αν επικοινωνούμε με διαστρικούς αστροναύτες, λόγω της πεπερασμένης ταχύτητας του φωτός, δεν θα συμφωνήσουμε ποτέ μαζί τους πως υπήρξε κάποιο κοινό «τώρα» (παρόν) για όλους.

Αν παραδείγματος χάρη κάνουμε την ερώτηση: «που είναι η μάχη του Βατερλό τώρα;» Η απάντηση είναι «πουθενά», αφού η μάχη του Βατερλό (ένα γεγονός) δεν συμβαίνει σε κανένα σημείο της Γης τη στιγμή αυτή. Το λάθος βρίσκεται στο ότι ζητήσαμε τη θέση της σε αυθαίρετη χρονική στιγμή, στο παρόν. Είναι σαν να ρωτάμε ένα μυρμήγκι που περπατά στον πίνακα μιας αίθουσας, γεμάτη με μαθητές, «σε ποια θέση του δισδιάστατου πίνακα βρίσκονται οι μαθητές;». Ο δισδιάστατος πίνακας που αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή «τώρα», του προηγούμενου μας παραδείγματος, δεν περιέχει τους μαθητές. Αυτοί βρίσκονται μπροστά από αυτόν κατά μήκος της τρίτης διάστασης, που αγνοεί η επιφάνεια του πίνακα. Πάνω στον πίνακα (επιπεδοχώρα) βρίσκονται μόνον οι δισδιάστατες σκιές (που έχουν εμβαδόν 2 διαστάσεων, αφού μετριούνται σε m^2) των μαθητών, αν λόγου χάρη ένας προβολέας υπάρχει πίσω από αυτούς. Έτσι ακριβώς, και τα άστρα του ουρανού, είναι οι σκιές από άλλους χρόνους και τόπους, που υπάρχουν πέρα από την τρισδιάστατη αντίληψή μας και εκτείνονται κατά μήκος της τέταρτης τώρα διάστασης του τρισδιάστατου μυρμηγκιού, δηλαδή του ανθρώπου της Γης. Η ερώτηση επομένως που βρίσκεται π.χ. ο Ήλιος τώρα, θα έχει την φυσική απάντηση «πουθενά μέσα στο σύμπαν του τώρα». Το μέλλον και το παρόν βρίσκονται εκεί έξω, αλλού. Γι’ αυτό και ο Einstein διακήρυξε πως το να χωρίζουμε το σύμπαν σε παρόν, παρελθόν και μέλλον είναι ψευδαίσθηση.

Είναι γνωστό πως η κίνησή μας στον χώρο (και στον χρόνο όμως) είναι φαινόμενο

σχετικό. Εδώ θα χρειασθούμε δημιουργική φαντασία. Φαντασθείτε λοιπόν ότι κάνετε θαλάσσιο σκι κινούμενος παράλληλα προς μια ευθύγραμμη ακτή με ταχύτητα 72 χιλιόμετρα την ώρα, δηλαδή μετατοπιζόμενος **ως προς τα δένδρα**, που υπάρχουν κατά μήκος της ακτής, **20 μέτρα κάθε δευτερόλεπτο**. Σας ρυμουλκεί όμως ένα ταχύπλοο που κινείται λίγα μέτρα μπροστά σας. Τι ταχύτητα έχετε ως προς **το σκάφος** αυτό; Η απάντηση είναι 0 μέτρα κάθε δευτερόλεπτο, διότι η απόστασή του από εσάς, στην ευθύγραμμη –όπως την φανταζόμαστε– θαλάσσια πορεία, είναι συνέχεια ίδια. Ούτε το πλησιάζετε, ούτε απομακρύνεστε από αυτό. Δηλαδή άλλη κίνηση κάνετε ως προς ένα δένδρο της ακτής, άλλη ως προς το ταχύπλοο που σας ρυμουλκεί, και άλλη ως προς έναν γλάρο που περνάει από πάνω σας, κ.ο.κ. Δηλαδή η κίνηση σχετίζεται κάθε φορά ως προς το σώμα (ή και ένα σύνολο ακίνητων μεταξύ τους σωμάτων) αναφοράς, που λέγεται «αδρανειακό σύστημα αναφοράς» (inertial system), και εδώ αναφέραμε ήδη τρία τέτοια συστήματα αναφοράς: Την ακτή, το ταχύπλοο που σας ρυμουλκεί, και έναν γλάρο. Δηλαδή αν μετρούσε την ταχύτητά σας, ας πούμε με ένα ταχύμετρο, ένας παρατηρητής σας από την ακτή, θα την εύρισκε $20\,\mathrm{m/s}$, ενώ αν το ίδιο έκανε ο πιλότος του ρυμουλκού σας, θα την εύρισκε $0\,\mathrm{m/s}$. Ποια ταχύτητα θα εκτιμούσε για εσάς ο γλάρος; Εξαρτάται. Αν π.χ. ο γλάρος ερχόταν από μπροστά, πετώντας και αυτός παράλληλα ως προς την ακτή, με $25\,\mathrm{m/s}$ ως προς την ακτή, θα εκτιμούσε ότι εσείς κινείσθε ως προς αυτόν (μετωπικά) με $25\,\mathrm{m/s}+20\,\mathrm{m/s}=45\,\mathrm{m/s}$. Αν όμως ερχόταν ο γλάρος από πίσω (σαν να σας κυνηγούσε) τότε θα εκτιμούσε άλλη ταχύτητα για σας: $25\,\mathrm{m/s}-20\,\mathrm{m/s}=5\,\mathrm{m/s}$. Αλγεβρικά, παίρνοντας υπόψη «ο γλάρος-παρατηρητής σας» σαν θετική κατεύθυνση, την κατεύθυνση της κίνησής σας, θα έβρισκε για τις δύο τελευταίες περιπτώσεις δύο διαφορετικές αλγεβρικές τιμές για την ταχύτητά σας:

$$1^{\eta}\ \text{περίπτωση:}\ \upsilon_1=(+20)-(-25)=+45,\ \text{(θετικής φοράς)}$$

$$2^{\eta}\ \text{περίπτωση:}\ \upsilon_2=(+20)-(+25)=-5,\ \text{(αρνητικής φοράς)}$$

Σε κάθε περίπτωση θα ισχύει ο μετασχηματισμός του Γαλιλαίου:

$$\vec{\upsilon}_{\text{ΣΧΕΤΙΚΗ}}=\vec{\upsilon}-\vec{\upsilon}_{\text{ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΑΝΑΦΟΡΑΣ}} \tag{1.0}$$

Η τελευταία αυτή διανυσματική σχέση θα ισχύει σε κάθε περίπτωση, ακόμη και αν ο γλάρος σας πλησίαζε από τα πλάγια. Επίσης, η σχέση αυτή ισχύει και σε γενικότερη περίπτωση ενός τρισδιάστατου προβλήματος.

Γνωρίζουμε ότι οι ακτίνες φωτός είναι και κύματα και σωματίδια μαζί. Γι' αυτό τις φανταζόμαστε σαν ένα σύνολο από κινούμενα (ίδιας κατεύθυνσης) μικροσκοπικά κυματάκια, τα φωτόνια, ή αλλιώς κβάντα φωτός. Η ταχύτητα των κόκκων αυτών της φωτιάς του Ηράκλειτου μετρήθηκε ίση με 300.000 χιλιόμετρα το δευτερόλεπτο, ή σε προσφιλείς μας μονάδες μέτρησης $c=300.000.000\,\mathrm{m/s}$, ή πιο σύντομα $3\cdot10^8\,\mathrm{m/s}$. Είναι η μεγαλύτερη, και αξεπέραστη, ταχύτητα μεταφοράς ενέργειας στο σύμπαν που

ζούμε. Ας φαντασθούμε τώρα ότι ο γλάρος στο προηγούμενο παράδειγμα είναι η Γη που «πετάει» στο διάστημα με ταχύτητα 30 km/s ως προς τον Ήλιο –που αναπαριστά την ακτή– και εσείς (ο σκιέρ) είστε ένα φωτόνιο που έρχεστε να συναντήσετε τη Γη, κινούμενος μετωπικά σε ένα πρώτο πείραμα, και σε ένα δεύτερο πείραμα από πίσω, σαν να κυνηγάτε τη Γη στην διαστημική της πτήση, εντελώς αντίστοιχα δηλαδή με το θαλάσσιο παράδειγμα. Τι ταχύτητα θα έβρισκε η Γη για εσάς, που αναπαριστάται το φως. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, στην πρώτη περίπτωση ένα εργαστήριο στη Γη θα έβρισκε ταχύτητα:

$$300.000\,\mathrm{km/s} + 30\,\mathrm{km/s} = 300.030\,\mathrm{km/s}$$

και στη δεύτερη περίπτωση:

$$300.000\,\mathrm{km/s} - 30\,\mathrm{km/s} = 299.970\,\mathrm{km/s}.$$

Μια διαφορά 60 km/s δηλαδή. Και όμως, το ιστορικό πείραμα **Michelson-Morley**, το 1881, έδειξε πως **δεν υπάρχει διαφορά στις δύο ταχύτητες**. Το φως που εκπέμπουν τα άστρα είναι ίδια, ακριβώς $c = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$, είτε οι ακτίνες του (τα φωτόνιά τους) μας πλησιάζουν ερχόμενες με αντίθετη κατεύθυνση από την κατεύθυνση κίνησης της Γης ως προς τον Ήλιο, είτε με την ίδια. Το φως έτσι, σε εξαίρεση με όλα τα άλλα κινούμενα υλικά σώματα, μοιάζει να αγνοεί την κίνηση του πλανήτη μας γύρω από τον Ήλιο, κόντρα στην διαίσθηση μας. Μοιάζει δηλαδή να αγνοεί την ύπαρξη του χώρου, αλλά και του χρόνου! Όμως –προσέξτε– τίποτε δεν έχει μεγαλύτερη αξία από **το πείραμα στη φυσική**. Δηλαδή για την επιστήμη αυτή **η διαίσθηση μας** πρέπει να εγκαταλειφθεί, όταν **η πληροφορία ενός νέου πειράματος** το απαιτήσει. Μπορεί σήμερα η αέναα διογκούμενη επιστήμη της φυσικής να αξιοποιεί πολύ μεγάλο μέρος από τα ανώτατα επιτεύγματα της άλλης, θεωρητικής, επιστήμης των μαθηματικών, αλλά ας μην το ξεχνάμε ποτέ: «η φυσική γεννήθηκε και μεγάλωσε με πειράματα και φυσικές παρατηρήσεις». Εδώ και χιλιάδες χρόνια, από τον Γαλιλαίο, τον Κοπέρνικο, τον Αρχιμήδη, τον Ήρωνα, και ίσως πολύ παλαιότερα, η φυσική είναι επιστήμη πειραματική. Βρήκαμε λοιπόν **πειραματικά** το 1881 κάτι πολύ παράξενο, ότι δηλαδή τα σωματίδια ή κβάντα του φωτός, τα φωτόνια, μοιάζει να μην ανήκουν σε κανένα απολύτως **σύστημα αναφοράς** του σύμπαντος κόσμου μας!

Το νέο αυτό πειραματικό δεδομένο, ότι δηλαδή «η ταχύτητα του φωτός (και κατ' επέκταση όλων των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων) στο κενό είναι η ίδια (ίση με c) σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς», αποτέλεσε τη μια από τις δύο αρχές της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας. Η άλλη αρχή είναι πως «η ταχύτητα αυτή c είναι η μεγαλύτερη ταχύτητα με την οποία μπορεί να μεταφερθεί η ενέργεια στο σύμπαν», όπου ζούμε εμείς οι θνητοί. Θα δούμε τώρα τις συναρπαστικές συνέπειες που έχει η πρώτη αρχή στη ροή του χρόνου, αλλά και στην έκταση του χώρου, με μια λέξη στον χωρόχρονο όπου εκτυλίσσονται όλα ανεξαιρέτως τα φυσικά φαινόμενα.

Κεφάλαιο 3

Η Θεωρία της Σχετικότητας

A Ειδική θεωρία της σχετικότητας και Νευτώνεια μηχανική

Αν μπόρεσα και είδα μακριά είναι
επειδή στάθηκα στους ώμους γιγάντων
Ισαάκ Νεύτων

Μερικές ιδιότητες των πινάκων (μητρώων): Έστω ότι το σύμβολο $\tilde{q}$ παριστάνει ένα οποιοδήποτε μέγεθος (μονόμετρο ή διανυσματικό, ή άλλο) ή ακόμη και έναν τελεστή που αναφέραμε στο 2^{o} κεφάλαιο (π.χ. d, $d^2/dt^2=(d/dt)\cdot(d/dt), \int$, κλπ), τότε θα ισχύουν:

α) $$\tilde{q}\cdot\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{q}\cdot\alpha & \tilde{q}\cdot\beta\\ \tilde{q}\cdot\gamma & \tilde{q}\cdot\delta\end{pmatrix}$$

Τα γράμματα του παραπάνω πίνακα 2×2 μπορεί να είναι επίσης οτιδήποτε. Π.χ :

$$d\cdot\begin{pmatrix}x^2+1 & x^3+x^2-1\\ -2 & x^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d(x^2+1) & d(x^3+x^2-1)\\ d(-2) & dx^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x\cdot dx & (3x^2+2x)\cdot dx\\ 0\cdot dx & -x^{-2}dx\end{pmatrix}$$

β) $$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\chi & \psi\\ \zeta & \omega\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha+\chi & \beta+\psi\\ \gamma+\zeta & \delta+\omega\end{pmatrix}$$

Π.χ. $$\begin{pmatrix}2x\cdot dx & dx\\ 0\cdot dx & -dx/x^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-dx & 2\cdot dx\\ dx & dx\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(2x-1)\cdot dx & 3\cdot dx\\ dx & (1-x^{-2})\cdot dx\end{pmatrix}$$

γ) $$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\chi & \psi\\ \zeta & \omega\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\cdot\chi+\beta\cdot\zeta & \alpha\cdot\psi+\beta\cdot\omega\\ \gamma\cdot\chi+\delta\cdot\zeta & \gamma\cdot\psi+\delta\cdot\omega\end{pmatrix}$$

Η γενίκευση των παραπάνω βασικών ιδιοτήτων, που δείχνουν τον τρόπο που γίνονται οι πράξεις πολλαπλασιασμού και πρόσθεσης στα στοιχεία των μητρώων, για μητρώα περισσοτέρων διαστάσεων $N\times N$ είναι προφανής. Π.χ. συμπληρώστε τα παρακάτω «?»:

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \delta & \varepsilon & \zeta\\ \eta & \theta & \kappa\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\chi & \psi & \omega\\ \rho & \varphi & \mu\\ \nu & \lambda & \tau\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\cdot\chi+\beta\cdot\rho+\gamma\cdot\nu & ? & ?\\ ? & \delta\cdot\psi+\varepsilon\cdot\varphi+\zeta\cdot\lambda & ?\\ ? & ? & ?\end{pmatrix}$$

Κλείνοντας τις υπενθυμίσεις αυτές, θα αναφέρουμε ότι ο **ανάστροφος** πίνακας ενός πίνακα (μητρώου) A, που θα συμβολίζεται με A^T, ορίζεται σαν ο πίνακας, που προκύπτει από τον A, αν τις γραμμές του A τις κάνουμε στήλες και επομένως έτσι οι στήλες του A θα γίνουν γραμμές. Π.χ.

$$\begin{pmatrix} t & x & y & z \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Ο ανάστροφος πίνακας θα χρησιμοποιηθεί παρακάτω.

3.1 Ανακεφαλαιώνοντας τα θεμέλια της Φυσικής

Θα ξεκινήσουμε με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, προτείνοντας εδώ και μια παιδαγωγικού τύπου μέθοδο, μια μέθοδο δηλαδή διδασκαλίας του. Ο νόμος αυτός είναι η πλέον θεμελιώδης εξίσωση της κλασικής φυσικής και μας λέει ότι ο ρυθμός μεταβολής της ορμής $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ ως προς τον χρόνο t είναι ίσος (σε κάθε στιγμή t της κίνησης της m) με το διάνυσμα $\vec{f}_{ολ}$ της συνισταμένης όλων των δυνάμεων που δρουν πάνω στη μάζα αυτή:

$$\vec{f}_{ολ} = \frac{d\vec{p}}{dt} \text{ ή } \vec{f}_{ολ} = \frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt} \tag{1.1}$$

Επομένως, οφείλουμε να γνωρίζουμε να βρίσκουμε την συνισταμένη, αφού πρώτα σχεδιάσουμε όλες τις δυνάμεις που δρουν πάνω στην μάζα m και στη συνέχεια τις αναλύσουμε πάνω σε δύο ή και τρις, κάθετους μεταξύ τους, κατάλληλα εκλεγμένους άξονες, δηλαδή εκλέγοντας ένα καρτεσιανό σύστημα αναφοράς που συνιστούν αυτοί οι άξονες. Τι είναι όμως το καρτεσιανό σύστημα αναφοράς; Το καρτεσιανό σύστημα εκτός από έναν, δύο, ή και τρις άξονες, ανά δύο κάθετους μεταξύ τους, περιέχει και τις μονάδες μέτρησης που είναι ένα, δύο, ή τρία, αντίστοιχα **μοναδιαία διανύσματα**. Π.χ για ένα δισδιάστατο πρόβλημα όπου η κίνηση γίνεται συνέχεια πάνω σε ένα επίπεδο, (σε μία δηλαδή Ευκλείδεια όπως λέμε 2-βράνη), η διανυσματική αυτή βάση θα συμβολίζεται:

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2 \text{ , με την ιδιότητα των μέτρων τους: } |\vec{e}_1| = 1 \text{ και } |\vec{e}_2| = 1 \tag{1.2}$$

Όπως θα αναλύσουμε και παρακάτω, με τον όρο **καρτεσιανό σύστημα αναφοράς** θα ενοούμε στα παρακάτω **ένα ορθοκανονικό καρτεσιανό σύστημα**, και όχι ένα πλαγιογώνιο για παράδειγμα, κλπ. Με άλλα λόγια, εδώ θα συμφωνήσουμε να παραλείπουμε την φράση «ορθογώνιο και κανονικό», εννοώντας με τον όρο **καρτεσιανό** αποκλειστι-

κά ένα σύστημα δηλαδή που ορίζεται από κάθετους ανά δύο ευθύγραμμους άξονες και θα έχει σαν διανυσματική βάση τρία μοναδιαία διανύσματα, ένα για κάθε άξονα που εκπροσωπεί και μια διάσταση του χώρου (ή της πολλαπλότητας, όπως αλλιώς ονομάζεται ο χώρος αυτός, N διαστάσεων εν γένει). Δηλαδή με το καρτεσιανό σύστημα θα αντιπροσωπεύουμε και τον εν λόγω χώρο, άσχετα αν μπορούμε να ορίσουμε άπειρα τέτοια συστήματα αξόνων μέσα σ΄ αυτόν.

Ακόμη, τα μοναδιαία αυτά διανύσματα θα παραμένουν σταθερά (εννοείται κατά μέτρο, διεύθυνση και φορά) σε ολόκληρη την περιοχή (της κίνησης), τα σημεία της οποίας προσδιορίζονται με βάση τις συντεταγμένες ως προς το ορθοκανονικό αυτό σύστημα αναφοράς. Εν προκειμένω, για το δισδιάστατο καρτεσιανό μας σύστημα, οι συντεταγμένες θα συμβολίζονται x^1, x^2. Θα προτιμήσουμε εδώ το νέο συμβολισμό x^1, x^2, αντί για τον συνήθη x, y, για τον λόγο της χρήσης της σύμβασης «άθροισης των πάνω και κάτω κοινών (ή αλλιώς των βουβών) δεικτών» του Einstein, όπως θα εξηγήσουμε παρακάτω. Θα υποθέσω βέβαια ότι ο αναγνώστης έχει την ικανότητα να διακρίνει τους άνω δείκτες και να μην τους συγχέει με εκθέτες δυνάμεων. Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα εφαρμογής του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα.

Παράδειγμα: Έστω μάζα $m = 2Kg$ με αρχικές συνθήκες $t_0 = 2\sec$ και

$\vec{\upsilon}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} m/s$ και $\vec{s}_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix} m$, ή αλλιώς $\vec{\upsilon}_0 = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$ και $\vec{s}_0 = 100\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2$

Πάνω στη μάζα αυτή έστω ότι δρα μια χρονικά μεταβλητή συνισταμένη δύναμη:

$$\vec{f}_{o\lambda} = -6t^2\vec{e}_1 + 4t\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -6t^2 \\ 4t \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Τις αρχικές συνθήκες θα τις ονομάζουμε και «φάκελο γέννησης της κίνησης», διότι σε ένα τέτοιο πρόβλημα δεν μας ενδιαφέρει κυρίως πόσα σώματα κινούνται, αλλά πόσες διαφορετικές κινήσεις εμφανίζονται στο πρόβλημα. Δηλαδή η κάθε κίνηση θα προσδιορίζεται από ένα «οικόσημο», έναν ιδιαίτερο δείκτη, που θα τοποθετείται πλάι σε κάθε φυσικό μέγεθος, εκτός από τον χρόνο t που είναι κοινός. Για το παραπάνω παράδειγμα π.χ. θεωρούμε ότι η κίνηση της μάζας γεννήθηκε τη χρονική στιγμή $t_0 = 2\sec$ με την παραπάνω δισδιάστατη ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$ και στη θέση $\vec{s}_0$ του επιπέδου. Ζητάμε να βρούμε τις εξισώσεις της κίνησης αυτής. Οι εξισώσεις της κάθε ιδιαίτερης κίνησης θα είναι πάντοτε δύο. Μία της ταχύτητας και μία της θέσης. Για να λύσω το πρόβλημα θα αντικαταστήσω προφανώς την (1.3) στην (1.1), που είναι ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα, καθώς και την τιμή της μάζας αδράνειας του σώματος:

$$\begin{pmatrix} -6t^2 \\ 4t \end{pmatrix} = \frac{d(2\vec{\upsilon})}{dt} \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} -6t^2 \\ 4t \end{pmatrix} dt = d(2\vec{\upsilon})$$

και επειδή ο πάγιος κανόνας μας λέει ότι «αν και στα δύο μέλη κάνω τις ίδιες ακριβώς πράξεις, (εφαρμόσω δηλαδή με τον ίδιο τρόπο τους ίδιους τελεστές κλπ), η νέα εξίσωση που θα προκύψει θα είναι έγκυρη», διαλέγω να εφαρμόσω τον γνωστό τελεστή ολοκλήρωμα και στα δύο μέλη:

$$\int\begin{pmatrix}-6t^2\\4t\end{pmatrix}dt=\int d(2\vec{\upsilon}) \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix}\int(-6t^2)dt\\ \int(4t)dt\end{pmatrix}=\int d(2\vec{\upsilon})$$

Αντιλαμβάνεστε ότι ο τελεστής ολοκλήρωμα «$\int$» συμπεριφέρεται εδώ, στις πράξεις των πινάκων, όπως και ένας αριθμός, ή όπως και ένας οποιοσδήποτε άλλος τελεστής (όπως αναφέραμε), ή ακόμη όπως η απειροελάχιστη μη μηδενική ποσότητα dt του χρόνου, διότι αυτή είναι ένας (οσονδήποτε) μικρός αριθμός. Επίσης στα προηγούμενα, παρατηρήστε πως οι δύο τελεστές, ολοκλήρωμα και διαφορικό, στο δεύτερο μέλος, ευρισκόμενοι πλάι-πλάι θα «αλληλοδιαγράφονται», αφού με βάση τους ορισμούς τους είναι αντίστροφοι τελεστές, δηλαδή η δράση του ενός (ολοκληρώματος «$\int$») θα ακυρώνει το αποτέλεσμα της δράσης του άλλου τελεστή (διαφορικού «d») που ακολουθεί. Μετά την ολοκλήρωση, βάσει των κανόνων της αόριστης ολοκλήρωσης, θα πρέπει **απαραίτητα** να **προσθέτουμε** πάντα σε κάθε αόριστη ολοκλήρωση και μία σταθερά, οπότε έτσι η τελευταία σχέση γίνεται:

$$\begin{pmatrix}-6\int(t^2)dt\\ 4\int tdt\end{pmatrix}=(2\vec{\upsilon}) \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-6\dfrac{t^3}{3}+c_1\\ 4\dfrac{t^2}{2}+c_2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}(2\vec{\upsilon}) \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix}-t^3+c_1\\ t^2+c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\upsilon^1\\ \upsilon^2\end{pmatrix} \tag{1.4}$$

Βλέπετε και πάλι πως συμβολίσαμε τις δύο συνιστώσες της ταχύτητας, με τη χρήση άνω δεικτών. Για όλες τις συνιστώσες θα χρησιμοποιήσουμε εδώ την ίδια σύμβαση. Η σχέση (1.4) ισχύει για κάθε χρονική στιγμή, επομένως και για τη χρονική στιγμή 2 όπου γεννήθηκε η συγκεκριμένη μας κίνηση. Αντικαθιστώντας έτσι τις αντίστοιχες τιμές t_0, υ_0 από τον «φάκελο γέννησης της κίνησης» (ή αλλιώς τις αρχικές συνθήκες) παίρνουμε:

$$\begin{pmatrix}-2^3+c_1\\ 2^2+c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix}-8+c_1\\ 4+c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix}-8\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$$

ή
$$\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+8\\-3-4\end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-7\end{pmatrix}=\vec{c}$$

Και με αντικατάσταση των δύο σταθερών c_1, c_2 στην σχέση (1.4) λαμβάνουμε την ζητούμενη (τελική) **εξίσωση των ταχυτήτων**:

$$\begin{pmatrix} \upsilon^1 \\ \upsilon^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^3+10 \\ t^2-7 \end{pmatrix} \ , \ \forall t \tag{1.5}$$

Από αυτή, με αντικατάσταση λ.χ. της χρονικής στιγμής t θα βρίσκουμε το διάνυσμα της ταχύτητας. Π.χ. Ποιο είναι αυτό το διάνυσμα $\vec{\upsilon}$ τη χρονική στιγμή $t=3\text{sec}$; Απλούστατα:

$$\vec{\upsilon} = \begin{pmatrix} \upsilon^1 \\ \upsilon^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3^3+10 \\ 3^2-7 \end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} \upsilon^1 \\ \upsilon^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ 2 \end{pmatrix} ,$$

δηλαδή $\vec{\upsilon}(3) = -17\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$

και γενικότερα $\vec{\upsilon}(t) = (-t^3+10)\vec{e}_1 + (t^2-7)\vec{e}_2$

για οποιαδήποτε χρονική στιγμή t.

Έ, αυτή είναι η διανυσματική συνάρτηση της ταχύτητας. Ποιο όμως είναι το μέτρο του διανύσματος «ταχύτητα»; Αφού το σύστημα που εργαζόμαστε είναι καρτεσιανό, στο μυαλό μας θα έρθει αμέσως το **Πυθαγόρειο θεώρημα**:

$$\upsilon = \sqrt{(\upsilon^1)^2 + (\upsilon^2)^2}$$

ή λόγω της (1.5) θα έχουμε

$$\upsilon = \sqrt{(-t^3+10)^2 + (t^2-7)^2} \tag{1.6}$$

Π.χ. στη χρονική στιγμή $t=3\text{sec}$ το σώμα θα κινείται με ταχύτητα μέτρου:

$$\upsilon = \sqrt{(-17)^2 + (2)^2} \quad \text{ή} \quad \upsilon \cong 17{,}117 \text{ m/sec}.$$

Μπορούμε στη συνέχεια από την παρακάτω σχέση (1.7) **ορισμού της ταχύτητας** να βρούμε, με ολοκλήρωση κατά μέλη, και την εξίσωση της θέσης $\vec{s}$, που και αυτή είναι διάνυσμα επίσης:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{s}}{dt} \ , \ \forall t \tag{1.7}$$

Επομένως αντικαθιστώντας την (1.5) στην (1.7) θα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} -t^3+10 \\ t^2-7 \end{pmatrix} = \frac{d\vec{s}}{dt} \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} -t^3+10 \\ t^2-7 \end{pmatrix} dt = d\vec{s} \quad \text{ή} \quad \int \begin{pmatrix} -t^3+10 \\ t^2-7 \end{pmatrix} dt = \int d\vec{s}$$

Κεφάλαιο 4

Η Μηδενική Ενέργεια του Κόσμου και Εκπομπές πάνω από τον Ορίζοντα

Δύο πρωτότυπα άρθρα στην Αστροφυσική

Περίληψη Κεφαλαίου. Στο κεφάλαιο αυτό θα εκθέσω δύο πρωτότυπα άρθρα μου. Το πρώτο δημοσιεύεται για πρώτη φορά στο βιβλίο αυτό και αφορά την κατάρρευση των άστρων με μια εικασία ερμηνείας της σκοτεινής ύλης, και το δεύτερο αφορά ένα νέο πιθανό φαινόμενο πάνω στον ορίζοντα μιας μαύρης τρύπας, που μπορεί να εξηγήσει την κολοσσιαία εκπομπή ακτινοβολίας από τους δίσκους συσσώρευσης ύλης γύρω από αυτές. Μια μυστηριώδη εκπομπή, όπως στον Κύκνο Χ-1, τους κβάζαρς κλπ, που η σύγχρονη αστροφυσική αφήνει ανεπαρκώς ερμηνευμένη. Το δεύτερο αυτό άρθρο περιέχεται σε μια αρχική μορφή στο βιβλίο μου «Be Shadowed by real time», Εκδόσεις Ζήτη. Στην Εισαγωγή που θα προηγηθεί θα παρουσιάσω, με έναν προσωπικό τρόπο, συνοπτικά τις βασικές αρχές και τεχνικές της κβαντικής φυσικής, γνώσεις χρήσιμες και σε σπουδαστές θετικών επιστημών και μηχανικούς.

4.1 Εισαγωγή. Η κβαντική φυσική

Στην εισαγωγή αυτή θα μνημονεύσουμε σύντομα μόνον όσα είναι απαραίτητα για μια εντελώς στοιχειώδη εισαγωγή της συγκλονιστικής αυτής θεωρίας του 20^{ου} αιώνα. Θα επισημάνουμε πρώτα πως είναι λανθασμένη η άποψη που έχουν μερικοί ότι οι επιστημονικές θεωρίες καταρρίπτονται σαν λανθασμένες από άλλες νέες. Το σωστό είναι πως γενικεύονται, επεκτείνονται δηλαδή σε ένα πολύ ευρύτερο φάσμα φυσικών φαινομένων που οι αρχικές θεωρίες δεν μπορούσαν να ερμηνεύσουν στην ολότητα τους. Για παράδειγμα η γενική σχετικότητα αποτελεί γενίκευση της μηχανικής του Νεύτωνα, διότι όταν π.χ. τα πεδία βαρύτητας είναι πολύ ισχυρά ή οι ταχύτητες των σωμάτων προσεγγίζουν την ταχύτητα του φωτός, η παλιά θεωρία του Νεύτωνα δεν συμφωνεί με την σχετικότητα, η οποία όμως στο νέο αυτό φάσμα ακραίων τιμών της βαρύτητας και της ταχύτητας αποδεικνύεται πειραματικά ικανοποιητικά ακριβής, σε αντίθεση με την Νευτώνεια μηχανική που δίνει σωστά αποτελέσματα μόνον στην περιοχή μικρών τιμών. Παρόμοια και η κβαντική φυσική δίνει τα ίδια αποτελέσματα με την κλασική φυσική στην κλίμακα του κλασικού μακρόκοσμου των αισθήσεων, όμως στην κλίμακα του μικρόκοσμου, όπου κατοικούν τα στοιχειώδη σωματίδια, η κλασική φυσική αποτυγχάνει τελείως, διότι αντιφάσκει με τα πειραματικά δεδομένα. Αντίθετα όμως, στον μικρόκοσμο αυτό η κβαντική θεωρία συμφωνεί με το πείραμα, όπως και στον μακρόκοσμο, αφήνοντας παράδοξες προεκτάσεις για την βαθύτερη υπόσταση του φυσικού κόσμου.

Μια βασική αρχή της κβαντικής φυσικής είναι η αρχή της απροσδιοριστίας του Heisenberg. Σύμφωνα με αυτήν κάθε σωματίδιο (μικρό, ή και μεγάλο σαν άστρο) που κινείται με συνολική ενέργεια E και ορμή $\vec{p}$ θα εμφανίζει **απροσδιοριστίες** Δq στην

μέτρηση τόσο της εκάστοτε χωροχρονικής του θέσης $(\vec{r},t)$, όσο και των αντίστοιχων (στην θέση αυτή) τιμών της ορμής-ενέργειας $(\vec{p},E)$, **που συνδέονται** με τις σχέσεις:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta p\cdot\Delta r\geq\hbar/2\\ \Delta E\cdot\Delta t\geq\hbar/2\end{array}\right\}\qquad(1.1)$$

Οι δύο αυτές ανισότητες αποδεικνύονται με βάση τη εξίσωση του Schrödinger, που είχαμε αναφέρει και στην εισαγωγή του $1^{ου}$ Κεφαλαίου:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi+V\Psi\qquad(1.2)$$

Πως προκύπτει η εξίσωση αυτή; Όπως κάθε κβαντική εξίσωση έτσι και η (1.2) θα **προκύπτει από μια σχέση ενέργειας ορμής με αντικατάσταση σε αυτήν των δύο τελεστών της ενέργειας και της ορμής**:

$$\left.\begin{array}{l}E=ih\partial/\partial t\\ \vec{p}=-i\hbar\vec{\nabla}\end{array}\right\}\qquad(1.3)$$

Έτσι, επειδή η παραπάνω εξίσωση του Schrödinger αναφέρεται σε αλληλεπιδράσεις που λαμβάνουν χώρα στον επίπεδο χωρόχρονο της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας, και με χαμηλές ενέργειες σωματιδίων (που κινούνται δηλαδή με μη σχετικιστικές ταχύτητες, όχι δηλαδή παραπλήσιες του φωτός στο κενό), η διαφορική αυτή εξίσωση προκύπτει άμεσα από την κλασική σχέση ενέργειας ορμής της Νευτώνειας φυσικής:

$$E=\frac{1}{2}m\vec{\upsilon}^2+V$$

και αφού $\vec{p}=m\vec{\upsilon}$, θα παίρνει τη μορφή

$$E=\frac{\vec{p}^2}{2m}+V\qquad(1.4)$$

Όπου $E,\vec{p},V$ είναι αντίστοιχα η ολική ενέργεια, η ορμή και η δυναμική ενέργεια του σωματιδίου. Αν αντικαταστήσετε τους τελεστές, με βάση την (1.3), στην (1.4) και πολλαπλασιάσετε από τα δεξιά και τα δύο μέλη της προκύπτουσας εξίσωσης με την άγνωστη κυματοσυνάρτηση Ψ του σωματιδίου (μάζας m, που κινείται μέσα σε ηλεκτρικό δυναμικό που του προσδίδει την δυναμική ενέργεια V κλπ) θα καταλήξετε πολύ εύκολα στην (1.2). Ένας βασικός λόγος που μια τέτοια εξίσωση όπως η (1.2) είναι έγκυρη, είναι πως αυτή έχει σαν λύσεις κυματοσυναρτήσεις του τύπου:

$$\Psi(\vec{r},t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\exp\left[i\left(\frac{\vec{p}_n}{\hbar}\vec{r}-\frac{E_n}{\hbar}t\right)\right]\qquad(1.5)$$

4.2 Άρθρο 1ο : Νεκρά άστρα και σκοτεινή ύλη

Περίληψη. Στο πρωτότυπο αυτό άρθρο θα λογαριάσουμε πρώτα τα γνωστά όρια Chandrasekhar για την κατάρρευση των άστρων, λαμβάνοντας υπ' όψη μας όμως και την γενική σχετικότητα. Στη συνέχεια με βάση τη μέθοδο αυτή θα λογαριάσουμε την ενέργεια μιας μαύρης τρύπας και θα δούμε πως αυτή είναι αρνητική και μάλιστα κατά απόλυτη τιμή μεγαλύτερη από την ισοδύναμη ενέργεια της μάζας ηρεμίας της. Θα αναφερθούμε τέλος σε ένα μοντέλο όπου ολόκληρο το σύμπαν είναι κάτι σαν μεγάλη μαύρη τρύπα που διαστέλλεται διατηρώντας την συνολική της ενέργεια ίση με μηδέν. Θα δούμε πως ένα τέτοιο μοντέλο μπορεί να εξηγήσει την μυστηριώδη σκοτεινή ύλη και ενέργεια, που ανιχνεύονται στο σύμπαν και που δεν αλληλεπιδρούν με καμιά γνωστή μορφή ύλης και ενέργειας ηλεκτρομαγνητικά, παρά μόνον βαρυτικά.

Ας φαντασθούμε ένα σφαιρικό άστρο ακτίνας R με ομογενή κατανομή της μάζας του M. Πόση είναι η κλασική βαρυτική του ενέργεια U; Έστω σ η πυκνότητα ενός τέτοιου άστρου. Για να υπολογίσω την αρνητική βαρυτική δυναμική του ενέργεια, το χωρίζω σε άπειρους νοητούς σφαιρικούς δακτυλίους (φλοιούς) με στοιχειώδες πάχος dr έκαστος. Επομένως ένας τέτοιος που έχει ακτίνα r, θα έχει επιφάνεια $4\pi \cdot r^2$ και μάζα $dM = \sigma \cdot dV = \sigma(4\pi \cdot r^2) \cdot dr$ και άρα στοιχειώδη δυναμική ενέργεια:

$$dU = V_r \cdot dM = -\frac{GM_r}{r} 4\pi\sigma \cdot r^2 \cdot dr = -G\frac{16}{3}\pi^2 r^4 \sigma^2 dr \;\Rightarrow\; \int_0^R dU = -G\frac{16}{3}\pi^2\sigma^2 \int_0^R r^4 \cdot dr$$

ή
$$U = -G\frac{16}{3}\pi^2\sigma^2\frac{R^5}{5} = -G\cdot\left(\sigma\frac{4}{3}\pi\cdot R^3\right)^2\frac{3}{5R}$$

ή
$$U = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} \tag{2.1}$$

Θα περιγράψουμε τώρα το εσωτερικό ενός καταρρέοντος άστρου θεωρώντας ότι περιέχει N πλήθος ελεύθερα σωματίδια, μάζας ηρεμίας m_0 το καθένα. Αυτά στην περίπτωση των λευκών νάνων θα είναι ηλεκτρόνια που θα είναι ισάριθμα περίπου με τα πρωτόνια του, άρα ισάριθμα με το ½ των νουκλεονίων του. Και νετρόνια ίσου προφανώς πλήθους με τα αρχικά νουκλεόνια του άστρου αυτού στην περίπτωση ενός τυπικού άστρου νετρονίων. Επομένως:

$$N = \begin{cases} M/2m_n & \text{όταν } m_0 = m_e \\ M/m_n & \text{όταν } m_0 = m_n \end{cases} \tag{2.2}$$

Όπου m_n, m_e η μάζα του νουκλεονίου (πρωτονίου ή νετρονίου) και ηλεκτρονίου α-

ντίστοιχα. Θα εκτελέσουμε τους υπολογισμούς τόσο για τους λευκούς νάνους όσο και για τα άστρα νετρονίων ταυτόχρονα. Η σχέση (1.47) που βρήκαμε στην Ενότητα 1 μας λέει πως μπορούμε να υποθέσουμε ότι αν χωρίσουμε τον όγκο του άστρου V σε N ίσα μέρη-ιδιόγκους, ώστε μέσα σε κάθε ιδιόγκο να αντιστοιχεί ένα φερμιόνιο m_0, τότε δεν έχουμε παρά να εφαρμόσουμε την αρχή της αβεβαιότητος του Heisenberg για κάθε φερμιόνιο, **αντικαθιστώντας** όμως την σταθερά $\hbar$ με την σταθερά F της σχέσης (1.47):

$$F = \hbar \cdot (3\pi^2)^{1/3} \cong \hbar\sqrt{10}$$

Επομένως έτσι, για κάθε ελεύθερο σωματίδιο m_0 που **εικονικά κατοικεί** μέσα στον **ιδιόγκο του**, αλλά στην πραγματικότητα **κινείται μέσα σε ολόκληρο το σφαιρικό αυτό «κουτί» του καταρρέοντος άστρου**, θα έχουμε:

$$p.a_1 \cong F \;\Rightarrow\; p \cong \frac{F}{a_1}, \tag{2.3}$$

όπου a_1 είναι η διάμετρος του ιδιόγκου.

Θεωρώντας καταρχήν τον χωρόχρονο επίπεδο (Ευκλείδειο) στο εσωτερικό του καταρρέοντος άστρου, μπορούμε να εφαρμόσουμε τις σχέσεις (1.31.β) και (1.31.γ) που βρήκαμε στην 1^{η} Ενότητα του $3^{ου}$ Κεφαλαίου. Πράγματι, ο χωρόχρονος αυτός αποδεικνύεται πως είναι Ευκλείδειος στην περίπτωση ενός λευκού νάνου, όχι όμως και ενός άστρου νετρονίου. Οπότε πρέπει να κάνουμε για την τελευταία περίπτωση διόρθωση με βάση τη γενική θεωρία της σχετικότητας, που εκθέσαμε στο Κεφάλαιο 3. Για ένα σωματίδιο m_0 οι σχέσεις (1.31.γ) και (1.31.β) γράφονται:

$$p = \frac{m_0 \upsilon}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \quad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \tag{2.4}$$

Λύνοντας την πρώτη των (2.4) ως προς υ^2/c^2 βρίσκουμε:

$$\frac{\upsilon^2}{c^2} = \left[1 + \frac{m_0{}^2 c^2}{p^2}\right]^{-1}$$

Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα αυτό στη δεύτερη των δύο σχέσεων (2.4), και τέλος αντικαθιστώντας και την ορμή p με βάση την (2.3) στην προκύπτουσα από την (2.4), παίρνουμε:

4.3 Άρθρο 2ο : Γενική μέθοδος δημιουργίας κβαντικών εξισώσεων σε καμπύλους χωρόχρονους και η ειδική ανάδειξη του φάσματος εκπομπής από τον δίσκο συσσώρευσης ύλης γύρω από μελανές οπές

Περίληψη. Το άρθρο αυτό αποτελεί μια βελτίωση του άρθρου που δημοσίευσα στο βιβλίο μου «Be Shadowed by Real Time», Εκδόσεις Ζήτη, στην Αγγλική γλώσσα το 2005. Θα εξετάσουμε έναν νέο μηχανισμό εκπομπής ενέργειας από ύλη που «κτυπά» τον ορίζοντα μιας μαύρης τρύπας, καθώς η ύλη αυτή καταρρέει. Ο μηχανισμός αυτός θεώρησε στην πρώτη δημοσίευση σαν αιτία τις παλιρροϊκές δυνάμεις βαρύτητας στη γειτονιά του ορίζοντα. Σύμφωνα όμως με τον υπολογισμό του παλιρροϊκού τανυστή τετάρτης τάξης του Riemann, οι δυνάμεις αυτές, παρά το μέγεθος τους, φαίνεται να μην είναι ικανές να διασπάσουν τα καταρρέοντα νουκλεόνια (δηλαδή πρωτόνια και νετρόνια) την στιγμή «πρόσκρουσης» στον ορίζοντα των γεγονότων. Μολονότι το βαρυτικό πεδίο εκεί δεν είναι απαραίτητα ομοιογενές και η παραπάνω διάσπαση-εξαΰλωση των νουκλεονίων μπορεί να πραγματοποιείται χάρις στις παλιρροϊκές δυνάμεις, θα δούμε εδώ πως τα σωματίδια εκπομπής Hawking από τον ορίζοντα διαθέτουν, στο τοπικό σύστημα της περιοχής του, ενέργεια ικανή να προκαλέσει την εξαΰλωση αυτή των νουκλεονίων, δίνοντας έτσι μια εναλλακτική λύση στο αρχικό μας πρόβλημα. Ο μηχανισμός αυτός θα παρουσιασθεί αρχικά με έναν απλούστερο τρόπο από ότι στην πρώτη δημοσίευση του, και στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τη μέθοδο δημιουργίας κβαντικών εξισώσεων σε χώρους τυχαίας καμπυλότητας, που οδηγούν ακριβώς στα ίδια αποτελέσματα. Μέσω του μηχανισμού αυτού μπορεί να εξηγηθεί η λαμπρότητα τόσο της πηγής Κύκνος Χ-1, που φαίνεται να είναι μια μαύρη τρύπα που σχηματίζει δίσκο συσσώρευσης από την ύλη ενός αστέρα γίγαντα συνοδού, όσο και η τεράστια λαμπρότητα διαγαλαξιακών quasars (κβάζαρς), που δείχνουν να κρύβουν γιγάντιες μαύρες τρύπες επίσης.

Οι μαύρες τρύπες μπορούν να θεωρηθούν σαν στοιχειώδη σωματίδια με τεράστια μάζα (και όγκο, διαστάσεων R_S), όπου η Γενική Σχετικότητα συναντά τη Κβαντική Μηχανική. Από την άλλη μεριά, και κατά ένα ανάλογο σκεπτικό, τα άστρα νετρονίων μπορούν να θεωρηθούν σαν γιγάντιοι ατομικοί πυρήνες της τάξης των 10^{58} νετρονίων σε επαφή, δηλαδή μαζικού αριθμού 10^{58} και ατομικού $Z \cong 0$. Ο χωρόχρονος κοντά και κάτω από τον ορίζοντα των γεγονότων είναι κβαντισμένος, υφαίνοντας στην οριακή κλίμακα του Max Planck ένα σκοτεινό κοσμολογικό τείχος, που χωρίζει τον φυσικό κόσμο με τον υπερβατικό κόσμο της συνείδησης μας και των ποιητών. Ένας νοερός ωκεανός που εκτείνεται ως τα σύνορα του Planck.

Αρκετά ηλιακά συστήματα του γαλαξία μας περιέχουν δύο ή και περισσότερους ήλι-

ους, δηλαδή αστέρες. Ένα από αυτά, που είναι διπλό (σύστημα δύο αστέρων) και απέχει από το δικό μας απλό ηλιακό σύστημα (9 πλανητών) περίπου 6.000 έτη φωτός (ε.φ), αποτελείται από έναν υπεργίγαντα αστέρα φασματικού τύπου O9.7, τον HDE 226868 (Gies & Bolton 1986), αλλά και ένα πολύ παράξενο συμπαγές αντικείμενο. Τα δύο μακρινά ουράνια σώματα περιστρέφονται γύρω από το κοινό κέντρο μάζας τους με περίοδο 5,6 ημέρες. Η μάζα του παράδοξου συνοδού είναι μεγαλύτερη από 5 ηλιακές μάζες (του δικού μας Ήλιου) και επομένως θα πρέπει να είναι μαύρη τρύπα. Όλες οι παρατηρήσεις σήμερα αυξάνουν συνεχώς την πιθανότητα αυτή, με βάση τη Γενική θεωρία της σχετικότητας κλπ, κοντά στο 95%. Ο συμπαγής αυτός συνοδός εκπέμπει ισχύ 10^5 φορές μεγαλύτερη από την ισχύ εκπομπής του δικού μας Ήλιου και μάλιστα, αντίθετα με τον δικό μας Ήλιο, που το μεγαλύτερο ποσοστό της ενέργειας ακτινοβολείτε στην ορατή περιοχή (1eV), το συμπαγές αντικείμενο ακτινοβολεί στην περιοχή των ακτίνων X (γύρω στα 10KeV). Επειδή το διπλό αυτό αστρικό σύστημα προβάλλεται στον αστερισμό του Κύκνου, ονομάσθηκε πηγή Κύκνος X-1. Έχουν ανακαλυφθεί πολλές τέτοιες πηγές και η τερατώδης εκπομπή ακτινοβολίας σε μερικές περιπτώσεις αποδίδεται σε πρόσκρουση ύλης σε άστρα νετρονίων, ενώ σε άλλες στην υπερθέρμανση του δίσκου συσσώρευσης μιας μαύρης τρύπας, όπως π.χ. πρέπει να συμβαίνει με την περίπτωση αυτή του Κύκνου X-1.

Είναι γνωστό, πως μερικές ισοδυναμικές επιφάνειες του βαρυτικού πεδίου στα διπλά συστήματα έχουν σχήμα 8, με τους δύο σφαιρικούς δακτυλίους να περιβάλουν τα δύο σφαιρικά άστρα. Όταν όμως συμβεί οι ισοδυναμικές επιφάνειες (επιφάνειες σταθερού βαρυτικού δυναμικού) να τέμνουν την επιφάνεια του ενός από τα δύο αυτά άστρα (συνήθως του γίγαντα – ως προς τον όγκο), τότε θερμή ύλη μπορεί να κινηθεί χωρίς τη δαπάνη έργου από την επιφάνεια του προς τον συνοδό του, γεμίζοντας τον έναν (από τους 2) τρισδιάστατο «λοβό του 8» που περιβάλει τον συνοδό –και λέγεται λοβός του Roche– σχηματίζοντας έναν δίσκο γύρω από τον συνοδό, τον ονομαζόμενο δίσκο συσσώρευσης. Φυσικά, πολύ κοντά στο κέντρο του γίγαντα οι ισοδυναμικές επιφάνειες αποκτούν το κλασικό σφαιρικό τους σχήμα. Όταν ο συνοδός αστέρας του γίγαντα είναι μια εξωτική μαύρη τρύπα, η ύλη του δίσκου συσσώρευσης θερμαίνεται ακτινοβολώντας έτσι ενέργεια. Ο μηχανισμός αυτός υπερθέρμανσης του παράξενου δίσκου συσσώρευσης δεν είναι σήμερα καλά κατανοητός. Στο παρόν άρθρο, μεταξύ άλλων θεμάτων, θα παρουσιασθεί μια πρωτότυπη ερμηνεία που συμφωνεί με όλα τα αστροφυσικά δεδομένα των περιπτώσεων αυτών.

Το γενικευμένο (ή καμπυλόγραμμο) σύστημα συντεταγμένων θα είναι στο άρθρο αυτό το γνωστό (από το προηγούμενο Κεφάλαιο 3) σύστημα σφαιρικής συμμετρίας του Schwarzschild, ενώ το χρησιμοποιούμενο σύστημα των μονάδων θα είναι το απόλυτο σύστημα μονάδων του Planck, που αναφέραμε στην αρχή της Ενότητας 2 του 3ου Κεφαλαίου, εκλέγοντας τις θεμελιώδεις σταθερές $\text{G},\text{c},\hbar,\text{k}$ σαν μονάδες. Τα μεγέθη όμως

Συμπεράσματα

Από τα όσα διατύπωσα στα 2 παραπάνω άρθρα μου, μοιάζει (αν και δεν μου αρέσει να είναι έτσι) οι μαύρες τρύπες να μην είναι απόλυτα μαθηματικές τρύπες, αλλά να έχουν οι ορίζοντες, καθώς και οι «ανωμαλίες-μοναδικότητες» στα κέντρα τους, μια απόκλιση-αβεβαιότητα (από τις ιδανικές τιμές της θέσης σχηματισμού τους) της τάξης μεγέθους της μονάδας του μήκους στο απόλυτο σύστημα μονάδων του Planck ($10^{-35}\,\mathrm{m}$).

Επίσης, ένας παρατηρητής που κάνει ελεύθερη πτώση πάνω από τον ορίζοντα μοιάζει (αν και ούτε αυτό με ενθουσιάζει) να μην διαβεί ποτέ τον ορίζοντα, αλλά μετά από ένα ταξίδι πεπερασμένου χρόνου (π.χ. μερικών κλασμάτων του δευτερολέπτου) να δει π.χ. ότι εκτινάσσεται προς τα έξω (προς το εξωτερικό σύμπαν), μαζί με την υλοενέργεια που παγίδευε για αφάνταστα μεγάλο χρόνο (του εξωτερικού σύμπαντος, αφάνταστα μικρό όμως ιδιοχρόνο της) η σχεδόν μαύρη τρύπα. Τα πράγματα ξεκαθαρίζουν… αν αναμείξουμε την κβαντική φυσική που υπαγορεύει την κβαντική αναγωγή της κυματοσυνάρτησης από τον παρατηρητή, μέσα σε πεπερασμένο χρόνο.

Η σκοτεινή ύλη και η σκοτεινή ενέργεια πιθανόν να σχετίζονται με τις μαύρες τρύπες του σύμπαντος (και έτσι να ερμηνεύονται) στη βάση της συμβατής με την γενική σχετικότητα υπόθεσης, ότι η συνολική ενέργεια του σύμπαντος είναι μηδέν.

Τα φάσματα εκπομπής του δίσκου συσσώρευσης ύλης στις μαύρες τρύπες (αστρικές αλλά και αυτές των κβάζαρς) φαίνεται να μπορούν να εξηγηθούν με έναν μηχανισμό εκπομπής που γενικεύει την εκπομπή ακτινοβολίας Hawking. Αυτός ο μηχανισμός ίσως προσφέρει μερικά νέα στοιχεία για παρατηρησιακό-πειραματικό έλεγχο του, στην κατεύθυνση της αναζήτησης και επιβεβαίωσης των μελανών οπών με τη βοήθεια της φασματογραφίας.