ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

Τόμος Β

ΒΑΣ. ΠΕΤΡΙΔΗ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Αυτός ο τόμος αποτελεί βέβαια συνέχεια του πρώτου τόμου αλλά έχει και σχετική αυτοτέλεια. Πολλές έννοιες περιγράφονται ξανά περιληπτικά έτσι ώστε η ανάγκη για αναφορά στον πρώτο τόμο να περιορίζεται στο ελάχιστο. Έτσι αυτός ο τόμος αποτελεί ένα σχετικά αυτοτελές βιβλίο που πραγματεύεται τη σχεδίαση, κυρίως συστημάτων μιας εισόδου μιας εξόδου, με εξισώσεις κατάστασης και αλγεβρικές μεθόδους. Επίσης αναφέρεται και στην ευστάθεια μη γραμμικών συστημάτων.

Στο Κεφάλαιο 10 συνοψίζονται τα βασικά σχετικά με την παράσταση συστημάτων και ειδικότερα με τη συνάρτηση ή πίνακα μεταφοράς και εξισώσεις κατάστασης. Το κεντρικό θέμα όμως αυτού του Κεφαλαίου είναι οι έννοιες της ελεγξιμότητας, παρατηρησιμότητας και υλοποίησης συστημάτων. Τέλος αναφέρονται και μερικά θέματα σχετικά με την ευστάθεια συστημάτων.

Το Κεφάλαιο 11 αναφέρεται στη γραμμική ανάδραση καταστάσεων και στο γραμμικό τετραγωνικό ρυθμιστή. Το Κεφάλαιο 12 αναφέρεται στην εκτίμηση καταστάσεων με παρατηρητή και στη γραμμική ανάδραση καταστάσεων με παρατηρητή. Το Κεφάλαιο 13 αναφέρεται στην επιλογή συνάρτησης μεταφοράς κλειστού βρόχου και ειδικότερα στις βέλτιστες συναρτήσεις μεταφοράς ως προς το δείκτη του ολοκληρώματος του απόλυτου σφάλματος πολλαπλασιασμένου επί το χρόνο και ως προς το δείκτη του γραμμικού τετραγωνικού ρυθμιστή.

Στο Κεφάλαιο 14 παρουσιάζεται η σχεδίαση με προσαρμογή σε πρότυπο και εδικότερα αναπτύσσονται τα σχήματα ελέγχου γραμμικής ανάδρασης καταστάσεων με αντισταθμιστή σειράς και δύο βαθμών ελευθερίας. Τέλος γίνεται αναφορά σε έλεγχο συστημάτων με ασταθείς πόλους και μηδενικά μη ελάχιστης φάσης. Στο Κεφάλαιο 15 παρουσιάζονται αναλυτικά δύο παραδείγματα σχεδίασης έτσι ώστε να μπορέσει ο αναγνώστης να εμβαθύνει σε μερικά θέματα σχεδίασης.

Το Κεφάλαιο 16 αναφέρεται στην ευστάθεια μη γραμμικών συστημάτων και ειδικότερα στην ευστάθεια κατά Liapunov. Τέλος στο Παράρτημα III δίνεται συνοπτικά για αναφορά η βασική υποδομή σε θέματα γραμμικής

άλγεβρας και θεωρίας πινάκων που απαιτείται για την κατανόηση της ύλης αυτού του βιβλίου.

Θέλω να ευχαριστήσω τις κυρίες Β. Ακριτίδου και Παυλίνα Φράγκου καθώς και τους κυρίους Σταύρο Πετρίδη, Γιώργο Σταμούλη και Άκη Τουλκερίδη για τη βοήθεια που προσέφεραν. Τέλος θέλω να ευχαριστήσω τον επίκουρο Καθηγητή κύριο Θανάση Κεχαγιά για την ανάγνωση τμήματος αυτού του βιβλίου και για τις χρήσιμες υποδείξεις του.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ ΙΙΙ: ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΜΕ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΚΑΙ ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ

10. ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑ, ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

10.1 ΜΕΡΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ 11
10.1.1 Συνάρτηση ή πίνακας μεταφοράς 11
10.1.2 Εξισώσεις κατάστασης 17
10.1.3 Διέγερση ρυθμών 26
10.1.4 Μετασχηματισμός των εξισώσεων κατάστασης 31
10.1.5 Συσχετισμός των εξισώσεων κατάστασης και του πίνακα μεταφοράς 34
10.2 ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑ 38
10.3 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ 49
10.4 ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ 56
10.4.1 Θεωρήματα 56
10.4.2 Κανονικές μορφές υλοποιήσεων 61
10.5 ΜΕΡΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ 72
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 78

11. ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΔΡΑΣΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ

11.1 ΓΕΝΙΚΑ 87
11.2 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΔΡΑΣΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ ΓΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΜΕ 89
Γραμμική ανάδραση καταστάσεων με κέρδος 102
11.3 ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΣ ΡΥΘΜΙΣΤΗΣ 104
11.4 ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ – ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΒΡΟΧΟΥ 107
Βασικές συναρτήσεις μεταφοράς από διάγραμμα βαθμίδων 109

Βασικές συναρτήσεις μεταφοράς από τις εξισώσεις κατάστα-σης ... 111
11.5 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΔΡΑΣΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ ΓΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΕΠΕ ... 119
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ... 123

12. ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΕΣ

12.1 ΓΕΝΙΚΑ ... 131
12.2 ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΕΣ ... 132
12.3 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΔΡΑΣΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ ΜΕ ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΗ ... 143
12.4 ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΟΥ ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΗ ΣΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΒΡΟΧΟΥ ... 155
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ... 162

13. ΕΠΙΛΟΓΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΒΡΟΧΟΥ

13.1 ΓΕΝΙΚΑ ... 167
13.2 ΔΕΙΚΤΕΣ ΑΠΟΔΟΣΗΣ ... 171
13.2.1 Βέλτιστα συστήματα ως προς το δείκτη J_{ITAE} ... 173
13.2.2 Επιλογή συνάρτησης μεταφοράς με βάση το δείκτη J_{LQR} ... 183
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ... 198

14. ΣΧΕΔΙΑΣΗ – ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΣΕ ΠΡΟΤΥΠΟ

14.1 ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ... 203
14.2 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΔΡΑΣΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΑΘΜΙΣΤΗΣ ΣΕΙΡΑΣ ... 217
14.2.1 Γραμμική ανάδραση καταστάσεων με αντισταθμιστή σειράς (ΓΑΚ-ΑΣ) ... 217

14.2.2 Βασικές συναρτήσεις μεταφοράς – Κριτήρια βρόχου 240
14.3 ΣΧΗΜΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΔΥΟ ΒΑΘΜΩΝ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ – 2-DOF 250
14.3.1 Ορισμός και σχεδίαση 250
14.3.2 Βασικές συναρτήσεις μεταφοράς – Κριτήρια βρόχου 264
14.3.3 Έλεγχος συστημάτων με ασταθείς πόλους και μηδενικά μη ελάχιστης φάσης 285
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 287

15. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ

15.1 ΕΛΕΓΧΟΣ ΗΛΕΚΤΡΟΚΙΝΗΤΗΡΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΡΕΥΜΑΤΟΣ 299
15.2 ΕΛΕΓΧΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΑΣΤΑΘΕΙΣ ΠΟΛΟΥΣ ΚΑΙ ΜΗΔΕΝΙΚΑ ΜΗ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΦΑΣΗΣ 313

ΜΕΡΟΣ IV: ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

16. ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

16.1 ΓΕΝΙΚΑ 325
16.2 ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΡΟΧΙΩΝ 326
16.3 ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ – ΟΡΙΣΜΟΙ 333
16.4 ΑΜΕΣΗ ΜΕΘΟΔΟΣ LIAPUNOV 348
16.5 ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΔΙΣΚΟΥ ΚΑΙ POPOV 359
16.6 ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ LIAPUNOV 365
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 368

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ III: ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

III.1 ΓΕΝΙΚΑ 371

III.2 ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ – ΟΡΙΣΜΟΙ 371
III.3 ΒΑΣΕΙΣ..... 382
III.4 ΑΛΛΑΓΗ ΒΑΣΗΣ..... 390
III.5 ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ 394
III.6 ΠΙΝΑΚΕΣ..... 397
III.7 ΒΑΣΙΚΑ ΠΕΡΙ ΠΙΝΑΚΩΝ 402
III.8 ΒΑΘΜΟΣ ΠΙΝΑΚΑ..... 407
III.9 ΟΜΟΙΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ 410
III.10 ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΑΝΥΣΜΑΤΑ..... 411
III.11 ΝΟΡΜΑ ΠΙΝΑΚΩΝ..... 421
III.12 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΙΝΑΚΩΝ 423
III.13 ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ..... 430

10 ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑ, ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφέρουμε τις έννοιες της ελεγξιμότητας και παρατηρησιμότητας συστημάτων καθώς και της υλοποίησης συναρτήσεων μεταφοράς. Θα εξετάσουμε όμως και μερικά ζητήματα παράστασης και ευστάθειας συστημάτων. Η παρουσίαση αυτή έχει χαρακτήρα συνοπτικής αναφοράς αλλά και εμβάθυνσης στα παραπάνω ζητήματα.

10.1 ΜΕΡΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

10.1.1 Συνάρτηση ή πίνακας μεταφοράς

Η έννοια της συνάρτησης μεταφοράς συνήθως εισάγεται μέσω συγκεκριμένων φυσικών συστημάτων με σταθερές παραμέτρους (βλέπε παράγραφο 2.1 του τόμου Α όπου η συνάρτηση μεταφοράς ορίζεται αναφερόμενοι σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα και σε ένα μηχανικό σύστημα). Μπορεί όμως η συνάρτηση μεταφοράς να ορισθεί και κατά τελείως γενικό τρόπο με βάση τη θεωρία συστημάτων. Σε αυτή τη παράγραφο θα συνοψίσουμε τα κύρια σημεία της παραγράφου 2.1 και θα αναφερθούμε και σε μερικά επί πλέον θέματα.

Εδώ θα αναφερθούμε κυρίως σε **γραμμικά συστήματα σταθερών παραμέτρων (ΓΣΣΠ) ή χρονοαμετάβλητα** όπως λέγονται αλλοιώς. Όπως είναι γνωστό οι παράμετροι αυτών των συστημάτων δεν εξαρτώνται από το χρόνο. Γραμμικά συστήματα με παραμέτρους που εξαρτώνται από το χρόνο λέγονται **γραμμικά συστήματα μεταβλητών παραμέτρων (ΓΣΜΠ) ή χρονομεταβλητά.**

Αν η είσοδος ενός **γραμμικού συστήματος μίας εισόδου μίας εξόδου (ΜΕΜΕ)** (στα Αγγλικά ο όρος είναι Single Input Single Output - SISO) με σταθερές παραμέτρους και μηδενικές αρχικές συνθήκες είναι η $u(t)$ και η έξοδος είναι η $y(t)$ τότε , όπως είπαμε, ο λόγος

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\mathscr{L}[y(t)]}{\mathscr{L}[u(t)]} \qquad (10.1.1.1)$$

λέγεται **συνάρτηση μεταφοράς** και ισούται με τον λόγο του Μ/Τ Laplace της εξόδου προς τον Μ/Τ Laplace της εισόδου.

Η συνάρτηση μεταφοράς ενός γραμμικού συστήματος μίας εισόδου μίας εξόδου με σταθερές παραμέτρους έχει γενικά τη μορφή

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \ldots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0} = \frac{N(s)}{D(s)} \qquad (10.1.1.2)$$

Το πολυώνυμο $D(s)$ λέγεται το **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του συστήματος. Η εξίσωση $D(s)=0$ λέγεται η **χαρακτηριστική εξίσωση** του συστήματος. Τέλος ο βαθμός, n, του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $D(s)$ λέγεται **τάξη** του συστήματος. Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $D(s)$ λέγονται **ρυθμοί** του συστήματος.

Αν τα πολυώνυμα $N(s)$ και $D(s)$ είναι **πρώτα μεταξύ τους**, δηλαδή δεν έχουν κοινό παράγοντα, τότε εύκολα φαίνεται ότι οι πόλοι της $H(s)$ είναι οι ρίζες του παρονομαστή $D(s)$ ενώ τα μηδενικά είναι οι ρίζες του αριθμητή $N(s)$. Αν τα πολυώνυμα $N(s)$ και $D(s)$ δεν είναι πρώτα μεταξύ τους τότε όλες οι ρίζες του $D(s)$ γενικά δεν είναι πόλοι της $H(s)$ και όλες οι ρίζες του $N(s)$ γενικά δεν είναι μηδενικά της $H(s)$. Σε αυτή την περίπτωση οι πόλοι είναι υποσύνολο των ρυθμών του συστήματος. Πάντως οι ρίζες του $D(s)$ που δεν είναι και ρίζες του $N(s)$ είναι πόλοι της $H(s)$. Επίσης οι ρίζες της $N(s)$ που δεν είναι και ρίζες της $D(s)$ είναι μηδενικά της $H(s)$. Οι κοινές ρίζες μεταξύ των πολυωνύμων $N(s)$ και $D(s)$ μπορεί να είναι ή

να μην είναι πόλοι ή μηδενικά του συστήματος (βλέπε παράγραφο 2.1). Έστω ρ μία κοινή ρίζα μεταξύ των πολυωνύμων N(s) και D(s). Αν για s =ρ η συνάρτηση μεταφοράς H(s) απειρίζεται τότε η ρ είναι πόλος. Αν για s=ρ η H(s) μηδενίζεται τότε η ρ είναι μηδενικό. Διαφορετικά δεν είναι ούτε πόλος ούτε μηδενικό.

Ανακεφαλαιώνοντας τονίζουμε ότι αν τα πολυώνυμα N(s) και D(s) είναι πρώτα μεταξύ τους **τότε όλοι οι ρυθμοί είναι και πόλοι και αντίστροφα. Με άλλα λόγια το σύνολο των πόλων ισούται με το σύνολο των ρυθμών.**

Η συνάρτηση H(s) λέγεται **αυστηρά κανονική ή μηδενικού ορίου** (ο όρος στα Αγγλικά είναι strictly proper) αν

$$m < n$$

Λέγεται **κανονική ή σταθερού ορίου** (proper) αν

$$m = n$$

Είναι φανερό ότι αν η H(s) είναι αυστηρά κανονική (μηδενικού ορίου) τότε

$$\lim_{s\to\infty} H(s) = 0$$

αν είναι κανονική (σταθερού ορίου) τότε

$$\lim_{s\to\infty} H(s) = c < \infty$$

και αν δεν είναι κανονική, δηλαδή αν $m>n$, τότε

$$\lim_{s\to\infty} H(s) = +\infty \quad \text{ή} \quad -\infty$$

Οι συναρτήσεις μεταφοράς που μας ενδιαφέρουν είναι αυστηρά ή απλά κανονικές. Συναρτήσεις που δεν είναι κανονικές (δηλαδή δεν είναι ούτε μηδενικού ούτε σταθερού ορίου) πρέπει να αποφεύγονται γιατί ενισχύουν τον θόρυβο υψηλών συχνοτήτων. Επίσης πρέπει να επισημανθεί ότι θόρυβος υψηλών συχνοτήτων συχνά ενυπάρχει στα συστήματα ελέγχου.

Αν πάρουμε τον αντίστροφο M/T Laplace της εξόδου, όπου $U(s)=1$ (δηλαδή $u(t)=\delta(t)$: η κρουστική συνάρτηση) προκύπτει

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[H(s)\right] = h(t)$$

όπου $h(t)$ είναι ο αντίστροφος Μ/Τ Laplace της $H(s)$. Δηλαδή αν η είσοδος είναι η κρουστική συνάρτηση η έξοδος ισούται με τον αντίστροφο Μ/Τ Laplace της $H(s)$. Η έξοδος αυτή λέγεται **κρουστική απόκριση**. Με άλλα λόγια ο αντίστροφος Μ/Τ Laplace της $H(s)$ ισούται με την κρουστική απόκριση.

Η κρουστική απόκριση είναι ένα μοντέλο παράστασης γραμμικών συστημάτων με σταθερές παραμέτρους. Επειδή η συνάρτηση μεταφοράς είναι μοναδική, δηλαδή ένα φυσικό σύστημα έχει μία και μοναδική συνάρτηση μεταφοράς (όταν προσδιορισθούν η είσοδος και η έξοδος) και επειδή για κάθε συνάρτηση ο αντίστροφος Μ/Τ Laplace είναι μοναδικός έπεται ότι και η κρουστική απόκριση είναι μοναδική. Αν τώρα πάρουμε τον αντίστροφο Μ/Τ Laplace της Εξ. (10.1.1.2) προκύπτει (βλ. Παράρτημα Ι)

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau \tag{10.1.1.3}$$

Παρατηρούμε ότι **η έξοδος του συστήματος ισούται με τη συνέλιξη της κρουστικής απόκρισης και της εισόδου.**

Η συνάρτηση μεταφοράς δεν είναι πάντοτε ρητή συνάρτηση, δηλαδή λόγος πολυωνύμων ως προς την μεταβλητή Laplace s. Ένα σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς που δεν είναι ρητή συνάρτηση δίνεται στο παράδειγμα 10.1.1.1. Πάντως σε αυτό το βιβλίο ασχολούμαστε κυρίως με συστήματα που η συνάρτηση μεταφοράς τους είναι ρητή, δηλαδή είναι λόγος πολυωνύμων ως προς s.

Παράδειγμα 10.1.1.1

Σύστημα καθυστέρησης κατά τ είναι ένα σύστημα που όταν η είσοδος είναι η $u(t)$ τότε η έξοδος είναι $y(t)=u(t-\tau)$ όπου τ η χρονική καθυστέρηση που εισάγεται. Ένα τέτοιο σύστημα εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι γραμμικό. Η συνάρτηση μεταφοράς του εύκολα αποδεικνύεται ότι ισούται με $e^{-s\tau}$, δηλαδή δεν είναι λόγος πολυωνύμων ως προς s.

Ο ορισμός της συνάρτησης μεταφοράς ως λόγος του Μ/Τ Laplace της εξόδου προς τον Μ/Τ Laplace της εισόδου είναι γενικός και ισχύει και για

συστήματα που η συνάρτηση μεταφοράς τους δεν είναι λόγος πολυωνύμων ως προς s.

Αν το σύστημα δεν είναι σταθερών παραμέτρων τότε η Εξ. (10.1.1.3) γίνεται

$$y(t) = \int_0^t h(t,\tau)\, u(\tau)d\tau \qquad (10.1.1.4)$$

Επίσης για **συστήματα πολλών εισόδων και πολλών εξόδων (ΠΕΠΕ)** (ο όρος στα Αγγλικά είναι Multi Input Multi Output−MIMO) οι Εξ. (10.1.1.3) και (10.1.1.4) γίνονται

$$\mathbf{Y}(t) = \int_0^t \mathbf{h}(t-\tau)\, \mathbf{u}(\tau)d\tau \qquad (10.1.1.5)$$

και

$$\mathbf{Y}(t) = \int_0^t \mathbf{h}(t,\tau)\, \mathbf{u}(\tau)d\tau \qquad (10.1.1.6)$$

αντίστοιχα. $\mathbf{h}(t-\tau)$ και $\mathbf{h}(t, \tau)$ είναι πίνακες κρουστικής απόκρισης.

Για την περίπτωση γραμμικών συστημάτων ΠΕΠΕ με σταθερές παραμέτρους και μηδενικές αρχικές συνθήκες αντί για συνάρτηση μεταφοράς έχουμε πίνακα μεταφοράς,

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{H}(s)\,\mathbf{U}(s) \qquad (10.1.1.7)$$

Η Εξ. (10.1.1.7) μπορεί να γραφεί

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_p(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) & \cdots & H_{1m}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) & \cdots & H_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ H_{p1}(s) & H_{p2}(s) & \cdots & H_{pm}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{bmatrix} \qquad (10.1.1.8)$$

όπου

\`

$$Y(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_p(s) \end{bmatrix}, \quad U(s) = \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{bmatrix} \qquad (10.1.1.9)$$

και

$$\mathbf{H}(s)=\begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) & \cdots & H_{1m}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) & \cdots & H_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ H_{p1}(s) & H_{p2}(s) & \cdots & H_{pm}(s) \end{bmatrix} \qquad (10.1.1.10)$$

Ο πίνακας $\mathbf{H}(s)$ συνδέει το Μ/Τ Laplace των εξόδων με το Μ/Τ Laplace των εισόδων. Γενικά η κάθε έξοδος επηρεάζεται από όλες τις εισόδους.

Από τις παραπάνω εξισώσεις φαίνεται ότι το στοιχείο $H_{rq}(s)$ του πίνακα μεταφοράς $\mathbf{H}(s)$ ισούται με τον λόγο $\dfrac{Y_r(s)}{U_q(s)}$ όταν όλες οι άλλες είσοδοι είναι μηδέν. Δηλαδή το στοιχείο $H_{rq}(s)$ εκφράζει την επίδραση της εισόδου $U_q(s)$ στην έξοδο $Y_r(s)$ όταν οι άλλες είσοδοι είναι μηδέν.

Ο πίνακας μεταφοράς είναι μοναδικός. Δηλαδή ένα σύστημα έχει έναν μόνο πίνακα μεταφοράς. Επειδή όμως μπορεί διαφορετικά φυσικά συστήματα να έχουν τον ίδιο πίνακα μεταφοράς λέμε ότι ο **πίνακας μεταφοράς ορίζει ένα δυναμικό σύστημα**.

΄Ολα τα στοιχεία του $\mathbf{H}(s)$ έχουν αριθμητή και παρονομαστή που είναι πρώτα πολυώνυμα μεταξύ τους.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα μεταφοράς είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών όλων των ελασσόνων οριζουσών του.

Η τάξη ενός πίνακα μεταφοράς ισούται με το βαθμό του χαρακτηριστικού του πολυωνύμου.

Επίσης ένας πίνακας μεταφοράς $\mathbf{H}(s)$ λέγεται **αυστηρά κανονικός** ή **μηδενικού ορίου** αν

$$\lim_{s\to\infty}\mathbf{H}(s) = \text{μηδενικός πίνακας}$$

και **κανονικός** ή **σταθερού ορίου** αν

$$\lim_{s\to\infty}\mathbf{H}(s) = \text{σταθερός πίνακας.}$$

10.1.2 Εξισώσεις κατάστασης

Το κύριο χαρακτηριστικό της συνάρτησης μεταφοράς είναι το ότι είναι **περιγραφή εισόδου - εξόδου**. Δηλαδή συνδέει την έξοδο με την είσοδο ενός συστήματος χωρίς να αναφέρεται καθόλου στο τί συμβαίνει στο εσωτερικό του συστήματος. Είναι όμως γνωστό από την κλασική φυσική ότι για την περιγραφή των μεταβολών μέσα στο σύστημα χρειάζεται η έννοια της **κατάστασης.** Σε αυτήν την υποπαράγραφο θα αναφέρουμε συνοπτικά βασικές έννοιες και εξισώσεις που αναναφέρονται στην παράσταση ενός συστήματος με τις εξισώσεις κατάστασης. Ουσιαστικά θα συνοψίσουμε τα κύρια σημεία της παραγράφου 2.2 και θα αναφερθούμε και σε μερικά επί πλέον θέματα.

Η κατάσταση ορίζεται ως ένα σύνολο μεταβλητών, $x_1(t)$, $x_2(t)$, …, $x_n(t)$ που απαιτείται για τον πλήρη προσδιορισμό της μελλοντικής συμπεριφοράς του συστήματος όταν είναι γνωστές οι τιμές των μεταβλητων $x_1(t_0)$, $x_2(t_0)$,…, $x_n(t_0)$, σε μια χρονική στιγμή $t=t_0$, και των εισόδων του συστήματος. Με άλλα λόγια η κατάσταση του συστήματος την χρονική στιγμή $t=t_0$ περιέχει όλη την πληροφορία που απαιτείται για τον προσδιορισμό των μελλοντικών εξόδων ($t>t_0$) του συστήματος όταν οι είσοδοι του είναι γνωστές για $t>t_0$. Οι μεταβλητές $x_1(t)$, $x_2(t)$, …, $x_n(t)$ λέγονται **μεταβλητές κατάστασης.** Το δε άνυσμα στήλης $\mathbf{X}(t)$

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

λέγεται **άνυσμα κατάστασης.**

Το άνυσμα κατάστασης καθώς και οι μεταβλητές κατάστασης είναι συναρτήσεις του χρόνου. Συχνά όμως, για λόγους συντομίας, δεν εμφανίζεται η εξάρτησή τους από τον χρόνο, οπότε γράφεται $\mathbf{X}$ και x_1, x_2, …, x_n το άνυσμα και οι μεταβλητές κατάστασης αντίστοιχα.

Στη γενική περίπτωση ένα γραμμικό σύστημα με σταθερές παραμέτρους (ΓΣΣΠ) ΠΕΠΕ περιγράφεται, βάσει των μεταβλητών κατάστασης, από ένα σύστημα n διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t), \qquad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}^0 \qquad (10.1.2.1\alpha)$$

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{X}(t) + \mathbf{E}\mathbf{U}(t) \qquad (10.1.2.1\beta)$$

όπου $\mathbf{U}$ και $\mathbf{Y}$ είναι τα ανύσματα εισόδου και εξόδου

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}$$

Η Εξ. (10.1.2.1α) λέγεται **εξίσωση κατάστασης** και η (10.1.2.1β) λέγεται **εξίσωση εξόδου ή μέτρησης.** Συχνά αναφερόμαστε και στις δύο εξισώσεις με τον όρο «εξισώσεις κατάστασης».

Οι πίνακες έχουν διαστάσεις

$$\mathbf{A}:\ n \times n$$
$$\mathbf{B}:\ n \times m$$
$$\mathbf{C}:\ p \times n$$
$$\mathbf{E}:\ p \times m$$

Ο πίνακας **A** λέγεται **πίνακας του συστήματος**, ο **B** λέγεται **πίνακας εισόδου** και ο **C** λέγεται **πίνακας εξόδου ή μέτρησης**. Ο πίνακας **A** χαρακτηρίζει το σύστημα και προσδιορίζει την μεταβολή των μεταβλητών κατάστασης όταν οι είσοδοι είναι μηδέν. Ο πίνακας **B** προσδιορίζει την επίδραση των εισόδων στο σύστημα. Οι δε πίνακες **C** και **E** προσδιορίζουν την επίδραση του ανύσματος κατάστασης και εισόδου στην έξοδο αντίστοιχα.

Για την περίπτωση συστημάτων ΜΕΜΕ η είσοδος και η έξοδος δεν είναι ανύσματα αλλά βαθμωτές συναρτήσεις u(t) και y(t) αντίστοιχα και οι εξισώσεις κατάστασης γράφονται

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}u(t), \qquad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}^0 \qquad (10.1.2.2\alpha)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{X}(t) + \mathbf{E}u(t) \qquad (10.1.2.2\beta)$$

Οι πίνακες για συστήματα ΜΕΜΕ έχουν διαστάσεις

$$\mathbf{A}:\ n \times n$$
$$\mathbf{B}:\ n \times 1$$
$$\mathbf{C}:\ 1 \times n$$
$$\mathbf{E}:\ 1 \times 1$$

Ο n-διάστατος χώρος με συντεταγμένες τις μεταβλητές κατάστασης και τον χρόνο ως παράμετρο είναι ο λεγόμενος **χώρος κατάστασης.** Κάθε σημείο του χώρου αυτού ορίζει μια κατάσταση του συστήματος. Η χρονική μεταβολή της κατάστασης παριστάνεται στον χώρο κατάστασης από μία τροχιά της οποίας οι εξισώσεις είναι οι εξισώσεις κατάστασης με τον χρόνο ως παράμετρο.

Ο χώρος κατάστασης είναι ένας n-**διάστατος γραμμικός χώρος** $(R^n, \circ)$ και έχει ως βάση τα ανύσματα

$$\mathbf{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$$

όπου

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ \ldots\ ,\ \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (10.1.2.3)$$

Ο πίνακας **A** του συστήματος μπορεί να θεωρηθεί ως ο **πίνακας ενός γραμμικού τελεστή** ως προς τη βάση **B** που απεικονίζει το χώρο κατάστασης στο εαυτό του.

Υπενθυμίζουμε ότι η λύση των εξισώσεων κατάστασης είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= \mathbf{\Phi}(t - t_0)\mathbf{X}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}(t - w)\mathbf{B}\mathbf{U}(w)dw = \\ &= \mathbf{\Phi}(t - t_0)\left[\mathbf{X}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}(t_0 - w)\mathbf{B}\mathbf{U}(w)dw \right] \end{aligned} \qquad (10.1.2.4)$$

και

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{\Phi}(t - t_0)\mathbf{X}(t_0) + \mathbf{C}\int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}(t - w)\mathbf{B}\mathbf{U}(w)dw + \mathbf{E}\mathbf{U}(t) \qquad (10.1.2.5)$$

t_0 είναι η αρχική χρονική στιγμή και $t>t_0$ η χρονική στιγμή που μας ενδια-

φέρει. Ο πρώτος όρος της Εξ. (10.1.2.5) είναι η **απόκριση μηδενικής εισόδου** και ο δεύτερος και τρίτος όρος είναι η **απόκριση μηδενικών αρχικών καταστάσεων.** Από αυτή την εξίσωση φαίνεται ότι η συνολική απόκριση ενός συστήματος είναι το άθροισμα της απόκρισης μηδενικής εισόδου και της απόκρισης μηδενικών αρχικών καταστάσεων.

Ο πίνακας

$$\mathbf{\Phi}(t-t_0)=e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \tag{10.1.2.6}$$

λέγεται **πίνακας μετάβασης** και έχει διαστάσεις n×n όπου n ο αριθμός των μεταβλητών κατάστασης. Ο πίνακας μετάβασης είναι συνάρτηση (εκθετική) του πίνακα $\mathbf{A}(t-t_0)$.

Αν θέσουμε $t-t_0=\tau$, ο πίνακας μετάβασης γίνεται

$$\mathbf{\Phi}(\tau)=e^{\mathbf{A}\tau}, \qquad \tau=t-t_0 \tag{10.1.2.7}$$

Επίσης είναι γνωστό ότι

$$\mathbf{\Phi}(s)=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} \tag{10.1.2.8}$$

Ο πίνακας μετάβασης έχει τις εξής ιδιότητες

$$\mathbf{\Phi}(0)=\mathbf{I} \tag{10.1.2.9}$$

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(\tau)=\mathbf{\Phi}(-\tau) \tag{10.1.2.10}$$

$$\mathbf{\Phi}(t_3-t_2)\,\mathbf{\Phi}(t_2-t_1)=\mathbf{\Phi}(t_3-t_1) \tag{10.1.2.11}$$

Όπως είναι γνωστό ο πίνακας μετάβασης είναι λύση της εξίσωσης

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt}=\mathbf{A}\mathbf{X}(t) \tag{10.1.2.12α}$$

Δηλαδή

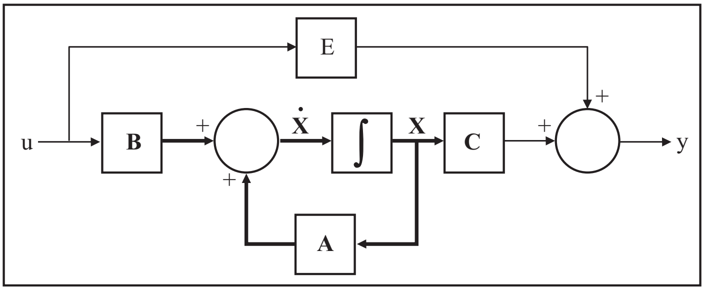
$$\frac{d\mathbf{\Phi}(t)}{dt}=\mathbf{A}\mathbf{\Phi}(t) \tag{10.1.2.12β}$$

Ο πίνακας μετάβασης μπορεί να υπολογισθεί με έναν από τους δύο τρόπους που αναφέρθηκαν στην υποπαράγραφο 2.2.5 του Τόμου Α. Δηλαδή υπολογίζοντας τη λύση της Εξ. (10.1.2.12β) με αρχικές συνθήκες την Εξ.

(10.1.2.9) ή υπολογίζοντας τον αντίστροφο Μ/Τ Laplace της Εξ. (10.1.2.8). Επίσης μπορεί να υπολογισθεί με οποιοδήποτε τρόπο υπολογίζεται μία συνάρτηση πίνακα, όπως βάσει του θεωρήματος του Sylvester κ.λ.π. (βλέπε παράγραφο ΙΙΙ.12 του παραρτήματος ΙΙΙ).

Εξισώσεις κατάστασης και διάγραμμα προσομοίωσης

Το διάγραμμα προσομοίωσης των εξισώσεων κατάστασης της Εξ. (10.1.2.2) φαίνεται στο Σχ.10.1.2.1.



Σχ. 10.1.2.1

Το διάγραμμα προσομοίωσης του Σχ.10.1.2.1 είναι γενικό και έχει μία συμβολική μορφή. Οι έντονες γραμμές συμβολίζουν ότι το σήμα δεν είναι βαθμωτό αλλά ένα άνυσμα. Επίσης το έντονο σύμβολο της ολοκλήρωσης συμβολίζει ότι το ολοκλήρωμα είναι πολλαπλό. Πιο ειδικά το διάγραμμα προσομοίωσης των εξισώσεων κατάστασης σχηματίζεται χρησιμοποιώντας n ολοκληρωτές (όση η τάξη του συστήματος) των οποίων οι είσοδοι και έξοδοι είναι $\dot{x}_i$ και x_i αντίστοιχα για $i=1, \ldots, n$. Οι μεταβλητές $\dot{x}_i$ παράγονται με βάση τις εξισώσεις κατάστασης και η έξοδος παράγεται από την εξίσωση εξόδου.

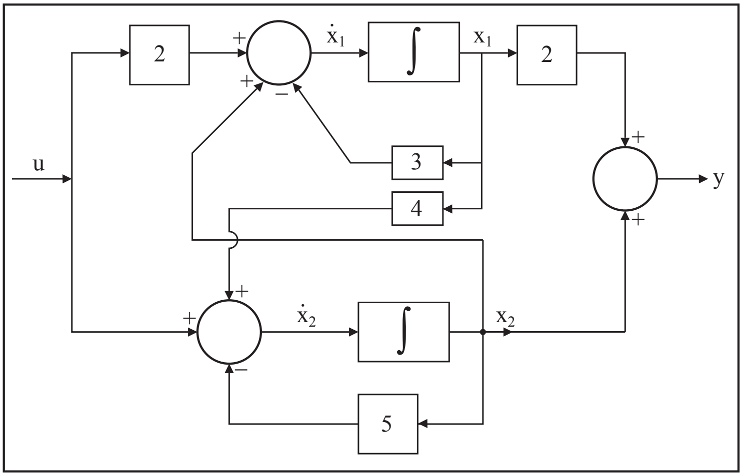
Για παράδειγμα το διάγραμμα προσομοίωσης των εξισώσεων κατάστασης

$$\dot{x}_1 = -3x_1 + x_2 + 2u$$

$$\dot{x}_2 = 4x_1 - 5x_2 + u$$

$$y = 2x_1 + x_2$$

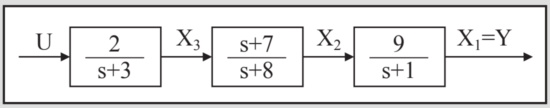
φαίνεται στο Σχ. 10.1.2.2.



Σχ. 10.1.2.2

Στα κεφάλαια 2 και 3 του τόμου Α παρουσιάσθηκε ο υπολογισμός των εξισώσεων κατάστασης κυρίως από το φυσικό σύστημα, επιλέγοντας τις μεταβλητές κατάστασης, αλλά και από τη συνάρτηση μεταφοράς. Στην παράγραφο 10.4.2 θα παρουσιασθούν ορισμένες κανονικές μορφές οι οποίες είναι συγκεκριμένες μορφές εξισώσεων κατάστασης που υπολογίζονται πολύ εύκολα από τη συνάρτηση μεταφοράς. Ο υπολογισμός των εξισώσεων κατάστασης από το διάγραμμα βαθμίδων όταν έχει γίνει η επιλογή των μεταβλητών κατάστασης (και σημειώνονται επάνω στο διάγραμμα) είναι εύκολη και φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα.

Παράδειγμα 10.1.2.1



Σχ. 10.1.2.3

Από το Σχ. 10.1.2.3 προκύπτουν οι εξισώσεις

$$\frac{X_3(s)}{U(s)}=\frac{2}{s+3}$$

$$\frac{X_2(s)}{X_3(s)}=\frac{s+7}{s+8}$$

$$\frac{X_1(s)}{X_2(s)}=\frac{9}{s+1}$$

Παίρνοντας τον αντίστροφο Μ/Τ Laplace προκύπτει

$$\dot{x}_3=-3x_3+2u$$

$$\dot{x}_2+8x_2=\dot{x}_3+7x_3$$

$$\dot{x}_1+x_1=9x_2$$

Λύνουμε ως προς τις παραγώγους $\dot{x}_1,\dot{x}_2,\dot{x}_3$ και προκύπτουν οι εξισώσεις κατάστασης του συστήματος στο Σχ.10.1.2.3,

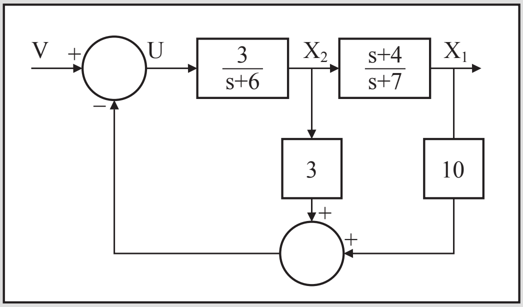
$$\dot{x}_1=-x_1+9x_2$$

$$\dot{x}_2=-8x_2+4x_3+2u$$

$$\dot{x}_3=-3x_3+2u$$

$$y=x_1$$

Παράδειγμα 10.1.2.2



Σχ. 10.1.2.4

Από το Σχ. 10.1.2.4 προκύπτουν οι εξισώσεις

$$\frac{X_2(s)}{U(s)} = \frac{3}{s+6}$$

$$\frac{X_1(s)}{X_2(s)} = \frac{s+4}{s+7}$$

$$U(s) = V(s) - 3X_2(s) - 10X_1(s)$$

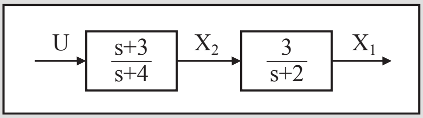
Παίρνοντας τον αντίστροφο Μ/Τ Laplace των παραπάνω εξισώσεων προκύπτει

$$\dot{x}_1 + 7x_1 = \dot{x}_2 + 4x_2$$
$$\dot{x}_2 + 6x_2 = 3u$$
$$u = v - 10x_1 - 3x_2$$

Απαλείφοντας το u και λύνοντας ως προς $\dot{x}_1$ και $\dot{x}_2$ προκύπτει

$$\dot{x}_1 = -37x_1 - 11x_2 + 3v$$
$$\dot{x}_2 = -30x_1 - 15x_2 + 3v$$
$$y = x_1$$

Παράδειγμα 10.1.2.3



Σχ. 10.1.2.5

Από το Σχ.10.1.2.5 προκύπτουν οι εξισώσεις

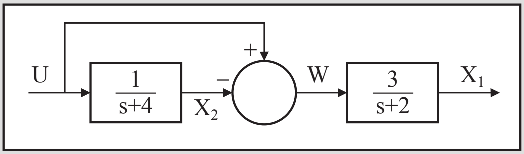
$$\frac{X_2(s)}{U(s)} = \frac{s+3}{s+4}$$

$$\frac{X_1(s)}{X_2(2)} = \frac{3}{s+2}$$

Παίρνοντας τον αντίστροφο Μ/Τ Laplace των παραπάνω εξισώσεων προκύπτει

$$\dot{x}_2 + 4x_2 = \dot{u} + 3u$$
$$\dot{x}_1 + 2x_1 = 3x_2$$

Οι εξισώσεις περιέχουν παράγωγο της εισόδου, $\dot{u}$, άρα δεν μπορούν να τεθούν σε μορφή εξισώσεων κατάστασης. Η πρώτη βαθμίδα του Σχ. 10.1.2.5 μπορεί να ξανασχεδιασθεί όπως φαίνεται στο Σχ. 10.1.2.6.



Σχ. 10.1.2.6

Από το Σχ.10.1.2.6 προκύπτει

$$\frac{X_1(s)}{W(s)} = \frac{3}{s+2}$$
$$W(s) = U(s) - X_2(s)$$
$$\frac{X_2(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+4}$$

Παίρνοντας τον αντίστροφο Μ/Τ Laplace των παραπάνω εξισώσεων προκύπτει

$$\dot{x}_1 + 2x_1 = 3w$$
$$\dot{x}_2 + 4x_2 = u$$
$$w = u - x_2$$

Απαλείφουμε το w και λύνουμε ως προς $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$ οπότε προκύπτουν οι εξισώσεις κατάστασης του συστήματος στο Σχ.10.1.2.6,

$$\dot{x}_1 = -2x_1 - 3x_2 + 3u$$
$$\dot{x}_2 = -4x_2 + u$$

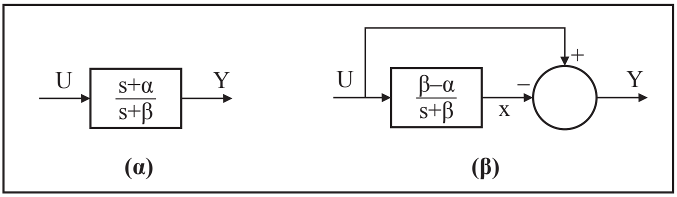
Γενικά όταν υπάρχει βαθμίδα με συνάρτηση μεταφοράς που έχει και μηδενικό και πόλο π.χ.

$$\frac{s+\alpha}{s+\beta}$$

αν πάρουμε ως μεταβλητή κατάστασης την έξοδο αυτής της βαθμίδας μπορεί να εμφανισθεί παράγωγος της εισόδου, $\dot{u}$, οπότε δεν μπορεί αυτή η επιλογή της μεταβλητής κατάστασης να δώσει εξισώσεις κατάστασης στην μορφή της Εξ. (10.1.2.2). Σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση μεταφοράς της βαθμίδας γράφεται

$$\frac{s+\alpha}{s+\beta}=1-\frac{\beta-\alpha}{s+\beta}$$

και σχεδιάζεται το διάγραμμα αυτής της βαθμίδας όπως φαίνεται στο Σχ.10.1.2.7. Παίρνουμε δε ως μεταβλητή κατάστασης την έξοδο της νέας βαθμίδας όπως φαίνεται στο 10.1.2.7β.



Σχ. 10.1.2.7

10.1.3 Διέγερση ρυθμών

Εδώ θα εξετάσουμε την απόκριση μηδενικής εισόδου. Εξετάζουμε το σύστημα

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt}=\mathbf{A}\mathbf{X}(t), \qquad \mathbf{X}(t_0)=\mathbf{X}^0 \tag{10.1.3.1}$$

Για απλούστευση της παρουσίασης θα δεχθούμε ότι οι ιδιοτιμές λ_i του πίνακα του συστήματος, $\mathbf{A}$, είναι διακεκριμένες. Έστω $\mathbf{P}=[\mathbf{p}_1 \;\; \mathbf{p}_2 \;\; \ldots\mathbf{p}_n]$

όπου $\mathbf{p}_i$, $i=1,2,\ldots,n$ είναι τα ιδιοανύσματα του πίνακα **A** που αντιστοιχούν στις n ιδιοτιμές λ_i. Αν $\mathbf{Q}=\mathbf{P}^{-1}$ και $\mathbf{q}_i$ είναι οι n σειρές του **Q** (τα $\mathbf{q}_i$ είναι ανύσματα σειράς) τότε είναι φανερό ότι

$$\mathbf{q}_j\mathbf{p}_i = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{10.1.3.2}$$

Αποδεικνύεται ότι [Barnett 1975, Kailath 1980]

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{q}_i \mathbf{X}^0 e^{\lambda_i t} \mathbf{p}_i \tag{10.1.3.3}$$

Από την Εξ. (10.1.3.3) φαίνεται ότι οι μεταβλητές κατάστασης είναι συναρτήσεις των $e^{\lambda_i t}$. Επίσης από τις Εξ. (10.1.3.2) και (10.1.3.3) φαίνεται ότι αν $\mathbf{X}^0=c\mathbf{p}_\nu$ προκύπτει

$$\mathbf{X}(t) = ce^{\lambda_\nu t}\mathbf{p}_\nu = e^{\lambda_\nu t}\mathbf{X}^0 \tag{10.1.3.4}$$

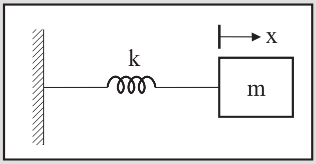
Σε μια τέτοια περίπτωση **λέγεται ότι διεγείρεται ο ν-στός ρυθμός των εξισώσεων** διότι όλες οι μεταβλητές κατάστασης μεταβάλλονται με τον χρόνο σύμφωνα με τον ίδιο εκθετικό νόμο, $e^{\lambda_\nu t}$.

Από τις Εξ. (10.1.3.3) και (10.1.3.4) φαίνεται ότι **στην περίπτωση που η αρχική κατάσταση είναι ανάλογη του ιδιοανύσματος $\mathbf{p}_\nu$ του πίνακα A και η είσοδος του συστήματος είναι μηδενική, διεγείρεται μόνο ο ν-στός ρυθμός των εξισώσεων.** Αντίθετα αν η αρχική κατάσταση είναι τυχούσα τότε (Εξ. (10.1.3.3)) διεγείρονται όλοι οι ρυθμοί.

Ο αριθμός των ρυθμών είναι ίσος με τον αριθμό των ιδιοτιμών αφού κάθε ρυθμός χαρακτηρίζεται και από μία ιδιοτιμή. Αν όλες οι ιδιοτιμές είναι φανταστικές τότε $\lambda_i = j\omega_i$. Οι κυκλικές συχνότητες ω_i λέγονται **φυσικές συχνότητες** του συστήματος.

Παράδειγμα 10.1.3.1

Θα εξετάσουμε το μηχανικό σύστημα του Σχ. 10.1.3.1.



Σχ. 10.1.3.1

Οι διαφορικές εξισώσεις του συστήματος είναι

$$\frac{md^2x}{dt^2} + kx = 0$$

Θέτοντας $x = x_1$ και $\frac{dx}{dt} = \upsilon = x_2$ προκύπτουν οι εξισώσεις κατάστασης

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{k}{m}x_1$$

Εάν $m = 2$ Kg και $k = 200$ N/m προκύπτει ο πίνακας **A**,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του **A** και τα αντίστοιχα ιδιοανύσματα είναι

$$\lambda_1 = j10 \qquad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ j10 \end{bmatrix}$$

και

$$\lambda_2 = -j10 \qquad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -j10 \end{bmatrix}$$

Επίσης

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{j20} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{j20} \end{bmatrix}$$

Βάσει λοιπόν της Εξ. (10.1.3.3) προκύπτει

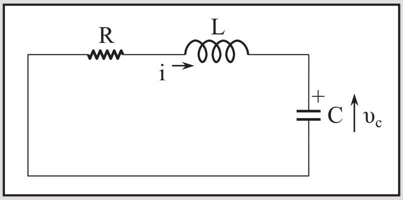
$$x_1(t) = \frac{1}{2}\left[x_1^0 + \frac{1}{j10}x_2^0\right]e^{j10t} + \frac{1}{2}\left[x_1^0 - \frac{1}{j10}x_2^0\right]e^{-j10t}$$

$$x_2(t) = j5\left[x_1^0 + \frac{1}{j10}x_2^0\right]e^{j10t} - j5\left[x_1^0 - \frac{x_2^0}{j10}\right]e^{-j10t}$$

Επειδή οι μεταβλητές x_1 και x_2 είναι πραγματικές δεν μπορεί η αρχική κατάσταση να είναι ανάλογη κάποιου ιδιοανύσματος του **A**. Κατά συνέπεια διεγείρονται και οι δύο ρυθμοί.

Παράδειγμα 10.1.3.2

Εδώ θα εξετασθεί το κύκλωμα του Σχ. 10.1.3.2 όπου $R=5\,\Omega$, $L=1\,H$ και $C=250$ mF.



Σχ. 10.1.3.2

Οι εξισώσεις κατάστασης εύκολα προκύπτουν,

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5 & -1\\ 4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

με $x_1=i$ και $x_2=\upsilon_c$.

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοανύσματα του πίνακα του συστήματος είναι

$$\lambda_1 = -1 \qquad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix}1\\ -4\end{bmatrix}$$

και $$\lambda_2 = -4 \qquad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Επίσης εύκολα προκύπτουν,

$$\mathbf{q}_1 = \frac{-1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{q}_2 = \frac{-1}{3}\begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Έτσι οι μεταβλητές κατάστασης υπολογίζονται βάσει της Εξ. (10.1.3.3),

$$x_1(t) = -\frac{1}{3}(x_1^0 + x_2^0)e^{-t} + \frac{1}{3}(4x_1^0 + x_2^0)e^{-4t}$$

$$x_2(t) = \frac{4}{3}(x_1^0 + x_2^0)e^{-t} - \frac{1}{3}(4x_1^0 + x_2^0)e^{-4t}$$

Αν η αρχική κατάσταση είναι $x_1^0 = 0, x_2^0 = 30$ προκύπτει

$$x_1(t) = -10e^{-t} + 10e^{-4t}$$

$$x_2(t) = 40e^{-t} - 10e^{-4t}$$

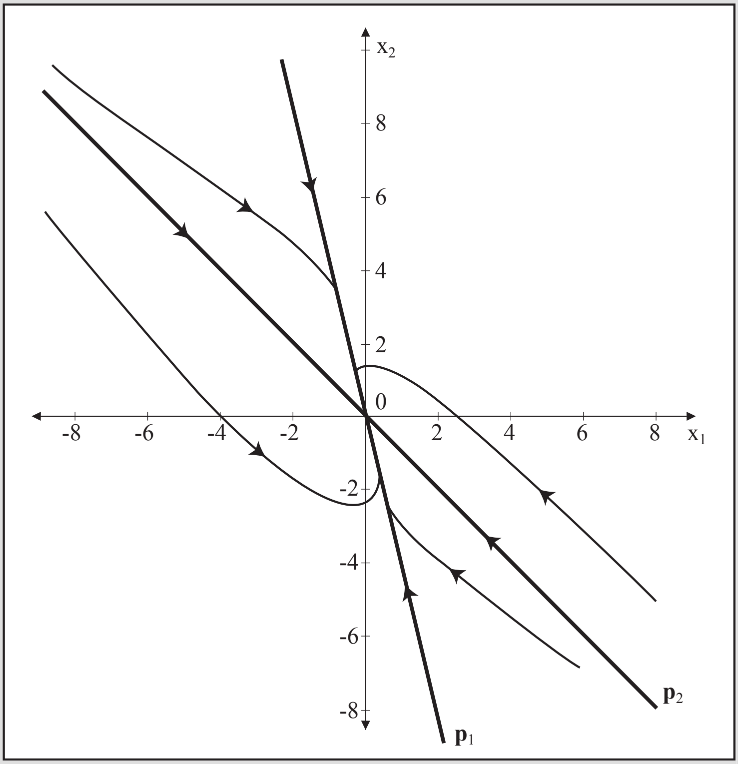
Δηλαδή διεγείρονται και οι δύο ρυθμοί. Ενώ αν η αρχική κατάσταση είναι ανάλογη του ιδιοανύσματος $\mathbf{p}_2$ $(x_1 = -a,\ x_2 = a)$ προκύπτει

$$x_1(t) = -ae^{-4t}$$

$$x_2(t) = ae^{-4t}$$

Δηλαδή διεγείρεται μόνον ο δεύτερος ρυθμός.

Στο Σχ. 10.1.3.3 φαίνονται οι τροχιές των μεταβλητών. Πρέπει να σημειωθεί ότι οι ευθείες στις οποίες κείνται τα ιδιοανύσματα $\mathbf{p}_1$ και $\mathbf{p}_2$ αποτελούν τροχιές. Έτσι αν η αρχική κατάσταση είναι επάνω σε αυτές τις τροχιές η κατάσταση του συστήματος θα κινηθεί σε ευθεία γραμμή προς τη μηδενική κατάσταση.



Σχ. 10.1.3.3

10.1.4 Μετασχηματισμός των εξισώσεων κατάστασης

Σε αυτή την υποπαράγραφο η αντιμετώπιση είναι ενιαία τόσο για συστήματα ΜΕΜΕ όσο και για συστήματα ΠΕΠΕ. Έστω **X** και **X΄** δύο ανύσματα καταστάσεων τα οποία συνδέονται με τη γραμμική σχέση (ο **P** είναι ομαλός και λέγεται πίνακας μετασχηματισμού)

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{X}' \qquad (10.1.4.1)$$

και τα οποία αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικές απεικονίσεις του ίδιου συστήματος. Οι απεικονίσεις αυτές εκφράζονται από τις εξισώσεις κατάστασης

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{AX} + \mathbf{BU} \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{CX} + \mathbf{EU} \end{aligned} \tag{10.1.4.2}$$

για την μία, και

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}' &= \mathbf{A}'\mathbf{X}' + \mathbf{B}'\mathbf{U} \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{C}'\mathbf{X}' + \mathbf{E}'\mathbf{U} \end{aligned} \tag{10.1.4.3}$$

για την άλλη, όπου τα ανύσματα εισόδου και εξόδου είναι και στις δύο περιπτώσεις ίδια.

Οι πίνακες συνδέονται με τις σχέσεις, όπως εύκολα προκύπτει αντικαθιστώντας την Εξ. (10.1.4.1) στην (10.1.4.2),

$$\mathbf{A}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} \tag{10.1.4.4}$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} \tag{10.1.4.5}$$

$$\mathbf{C}' = \mathbf{CP} \tag{10.1.4.6}$$

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} \tag{10.1.4.7}$$

Όπως είναι γνωστό, πίνακες που συνδέονται μέσω της Εξ. (10.1.4.4) λέγονται όμοιοι (βλέπε Παράρτημα ΙΙΙ). Οι εξισώσεις κατάστασης οι οποίες συνδέονται με γραμμικό μετασχηματισμό (Εξ. (10.1.4.1)), όπως οι Εξ. (10.1.4.2) και (10.1.4.3), λέγονται **ισοδύναμες ή αλγεβρικά ισοδύναμες.** Ένα σύστημα ή ένα δυναμικό σύστημα μπορεί να περιγραφεί με άπειρες απεικονίσεις εξισώσεων κατάστασης οι οποίες προκύπτουν από γραμμικούς μετασχηματισμούς του ανύσματος κατάστασης. Έτσι όλες αυτές οι απεικονίσεις θα έχουν πίνακες $\mathbf{A}$ οι οποίοι θα είναι όμοιοι μεταξύ τους. Οι διάφορες εξισώσεις κατάστασης που περιγράφουν ένα δυναμικό σύστημα λέγονται **υλοποιήσεις** του δυναμικού συστήματος (ή της συνάρτησης ή του πίνακα μεταφοράς).

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι οι πίνακες $\mathbf{A}$ των διαφόρων εξισώσεων κατάστασης που προκύπτουν από γραμμικούς μετασχηματισμούς (Εξ. (10.1.4.1)) έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές και το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο, αφού είναι όμοιοι μεταξύ τους.

Έτσι οι ιδιοτιμές και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο **χαρακτηρίζουν το δυναμικό σύστημα** (δηλ. τη συνάρτηση ή τον πίνακα μεταφοράς) και δεν μεταβάλλονται όταν το άνυσμα κατάστασης μιας απεικόνισης υπόκειται σε γραμμικό μετασχηματισμό. Αυτό σημαίνει ότι το δυναμικό σύστημα μπορεί να θεωρηθεί ως ένας **γραμμικός μετασχηματισμός** που απεικονίζει τον χώρο κατάστασης στον εαυτό του. Η δε περιγραφή του γραμμικού μετασχηματισμού ως προς μία βάση B είναι ο πίνακας **A.** Επίσης οι όμοιοι πίνακες **A** και **A′** αποτελούν διαφορετικές απεικονίσεις, ως προς διαφορετικές βάσεις, του ίδιου γραμμικού μετασχηματισμού. Τέλος αυτός ο γραμμικός μετασχηματισμός χαρακτηρίζεται από τις ιδιοτιμές του **A.**

Αυτό που συμβαίνει όταν το άνυσμα κατάστασης υποστεί ένα γραμμικό μετασχηματισμό είναι ότι αλλάζει η βάση στο χώρο κατάστασης. Θεωρούμε ότι η βάση του χώρου κατάστασης είναι η $B=\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, όπου τα $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ ορίζονται από τις εξισώσεις (10.1.2.3). Μετά το μετασχηματισμό που ορίζεται από την Εξ. (10.1.4.1) η νέα βάση του χώρου κατάστασης είναι η $B'=\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \ldots, \mathbf{e}_n'\}$, όπου οι απεικονίσεις των ανυσμάτων της βάσης B′ (βλέπε παράρτημα III), ως προς τη βάση B είναι

$$\mathbf{e}_1' = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{bmatrix}, \ \mathbf{e}_2' = \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ \vdots \\ p_{n2} \end{bmatrix}, \ldots, \ \mathbf{e}_n' = \begin{bmatrix} p_{1n} \\ p_{2n} \\ \vdots \\ p_{nn} \end{bmatrix} \qquad (10.1.4.8)$$

όπου p_{ij} είναι τα στοιχεία του **P**. Τρόποι υπολογισμού του πίνακα **P** αναφέρονται στην υποπαράγραφο 10.4.2.

Αν ο πίνακας μετασχηματισμού, **P**, έχει ως στήλες τα ιδιοανύσματα του **A** (Εξ. (III.79)) τότε από τις εξισώσεις (III.78)-(III.80) και (10.1.4.4) φαίνεται ότι $\mathbf{A}' = \hat{\mathbf{A}}$. Δηλαδή ο πίνακας του συστήματος των νέων εξισώσεων κατάστασης είναι διαγώνιος και τα διαγώνια στοιχεία του είναι οι ιδιοτιμές του συστήματος. Αυτός ο μετασχηματισμός λέγεται **διαγωνιοποίηση** του πίνακα του συστήματος οι δε νέες μεταβλητές κατάστασης συχνά λέγονται **κανονικές** μεταβλητές κατάστασης. Αυτά ισχύουν με την παραδοχή ότι οι ιδιοτιμές του συστήματος είναι διακεκριμένες. Σε αυτή τη μορφή οι εξισώσεις κατάστασης έχουν μία πολύ ενδιαφέρουσα ιδιότητα. **Δεν υπάρχει αλληλεπίδραση** μεταξύ των μεταβλητών κατάστασης. Η δε επίλυση των εξισώσεων είναι πολύ εύκολη. Σε αυτή τη μορφή η βάση του

γραμμικού χώρου κατάστασης αποτελείται από τα ιδιοανύσματα του πίνακα **A**.

Τέλος θα εξετάσουμε τη λύση των εξισώσεων κατάστασης για συστήματα ΜΕΜΕ για την περίπτωση που ο πίνακας **A** είναι διαγώνιος και τα στοιχεία της διαγωνίου προφανώς είναι οι ιδιοτιμές του. Βάσει των εξισώσεων (ΙΙΙ.120) και (ΙΙΙ.78) ο πίνακας μετάβασης προκύπτει

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \tag{10.1.4.9}$$

όπου $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ είναι οι n ιδιοτιμές του πίνακα **A**. Έτσι η λύση της εξίσωσης είναι

$$x_i(t) = e^{\lambda_i (t-t_0)} x_i^0 + \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_i (t-\tau)} \mathbf{B} u(\tau) d\tau \tag{10.1.4.10}$$

για $i = 1, \ldots, n$. x_i^0 είναι η αρχική τιμή της i-στής μεταβλητής.

Από αυτή την εξίσωση φαίνεται ότι δεν υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ των μεταβλητών κατάστασης.

10.1.5 Συσχετισμός των εξισώσεων κατάστασης και του πίνακα μεταφοράς

Η θεωρία του κλασικού αυτομάτου ελέγχου αποτελείται κυρίως από μεθόδους ανάλυσης και σχεδίασης που αναφέρονται στο πεδίο της συχνότητας. Αργότερα, προς το τέλος της δεκαετίας του 1950, το ενδιαφέρον στράφηκε προς την κατεύθυνση των εξισώσεων κατάστασης. Η στροφή αυτή οφειλόταν κατά κύριο λόγο στο ότι προβλήματα της αεροδιαστημικής μπορούσαν να διατυπωθούν και να λυθούν στο πεδίο του χρόνου. Τα μαθηματικά μοντέλα σε αυτές τις περιπτώσεις ήταν γνωστά με ακρίβεια πράγμα που βοηθούσε την εφαρμογή μεθόδων που αναφέρονται στο πεδίο του χρόνου. Για πολλά, όμως, βιομηχανικά προβλήματα ελέγχου δεν ισχύει

το ίδιο πράγμα. Σε αυτή την περίπτωση η χρήση μεθόδων που αναφέρονται στο πεδίο της συχνότητας συχνά είναι πιο πρόσφορη. Σε αυτή την υποπαράγραφο η αντιμετώπιση είναι ενιαία τόσο για συστήματα ΜΕΜΕ όσο και για συστήματα ΠΕΠΕ. Η περιγραφή συστημάτων στο πεδίο της συχνότητας είναι γνωστή και ως περιγραφή **εισόδου-εξόδου.**

Έστω ένα σύστημα με εξισώσεις κατάστασης

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{AX} + \mathbf{BU} \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{CX} + \mathbf{EU} \end{aligned} \qquad (10.1.5.1)$$

Παίρνοντας το μετασχηματισμό Laplace του ανύσματος εισόδου, $\mathbf{U}$, και του ανύσματος εξόδου, $\mathbf{Y}$, καταλήγουμε στα ανύσματα $\mathbf{U}(s)$ και $\mathbf{Y}(s)$ τα οποία αποτελούνται από τους μετασχηματισμούς Laplace των στοιχείων των ανυσμάτων $\mathbf{U}$ και $\mathbf{Y}$ αντίστοιχα.

Ο μετασχηματισμός Laplace των εξισώσεων (10.1.5.1) δίνει

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{X}(0) = \mathbf{AX}(s) + \mathbf{BU}(s) \qquad (10.1.5.2α)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{CX}(s) + \mathbf{EU}(s) \qquad (10.1.5.2β)$$

όπου $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ και $\mathbf{E}$ είναι σταθεροί πίνακες και $\mathbf{X}(0)$ η αρχική κατάσταση.

Από την εξίσωση (10.1.5.2α) προκύπτει,

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\left[\mathbf{X}(0) + \mathbf{BU}(s)\right] \qquad (10.1.5.3)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (10.1.5.3) στην (10.1.5.2β) προκύπτει το άνυσμα $\mathbf{Y}(s)$ ως συνάρτηση των ανυσμάτων $\mathbf{U}(s)$ και $\mathbf{X}(0)$,

$$\mathbf{Y}(s) = \left[\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{E}\right]\mathbf{U}(s) + \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{X}(0) \qquad (10.1.5.4)$$

Ο πρώτος όρος είναι ο μετασχηματισμός Laplace της απόκρισης μηδενικών αρχικών καταστάσεων ενώ ο δεύτερος όρος είναι ο μετασχηματισμός Laplace της απόκρισης μηδενικής εισόδου. Οι Εξ. (10.1.5.3) και (10.1.5.4) μπορούν να προκύψουν επίσης από το μετασχηματισμό Laplace των Εξ. (10.1.2.4) και (10.1.2.5) αντίστοιχα.

Αν $\mathbf{X}(0) = 0$ τότε προκύπτει το άνυσμα $\mathbf{Y}(s)$ ως γινόμενο ενός πίνακα

επί το άνυσμα $\mathbf{U}(\mathrm{s})$. Κατ’ αναλογία με τα συστήματα ΜΕΜΕ ορίζεται ο πίνακας μεταφοράς $\mathbf{H}(\mathrm{s})$,

$$\mathbf{Y}(\mathrm{s}) = \mathbf{H}(\mathrm{s})\mathbf{U}(\mathrm{s}) \qquad (10.1.5.5)$$

Απ’ όπου φαίνεται ότι

$$\mathbf{H}(\mathrm{s}) = \mathbf{C}(\mathrm{s}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{E} \qquad (10.1.5.6)$$

Η εξίσωση (10.1.5.6) συνδέει τον πίνακα μεταφοράς με τις εξισώσεις κατάστασης. Από τις Εξ. (10.1.5.4) και (10.1.5.6) φαίνεται ότι ο πίνακας μεταφοράς περιγράφει την απόκριση μηδενικών αρχικών καταστάσεων.

Θα δείξουμε τώρα ότι **ο πίνακας μεταφοράς παραμένει ο ίδιος για εξισώσεις κατάστασης που προκύπτουν από γραμμικούς μετασχηματισμούς. Δηλαδή για εξισώσεις κατάστασης που οι πίνακες A είναι όμοιοι μεταξύ τους.**

Αναφερόμαστε στις εξισώσεις κατάστασης (10.1.4.2) και (10.1.4.3). Οι δεύτερες προκύπτουν από τις πρώτες μέσω του μετασχηματισμού (10.1.4.1). Άρα οι πίνακές τους συνδέονται όπως στις εξισώσεις (10.1.4.4) -(10.1.4.7). Από την εξίσωση (10.1.5.6) φαίνεται ότι

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(\mathrm{s}) &= \mathbf{C}(\mathrm{s}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{E} \\
\mathbf{H'}(\mathrm{s}) &= \mathbf{C'}(\mathrm{s}\mathbf{I} - \mathbf{A'})^{-1}\mathbf{B'} + \mathbf{E'} = \mathbf{CP}(\mathrm{s}\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})^{-1}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{E} = \qquad (10.1.5.7) \\
&= \mathbf{CP}(\mathrm{s}\mathbf{P} - \mathbf{AP})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{E} = \mathbf{C}(\mathrm{s}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{E} = \mathbf{H}(\mathrm{s})
\end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι **ο πίνακας μεταφοράς είναι ανεξάρτητος από την επιλογή των καταστάσεων του συστήματος. Χαρακτηρίζει ένα σύστημα.** Έτσι ένα φυσικό σύστημα χαρακτηρίζεται από τον πίνακα μεταφοράς. Επειδή όμως μπορεί διαφορετικά φυσικά συστήματα να έχουν τον ίδιο πίνακα μεταφοράς λέμε ότι ο **πίνακας μεταφοράς ορίζει ένα δυναμικό σύστημα**. Έτσι διάφορα φυσικά συστήματα μπορεί να περιγράφονται από το ίδιο δυναμικό σύστημα. Αλλά σε ένα συγκεκριμένο φυσικό σύστημα αντιστοιχεί ένας και μόνον πίνακας μεταφοράς σε αντίθεση με τις εξισώσεις κατάστασης όπου υπάρχει απειρία εξισώσεων κατάστασης που αντιστοιχούν σε ένα φυσικό σύστημα. Στο εξής οι όροι δυναμικό σύστημα και πίνακας μεταφοράς θα θεωρούνται ταυτόσημοι.

Οι διάφορες εξισώσεις κατάστασης ενός δυναμικού συστήματος, όπως είπαμε, λέγονται υλοποιήσεις του δυναμικού συστήματος και όπως θα δούμε αργότερα συνδέονται μεταξύ τους μέσω γραμμικών μετασχηματισμών.

Ανακεφαλαιώνοντας, από τα τέσσερα πιο βασικά είδη μαθηματικών μοντέλων των γραμμικών συστημάτων που αναφέραμε στο κεφάλαιο 2, ο πίνακας μεταφοράς και ο πίνακας κρουστικής απόκρισης είναι μοναδικοί για ένα συγκεκριμένο φυσικό σύστημα, ενώ οι γενικής μορφής διαφορετικές εξισώσεις και οι εξισώσεις κατάστασης δεν είναι μοναδικές.

Από τις εξισώσεις (10.1.5.6) και (ΙΙΙ.95) προκύπτει ότι τα στοιχεία του πίνακα μεταφοράς είναι λόγοι δύο πολυωνύμων. Όλα δε τα στοιχεία του πίνακα μεταφοράς έχουν ως παρονομαστή το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα **A**, με την προϋπόθεση βέβαια ότι δεν θα απλοποιηθούν τυχόν κοινοί όροι του αριθμητή και του παρονομαστή.

Για συστήματα ΜΕΜΕ αν υπολογίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς από την Εξ. (10.1.5.6) προκύπτει

$$\mathrm{H(s)} = \frac{\mathrm{Y(s)}}{\mathrm{U(s)}} = \mathbf{C}\frac{\mathrm{adj}\left[\left(\mathrm{s}\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)\right]}{\left|\mathrm{s}\mathbf{I}-\mathbf{A}\right|}\mathbf{B}+\mathbf{E} =$$

$$= \frac{\mathbf{C}\mathrm{adj}\left[\left(\mathrm{s}\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)\right]\mathbf{B}+\mathbf{E}\left|\mathrm{s}\mathbf{I}-\mathbf{A}\right|}{\left|\mathrm{s}\mathbf{I}-\mathbf{A}\right|} \tag{10.1.5.8}$$

όπου
$$\frac{\mathrm{adj}\left[\left(\mathrm{s}\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)\right]}{\left|\mathrm{s}\mathbf{I}-\mathbf{A}\right|} = (\mathrm{s}\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$$

$\mathrm{adj}\left[\left(\mathrm{s}\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)\right]$ είναι ο ανάστροφος πίνακας των αλγεβρικών συμπληρωμάτων του $\mathrm{s}\mathbf{I}–\mathbf{A}$ και $|\mathrm{s}\mathbf{I}–\mathbf{A}|$ είναι η ορίζουσα του πίνακα $\mathrm{s}\mathbf{I}–\mathbf{A}$**.**

Η ορίζουσα $|\mathrm{s}\mathbf{I}–\mathbf{A}|$, ως γνωστόν, είναι το **χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα** $\mathbf{A}$ το οποίο είναι το ίδιο με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\mathrm{D(s)}$ που ορίσαμε στην υποπαράγραφο 10.1.1 (βλέπε και υποπαράγραφο 2.1.3). Δηλαδή $|\mathrm{s}\mathbf{I}-\mathbf{A}| = \mathrm{D(s)}$ όταν η συνάρτηση μεταφοράς και οι εξισώσεις κατάστασης περιγράφουν το ίδιο σύστημα.

Η εξίσωση $|\mathrm{s}\mathbf{I}–\mathbf{A}|=0$ είναι η **χαρακτηριστική εξίσωση** εκφρασμένη ως συνάρτηση του $\mathbf{A}$ και **οι ρίζες της $|\mathrm{s}\mathbf{I}–\mathbf{A}|$ είναι οι ιδιοτιμές του $\mathbf{A}$** και

είναι ίσες με τους ρυθμούς του συστήματος που ορίσαμε στην υποπαράγραφο 10.1.1 και 2.1.3. Η ορίζουσα $|s\mathbf{I}-\mathbf{A}|$, όπως φαίνεται από την Εξ. (10.1.5.8), είναι στον παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς. **Αν δεν υπάρχουν κοινοί όροι ανάμεσα στον παρονομαστή, $|s\mathbf{I}-\mathbf{A}|$, και στον αριθμητή,** $\mathbf{C}\mathrm{adj}\left[\left(s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)\right]\mathbf{B}+\mathbf{E}\left|s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right|$**, της συνάρτησης μεταφοράς τότε,** όπως είπαμε και στην υποπαράγραφο 10.1.1 και 2.1.3, **όλες οι ρίζες της $|s\mathbf{I}-\mathbf{A}|$, δηλαδή όλες οι ιδιοτιμές του $\mathbf{A}$, είναι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς**. Αν υπάρχουν κοινοί όροι τότε οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς είναι υποσύνολο των ιδιοτιμών του πίνακα $\mathbf{A}$. Σε αυτήν την περίπτωση η απόκριση μηδενικών αρχικών καταστάσεων η οποία περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς εξαρτάται μόνον από τους πόλους της συνάρτησης μεταφοράς (οι οποίοι είναι υποσύνολο των ιδιοτιμών του πίνακα **A**) ενώ η απόκριση μηδενικής εισόδου από όλες τις ιδιοτιμές του πίνακα **A** (βλέπε Εξ. (10.1.5.4)- (10.1.5.6) και παράδειγμα 10.5.1).

Τάξη ενός συστήματος είναι η τάξη του μαθηματικού του μοντέλου. Έτσι για ένα σύστημα που απεικονίζεται από εξισώσεις κατάστασης η τάξη του είναι ίση με τον αριθμό εξισώσεων κατάστασης, ή με άλλα λόγια, είναι ίση με τον αριθμό των μεταβλητών κατάστασης. Επίσης η τάξη ενός συστήματος είναι ίση με το βαθμό του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του.

10.2 ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑ

Ορισμός

Σε αυτή τη παράγραφο θα ασχοληθούμε με μία έννοια η οποία είναι πολύ βασική για τη θεωρία των γραμμικών συστημάτων. Θα ασχοληθούμε με την έννοια της ελεγξιμότητας η οποία αναφέρεται στο κατά πόσο ένα σύστημα μπορεί να ελεχθεί. Η παρουσίαση που θα ακολουθήσει είναι κοινή και για συστήματα ΜΕΜΕ και για συστήματα ΠΕΠΕ.

Σε πολλά προβλήματα ελέγχου εμφανίζεται το ερώτημα κατά πόσο ένα σύστημα μπορεί να ελεχθεί μέσω των εισόδων του. Μία ιδιότητα ενός συστήματος που δίνει απάντηση, από μία συγκεκριμένη σκοπιά, στο παραπάνω ερώτημα είναι η **ελεγξιμότητα**. Η έννοια της ελεγξιμότητας, όπως ορίζεται εδώ, αναφέρεται στις εξισώσεις κατάστασης,

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{AX}(t) + \mathbf{BU}(t) \qquad (10.2.1α)$$

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{CX}(t) + \mathbf{EU}(t) \qquad (10.2.1β)$$

Η εξίσωση κατάστασης (10.2.1α) λέγεται **ελέγξιμη** αν για οποιαδήποτε χρονική στιγμή t_0, οποιαδήποτε αρχική κατάσταση $\mathbf{X}(t_0)$, και οποιαδήποτε κατάσταση $\mathbf{X}_1$ υπάρχει ένα άνυσμα εισόδου $\mathbf{U}(t)$ τέτοιο ώστε μέσα σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα $[t_0, t_1]$, $t_1 > t_0$, μεταφέρεται η κατάσταση από την αρχική τιμή $\mathbf{X}(t_0)$ στην τελική $\mathbf{X}(t_1) = \mathbf{X}_1$. Αν δεν συμβαίνει αυτό τότε η εξίσωση κατάστασης **δεν είναι ελέγξιμη**.

Πρέπει να σημειωθεί ότι ο ορισμός είναι πολύ γενικός. Καλύπτει κάθε κατάσταση. Δηλαδή αν υπάρχει έστω και μία περίπτωση που δεν υπάρχει είσοδος τέτοια ώστε να μεταφέρει την κατάσταση από $\mathbf{X}(t_0)$ σε $\mathbf{X}(t_1)$, η εξίσωση κατάστασης δεν είναι ελέγξιμη. Επίσης η μόνη απαίτηση είναι η ύπαρξη εισόδου που να μεταφέρει την κατάσταση σε πεπερασμένο χρόνο από $\mathbf{X}(t_0)$ σε $\mathbf{X}(t_1)$. Δεν υπάρχει κανένας περιορισμός ως προς το μέγεθος της εισόδου, το είδος της τροχιάς της κατάστασης ή το μέγεθος του απαιτούμενου (πεπερασμένου) χρονικού διαστήματος.

Η λύση της Εξ. (10.2.1α) μπορεί να γραφεί (προκύπτει από την Εξ. (10.1.2.4) και την Εξ. (10.1.2.11))

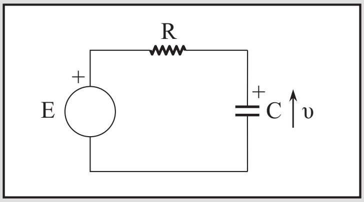
$$\mathbf{\Phi}(t_1 - t_0)\left[\left[\mathbf{X}(t_0) - \mathbf{\Phi}(t_0 - t_1)\mathbf{X}(t_1)\right] + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{\Phi}(t_0 - w)\mathbf{BU}(w)dw\right] = 0 \qquad (10.2.2)$$

Συγκρίνοντας την Εξ. (10.2.2) με την Εξ. (10.1.2.4) φαίνεται ότι στην Εξ. (10.2.2) ως αρχική κατάσταση μπορεί να θεωρηθεί η $\mathbf{X}(t_0) - \mathbf{\Phi}(t_0 - t_1)\mathbf{X}(t_1)$ και ως τελική κατάσταση το μηδέν. Γι αυτό σε πολλούς ορισμούς η τελική κατάσταση θεωρείται ότι είναι η μηδενική κατάσταση.

Για να εξετασθεί αν μία εξίσωση κατάστασης είναι ελέγξιμη πρέπει να διαπιστωθεί αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του ορισμού, πράγμα που δεν είναι πάντα εύκολο. Διαφορετικά μπορεί να εξετασθεί αν το άνυσμα εισόδου επιδρά σε όλες τις μεταβλητές κατάστασης. Αν δεν επιδρά έστω και σε μία μεταβλητή τότε η εξίσωση δεν είναι ελέγξιμη. Αν επιδρά σε όλες τότε δεν μπορεί κανείς να αποφανθεί χωρίς περαιτέρω μελέτη.

Παράδειγμα 10.2.1

Να εξετασθεί η ελεγξιμότητα του συστήματος που φαίνεται στο Σχ. 10.2.1.



Σχ. 10.2.1

Το σύστημα του σχήματος περιγράφεται από την παρακάτω διαφορική εξίσωση,

$$E = RC\frac{d\upsilon}{dt} + \upsilon$$

της οποίας η λύση είναι

$$\upsilon(t) = E(1 - e^{-t/RC}) + \upsilon(0)e^{-t/RC}$$

όπου η είσοδος, E, θεωρείται σταθερή.

Αν η τελική κατάσταση είναι $\upsilon(t_1)$ για τη χρονική στιγμή t_1 και η αρχική $\upsilon(0)$ για $t = 0$, η είσοδος προκύπτει,

$$E = \frac{\upsilon(t_1) - \upsilon(0)e^{-t_1/RC}}{1 - e^{-t_1/RC}}$$

Δηλαδή αν η είσοδος έχει την τιμή που προκύπτει από την προηγούμενη εξίσωση τότε η κατάσταση μεταφέρεται από την κατάσταση $\upsilon(0)$, $t_0 = 0$, στην κατάσταση $\upsilon(t_1)$ μέσα σε χρονικό διάστημα $[0, t_1]$. Επίσης φαίνεται ότι αν απαιτείται η μεταφορά της κατάστασης να γίνει πολύ γρήγορα, δηλαδή το t_1 να είναι πολύ μικρό, ο παρονομαστής της προηγούμενης εξίσωσης θα είναι πολύ μικρός και κατά συνέπεια η τιμή της εισόδου θα είναι μεγάλη. Όσο πιο γρήγορα απαιτείται να γίνει η μεταφορά της κατάστασης τόσο πιο μεγάλη είσοδος απαιτείται.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha - 1 & -1 \\ -2\alpha & -\alpha \end{bmatrix}$$

του οποίου οι ιδιοτιμές είναι α και $-\alpha - 1$.

Συστήματα ΠΕΠΕ

Για την περίπτωση ΓΣΣΠ ΠΕΠΕ ισχύουν όσα λέχθηκαν για ΓΣΣΠ ΜΕΜΕ με τη διαφορά ότι εδώ όταν μιλάμε για είσοδο και έξοδο εννοούμε το άνυσμα εισόδου και το άνυσμα εξόδου. Επίσης όταν μιλάμε για φραγμένη είσοδο ή έξοδο εννοούμε ότι κάθε στοιχείο του ανύσματος εισόδου ή κάθε στοιχείο του ανύσματος εξόδου είναι φραγμένο.

Επίσης τα θεωρήματα και οι προτάσεις που αναφέρθηκαν παραπάνω για ΓΣΣΠ ΜΕΜΕ ισχύουν και για ΓΣΣΠ ΠΕΠΕ με τη διαφορά ότι όπου απαιτείται ευστάθεια της συνάρτησης μεταφοράς εδώ απαιτείται ευστάθεια του πίνακα μεταφοράς.

Ένας πίνακας μεταφοράς είναι ευσταθής αν και μόνον αν όλοι οι πόλοι όλων των στοιχείων του έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΟΜΑΔΑ Α

10-1) Να λυθεί η εξίσωση

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{X}, \quad \mathbf{X}^0 \neq 0 .$$

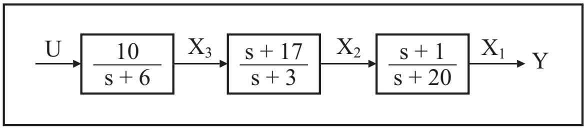
χρησιμοποιώντας την εξίσωση (10.1.3.3).

10-2) Να λυθεί η εξίσωση

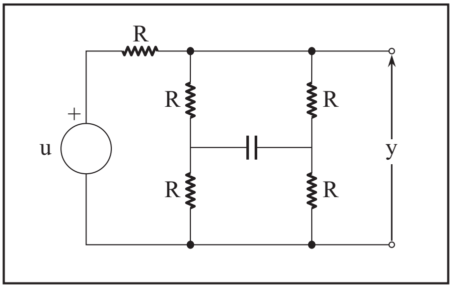
$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{X} .$$

και να υπολογισθεί μία αρχική κατάσταση ώστε να διεγερθεί ένας μόνο ρυθμός. Επίσης να σχεδιασθεί η τροχιά των μεταβλητών για αυτήν την αρχική κατάσταση.

10-3) Να υπολογισθούν οι εξισώσεις κατάστασης του συστήματος που φαίνεται στο σχήμα.



10-4) Να δειχθεί ότι το σύστημα του σχήματος δεν είναι ελέγξιμο.



Να εξηγηθεί η φυσική σημασία της μη ελεγξιμότητας και να αιτιολογηθεί. Είναι το σύστημα παρατηρήσιμο;

10-5) Να εξετασθεί η ελεγξιμότητα του συστήματος του παραδείγματος 2.2.4.1. Επίσης να υπολογισθεί μία είσοδος που θα μεταφέρει την κατάσταση από την τιμή $\mathbf{X}^0 = \begin{bmatrix} 50 \\ 1 \end{bmatrix}$ τη χρονική στιγμή t=0 στην κατάσταση $\mathbf{X}^1 = \begin{bmatrix} 200 \\ 3 \end{bmatrix}$ τη χρονική στιγμή t=15.

10-6) Για το παράδειγμα 10.2.3 αν $R_1C_1 = 1s$, $R_2C_2 = 2s$ και $\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

να υπολογισθεί μία είσοδος από την Εξ. (10.2.4) ώστε $\mathbf{X}(1)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$.

10-7) Να εξετασθεί η ελεγξιμότητα των εξισώσεων

α) $\dot{\mathbf{X}}=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&0&4\\-1&-2&0\end{bmatrix}\mathbf{X}+\begin{bmatrix}1&2\\0&1\\2&0\end{bmatrix}\mathbf{U}$

β) $\dot{\mathbf{X}}=\begin{bmatrix}-2&1\\0&-3\end{bmatrix}\mathbf{X}+\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\mathrm{u}$

γ) $\dot{\mathbf{X}}=\begin{bmatrix}1&6&7\\0&10&2\\-1&-5&-9\end{bmatrix}\mathbf{X}+\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}\mathrm{u}$

δ) $\dot{\mathbf{X}}=\begin{bmatrix}1&1&-3&-1\\1&4&1&2\\-3&0&1&0\\2&1&0&5\end{bmatrix}\mathbf{X}+\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\\1&2\\0&-1\end{bmatrix}\mathbf{U}$.

10-8) Να εξεταστεί η ελεγξιμότητα των συστημάτων των παραδειγμάτων του Κεφαλαίου 3 του Τόμου Α.

10-9) Η εξίσωση $\dot{\mathbf{X}}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\2&6&0\\0&0&4\end{bmatrix}\mathbf{X}+\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}\mathrm{u}$,

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}1&2&-3\\0&1&2\end{bmatrix}\mathbf{X}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\mathrm{u},$$

να τεθεί στη μορφή της εξίσωσης (10.2.7). Να βρεθούν οι ελέγξιμοι και μη ελέγξιμοι πόλοι του συστήματος. Το ίδιο και για το σύστημα (δ) της άσκησης 10-7.

10-10) Για το σύστημα του παραδείγματος 10.2.4 να γραφούν οι εξισώσεις κατάστασης και στη συνέχεια να χωριστούν οι μεταβλητές κατάστασης που είναι ελέγξιμες από εκείνες που δεν είναι.

10-11) Να υπολογισθούν οι τιμές του α ώστε το ζεύγος $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ να μην είναι ελέγξιμο.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \end{bmatrix}.$$

10-12) Να εξετασθεί αν το σύστημα της άσκησης 10-4 είναι παρατηρήσιμο.

10-13) Να εξετασθεί η παρατηρησιμότητα του συστήματος

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}.$$

Αν $u(t) = 0$ για $t_0 \le t \le t_1$ να υπολογισθεί η αρχική κατάσταση, $\mathbf{X}(t_0)$, του συστήματος αν $y(t) = e^{-t}$ για $t_0 \le t \le t_1$.

10-14) Να εξετασθεί η παρατηρησιμότητα των συστημάτων των παραδειγμάτων του Κεφαλαίου 3 του Τόμου Α.

10-15) Να εξετασθεί η παρατηρησιμότητα των ζευγών

α) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ $\qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$,

β) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}$,

γ) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & -2 & -6\end{bmatrix}$ $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 4\end{bmatrix}$,

δ) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 6\\ 0 & -3 & 0 & 0\\ -1 & -13 & -1 & 11\\ -1 & 3 & 0 & 7\end{bmatrix}$ $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

10-16) Να τεθεί το σύστημα

$$\dot{\mathbf{X}}=\begin{bmatrix}-4 & 1 & 4\\ 0 & -6 & 0\\ 3 & 2 & -5\end{bmatrix}\mathbf{X}+\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}u, \qquad y=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix}\mathbf{X},$$

στη μορφή των εξισώσεων (10.3.6). Το ίδιο και το σύστημα (δ) της άσκησης 10-15.

10-17) Είναι οι εξισώσεις κατάστασης και εξόδου που υπολογίσθηκαν στα παραδείγματα του Κεφαλαίου 3 του Τόμου Α ελάχιστης διάστασης;

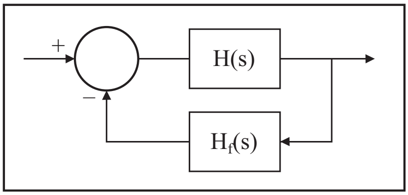
10-18) Να υπολογισθούν οι υλοποιήσεις ελέγξιμης και παρατηρήσιμης κανονικής μορφής των συναρτήσεων μεταφοράς

α) $\dfrac{s^3+2}{6s^4+3s^3+3s+4}$, β) $\dfrac{7s^3+s^2+6}{3s^3+2s+5}$,

γ) $\dfrac{2s^3+6s^2-37s-56}{2s^3+9s^2-2s-10}$, δ) $\dfrac{s+3}{(s+4)^2(s+6)}$.

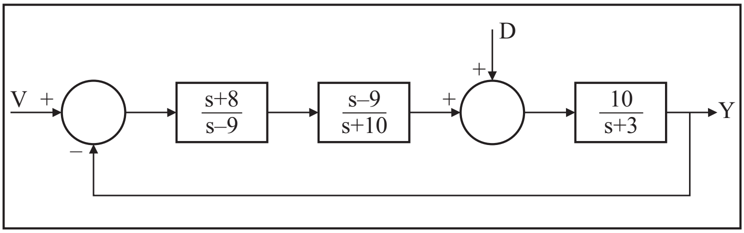
Να εξετασθεί ποιές υλοποιήσεις είναι ελάχιστης διάστασης. Να σχεδιασθούν και τα διαγράμματα προσομοίωσης.

10-19) Να υπολογισθεί μία υλοποίηση του συστήματος στο σχήμα



όπου $\quad H(s)=\dfrac{s^2+2}{(s+3)(s+6)(s+8)}, \qquad H_f(s)=\dfrac{19}{s+20}.$

10-20)



Να εξετασθεί αν είναι ολικά ευσταθές το σύστημα του σχήματος και αν έχει ευστάθεια μηδενικής εισόδου και μηδενικών αρχικών καταστάσεων. Να υπολογισθούν και οι συναρτήσεις μεταφοράς

$$H_{yv}(s)=\frac{Y(s)}{V(s)} \quad \text{και} \quad H_{yd}(s)=\frac{Y(s)}{D(s)}$$

και να εξετασθεί η ευστάθειά τους.

ΟΜΑΔΑ Β

10-21) Να υπολογισθεί μία αρχική κατάσταση ώστε να διεγερθεί ένας μόνο ρυθμός του παρακάτω συστήματος. Επίσης να σχεδιαστούν οι τροχιές του συστήματος στο χώρο κατάστασης.

$$\dot{\mathbf{X}}=\begin{bmatrix}6 & 0\\ 2 & -4\end{bmatrix}\mathbf{X}.$$

10-22) Έστω δύο εξισώσεις κατάστασης και έστω ότι προκύπτει η μία από την άλλη μέσω γραμμικού μετασχηματισμού. Να αποδειχθεί ότι για κάθε αρχική κατάσταση της μίας εξίσωσης υπάρχει μία αρχική κατάσταση της άλλης τέτοια ώστε και οι δύο εξισώσεις έχουν την ίδια έξοδο για μηδενική είσοδο.

10-23) Αν στο σύστημα του παραδείγματος 10.2.3 είναι $R_1 = R_2 = 10\,\Omega$ και $C_1 = C_2 = 100\,\mu F$ να αποδειχθεί ότι παρά το γεγονός ότι το σύστημα δεν είναι ελέγξιμο υπάρχει είσοδος που μπορεί να μεταφέρει την κατάσταση από την τιμή $\mathbf{X}^0 = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \end{bmatrix}$ τη χρονική στιγμή t=0 στην τιμή $\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 300 \\ 300 \end{bmatrix}$ τη χρονική στιγμή $t = 0{,}1$ sec.

10-24) Έστω η εξίσωση

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{X}.$$

με αρχική κατάσταση $\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Να υπολογισθεί η είσοδος u για $0 < t < t_0$ ώστε η κατάσταση του συστήματος τη χρονική στιγμή $t_0 = 0{,}6$ s να είναι τέτοια ώστε για $t > t_0$ να διεγείρεται μόνον ο ευσταθής ρυθμός με την προϋπόθεση ότι $u(t) = 0$ για $t \geq t_0$.

10-25) Να αποδειχθεί ότι αν $\mathbf{A} = k\mathbf{I}$ ($\mathbf{I}$ ο μοναδιαίος πίνακας) τότε για οποιουσδήποτε πίνακες $\mathbf{B}$ και $\mathbf{C}$ το σύστημα δεν είναι ούτε ελέγξιμο ούτε παρατηρήσιμο (k είναι μία σταθερά).

10-26) Ποια είναι η ελάχιστη διάσταση που μπορεί να έχει μία υλοποίηση του παρακάτω πίνακα μεταφοράς;

$$H(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+6} & \dfrac{2}{(s+7)(s+5)} \\ \dfrac{3}{(s+3)} & \dfrac{s+2}{(s+4)(s+7)} \end{bmatrix}.$$

10-27) Να υπολογισθεί μία υλοποίηση

α) ελάχιστης διάστασης,

β) μη ελέγξιμη,

γ) μη παρατηρήσιμη και

δ) μη ελέγξιμη και μη παρατηρήσιμη της συνάρτησης μεταφοράς $\frac{1}{s^2+2}$.

ΟΜΑΔΑ Γ

10-28) Για την εξίσωση (α) της άσκησης 10-7 να βρεθεί μία βάση του υποχώρου των καταστάσεων στις οποίες μπορεί να οδηγηθεί το σύστημα αν η αρχική του κατάσταση είναι η μηδενική.

10-29) Αν οι εξισώσεις κατάστασης και εξόδου είναι σε παρατηρήσιμη κανονική μορφή να αποδειχθεί ότι ο πίνακας παρατηρησιμότητας έχει πάντα βαθμό n. Η δε ορίζουσά του είναι ίση με 1 ή –1.

10-30) Αν οι εξισώσεις κατάστασης και εξόδου είναι σε ελέγξιμη κανονική μορφή να αποδειχθεί ότι ο πίνακας ελεγξιμότητας έχει πάντα βαθμό n. Η δε ορίζουσά του είναι ίση με 1 ή –1.

10-31) Να αποδειχθούν οι εξισώσεις (10.4.2.19) και (10.4.2.25).