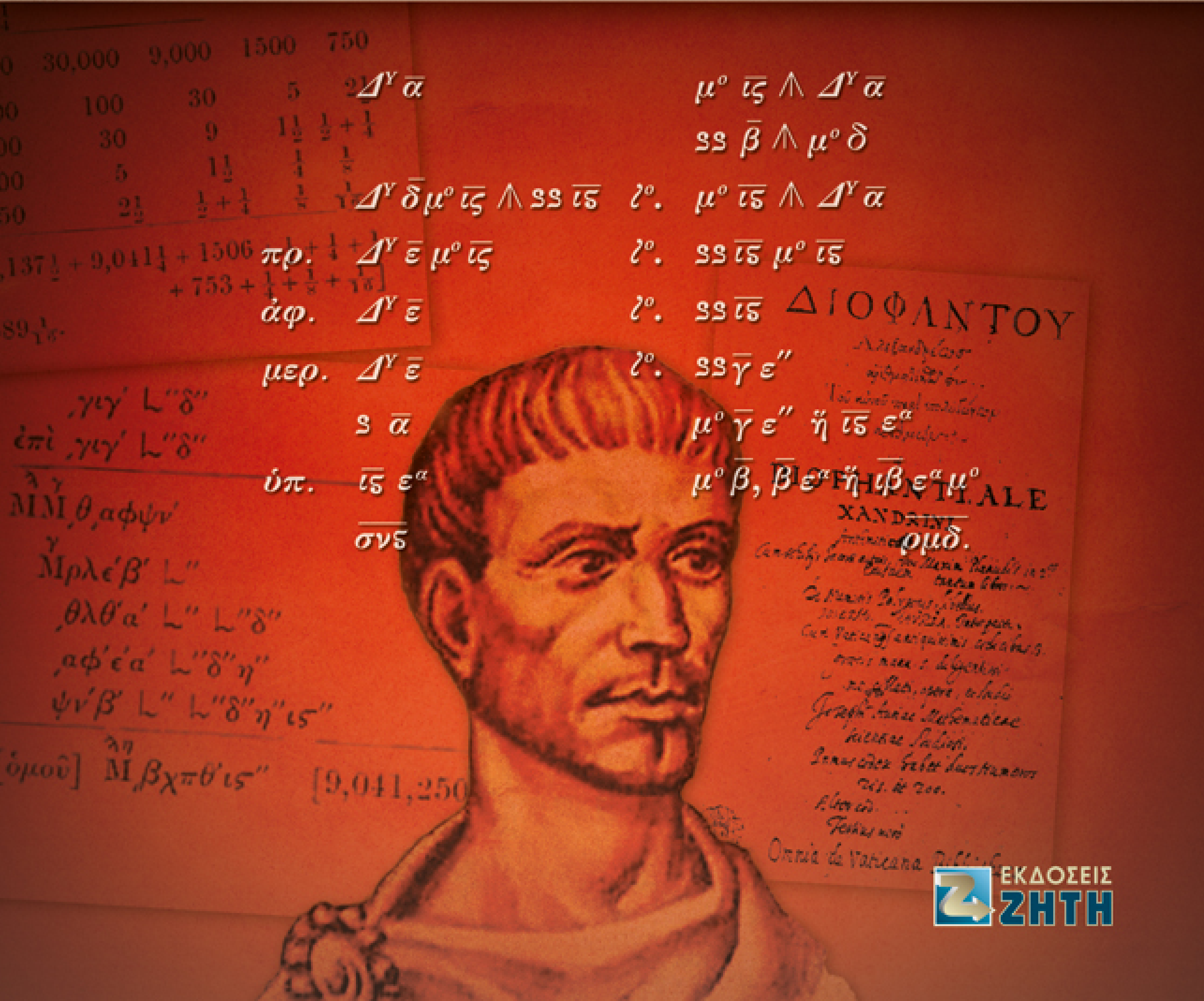
Δημήτριος Μ. Πουλάκης

Καθηγητής Τμήματος Μαθηματικών Α.Π.Θ.

Άλγεβρα



ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Η Άλγεβρα είναι ένας από τους βασικότερους και παλαιότερους κλάδους της Μαθηματικής Επιστήμης. Η σπουδαιότητά της δεν οφείλεται μόνο στη ποικιλία των μεθόδων και προβλημάτων της, αλλά και στις σημαντικές εφαρμογές της σε άλλους κλάδους της επιστήμης, όπως για παράδειγμα στη Κβαντική Μηχανική, Θεωρία Ελέγχου, Κρυπτογραφία και Θεωρία Κωδίκων.

Το παρόν σύγγραμμα περιέχει την ύλη της άλγεβρας η οποία διδάσκεται στο προπτυχιακό πρόγραμμα ενός Τμήματος Μαθηματικών, καθώς και θέματα τα οποία περιλαμβάνονται συνήθως σε μεταπτυχιακά μαθήματα. Επίσης, περιέχει πολλά παραδείγματα, καθώς και άλυτες ασκήσεις ποικίλης δυσκολίας. Οι προαπαιτούμενες γνώσεις για την κατανόηση του περιεχομένου του περιορίζονται σ΄ αυτές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Σκοπός αυτού του συγγράμματος είναι ν΄ αποτελέσει χρήσιμο βοήθημα για οποιονδήποτε επιθυμεί να μελετήσει τα θέματα που διαπραγματεύεται.

Το σύγγραμμα αυτό αποτελείται από 13 κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο δίνονται οι βασικές ιδιότητες των συνόλων, των σχέσεων, των απεικονίσεων και η αξιωματική θεμελίωση των φυσικών αριθμων. Επίσης, παρουσιάζονται οι πιο απλές αλγεβρικές δομές της ημιομάδας και του μονοειδούς. Τέλος, εισάγονται οι μιγαδικοί αριθμοί και βασικές τους ιδιότητες.

Το δεύτερο κεφάλαιο ασχολείται με τους ακέραιους αριθμούς. Παρουσιάζεται η αξιωματικής τους θεμελίωση και μελετώνται η Ευκλείδεια διαίρεση, ο μέγιστος κοινός διαιρέτης, το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο, οι πρώτοι αριθμοί και οι ιδιότητες της σχέσης ισοτιμίας.

Στο τρίτο κεφάλαιο δίνεται μία εισαγωγή στη θεωρία ομάδων. Παρουσιάζονται οι βασικές ιδιότητές των ομάδων, οι μορφισμοί τους, οι υποομάδες τους, τα θεωρήματα των Lagrange και Sylow, καθώς και οι επιλύσιμες ομάδες.

Στο τέταρτο κεφάλαιο περιγράφουμε την δομή των δακτυλίων, τα ιδεώδη τους, τους μορφισμούς τους και το σώμα κλασμάτων ενός πεδίου ακεραιότητας.

Ο δακτύλιος των πολυωνύμων είναι το θέμα του πέμπτου κεφαλαίου. Σ' αυτό μελετώνται, η διαιρετότητα των πολυωνύμων, οι ρίζες τους και δίνεται μία απόδειξη του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Άλγεβρας, καθώς και οι μέθοδοι επίλυσης των εξισώσεων τρίτου και τετάρτου βαθμού.

Στο έκτο κεφάλαιο μελετώνται ο δακτύλιος των πινάκων, οι ορίζουσες και η εφαρμογή τους στη επίλυση των συστημάτων γραμμικών εξισώσεων.

Το έβδομο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στη μελέτη των γραμμικών χώρων, των υποχώρων τους, στη γραμμικη εξάρτηση των στοιχείων τους, καθώς και στις βάσεις τους.

Οι γραμμικές απεικονίσεις είναι το θέμα του όγδου κεφαλαίου. Σ' αυτό εξετάζουμε τις βασικές τους ιδιότητες, την παράστασή τους από πίνακα, τις ιδιοτιμές τους, την διαγωνιοποίησή τους, καθώς και την κανονική μορφή του Jordan.

Στο ένατο κεφάλαιο εισάγονται οι γραμμικοί χώροι με εσωτερικό γινόμενο και μελετώνται οι ορθοκανονικές βάσεις τους, οι ισομετρίες τους, οι προσαρτημένοι ενδομορφισμοί τους, οι κανονικοί ενδομορφισμοί και οι τετραγωνικές μορφές.

Το θέμα του δέκατου κεφαλαίου είναι οι αντιμεταθετικοί δακτύλιοι. Πιο συγκεκριμένα, εισάγονται οι Ευκλείδειοι δακτύλιοι, οι δακτύλιοι μονογενών ιδεωδών, οι δακτύλιοι μοναδικής παραγοντοποίησης οι δακτύλιοι της Noether, οι δακτύλιοι κλασμάτων και δίνονται βασικές τους ιδιότητες.

Το ενδέκατο κεφάλαιο ασχολείται με την μελέτη των προτύπων επί ενός αντιμεταθετικού δακτυλίου των υποπροτύπων τους και των μορφισμών τους. Επίσης, παρουσιάζονται τα ελεύθερα πρότυπα, τα πρότυπα της Noether, τα τανυστικά γινόμενα και οι ακριβείς ακολουθίες.

Στο δωδέκατο κεφάλαιο μελετώνται τα ακέραια στοιχεία επί ενός δακτυλίου και στη συνέχεια οι αλγεβρικές και υπερβατικές επεκτάσεις σωμάτων. Παρουσιάζονται τα άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας και η σύνδεσή τους με τις επεκτάσεις σωμάτων. Δίνεται η κατασκευή του αλγεβρικού καλύμματος ενός σώματος, οι κανονικές επεκτάσεις, οι διαχωρίσιμες επεκτάσεις, καθώς και οι υπερβατικές.

Το τελευταίο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στις επεκτάσεις του Galois, στα πεπερασμένα σώματα και τις κυκλοτομικές επεκτάσεις. Τέλος,

μελετάται το κλασσικό πρόβλημα της επιλυσιμότητας μίας αλγεβρικής εξίσωσης με ριζικά.

Ευχαριστώ θερμά τους συναδέλφους μου Π. Αλβανό, Χ. Βαβατσούλα, Π. Δόσπρα, Α. Πάπιστα και Χ. Ψαρουδάκη οι οποίοι διάβασαν μέρη του κειμένου και έκαναν χρήσιμες παρατηρήσεις.

Θεσσαλονίκη

Ιούνιος 2019

Κεφάλαιο 1

Σύνολα

Σ΄ αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικές ιδιότητες των συνόλων και των απεικονίσεων. Περιγράφεται η αξιωματική θεμελίωση του συνόλου των φυσικών αριθμών η οποία δόθηκε από τον G. Peano, εισάγονται οι σχέσεις της διάταξης και της ισοδυναμίας, καθώς και οι βασικές τους ιδιότητες. Κατόπιν, εισάγεται η έννοια της πράξης επί ενός συνόλου, της ημιομάδας και του μονοειδούς. Τέλος, περιγράφεται το σύνολο των μιγαδικών αριθμών και θεμελειώδεις ιδιότητές του.

1.1 Βασικές Έννοιες

Η έννοια του συνόλου ως πρωτογενής έννοια δεν είναι δυνατόν να οριστεί με απόλυτη μαθηματική ακρίβεια. Έτσι, λοιπόν, λέμε διαισθητικά ότι *σύνολο* είναι μία συλλογή διακεκριμμένων και αυστηρώς καθορισμένων αντικειμένων τα οποία λαμβάνονται ως μία ενότητα. Τα αντικείμενα που το αποτελούν ονομάζονται *στοιχεία* του. Η συλλογή αυτή μπορεί να μην περιέχει κανένα στοιχείο. Το σύνολο αυτό καλείται *κενό* και συμβολίζεται με $\emptyset$.

Παράδειγμα 1.1 Σημαντικά σύνολα είναι το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών $0, 1, 2, \ldots$, το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, όπως επίσης και τα σύνολα $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$ των ρητών και πραγματικών αριθμών, αντίστοιχα.

Αν x είναι στοιχείο ενός μη κενού συνόλου S, τότε θα γράφουμε $x \in S$, ενώ στην αντίθετη περίπτωση $x \notin S$. Π.χ. $-2 \in \mathbb{Z}$ και $-2 \notin \mathbb{N}$.

Ένα σύνολο S με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων μπορεί να παρασταθεί δι΄ αναγραφής όλων των στοιχείων του. Πιό συγκεκριμένα, αν $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι όλα τα στοιχεία του S, τότε γράφουμε:

$$S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Αν το S αποτελείται από στοιχεία ενός συνόλου T που έχουν μία συγκεκριμένη ιδιότητα P, τότε γράφουμε:

$$S = \{x \in T /\ x \text{ έχει την ιδιότητα } P\}.$$

Παράδειγμα 1.2 Το σύνολο των άρτιων φυσικών E μπορεί να παρασταθεί ως εξής:

$$E = \{x \in \mathbb{N} /\ \text{υπάρχει } y \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο, ώστε } x = 2y\}.$$

Ορισμός 1.1 Δύο σύνολα A και B καλούνται *ίσα* και γράφουμε $A = B$, αν αποτελούνται από τα ίδια ακριβώς στοιχεία.

Παράδειγμα 1.3 Τα σύνολα

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

και

$$B = \{x \in \mathbb{N} /\ x \leq 10\}$$

είναι ίσα.

Ορισμός 1.2 Ας είναι A και B δύο σύνολα. Το A καλείται *υποσύνολο* του B ή το B *υπερσύνολο* του A, αν για κάθε $x \in A$ έχουμε $x \in B$. Τότε γράφουμε $A \subseteq B$ ή $B \supseteq A$.

Δεχόμαστε ότι το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου. Ας είναι A, B και C σύνολα. Εύκολα βλέπουμε ότι ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

1. $A \subseteq A$.

2. $A = B$ αν και μόνον αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$.

3. Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq C$, τότε $A \subseteq C$.

Ορισμός 1.3 Ας είναι A και B δύο σύνολα. Το A καλείται *γνήσιο υποσύνολο* του B ή το B *γνήσιο υπερσύνολο* του A, αν $A \subseteq B$ και υπάρχει $x \in B$ με $x \notin A$. Τότε γράφουμε $A \subset B$ ή $B \supset A$.

Παράδειγμα 1.4 Το σύνολο $\mathbb{N}$ είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{Z}$, τα $\mathbb{N}$ και $\mathbb{Z}$ γνήσια υποσύνολα του $\mathbb{Q}$ και τα τρία προηγούμενα σύνολα γνήσια υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Ορισμός 1.4 Ας είναι A ένα σύνολο. Καλούμε *δυναμοσύνολο* του A και το συμβολίζουμε με $\mathcal{P}(A)$ το σύνολο όλων των υποσυνόλων του.

Παράδειγμα 1.5 Ας είναι $A = \{1, 2, 3\}$. Το δυναμοσύνολο του A είναι το σύνολο:

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}.$$

Στη συνέχεια θα ορίσουμε μερικές πράξεις επί των συνόλων.

Ορισμός 1.5 Καλούμε *τομή* των συνόλων A και B, και συμβολίζουμε με $A \cap B$, το σύνολο των στοιχείων που ανήκουν και στα δύο σύνολα, δηλαδή

$$A \cap B = \{x / \ x \in A \text{ και } \ x \in B\}.$$

Αν $A \cap B = \emptyset$, τότε τα A και B καλούνται *ξένα μεταξύ τους*.

Παράδειγμα 1.6 Ας είναι $A = \{2, 3, 4\}$, B το σύνολο των αρτίων αριθμών και $C = \{x \in \mathbb{R} / \ x^3 = 1\}$. Έχουμε $A \cap B = \{2, 4\}$ και $A \cap C = \emptyset$.

Ορισμός 1.6 Καλούμε *ένωση* των συνόλων A και B, και συμβολίζουμε με $A \cup B$, το σύνολο των στοιχείων που ανήκουν είτε στο A είτε στο B, δηλαδή,

$$A \cup B = \{x / \ x \in A \ \text{ ή } \ x \in B\}.$$

Παράδειγμα 1.7 Ας είναι $A = \{1, 3, 5\}$ και $B = \{1, \sqrt{2}, -3\}$. Τότε $A \cup B = \{1, 3, 5, \sqrt{2}, -3\}$.

Αν A, B και C είναι σύνολα, τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1. $A \cap A = A, \quad A \cup A = A$.

2. $A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A$.

3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

4. $A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cup \emptyset = A.$

5. $A \cap B \subseteq A, \quad A \cap B \subseteq B, \quad A \cup B \supseteq A, \quad A \cup B \supseteq B.$

6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \; A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$

Θ΄ αποδείξουμε μόνο την δεύτερη από τις ισότητες (6). Έχουμε $x \in A \cup (B \cap C)$, αν και μόνον αν, $x \in A$ ή $x \in B \cap C$. Από την άλλη πλευρά, $x \in B \cap C$ ισοδυναμεί με $x \in B$ και $x \in C$. Έτσι, έχουμε $x \in A \cup (B \cap C)$, αν και μόνον αν, ισχύουν τα εξής: $x \in A$ ή $x \in B$ και $x \in A$ ή $x \in C$. Άρα, $x \in A \cup (B \cap C)$, αν και μόνον αν, $x \in A \cup B$ και $x \in A \cup C$ που ισοδυναμεί με $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Συνεπώς, η ισότητα ισχύει.

Ορισμός 1.7 Καλούμε *διαφορά* του B από το A, το σύνολο

$$A \setminus B = \{x / \; x \in A \;\; \text{και} \;\; x \notin B\}.$$

Παράδειγμα 1.8 Ας είναι $A = \{1, 2, 3, 4\}$ και B το σύνολο των περιττών ακεραίων. Τότε

$$A \setminus B = \{2, 4\}.$$

Ορισμός 1.8 Αν $A \subseteq X$, τότε το σύνολο $X \setminus A$ καλείται *συμπλήρωμα* του A μέσα στο X.

Αν είναι σαφές σε ποιό σύνολο X αναφερόμαστε, τότε συμβολίζουμε το συμπλήρωμα του A μέσα στο X με A^c.

Παράδειγμα 1.9 Το συμπλήρωμα του συνόλου των άρτιων φυσικών αριθμών μέσα στο $\mathbb{N}$ είναι το σύνολο των περιττών φυσικών αριθμών

$$\Pi = \{x \in \mathbb{N} / \text{ υπάρχει } y \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο, ώστε } x = 2y + 1\}.$$

Ας είναι X ένα σύνολο και A, B υποσύνολά του. Τότε ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

1. $A \cup A^c = X, \quad A \cap A^c = \emptyset.$

2. $(A^c)^c = A.$

3. $A \subseteq B$ αν και μόνον αν $A^c \supseteq B^c$.

Τότε έχουμε

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \text{και} \quad f(y_1) = f(y_2).$$

Οπότε

$$f(x_1 * y_1) = f(x_1) \bullet f(y_1) = f(x_2) \bullet f(y_2) = f(x_2 * y_2).$$

Άρα

$$x_1 * y_1 \equiv x_2 * y_2 \ (\mathcal{R}_f)$$

και κατά συνέπεια η ισοδυναμία $\mathcal{R}_f$ είναι συμβατή με την πράξη $*$. Έτσι, σύμφωνα με την Πρόταση 1.23, το σύνολο $X/\mathcal{R}_f$ εφοδιασμένο με την πράξη $\hat{*}$ είναι ημιομάδα.

1.7 Μιγαδικοί Αριθμοί

Σ' αυτή την ενότητα θα εισάγουμε το σύνολο των μιγαδικών αριθμών και θα παρουσιάσουμε μερικές βασικές τους ιδιότητες.

Πρώτα θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{R}^2$ και ορίζουμε σ' αυτό τις παρακάτω δύο πράξεις που θα τις καλούμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό, αντίστοιχα:

$$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ ((a,b),(c,d)) \longmapsto (a+c, b+d)$$

και

$$\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ ((a,b),(c,d)) \longmapsto (ac-bd, ad+bc).$$

Δηλαδή, έχουμε:

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) \ \text{ και } \ (a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd, ad+bc).$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός είναι πράξεις προσεταιριστικές και αντιμεταθετικές. Το ζεύγος $(0,0)$ είναι μηδενικό στοιχείο και το $(1,0)$ μοναδιαίο. Δηλαδή, τα ζεύγη $(\mathbb{R}^2,+)$ και $(\mathbb{R}^2,\cdot)$ αποτελούν αντιμεταθετικά μονοειδή. Επίσης, κάθε ζεύγος $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ έχει ως αντίθετο το ζεύγος $(-a,-b)$, δηλαδή $-(a,b) = (-a,-b)$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι κάθε $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ έχει αντίστροφο. Πράγματι, το ζεύγος $(c,d) \in \mathbb{R}^2$ είναι αντίστροφο του (a,b), αν και μόνον αν, έχουμε $(a,b)\cdot(c,d) = (1,0)$ που ισοδυναμεί με $(ac-bd, ad+bc) = (1,0)$. Δηλαδή, το (c,d) είναι αντίστροφο του (a,b), αν και μόνον αν, έχουμε:

$$ac - bd = 1 \quad \text{και} \quad ad + bc = 0.$$

Ας είναι $b \neq 0$. Τότε, πολλαπλασιάζοντας την πρώτη από τις προηγούμενες ισότητες με b, παίρνουμε $abc - b^2 d = b$. Από την δεύτερη ισότητα έχουμε $bc = -ad$ και έτσι παίρνουμε $-a^2 d - b^2 d = b$, απ΄ όπου προκύπτει:

$$d = -\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Αντικαθιστώντας την τιμή στη πρώτη ισότητα, παίρνουμε:

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

Αντίστροφα, υπολογίζουμε:

$$(a, b)\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right) = (1, 0).$$

Άρα, ισχύει:

$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right).$$

Αν $b = 0$, τότε $a \neq 0$ και εύκολα βλέπουμε ότι $(a, 0)^{-1} = (1/a, 0)$.

Ας θεωρήσουμε την απεικόνιση

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ x \longmapsto (x, 0).$$

Η f είναι προφανώς ένεση. Επιπλέον, για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = f(a) + f(b)$$

και

$$f(ab) = (ab, 0) = (a, 0) \cdot (b, 0) = f(a) \cdot f(b).$$

Επίσης, ισχύει $f(0) = (0, 0)$ και $f(1) = (1, 0)$. Επομένως, η f είναι ένας μονομορφισμός από το μονοειδές $(\mathbb{R}, +)$ στο $(\mathbb{R}^2, +)$ και από το μονοειδές $(\mathbb{R}, \cdot)$ στο $(\mathbb{R}^2, \cdot)$.

Ορισμός 1.42 Το σύνολο $\mathbb{R}^2$ με τις δύο πράξεις που ορίστηκαν παραπάνω ονομάζεται σύνολο των *μιγαδικών αριθμών* και συμβολίζεται με $\mathbb{C}$.

Παρατηρούμε ότι μπορούμε να ταυτίζουμε, δια μέσου της f, τα στοιχεία του $\mathbb{R}$ με αυτά του υποσυνόλου $\mathbb{R} \times \{0\}$ του $\mathbb{C}$, δηλαδή κάθε πραγματικό αριθμό a με το ζεύγος $(a, 0)$. Επιπλέον, τα αποτελέσματα της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού δύο ζευγών του $\mathbb{R} \times \{0\}$ είναι οι εικόνες των αντιστοίχων πραγματικών αριθμών. Ας είναι $\imath = (0, 1)$. Μετά την ταύτιση του $\mathbb{R}$ με το $\mathbb{R} \times \{0\}$, μπορούμε να γράφουμε ένα μιγαδικό αριθμό (a, b) ως εξής:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + b\imath,$$

όπου ταυτίσαμε τα ζεύγη $(a, 0)$ και $(b, 0)$ με τους αριθμούς a, b, αντίστοιχα. Οπότε, για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό δύο στοιχείων $a + b\imath$ και $c + d\imath$ στο $\mathbb{C}$ θα γράφουμε

$$(a + b\imath) + (c + d\imath) = (a + c) + (b + d)\imath,$$

και

$$(a + b\imath) + (c + d\imath) = (ac - bd) + (ad + bc)\imath.$$

Παρατηρούμε ότι το στοιχείο $\imath$ έχει την εξής σημαντική ιδιότητα: $\imath^2 = -1$. Δηλαδή, τα στοιχεία $\pm\imath$ είναι λύσεις της εξίσωσης $X^2 + 1 = 0$ η οποία δεν έχει λύση στο $\mathbb{R}$.

Ορισμός 1.43 Ας είναι $z = a + b\imath$ ένα στοιχείο του $\mathbb{C}$. Θα καλούμε τους πραγματικούς αριθμούς a και b, *πραγματικό* και *φανταστικό* μέρος του z, και θα τους συμβολίζουμε με $\Re(z)$ και $\Im(z)$, αντίστοιχα. Επίσης, θα καλούμε *φανταστική μονάδα* τον αριθμό $\imath$ και τους αριθμούς της μορφής $b\imath$, με $b \in \mathbb{R}$, *φανταστικούς.*

Από τον ορισμό του ένας μιγαδικός αριθμός $z = a + b\imath$ δεν είναι παρά το διατεταγμένο ζεύγος (a, b) και επομένως ορίζει ένα σημείο στο μιγαδικό επίπεδο. Η απόστασή του (a, b) από την αρχή αξόνων $(0, 0)$ δίνεται από την ποσότητα $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Ορισμός 1.44 Καλούμε *μέτρο ή απόλυτη τιμή* του μιγαδικού αριθμού $z = a + b\imath$ την ποσότητα $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Παρατηρούμε ότι το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού γενικεύει την έννοια της απόλυτης τιμής στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 1.42 Θα προσδιορίσουμε όλους τους μιγαδικούς αριθμούς z με $|z| = 1$ και $|z-1| = 2|z+1|$. Θέτουμε $z = x + y\imath$. Από την δεύτερη ισότητα έχουμε:

$$|x - 1 + y\imath| = 2|x + 1 + y\imath|,$$

απ΄ όπου

$$(x-1)^2 + y^2 = 4((x+1)^2 + y^2).$$

Η εξίσωση αυτή γράφεται:

$$3y^2 + 3x^2 + 10x + 3 = 0.$$

Από την ισότητα $|z| = 1$ έχουμε $x^2 + y^2 = 1$, απ΄ όπου $y^2 = 1 - x^2$. Αντικαθιστώντας το y^2 με το ίσο του στη παραπάνω ισότητα, παίρνουμε $10x + 6 = 0$ και επομένως $x = -3/5$. Οπότε, $y^2 = 1 - 9/25 = 16/25$ και έτσι $y = \pm 4/5$. Άρα, οι ζητουμένοι μιγαδικοί αριθμοί είναι:

$$z = -\frac{3}{5} \pm \frac{4}{5}\imath.$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει:

$$|z|^2 = a^2 + b^2 = (a + b\imath)(a - b\imath).$$

Ορισμός 1.45 Καλούμε *συζυγή* του μιγαδικού αριθμού $z = a + b\imath$ τον αριθμό $\overline{z} = a - b\imath$.

Έτσι, έχουμε $|z|^2 = z\overline{z}$. Στη συνέχεια δίνουμε μερικές βασικές ιδιότητες του συζυγή ενός μιγαδικού αριθμού και της απόλυτης τιμής.

Πρόταση 1.24 *Ισχύουν τα εξής:*
(α) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$, *για κάθε* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
(β) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2$, *για κάθε* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
(γ) $\overline{\overline{z}} = z$, *για κάθε* $z \in \mathbb{C}$.
(δ) $\Re(z) = (z + \overline{z})/2$ *και* $\Im(z) = (z - \overline{z})/2\imath$, *για κάθε* $z \in \mathbb{C}$.

Απόδειξη. Ας είναι $z_i = a_i + b_i\imath$ $(i = 1, 2)$ μιγαδικοί αριθμοί. Τότε, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 + z_2} &= \overline{(a_1 + b_1\imath) + (a_2 + b_2\imath)} \\
&= \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\imath} \\
&= (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)\imath \\
&= (a_1 - b_1\imath) + (a_2 - b_2\imath) \\
&= \overline{z}_1 + \overline{z}_2
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 z_2} &= \overline{(a_1+b_1\imath)(a_2+b_2\imath)} \\
&= \overline{(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)\imath} \\
&= (a_1a_2-b_1b_2)-(a_1b_2+b_1a_2)\imath \\
&= (a_1-b_1\imath)(a_2-b_2\imath) \\
&= \overline{z}_1\overline{z}_2.
\end{aligned}$$

Επίσης, αν $z = a + b\imath$ είναι μιγαδικός αριθμός, τότε έχουμε:

$$\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{a+b\imath}} = \overline{a-b\imath} = a+b\imath = z.$$

Τέλος, για κάθε $z = a + b\imath \in \mathbb{C}$, έχουμε:

$$z+\overline{z} = 2a, \quad z-\overline{z} = 2b\imath,$$

απ΄ όπου

$$\Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \qquad \Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2\imath}.$$

Παράδειγμα 1.43 Ας είναι $z, w \in \mathbb{C}$, με $w \neq 0$ και $|z+w| = |z-w|$. Θα δείξουμε ότι ο αριθμός z/w είναι φανταστικός. Από την ισότητα $|z+w| = |z-w|$, διαιρώντας με $|w|$, έχουμε

$$\frac{|z+w|}{|w|} = \frac{|z-w|}{|w|},$$

απ΄ όπου παίρνουμε

$$\left|\frac{z}{w}+1\right|^2 = \left|\frac{z}{w}-1\right|^2.$$

Επομένως, ισχύει:

$$\left(\frac{z}{w}+1\right)\overline{\left(\frac{z}{w}+1\right)} = \left(\frac{z}{w}-1\right)\overline{\left(\frac{z}{w}-1\right)}$$

Εκτελώντας τις πράξεις στα δύο μέλη, προκύπτει:

$$\frac{z}{w}+\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = 0.$$

Άρα, ισχύει $\Re(z/w) = 0$ και επομένως ο αριθμός z/w είναι φανταστικός.

Πρόταση 1.25 *Ας είναι $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Τότε, ισχύει:*

$$|z_1 \cdots z_n| = |z_1| \cdots |z_n|.$$

Απόδειξη. Για $n = 2$, έχουμε:

$$|z_1|^2 |z_2|^2 = (z_1 \overline{z}_1)(z_2 \overline{z}_2) = z_1 z_2 \, \overline{z_1 z_2} = |z_1 z_2|^2.$$

Καθώς οι πραγματικοί αριθμοί $|z_1|$, $|z_2|$ και $|z_1 z_2|$ είναι θετικοί, έπεται $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$. Ας υποθέσουμε ότι η ισότητα ισχύει για $n = k$. Ας είναι $n = k + 1$. Τότε, από την περίπτωση $n = 2$ και την υπόθεση επαγωγής, παίρνουμε:

$$|z_1 \cdots z_{k+1}| = |z_1 \cdots z_k||z_{k+1}| = |z_1| \cdots |z_k||z_{k+1}|.$$

Πρόταση 1.26 *(Τριγωνική ανισότητα) Ας είναι $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Τότε, ισχύει:*

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Απόδειξη. Έχουμε:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) \\ &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= z_1 \overline{z}_1 + z_1 \overline{z}_2 + z_2 \overline{z}_1 + z_1 \overline{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \overline{z}_2 + \overline{z_1 \overline{z}_2} \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\Re(z_1 \overline{z}_2) \end{aligned}$$

Ισχύει:

$$\Re(z_1 \overline{z}_2) \leq |z_1 \overline{z}_2| = |z_1||\overline{z}_2| = |z_1||z_2|.$$

Οπότε, προκύπτει:

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2.$$

Έτσι, παίρνουμε:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Στη συνέχεια, έχουμε:

$$|z_1| = |z_1 + z_2 - z_2| \leq |z_1 + z_2| + |z_2|,$$

απ΄ όπου προκύπτει:

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|.$$

Όμοια, παίρνουμε:

$$|z_2| - |z_1| \leq |z_1 + z_2|.$$

Συνεπώς, ισχύει:

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|.$$

Πόρισμα 1.2 *Ας είναι* $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. *Τότε, ισχύει:*

$$|z_1 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + \cdots + |z_n|.$$

Απόδειξη. Για $n = 2$, η προηγούμενη πρόταση δίνει το αποτέλεσμα. Υποθέτουμε ότι η προς απόδειξη ανισότητα ισχύει για $n = k$. Ας είναι $n = k+1$. Τότε, από την περίπτωση $n = 2$ και την υπόθεση επαγωγής, προκύπτει:

$$|z_1 + \cdots + z_{k+1}| \leq |z_1 + \cdots + z_k| + |z_{k+1}| \leq |z_1| + \cdots + |z_{k+1}|.$$

Παράδειγμα 1.44 Ας είναι $z \in \mathbb{C}$, με $|z| = 1$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $w \in \mathbb{C}$ ισχύει:

$$|w - z| + |w + z| \geq 2.$$

Πράγματι, έχουμε:

$$2 \leq 2|z| = |2z| = |(z - w) + (w + z)| \leq |z - w| + |z + w|.$$

Όπως παρατηρήσαμε παραπάνω υπάρχουν εξισώσεις, όπως π.χ. η $X^2 + 1 = 0$, οι οποίες δεν έχουν λύση στο $\mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι κάθε εξίσωση της μορφής

$$aX^2 + bX + c = 0,$$

όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$, με $a \neq 0$, έχει λύσεις στο $\mathbb{C}$, τις οποίες και θα προσδιορίσουμε.

Ορισμός 1.46 Καλούμε *διακρίνουσα* της παραπάνω εξίσωσης την ποσότητα $\Delta = b^2 - 4ac$.

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση με $4a$, παίρνουμε

$$(2aX+b)^2 = b^2 - 4ac,$$

απ΄ όπου προκύπτει

$$\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Έτσι, έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. $\Delta > 0$. Τότε, έχουμε δύο λύσεις στο $\mathbb{R}$, τις
$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$
2. $\Delta = 0$. Τότε, έχουμε μία λύση στο $\mathbb{R}$, την
$$x = -\frac{b}{2a}.$$
3. $\Delta < 0$. Τότε, έχουμε δύο λύσεις στο $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, τις
$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \imath\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

Παράδειγμα 1.45 Η εξίσωση $X^2 + 1 = 0$ έχει διακρίνουσα ίση με -4. Επομένως, οι λύσεις της είναι οι φανταστικοί αριθμοί $\pm\imath$.

Παράδειγμα 1.46 Θεωρούμε την εξίσωση $X^2 + X + 1 = 0$. Η εξίσωση αυτή έχει διακρίνουσα $\Delta = 1 - 4 = -3$. Επομένως, οι λύσεις της είναι οι μη πραγματικοί αριθμοί

$$\frac{-1 \pm \imath\sqrt{3}}{2}.$$

Ας είναι $z = a + b\imath$ μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός. Τότε, έχουμε:

$$\left|\frac{z}{|z|}\right| = \left|\frac{1}{|z|}\right| |z| = \frac{1}{|z|}|z| = 1.$$

Οπότε, ο αριθμός $z/|z|$ βρίσκεται πάνω στο τριγωνομετρικό κύκλο. Τότε, υπάρχει γωνία θ με $0 \leq \theta < 2\pi$, ώστε να ισχύει $(a/|z|, b/|z|) = (\cos\theta, \sin\theta)$. Επομένως, έχουμε

$$z = |z|(\cos\theta + \imath\sin\theta).$$

Η παραπάνω ισότητα ισχύει και για οποιαδήποτε άλλη γωνία της μορφής $\theta + 2k\pi$, όπου $k \in \mathbb{Z}$.

Ορισμός 1.47 Η παραπάνω γραφή του z καλείται *τριγωνομετρική μορφή* του z. Η γωνία θ καλείται *πρωτεύον όρισμα* του z και συμβολίζεται με $Argz$. Κάθε γωνία $\theta + 2k\pi$, όπου $k \in \mathbb{Z}$, καλείται *όρισμα* του z.

Από τα παραπάνω έχουμε ότι για δύο μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύει $z = w$, αν και μόνον αν, $|z| = |w|$ και $Argz = Argw$. Γενικότερα, αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $z_i = |z_i|(\cos\theta_i + \imath \sin\theta_i)$ $(i = 1, 2)$, τότε έχουμε $z_1 = z_2$, αν και μόνον αν, $|z_1| = |z_2|$ και $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$, όπου $k \in \mathbb{Z}$.

Παράδειγμα 1.47 Θα προσδιορίσουμε την τριγωνομετρική μορφή του αριθμού $z = 1 + \imath$. Το μέτρο του z είναι $|z| = \sqrt{2}$. Έτσι, αν $\theta = Argz$, τότε έχουμε $\cos\theta = \sin\theta = 1/\sqrt{2}$ και επομένως $\theta = \pi/4$. Επομένως, η τριγωνομετρική μορφή του z είναι:

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \imath \sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Παράδειγμα 1.48 Ας είναι $z = |z|(\cos\theta + \imath\sin\theta)$. Θα δείξουμε ότι η τριγωνομετρική μορφή του $\overline{z}$ είναι:

$$\overline{z} = |\overline{z}|(\cos(2\pi - \theta) + \imath \sin(2\pi - \theta)).$$

Πράγματι, αν φ είναι ένα όρισμα του $\overline{z}$, τότε $\cos\varphi = \cos\theta$ και $\sin\varphi = -\sin\theta$. Επομένως, έχουμε $\cos\varphi = cos(2\pi - \theta)$, $\sin\varphi = \sin(2\pi - \theta)$ και κατά συνέπεια προκύπτει η παραπάνω τριγωνομετρική μορφή.

Για την απόδειξη των παρακάτω προτάσεων θα χρειαστούμε τους εξής τύπους:

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2,$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1 \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \cos\theta_2.$$

Πρόταση 1.27 *Ας είναι* $z_i = |z_i|(\cos\theta_i + \imath\sin\theta_i)$ $(i = 1, 2)$*. Τότε, έχουμε:*

$$z_1 z_2 = |z_1 z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + \imath \sin(\theta_1 + \theta_2)).$$

Επίσης, για κάθε $z = |z|(\cos\theta + \imath\sin\theta)$*, με* $z \neq 0$*, έχουμε:*

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}(\cos(-\theta) + \imath \sin(-\theta)).$$

Απόδειξη. Έχουμε:

$$z_1z_2 = |z_1z_2| \\ (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + \imath(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)).$$

Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω τύπους για το συνημίτονο και ημίτονο του αθροίσματος δύο γωνιών, παίρνουμε:

$$z_1z_2 = |z_1z_2|(\cos(\theta_1+\theta_2) + \imath\sin(\theta_1+\theta_2)).$$

Επίσης, ισχύει:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}\frac{\cos\theta - \imath\sin\theta}{|\cos\theta + \imath\sin\theta|^2} = \frac{1}{|z|}(\cos(-\theta) + \imath\sin(-\theta)).$$

Παράδειγμα 1.49 Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς

$$z = 2\left(\cos\frac{8\pi}{3} + \imath\sin\frac{8\pi}{3}\right), \quad w = \left(\cos\frac{\pi}{2} + \imath\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Θα προσδιορίσουμε την τριγωνομετρική μορφή του γινομένου zw^{-1} και το πρωτεύον όρισμά του. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.27, ισχύει:

$$zw^{-1} = 2\left(\cos\frac{13\pi}{6} + \imath\sin\frac{13\pi}{6}\right).$$

Επίσης, έχουμε $Arg(zw^{-1}) = \pi/6$.

Πρόταση 1.28 *Ας είναι* $z = |z|(\cos\theta + \imath\sin\theta)$. *Τότε, για κάθε* $n \in \mathbb{N}$, *ισχύει:*

$$z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + \imath\sin(n\theta)).$$

Απόδειξη. Η πρόταση ισχύει για $n = 0, 1$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k$. Ας είναι $n = k+1$. Έχουμε:

$$z^{k+1} = z^k\, z = |z|^k(\cos(k\theta) + \imath\sin(k\theta))\,|z|(\cos\theta + \imath\sin\theta),$$

απ΄ όπου έπεται

$$z^{k+1} = |z|^{k+1} \\ (\cos(k\theta)\cos\theta - \sin(k\theta)\sin\theta + (\cos(k\theta)\sin\theta + \sin(k\theta)\cos\theta)\imath).$$

Χρησιμοποιώντας τις ισότητες για το συνημίτονο και ημίτονο του αθροίσματος δύο γωνιών που δώσαμε παραπάνω προκύπτει:

$$z^{k+1} = |z|^{k+1}(\cos((k+1)\theta) + \imath\sin((k+1)\theta)).$$

Άρα, η πρόταση ισχύει για $n = k+1$ και επομένως για κάθε φυσικό n.

Πρόταση 1.29 *Ας είναι $a = |a|(\cos\gamma + \imath\sin\gamma)$ και n φυσικός ≥ 1. Τότε, η εξίσωσης $X^n = a$ έχει n διαφορετικές λύσεις που δίνονται από τους μιγαδικούς αριθμούς*

$$\alpha_k = |a|^{1/n}\left(\cos\frac{\gamma + 2k\pi}{n} + \imath\sin\frac{\gamma + 2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0, \dots, n-1).$$

Απόδειξη. Ας είναι z μιγαδικός αριθμός και $z = |z|(\cos\theta + \imath\sin\theta)$. Ισχύει $z^n = a$, αν και μόνον αν, έχουμε

$$|z|^n(\cos\theta + \imath\sin\theta)^n = |a|(\cos\gamma + \imath\sin\gamma),$$

ή χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.28,

$$|z|^n(\cos(n\theta) + \imath\sin(n\theta)) = |a|(\cos\gamma + \imath\sin\gamma).$$

Άρα, έχουμε $z^n = a$, αν και μόνον αν, $|z|^n = |a|$ και $n\theta = \gamma + 2k\pi$, όπου $k \in \mathbb{Z}$. Επομένως, $z^n = a$, αν και μόνον αν, ο z είναι κάποιος από τους αριθμούς

$$\alpha_k = |a|^{1/n}\left(\cos\frac{\gamma + 2k\pi}{n} + \imath\sin\frac{\gamma + 2k\pi}{n}\right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Παρατηρούμε ότι $\alpha_k = \alpha_l$, με $k < l$, αν και μόνον αν, $l = k + mn$, όπου $m \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, οι αριθμοί $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ είναι διαφορετικοί ανά δύο και δίνουν όλες τις λύσεις της $X^n = a$.

Πόρισμα 1.3 *Η εξίσωσης $X^n = 1$ έχει n διαφορετικές λύσεις που δίνονται από τους μιγαδικούς αριθμούς*

$$\omega_k = \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + \imath\sin\frac{2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0, \dots, n-1).$$

Ορισμός 1.48 Ας είναι $a \in \mathbb{C}$ και n φυσικός ≥ 2. Καλούμε *n-οστή ρίζα* του a κάθε λύση της εξίσωσης $X^n = a$. Αν $a = |a|(\cos\theta + \imath\sin\theta)$ είναι η τριγωνομετρική μορφή του a, τότε καλούμε την n-οστή ρίζα του a, $|a|^{1/n}(\cos(\theta/n) + \imath\sin(\theta/n))$, *κύρια n-οστή ρίζα* του a και την συμβολίζουμε με $\sqrt[n]{a}$ ή $a^{1/n}$.

Έτσι, οι αριθμοί $\sqrt[n]{a}\,\omega_k$ $(k = 0, \dots, n-1)$ είναι όλες οι διακεκριμμένες λύσεις της εξίσωσης $X^n = a$.

Παράδειγμα 1.50 Οι κυβικές ρίζες του 1 είναι οι αριθμοί 1 και

$$\cos\frac{\pi}{3} \pm \imath \sin\frac{\pi}{3} = \frac{-1 \pm \imath\sqrt{3}}{2}.$$

Τέλος, ϑ΄ ασχοληθούμε με την επίλυση της εξίσωσης

$$aX^2 + bX + c = 0,$$

όπου $a, b, c \in \mathbb{C}$, με $a \neq 0$. Θεωρούμε την διακρίνουσα $\Delta = b^2 - 4ac$ της εξίσωσης, και, όπως και στη περίπτωση όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$, παίρνουμε:

$$\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Επομένως, οι λύσεις της εξίσωσης είναι:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Παράδειγμα 1.51 Θα προσδιορίσουμε τις λύσεις της εξίσωσης

$$X^2 + (1 + \imath)X + \imath = 0.$$

Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι

$$\Delta = (1 + \imath)^2 - 4\imath = -2\imath = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + \imath \sin\frac{3\pi}{2}\right).$$

Οπότε, έχουμε:

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \imath \sin\frac{3\pi}{4}\right) = -1 + \imath.$$

Άρα, οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί -1 και $-\imath$.

Παράδειγμα 1.52 Θα βρούμε τις λύσεις της εξίσωσης

$$X^2 + (3 + \imath)X + 1 + \imath = 0.$$

Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι

$$\Delta = (3 + \imath)^2 - 4(1 + \imath) = 4 + 2\imath.$$

Θα υπολογίσουμε την τετραγωνική ρίζα του Δ χωρίς να χρησιμοποιήσουμε την τριγωνομετρική του μορφή. Αν $\alpha + \beta\imath$ είναι τετραγωνική ρίζα του Δ, τότε $(\alpha+\beta\imath)^2 = 4 + 2\imath$, απ΄ όπου έχουμε $\alpha^2 - \beta^2 = 4$ και $\alpha\beta = 1$. Συνδυάζοντας τις δύο ισότητες, παίρνουμε

$$\alpha + \imath\beta = \pm\left(\sqrt{\sqrt{5}+2} + \imath\sqrt{\sqrt{5}-2}\right).$$

Ετσι, οι ζητούμενες λύσεις είναι:

$$\frac{-3 \pm \sqrt{\sqrt{5}+2}}{2} + \imath\frac{-1 \pm \sqrt{\sqrt{5}-2}}{2}.$$

1.8 Ασκήσεις

1. Ας είναι A, B και C σύνολα. Τότε, ισχύουν τα εξής:
(α) $A \setminus B \subseteq A$.
(β) $A \subseteq B$, αν και μόνον αν $A \setminus B = \emptyset$.
(γ) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.
(δ) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.
(ε) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$.

2. Ας είναι A και B σύνολα. Τότε, ισχύουν τα εξής:
(α) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.
(β) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = P(A \cup B)$, αν και μόνον αν $A \subseteq B$ ή $A \supseteq B$.

3. Ας είναι A και B σύνολα. Καλούμε *συμμετρική διαφορά* των A και B το σύνολο

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Να δειχθεί ότι ισχύουν τα εξής:
(α) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.
(β) $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$.

4. Ας είναι A, B και C σύνολα. Τότε, ισχύουν τα εξής:
(α) $A \times B = B \times A$ αν και μόνον αν $A = \emptyset$, $B = \emptyset$ ή $A = B$.
(β) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

5. Ας είναι $f : X \to Y$ μία απεικόνιση. Τότε, για κάθε $A \subseteq X$ και κάθε $B \subseteq Y$ έχουμε

$$A \subseteq f^{-1}(f(A)) \quad \text{και} \quad B \supseteq f(f^{-1}(B)).$$

6. Ας είναι $f : X \to Y$ μία απεικόνιση. Τότε, ισχύουν τα εξής:
(α) Η f είναι ένεση, αν και μόνον αν $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ για κάθε $A \subseteq X$ και $B \subseteq X$.
(β) Η f είναι έφεση, αν και μόνον αν $f(A^c) \supseteq f(A)^c$, για κάθε $A \subseteq X$.
(γ) Η f είναι αμφίεση, αν και μόνον αν $f(A^c) = f(A)^c$, για κάθε $A \subseteq X$.

7. Ας είναι $f : X \to Y$ μία απεικόνιση. Αν A και B είναι υποσύνολα του X, τότε ισχύει

$$f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B).$$

8. Ας είναι $f : X \to Y$ μία απεικόνιση. Αν C και D είναι υποσύνολα του Y, τότε ισχύει

$$f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D).$$

9. Ας είναι $f : X \to Y$ μία απεικόνιση. Τότε ισχύουν τα εξής:
(α) Η f είναι έφεση, αν και μόνον αν υπάρχει απεικόνιση $g : Y \to X$ τέτοια, ώστε $f \circ g = I_Y$.
(β) Η f είναι ένεση, αν και μόνον αν υπάρχει απεικόνιση $g : Y \to X$ τέτοια, ώστε $g \circ f = I_X$.

10. Να δειχθεί ότι το σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z}$ είναι αριθμήσιμο.

11. Να δειχθεί ότι το σύνολο των θετικών ρητών είναι αριθμήσιμο.

12. Να δειχθεί ότι κάθε ανοικτό διάστημα των πραγματικών αριθμών έχει την δύναμη του συνεχούς.

13. Ας είναι $m, n, k \in \mathbb{N}$. Τότε ισχύουν τα εξής:
(α) $m < n$ και $n < k \Rightarrow m < k$.
(β) $m < n \Leftrightarrow m + k < n + k$.
(γ) Αν $k \neq 0$, τότε $m < n \Leftrightarrow mk < nk$.

14. (Ανισότητα του Bernoulli) Ας είναι $x \in \mathbb{R}$ με $0 < x < 1$. Ν'

αποδειχθεί, με την χρήση της Μαθηματικής Επαγωγής, ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$ ισχύει:

$$(1-x)^n > 1 - nx.$$

15. Ν' αποδειχθούν οι ιδιότητες (β)-(η) της Πρότασης 1.5.

16. Ας είναι $a + b\imath$, $c + d\imath$, όπου $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ και $\imath = \sqrt{-1}$, δύο μιγαδικοί αριθμοί. Γράφουμε

$$a + b\imath \preceq c + d\imath \iff (a < b) \text{ ή } (a = b \text{ και } c \leq d).$$

Δείξτε ότι η σχέση $\preceq$ είναι μία σχέση διάταξης στο $\mathbb{C}$.

17. Ας είναι A σύνολο και $(X, \leq)$ ένα διατεταγμένο σύνολο. Συμβολίζουμε με $\mathcal{G}(A, X)$ το σύνολο όλων των απεικονίσεων $f : A \to X$ και ορίζουμε την εξής σχέση στο $\mathcal{G}(A, X)$:

$$f \preceq g \iff f(a) \leq g(a) \text{ για κάθε } a \in A.$$

Δείξτε ότι η $\preceq$ είναι μία σχέση διάταξης στο $\mathcal{G}(A, X)$.

18. Στο σύνολο $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ορίζουμε μία σχέση $\mathcal{R}$ ως εξής:

$$x \equiv y \ (\mathcal{R}) \iff xy > 0.$$

Δείξτε ότι η $\mathcal{R}$ είναι μία σχέση ισοδυναμίας επί του $\mathbb{R}^*$ και προσδιορίστε τις κλάσεις της.

19. Στο σύνολο $\mathbb{R}^2$ ορίζουμε την σχέση $\mathcal{R}$ ως εξής:

$$(x_1, y_1) \equiv (x_2, y_2) \ (\mathcal{R}) \iff y_1 - x_1^2 = y_2 - x_2^2.$$

Δείξτε ότι η $\mathcal{R}$ είναι μία σχέση ισοδυναμίας επί του $\mathbb{R}^2$ και προσδιορίστε τις κλάσεις της.

20. Ας είναι $P = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$. Στο σύνολο P ορίζουμε την εξής σχέση:

$$(a_1, \ldots, a_{n+1}) \equiv (b_1, \ldots, b_{n+1}) \ (\mathcal{R})$$

αν και μόνον αν υπάρχει $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ τέτοιο, ώστε

$$a_i = kb_i \ \ (i = 1, \ldots, n+1).$$

Δείξτε ότι η $\mathcal{R}$ είναι μία σχέση ισοδυναμίας επί του P και προσδιορίστε τις κλάσεις της. Το σύνολο πηλίκο $P/\mathcal{R}$ καλείται *προβολικός χώρος διάστασης* n επί του $\mathbb{C}$.

21. Στο σύνολο $\mathbb{R}$ ορίζουμε μία πράξη $*$ ως εξής:

$$x * y = ax + by, \quad \text{όπου } a, b \in \mathbb{R}.$$

Για ποιες τιμές των a και b είναι η παραπάνω πράξη προσεταιριστική;

22. Να δείξετε ότι η πράξη

$$* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \; (a, b) \longmapsto a + b - ab$$

είναι προσεταιριστική, αντιμεταθετική και έχει ουδέτερο στοιχείο.

23. α) Να γραφούν στη μορφή $a + b\imath$ οι εξής μιγαδικοί αριθμοί:

$$\frac{4+7\imath}{2-3\imath}, \quad \frac{9-13\imath}{3-\imath} - \frac{7+4\imath}{2+5\imath}, \quad \left(-\frac{2}{3} + \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2, \quad \left(\frac{1+\imath}{1-\imath}\right)^3.$$

β) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$A = \imath^{34} + \imath^{29} + \imath^{124} + \frac{1}{\imath^{95}}.$$

γ) Να υπολογιστεί ο μιγαδικός αριθμός

$$z = \frac{(1+\imath)^{60}}{(1-\imath\sqrt{3})^{30}}.$$

24. Ας είναι z μιγαδικός αριθμός τέτοιος, ώστε να ισχύει

$$|z + |z|| + |z - |z|| = 2|z|.$$

Να δειχθεί ότι $z \in \mathbb{R}$.

25. Να δειχθεί ότι για κάθε $w, z \in \mathbb{C}$ ισχύει:

$$|z - w|^2 \leq (1 + |z|^2)(1 + |w|^2).$$

26. Ας είναι a και b μιγαδικοί αριθμοί τέτοιοι, ώστε $ab, a + b \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι είτε $a, b \in \mathbb{R}$, είτε $\overline{a} = b$.

27. Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί z που ικανοποιούν την ισότητα

$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 1.$$

28. Να υπολογιστούν τα πρωτεύοντα ορίσματα των αριθμών $-3 \pm 3\imath$, $\sqrt{2} \pm \imath\sqrt{2}$, $-5\imath$, $-4+4\imath$ και $2-(2/\sqrt{3})\imath$.

29. Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $3X^2 + 2X + 1 = 0$,
β) $X^2 + (1+2\imath)X + 2 - \imath = 0$,
γ) $(1+\imath)X^2 - \imath X + 3 + \imath = 0$,
δ) $X^5 - (6+6\imath) = 0$,
ε) $X^4 - (3+\imath\sqrt{3}) = 0$.

30. Να υπολογιστεί το μέτρο και ένα όρισμα του αριθμού

$$z = \frac{(\sin\theta - \imath\cos\theta)^4}{(\cos\theta - \imath\sin\theta)^3}.$$

Κεφάλαιο 2

Ακέραιοι Αριθμοί

Σ′ αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται η κατασκευή του συνόλου των α-κεραίων αριθμών, οι βασικές ιδιότητες της διαιρετότητάς των και εισάγονται οι έννοιες του μέγιστου κοινού διαιρέτη και του ελάχιστου κοινού πολλαπλάσιου. Επίσης, παρουσιάζεται ο Ευκλείδειος αλγόριθμος, εισάγονται οι πρώτοι αριθμοί και εξετάζονται βασικές ιδιότητές τους. Τέλος, μελετάται η έννοια της ισοτιμίας δύο ακεραίων.

2.1 Κατασκευή των Ακεραίων Αριθμών

Ας είναι $m, n \in \mathbb{N}$ και ας θεωρήσουμε την εξίσωση

$$m + x = n.$$

Παρατηρούμε ότι αυτή η εξίσωση δεν έχει πάντα λύση στο $\mathbb{N}$. Δηλαδή, δεν υπάρχει πάντα $x \in \mathbb{N}$ έτσι, ώστε $m + x = n$. Για παράδειγμα, αν υποθέσουμε ότι υπάρχει φυσικός x που επαληθεύει την εξίσωση $3+x = 1$, τότε $2 + x = 0$, απ′ όπου έχουμε $2 = 0$ που είναι άτοπο. Σκοπός αυτής της ενότητας είναι η κατασκευή ενός συνόλου πιο "μεγάλου" από το $\mathbb{N}$, του συνόλου των ακεραίων αριθμών $\mathbb{Z}$, μέσα στο οποίο η παραπάνω εξίσωση θα έχει λύση.

Θεωρούμε λοιπόν το Καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ και ορίζουμε την εξής σχέση σ′ αυτό:

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c.$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η σχέση $\sim$ είναι μία σχέση ισοδυναμίας. Θέτουμε $\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$.

Κεφάλαιο 3

Ομάδες

Σ′ αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε μία από τις πλέον σημαντικές οικογένειες αλγεβρικών δομών, τις ομάδες, με πολλές εφαρμογές σε άλλους κλάδους των Μαθηματικών, καθώς και στη Φυσική, Πληροφορική κ.λ.π. Ειδικότερα, θ′ ασχοληθούμε με βασικές ιδιότητές τους, την παραγωγή υποομάδων από ένα σύνολο, τις μονογενείς ομάδες, τις κανονικές υποομάδες, το Θεώρημα του Lagrange, τους μορφισμούς ομάδων, τα θεωρήματα του Sylow και τις επιλύσιμες ομάδες.

3.1 Ορισμός - Παραδείγματα

Ας είναι G ένα μη κενό σύνολο και $*$ μία πράξη επί του G.

Ορισμός 3.1 Το ζεύγος $(G, *)$ καλείται *ομάδα* αν η πράξη $*$ είναι προσεταιριστική, έχει ουδέτερο στοιχείο και κάθε στοιχείο του G έχει συμμετρικό. Αν επιπλέον η $*$ είναι αντιμεταθετική, τότε η ομάδα καλείται *αντιμεταθετική* ή *αβελιανή*.

Παρατηρούμε ότι μία ομάδα δεν είναι παρά ένα μονοειδές του οποίου κάθε στοιχείο έχει συμμετρικό. Όπως αναφέραμε στην Ενότητα 1.6, συμβολίζουμε συχνά μία πράξη σε ένα σύνολο και επομένως και σε μία ομάδα είτε ως πρόσθεση είτε ως πολλαπλασιασμό. Τότε η ομάδα καλείται προσθετική ή πολλαπλασιαστική, αντίστοιχα. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό του πολλαπλασιασμού για την πράξη μίας τυχούσας ομάδας και με 1 το ουδέτερο στοιχείο.

Ας είναι G μία πολλαπλασιαστική ομάδα. Από την Πρόταση 1.22 έχουμε ότι για κάθε $a, b \in G$ ισχύει:

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}.$$

Επίσης, για κάθε $a \in G$, έχουμε $(a^{-1})^{-1} = a$.

Επιπέον, ισχύουν οι εξής νόμοι απλοποίησης:

$$xa = xb \Longrightarrow a = b, \qquad ax = bx \Longrightarrow a = b.$$

Πολλαπλασιάζοντας την ισότητα $xa = xb$ από αριστερά με x^{-1} παίρνουμε

$$x^{-1}(xa) = x^{-1}(xb) \Longrightarrow (x^{-1}x)a = (x^{-1}x)b \Longrightarrow 1a = 1b$$

και επομένως $a = b$. Η απόδειξη της δεύτερης συνεπαγωγής είναι ανάλογη.

Στην Ενότητα 1.6 ορίσαμε τις δυναμεις των στοιχείων ενός μονοειδούς για εκθέτες φυσικούς αριθμούς. Έτσι, αν $a \in G$ και $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $a^0 = 1$ και $a^n = a^{n-1}a$ αν $n > 0$. Επίσης, ορίζουμε

$$a^{-n} = (a^{-1})^n.$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι για $m, n \in \mathbb{Z}$ ισχύουν οι ισότητες:

$$a^{m+n} = a^m a^n, \ \ (a^m)^n = a^{mn}.$$

Ορισμός 3.2 Ας είναι G μία ομάδα. Αν η G έχει πεπερασμένο αριθμό στοιχείων, τότε καλούμε αυτόν τον αριθμό *τάξη* της G. Διαφορετικά, η G καλείται *άπειρης τάξης*.

Στη συνέχεια θα δώσουμε μερικά παραδείγματα ομάδων.

Παράδειγμα 3.1 Τα σύνολα $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ και $\mathbb{C}$ εφοδιασμένα με την συνηθισμένη πρόσθεση αποτελούν αντιμεταθετικές ομάδες. Επίσης, τα σύνολα $\mathbb{Q}^\star = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^\star = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ και $\mathbb{C}^\star = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ εφοδιασμένα με τον συνηθισμένο πολλαπλασιασμό αποτελούν αντιμεταθετικές ομάδες.

Παράδειγμα 3.2 Σύμφωνα με Πόρισμα 2.8 το σύνολο $\mathbb{Z}_n$ εφοδιασμένο με την πρόσθεση των κλάσεων αποτελεί αντιμεταθετική ομάδα. Επίσης, το σύνολο U_n εφοδιασμένο με τον πολλαπλασιασμό των κλάσεων αποτελεί επίσης αντιμεταθετική ομάδα.

Κεφάλαιο 4

Δακτύλιοι

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι η παρουσίαση της βασικής θεωρίας μίας άλλης σημαντικής οικογένειας αλγεβρικών δομών, τών δακτυλίων, με πολλές εφαρμογές σε άλλες περιοχές των Μαθηματικών αλλά και σε κλάδους όπως η Θεωρία Κωδίκων και η Κρυπτογραφία. Ειδικότερα, θα δώσουμε τις βασικές ιδιότητες των ιδεωδών τους, των μορφισμών τους, θα κατασκευάσουμε το σώμα κλασμάτων ενός πεδίου ακεραιότητας και θα εισάγουμε τα πρώτα και τα τοπικά μέγιστα ιδώδη.

4.1 Βασικές Έννοιες

Ας είναι A ένα μη κενό σύνολο εφοδιασμένο με δύο πράξεις, μία πρόσθεση $(x, y) \to x + y$ και ένα πολλαπλασιασμό $(x, y) \to xy$.

Ορισμός 4.1 Η τριάδα $(A, +, \cdot)$ καλείται *δακτύλιος* αν οι παραπάνω πράξεις έχουν τις εξής ιδιότητες:
(α) Το ζεύγος $(A, +)$ είναι μία αβελιανή ομάδα.
(β) Το ζεύγος $(A, \cdot)$ είναι ένα μονοειδές.
(γ) Ο πολλαπλασιασμός είναι επιμεριστικός ως προς την πρόσθεση, δηλαδή για κάθε $x, y, z \in A$ έχουμε

$$(x + y)z = xz + yz \qquad \text{και} \qquad x(y + z) = xy + xz.$$

Αν για κάθε $x, y \in A$ ισχύει $xy = yx$, τότε ο δακτύλιος A καλείται *αντιμεταθετικός*.

Καθώς αναφέραμε και στην Ενότητα 1.6, θα συμβολίζουμε με 0 και 1 τα ουδέτερα στοιχεία του A για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό και θα τα καλούμε μηδενικό και μοναδιαίο στοιχείο του A,

αντίστοιχα. Επίσης, αν $x \in A$, τότε θα συμβολίζουμε με $-x$ το αντίθετο στοιχείο και με x^{-1} το αντίστροφό του (αν υπάρχει).

Παράδειγμα 4.1 Τα σύνολα $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ και $\mathbb{C}$ εφοδιασμένα με την συνηθισμένη πρόσθεση και πολλαπλασιασμό είναι αντιμεταθετικοί δακτύλιοι.

Παράδειγμα 4.2 Ας είναι n ένας θετικός ακέραιος. Το σύνολο $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \dots, \overline{n-1}\}$ εφοδιασμένο με την πρόσθεση και των πολλαπλασιασμό των κλάσεων

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}, \quad \bar{a}\bar{b} = \overline{ab},$$

είναι ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος.

Παράδειγμα 4.3 Ας είναι S ένα μη κενό σύνολο και A ένας δακτύλιος. Συμβολίζουμε με $F(S, A)$ το σύνολο των απεικονίσεων με πεδίο ορισμού το S και με τιμές στο A. Αν $f, g \in F(S, A)$, τότε ορίζουμε τις απεικονίσεις

$$f + g : S \longrightarrow A, \ x \longmapsto f(x) + g(x)$$

και

$$fg : S \longrightarrow A, \ x \longmapsto f(x)g(x).$$

Έτσι, έχουμε μία πρόσθεση $(f, g) \mapsto f + g$ και ένα πολλαπλασιασμό $(f, g) \mapsto fg$ επί του $F(S, A)$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $F(S, A)$ εφοδιασμένο με αυτές τις δύο πράξεις αποτελεί δακτύλιο.

Από το Παράδειγμα 3.8 έχουμε ότι το σύνολο $F(S, A)$ εφοδιασμένο με την παραπάνω πρόσθεση αποτελεί αβελιανή ομάδα. Το μηδενικό της στοιχείο είναι η απεικόνιση

$$\mathbf{O} : S \longrightarrow A, \ x \longmapsto 0.$$

Επίσης, το αντίθετο στοιχείο μίας απεικόνισης $f \in F(S, A)$ είναι η απεικόνιση

$$-f : S \longrightarrow A, \ x \longmapsto -f(x).$$

Από την άλλη πλευρά, από το Παράδειγμα 1.38 έπεται ότι το σύνολο $F(S, A)$ εφοδιασμένο με τον παραπάνω πολλαπλασιασμό αποτελεί μονοειδές με μοναδιαίο στοιχείο την απεικόνιση

$$\mathbf{1} : S \longrightarrow A, \ x \longmapsto 1.$$

Κεφάλαιο 5

Πολυώνυμα

Σ΄ αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε τον δακτύλιο των πολυωνύμων μίας μεταβλητής με στοιχεία από ένα σώμα. Πιο συγκεκριμένα, θ΄ ασχοληθούμε με την διαιρετότητας των πολυωνύμων, τον αλγόριθμο του Ευκλείδη, τα ανάγωγα πολυώνυμα, τις ρίζες των πολυωνύμων και τις τυπικές παραγώγους τους. Επιπλέον θα παραθέσουμε μία απόδειξη του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Άλγεβρας σύμφωνα με το οποίο κάθε πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές έχει μία μιγαδική ρίζα, και τέλος θα δώσουμε την μέθοδο επίλυσης των εξισώσεων τρίτου και τετάρτου βαθμού.

5.1 Ο Δακτύλιος των Πολυωνύμων

Ας είναι A ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος. Συμβολίζουμε με $F(A)$ το σύνολο των συναρτήσεων $f : \mathbb{N} \to A$ οι οποίες μηδενίζονται σε όλα τα στοιχεία του $\mathbb{N}$ εκτός ενός πεπερασμένου συνόλου. Για $f, g \in F(A)$ ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$f + g : \mathbb{N} \longrightarrow A,\ x \longmapsto f(x) + g(x)$$

και

$$fg : \mathbb{N} \longrightarrow A,\ x \longmapsto \sum_{y+z=x} f(y)g(z).$$

Οι συναρτήσεις $f+g$ και fg ανήκουν στο $F(A)$ και καλούνται *άθροισμα* και *γινόμενο* των f και g, αντίστοιχα. Ετσι, έχουμε ορίσει μία πρόσθεση και ένα πολλαπλασιασμό για τα στοιχεία του $F(A)$.

Πρόταση 5.1 *Το σύνολο $F(A)$ εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού δομείται σε αντιμεταθετικό δακτύλιο.*

Απόδειξη. Ας είναι $f, g, h \in F(A)$. Τότε για κάθε $x \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned}((f+g)+h)(x) &= (f+g)(x)+h(x) = (f(x)+g(x))+h(x) \\ &= f(x)+(g(x)+h(x)) = f(x)+(g+h)(x) = (f+(g+h))(x)\end{aligned}$$

και

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = g(x)+f(x) = (g+f)(x).$$

Επομένως, ισχύει

$$(f+g)+h = f+(g+h) \quad \text{και} \quad f+g = g+f.$$

Συνεπώς, η πρόσθεση είναι προσεταιριστική και αντιμεταθετική πράξη. Αν f_0 είναι η συνάρτηση του $F(A)$ η οποία απεικονίζει κάθε στοιχείο του $\mathbb{N}$ στο 0, τότε για κάθε $f \in F(A)$ και $x \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$(f+f_0)(x) = f(x)+f_0(x) = f(x)+0 = f(x)$$

και επομένως $f + f_0 = f$. Καθώς η πρόσθεση είναι αντιμεταθετική πράξη, ισχύει επίσης $f_0 + f = f$. Άρα η συνάρτηση f_0 είναι το ουδέτερο στοιχείο για την πρόσθεση. Για κάθε $f \in F(A)$ ορίζουμε την συνάρτηση

$$-f : \mathbb{N} \longrightarrow A, \ x \longmapsto -f(x).$$

Εύκολα προκύπτει ότι

$$f+(-f) = f_0 = (-f)+f.$$

Επομένως, η συνάρτηση $-f$ είναι το αντίθετο στοιχείο της f. Για κάθε $x \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$(fg)(x) = \sum_{y+z=x} f(y)g(z) = \sum_{y+z=x} g(y)f(z) = (gf)(x)$$

και επομένως έχουμε $fg = gf$. Άρα, ο πολλαπλασιασμός είναι αντιμεταθετική πράξη. Ας είναι f_1 η συνάρτηση του $F(A)$ με $f_1(0) = 1$ και $f_1(x) = 0$ για κάθε $x \neq 0$. Τότε για κάθε $x \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$(ff_1)(x) = \sum_{y+z=x} f(y)f_1(z) = f(x)f_1(0) = f(x).$$

Κεφάλαιο 6

Πίνακες

Το κεφάλαιο αυτό είναι αφιερωμένο στη μελέτη της βασικής Θεωρίας των Πινάκων, ενός σημαντικού εργαλείου της άλγεβρας. Πιο συγκεκριμένα, παρουσιάζονται οι βασικές ιδιότητες των πράξεών τους, εισάγονται οι κλιμακωτοί πίνακες, οι ορίζουσες, η βαθμίδα πίνακα και η μέθοδος επίλυσης συστημάτων γραμμικών εξισώσεων με την χρήση αυτών των εννοιών.

6.1 Ορισμοί - Βασικές Ιδιότητες

Ας είναι K ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος με $K \neq \{0\}$ και m, n θετικοί ακέραιοι.

Ορισμός 6.1 Καλούμε $m \times n$ *πίνακα με στοιχεία από το* K ένα ορθογώνιο σχήμα με m γραμμές και n στήλες

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix},$$

που σχηματίζονται από mn στοιχεία $a_{i,j} \in K$ ($i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n$). Ο $1 \times n$ πίνακας $(a_{i,1}, \dots, a_{i,n})$ καλείται i-οστή γραμμή του A και ο $m \times 1$-πίνακας

$$\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix}$$

j-οστή στήλη του A. Το στοιχείο $a_{i,j}$ που βρίσκεται στη διασταύρωση της i-γραμμής και της j-στήλης καλείται (i,j)-*στοιχείο* του πίνακα A. Συχνά θα γράφουμε για συντομία $A = (a_{i,j})_{m\times n}$ ή $A = (a_{i,j})$. Αν $m = n$, τότε ο πίνακας A καλείται *τετραγωνικός*.

Συμβολίζουμε με $M_{m\times n}(K)$ το σύνολο των $m\times n$-πινάκων με στοιχεία από το σώμα K. Αν $m = n$, τότε θα γράφουμε πιο απλά $M_n(K)$.

Ορισμός 6.2 Ας είναι $A = (a_{i,j})$ ένας πίνακας του $M_n(K)$. Η n-άδα $(a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n})$ καλείται *κύρια διαγώνιος* του A. Ο πίνακας A καλείται *διαγώνιος*, αν $a_{i,j} = 0$ για κάθε i, j με $i \neq j$, *άνω τριγωνικός*, αν $a_{i,j} = 0$ για κάθε i, j με $i > j$ και *κάτω τριγωνικός*, αν $a_{i,j} = 0$ για κάθε i, j με $i < j$.

Δηλαδή, ο πίνακας A είναι διαγώνιος, αν και μονον αν όλα τα στοιχεία του εκτός αυτά της κυρίας διαγωνίου είναι μηδέν. Επίσης, ο πίνακας A είναι άνω τριγωνικός (αντίστοιχα κάτω τριγωνικός), αν και μονον αν όλα τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω (αντίστοιχα άνω) από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν.

Παράδειγμα 6.1 Από τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

ο A είναι διαγώνιος, ο B άνω τριγωνικός και ο C κάτω τριγωνικός.

Ορισμός 6.3 Καλούμε τους πίνακες $A = (a_{i,j})$ και $B = (b_{i,j})$ του $M_{m\times n}(K)$ *ίσους*, και γράφουμε $A = B$, αν ισχύει $a_{i,j} = b_{i,j}$, για κάθε $i = 1, \dots, m$ και $j = 1, \dots, n$.

Ας είναι $A = (a_{i,j})$ και $B = (b_{i,j})$ δύο πίνακες του $M_{m\times n}(K)$. Ορίζουμε ως άθροισμα των A και B τον πίνακα

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j}).$$

Μ′ αυτό τον τρόπο ορίζεται η πρόσθεση στο σύνολο $M_{m\times n}(K)$.

Κεφάλαιο 7

Γραμμικοί Χώροι

Σ' αυτό το κεφάλαιο εισάγουμε τους γραμμικούς χώρους, μία ιδιαίτερα σημαντική δομή η οποία χρησιμοποιείται σε πολλούς κλάδους των Μαθηματικών και των εφαρμογών τους. Θα μελετήσουμε τους υποχώρους τους, τα γραμμικά ανεξάρτητα υποσύνολά τους καθώς και τις βάσεις τους.

7.1 Ορισμός - Παραδείγματα

Ας είναι K ένα σώμα.

Ορισμός 7.1 Καλούμε *γραμμικό* ή *διανυσματικό χώρο* επί του K (αντίστοιχα K-γραμμικό ή K-διανυσματικό χώρο) κάθε μη-κενό σύνολο V εφοδιασμένο με μία *πρόσθεση*

$$V \times V \longrightarrow V,\ (x, y) \longmapsto x + y$$

και ένα *βαθμωτό πολλαπλασιασμό*

$$K \times V \longrightarrow V,\ (k, x) \longmapsto kx$$

με τις εξής ιδιότητες:
(α) Το ζεύγος $(V, +)$ αποτελεί αβελιανή ομάδα.
(β) Για κάθε $x, y \in V$ και $a, b \in K$ ισχύουν τα παρακάτω:

1. $a(x + y) = ax + ay$,

2. $(a + b)x = ax + bx$,

3. $a(bx) = (ab)x$,

4. $1x = x$.

Συχνά τα στοιχεία του V καλούνται *διανύσματα*.

Ας είναι V ένας γραμμικός χώρος επί ενός σώματος K. Θα χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο 0 για να σημειώνουμε το μηδενικό στοιχείο του K και του V σε κάθε περίπτωση κατά την οποία δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης. Έχουμε τις παρακάτω στοιχειώδεις ιδιότητες:

1. Για κάθε $k \in K$ ισχύει $k0 = 0$.

2. Για κάθε $v \in V$ ισχύει $0v = 0$.

3. Για κάθε $v \in V$ ισχύει $(-1)v = -v$.

4. Αν για $k \in K$ και $v \in V$ ισχύει $kv = 0$, τότε $k = 0$ ή $v = 0$.

5. Αν $k \in K \setminus \{0\}$ και $u, v \in V$ με $ku = kv$, τότε $u = v$.

6. Αν $k, l \in K$ και $v \in V \setminus \{0\}$ με $kv = lv$, τότε $k = l$.

Για την απόδειξη της πρώτης σχέσης έχουμε

$$k0 + k0 = k(0 + 0) = k0 = k0 + 0,$$

απ΄ όπου $k0 = 0$.

Στη συνέχεια, έχουμε

$$0v + 0v = (0 + 0)v = 0v = 0v + 0$$

και επομένως $0v = 0$ που αποδεικνύει την δεύτερη σχέση.

Για την επόμενη σχέση έχουμε

$$(-1)v + v = (-1)v + 1v = (-1 + 1)v = 0v = 0,$$

απ΄ όπου $(-1)v = -v$.

Για την απόδειξη της τέταρτης σχέσης παρατηρούμε ότι αν $k \neq 0$, τότε, πολλαπλασιάζοντας από αριστερά την ισότητα $kv = 0$ με k^{-1}, παίρνουμε $(k^{-1}k)v = 0$, απ΄ όπου $1v = 0$. Άρα $v = 0$.

Οι επόμενες δύο σχέσεις είναι συνέπειες της τέταρτης. Πράγματι, από την σχέση $ku = kv$ έχουμε $k(u - v) = 0$ και, καθώς $k \neq 0$, η σχέση (4) μας δίνει $u - v = 0$, απ΄ όπου $u = v$. Όμοια, αν $kv = lv$,

τότε $(k-l)v = 0$ και, καθώς $v \neq 0$, από την σχέση (4) παίρνουμε $k - l = 0$, απ' όπου $k = l$.

Στη συνέχεια θα δώσουμε μερικά παραδείγματα γραμμικών χώρων.

Παράδειγμα 7.1 Ας είναι L ένα σώμα και K ένα υπόσωμά του. Τότε το L είναι ένας γραμμικός χώρος επί του K. Πράγματι, το L με την πρόσθεσή του αποτελεί αβελιανή ομάδα και εύκολα διαπιστώνουμε ότι ο πολλαπλασιασμός των στοιχείων του K με τα στοιχεία του L ορίζει ένα βαθμωτό πολλαπλασιασμό. Έτσι, τα σύνολα $\mathbb{R}$ και $\mathbb{C}$ είναι γραμμικοί χώροι επί του $\mathbb{Q}$. Επίσης, το σύνολο $\mathbb{C}$ είναι γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 7.2 Ας είναι K ένα σώμα. Τότε ο δακτύλιος των πολυωνύμων $K[X]$ είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του K. Πράγματι, το $K[X]$ με την πρόσθεση των πολυωνύμων είναι αβελιανή ομάδα και, καθώς εύκολα διαπιστώνουμε, ο πολλαπλασιασμός ενός στοιχείου του K μ' ένα πολυώνυμο του $K[X]$ ορίζει ένα βαθμωτό πολλαπλασιασμό.

Παράδειγμα 7.3 Ας είναι K ένα σώμα. Τότε, σύμφωνα με την Ενότητα 6.1, το σύνολο $M_{m\times n}(K)$ αποτελεί γραμμικό χώρο επί του K με πράξεις την πρόσθεση πινάκων και τον πολλαπλασιασμό των στοιχείων του K με τους πίνακες του $M_{m\times n}(K)$.

Παράδειγμα 7.4 Θα δείξουμε ότι το Καρτεσιανό σύνολο K^n είναι γραμμικός χώρος επί του K. Αν $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ και $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ είναι στοιχεία του K^n, τότε ορίζουμε το άθροισμά τους $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ από την σχέση

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = (x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n).$$

Έτσι, έχουμε ορίσει μία πράξη επί του K^n η οποία, σύμφωνα με το Παράδειγμα 3.5, δομεί το σύνολο K^n σε αντιμεταθετική ομάδα. Το μηδενικό της στοιχείο είναι το $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ και το αντίθετο ενός στοιχείου $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ το $(-x_1, \ldots, -x_n)$.

Επίσης, αν $k \in K$ και $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$, τότε ορίζουμε το βαθμωτό γινόμενό τους $k\mathbf{x}$ από την σχέση

$$k\mathbf{x} = (kx_1, \ldots, kx_n).$$

Αν $a, b \in K$ και $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ είναι στοιχεία του K^n, τότε έχουμε τα εξής:

$$a(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \;=\; a(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n)$$

$$\begin{aligned} &= (a(x_1+y_1),\dots,a(x_n+y_n)) \\ &= (ax_1+ay_1,\dots,ax_n+ay_n) \\ &= (ax_1,\dots,ax_n)+(ay_1,\dots,ay_n) \\ &= a\mathbf{x}+a\mathbf{y}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a+b)\mathbf{x} &= ((a+b)x_1,\dots,(a+b)x_n) \\ &= (ax_1+bx_1,\dots,ax_n+bx_n) \\ &= (ax_1,\dots,ax_n)+(bx_1,\dots,bx_n) \\ &= a\mathbf{x}+b\mathbf{x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(b\mathbf{x}) &= a(bx_1,\dots,bx_n) \\ &= (a(bx_1),\dots,a(bx_n)) \\ &= ((ab)x_1,\dots,(ab)x_n) \\ &= (ab)\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Τέλος, ισχύει

$$1\mathbf{x} = (1x_1,\dots,1x_n) = (x_1,\dots,x_n) = \mathbf{x}.$$

Συνεπώς, το σύνολο K^n είναι γραμμικός χώρος επί του K.

Παράδειγμα 7.5 Ας είναι S ένα μη κενό σύνολο και V ένας γραμμικός χώρος επί του K. Θεωρούμε το σύνολο $F(S,V)$ των απεικονίσεων από το S στο V. Ορίζουμε ως άθροισμα δύο απεικονίσεων $f,g \in F(S,V)$ την απεικόνιση

$$f+g : S \longrightarrow V,\ x \longmapsto f(x)+g(x)$$

και ως γινόμενο ενός στοιχείου $k \in K$ με μία απεικόνιση $f \in F(S,V)$ την απεικόνιση

$$kf : S \longrightarrow V,\ x \longmapsto kf(x).$$

Σύμφωνα με το Παράδειγμα 3.8, το σύνολο $F(S,V)$ με την παραπάνω πρόσθεση είναι μία αβελιανή ομάδα.

Ας είναι $a,b \in K$, $x \in S$ και $f,g \in F(S,V)$. Τότε έχουμε τα εξής:

$$\begin{aligned} &(a(f+g))(x) = a(f+g)(x) = a(f(x)+g(x)) = \\ &\qquad af(x)+ag(x) = (af)(x)+(ag)(x) = (af+ag)(x), \end{aligned}$$

$$((a+b)f)(x) = (a+b)f(x) = af(x) + bf(x) = (af + bf)(x),$$

$$(a(bf))(x) = a(bf)(x) = a(bf(x)) = (ab)f(x) = ((ab)f)(x),$$

Τέλος $(1f)(x) = 1f(x) = f(x)$. Επομένως, ισχύουν τα παρακάτω:

1. $a(f+g) = af + ag$,

2. $(a+b)f = af + bf$,

3. $a(bf) = (ab)f$,

4. $1f = f$.

Συνεπώς, το σύνολο $F(S, V)$ είναι ένας γραμμικός χώρος επί του K.

Παράδειγμα 7.6 Ας είναι $V_1, \ldots, V_k$ γραμμικοί χώροι επί του σώματος K. Αν $(v_1, \ldots, v_n)$ και $(w_1, \ldots, w_n)$ είναι δύο στοιχεία του Καρτεσιανού γινομένου $V = V_1 \times \cdots \times V_k$, τότε ορίζουμε το άθροισμά τους ως εξής:

$$(v_1, \ldots, v_n) + (w_1, \ldots, w_n) = (v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n).$$

Έτσι, έχουμε μία πρόσθεση επί του V η οποία, σύμφωνα με το Παράδειγμα 3.5, δομεί το σύνολο V σε αβελιανή ομάδα. Αν $k \in K$ και $(v_1, \ldots, v_n) \in V$, τότε ορίζουμε το βαθμωτό τους γινόμενο ως εξής:

$$k(v_1, \ldots, v_n) = (kv_1, \ldots, kv_n).$$

Εύκολα βλέπουμε ότι ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός που ορίστηκε μ' αυτό τον τρόπο ικανοποιεί τα αξιώματα του γραμμικού χώρου. Συνεπώς, το σύνολο V είναι ένας γραμμικός χώρος επί του K που καλείται *γινόμενο* των γραμμικών χώρων $V_1, \ldots, V_k$.

Παράδειγμα 7.7 Ο αναγνώστης που είναι εξοικειωμένος με την στοιχειώδη Αναλυτική Γεωμετρία θα διαπιστώσει εύκολα ότι το σύνολο των διανυσμάτων του $\mathbb{R}^3$, με την συνήθη πρόσθεση και πολλαπλασιασμό επί πραγματικό αριθμό, αποτελεί γραμμικό χώρο επί του $\mathbb{R}$.

Κεφάλαιο 8

Γραμμικές Απεικονίσεις

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι η μελέτη των γραμμικών απεικονίσεων, δηλαδή απεικονίσεων μεταξύ γραμμικών χώρων οι οποίες διατηρούν την δομή τους. Θα εξετάσουμε βασικές τους ιδιότητες, την παράστασή τους από πίνακα, τις ιδιοτιμές τους, την διαγωνιοποίησή τους, το ελάχιστο πολυώνυμο τους καθώς και την κανονική μορφή του Jordan.

8.1 Ορισμός - Βασικές Ιδιότητες

Ας είναι V, W δύο γραμμικοί χώροι επί του σώματος K και $f : V \to W$ μία απεικόνιση.

Ορισμός 8.1 Η απεικόνιση f καλείται *γραμμική,* αν ισχύουν οι εξής δύο ιδιότητες:

(α) Για κάθε $x, y \in V$ έχουμε

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

(β) Για κάθε $a \in K$ και $x \in V$ έχουμε

$$f(ax) = af(x).$$

Αν η γραμμική απεικόνιση f είναι ένεση (αντίστοιχα έφεση), τότε καλείται *μονομορφισμός* (αντίστοιχα *επιμορφισμός*). Αν η γραμμική απεικόνιση f είναι συγχρόνως ένεση και έφεση, τότε καλείται *ισομορφισμός.* Στη περίπτωση όπου η f είναι ισομορφισμός, λέμε ότι οι γραμμικοί χώροι V και W είναι *ισόμορφοι* και γράφουμε $V \cong W$. Αν $W = V$,

τότε η γραμμική απεικόνιση f καλείται *ενδομορφισμός*. Επίσης, αν $W = V$ και η f είναι ισομορφισμός, τότε καλείται *αυτομορφισμός*.

Παρατηρούμε ότι μία γραμμική απεικόνιση $f : V \to W$ είναι μορφισμός των αντιστοίχων αβελιανών ομάδων. Έτσι, σύφωνα με την Πρόταση 3.15 έχουμε $f(0) = 0$ και για κάθε $v \in V$ ισχύει $f(-v) = -f(v)$. Αν U είναι γραμμικός υποχώρος του V, τότε το σύνολο $f(U)$ είναι υποομάδα της W. Επίσης, αν $a \in K$ και $u \in U$ έχουμε $af(u) = f(au) \in f(U)$ και κατά συνέπεια το σύνολο $f(U)$ είναι γραμμικός υποχώρος του W. Όμοια, αν E είναι γραμμικός υποχώρος του W, τότε το σύνολο $f^{-1}(E)$ είναι γραμμικός υποχώρος του V. Πραγματικά, το σύνολο $f^{-1}(E)$ είναι υποομάδα του V και για κάθε $x \in f^{-1}(E)$ και $a \in K$ έχουμε $f(ax) = af(x) \in E$ και επομένως $ax \in f^{-1}(E)$. Συνεπώς, το σύνολο $f^{-1}(E)$ είναι γραμμικός υποχώρος του V. Ειδικότερα, ο πυρήνας $\mathrm{Ker}(f)$ της f είναι γραμμικός υπόχωρος του V.

Συμβολίζουμε με $L(V, W)$ το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων $f : V \to W$ και με $\mathrm{End}(V)$ το σύνολο των ενδομορφισμών του V. Σύμφωνα με το Παράδειγμα 7.5 το σύνολο $F(V, W)$ είναι ένας γραμμικός χώρος επί του K. Θα δούμε ότι το σύνολο $L(V, W)$ είναι ένας γραμμικός υποχώρος του. Ας είναι λοιπόν $f, g \in L(V, W)$ και $a, b \in K$. Για κάθε $k \in K$ και $x, y \in V$ έχουμε

$$\begin{aligned}
(af + bg)(x + y) &= (af)(x + y) + (bg)(x + y) \\
&= af(x + y) + bg(x + y) \\
&= a(f(x) + f(y)) + b(g(x) + g(y)) \\
&= (af + bg)(x) + (af + bg)(y)
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
(af + bg)(kx) &= (af)(kx) + (bg)(kx) \\
&= af(kx) + bg(kx) \\
&= akf(x) + bkg(x) \\
&= k[(af)(x) + (bg)(x)] \\
&= [k(af + bg)](x).
\end{aligned}$$

Άρα, η απεικόνιση $af + bg$ είναι γραμμική και κατά συνέπεια το σύνολο $L(V, W)$ είναι ένας γραμμικός υποχώρος του $F(V, W)$. Θα συμβολίζουμε με $\mathbf{O}$ το μηδενικό του στοιχείο.

Στη συνέχεια θα δούμε ότι οι δύο ιδιότητες του ορισμού μπορούν να συμπτυχθούν στη παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 8.1 *Η απεικόνιση f είναι γραμμική αν και μόνον αν για κάθε $x, y \in V$ και $a, b \in K$ έχουμε*

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y).$$

Απόδειξη. Ας είναι η απεικόνιση f είναι γραμμική. Αν $x, y \in V$ και $a, b \in K$, τότε, εφαρμόζοντας διαδοχικά τις ιδιότητες (α) και (β) του ορισμού, παίρνουμε

$$f(ax + by) = f(ax) + f(by) = af(x) + bf(y).$$

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι για κάθε $x, y \in V$ και $a, b \in K$ έχουμε

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y).$$

Θέτοντας $a = b = 1$ παίρνουμε την ιδιότητα (α) του ορισμού και θέτοντας $b = 0$ την (β). Επομένως, η απεικόνιση f είναι γραμμική.

Πρόταση 8.2 *Η σύνθεση δύο γραμμικών απεικονίσεων είναι γραμμική απεικόνιση.*

Απόδειξη. Ας είναι V, W και U γραμμικοί χώροι επί του σώματος K και $f : V \to W$ και $g : W \to U$ δύο γραμμικές απεικονίσεις. Τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 3.16, η σύνθεση τους είναι μορφισμός ομάδων. Αν $x \in V$ και $a \in K$, τότε

$$(g \circ f)(ax) = g(f(ax)) = g(af(x)) = ag(f(x)) = a(g \circ f)(x).$$

Συνεπώς, η απεικόνιση $g \circ f$ είναι γραμμική απεικόνιση.

Πρόταση 8.3 *Ας είναι $f : V \to W$ ένας ισομορφισμός γραμμικών χώρων επί του σώματος K. Τότε η απεικόνιση $f^{-1} : W \to V$ είναι επίσης γραμμική.*

Απόδειξη. Από την Πρόταση 3.17, έχουμε ότι η απεικόνιση f^{-1} είναι μορφισμός ομάδων. Επίσης, αν $y \in W$ και $a \in K$, τότε υπάρχει $x \in V$ με $y = f(x)$ και επομένως

$$f^{-1}(ay) = f^{-1}(af(x)) = f^{-1}(f(ax)) = ax = af^{-1}(y).$$

Συνεπώς, η απεικόνιση f^{-1} είναι γραμμική.

Στη συνέχεια θα δώσουμε μερικά παραδείγματα γραμμικών απεικονίσεων.

Παράδειγμα 8.1 Για κάθε γραμμικό χώρο V η ταυτοτική απεικόνιση I_V είναι προφανώς γραμμική.

Παράδειγμα 8.2 Η απεικόνιση $\psi_{m,n} : M_{m\times n}(K) \to K^{mn}$ η οποία σε κάθε πίνακα $A = (a_{i,j})$ απεικονίζει το διάνυσμα

$$\psi_{m,n}(A) = (a_{1,1}, \dots, a_{1,n}, a_{2,1}, \dots, a_{2,n}, \dots, a_{m,n})$$

είναι ισομορφισμός γραμμικών χώρων.

Παράδειγμα 8.3 Ας είναι $A \in M_{m\times n}(K)$. Οι απεικονίσεις

$$f_A : M_{n\times r}(K) \longrightarrow M_{m\times r}(K),\ X \longmapsto AX$$

και

$$g_A : M_{r\times m}(K) \longrightarrow M_{r\times n}(K),\ X \longmapsto XA$$

είναι γραμμικές. Πράγματι, αν $X, Y \in M_{n\times r}(K)$ και $a, b \in K$, τότε

$$\begin{aligned} f_A(aX + bY) &= A(aX + bY) = \\ &A(aX) + A(bY) = a(AX) + b(AY) = af_A(X) + bf_A(Y). \end{aligned}$$

Έτσι, σύμφωνα με την Πρόταση 8.1, η απεικόνιση f είναι γραμμική. Ανάλογα, δείχνουμε ότι και η απεικόνιση g είναι γραμμική.

Παράδειγμα 8.4 Ας είναι $A = (a_{i,j})$ ένας πίνακας του $M_{m\times n}(K)$. Η απεικόνιση

$$h : K^n \longrightarrow K^m,\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{m,j}x_j)$$

είναι γραμμική. Για να το δούμε αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $h = \psi_{n,1} \circ f_A \circ \psi_{m,1}^{-1}$, απ' όπου η Πρόταση 8.2 δίνει το αποτέλεσμα.

Παράδειγμα 8.5 Ας είναι $A = (a_{i,j})$ ένας πίνακας του $M_n(K)$. Το στοιχείο

$$Tr(A) = a_{1,1} + \cdots + a_{n,n}$$

καλείται *ίχνος* του A. Για παράδειγμα, αν

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix},$$

Κεφάλαιο 9

Χώροι με Εσωτερικό Γινόμενο

Το κεφάλαιο αυτό είναι αφιερωμένο στη μελέτη των γραμμικών χώρων εφοδιασμένων με εσωτερικό γινόμενο. Θα μελετήσουμε τις ορθοκανονικές βάσεις τους, τις ισομετρίες τους καθώς και τους προσαρτημένους των ενδομορφισμών τους. Επίσης, θα εξετάσουμε τις οικογένειες των αυτοπροσαρτημένων και κανονικών ενδομορφισμών τους οι οποίοι είναι διαγωνιοποιήσιμοι. Τέλος, χρησιμοποιώντας ιδιότητες των αυτοπροσαρτημένων ενδομορφισμών, θα μελετήσουμε τις τετραγωνικές μορφές.

9.1 Εσωτερικό Γινόμενο

Ας είναι $K = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ και V ένας γραμμικός χώρος επί του K. Αν $x = a + b\imath$ (όπου $\imath = \sqrt{-1}$) είναι ένας μιγαδικός αριθμός, τότε θα συμβολίζουμε, ως συνήθως, με $\overline{x}$ τον συζυγή του, δηλαδή $\overline{x} = a - b\imath$.

Ορισμός 9.1 Ένα *εσωτερικό γινόμενο* επί του V είναι μία απεικόνιση

$$< \, , \, >: V \times V \longrightarrow K, \ (x, y) \longmapsto < x, y >$$

η οποία έχει τις εξής ιδιότητες:
(α) $< u_1 + u_2, v >=< u_1, v > + < u_2, v >$, για κάθε $u_1, u_2, v \in V$.
(β) $< ku, v >= k < u, v >$, για κάθε $u, v \in V$ και $k \in K$.
(γ) $< u, v >= \overline{< v, u >}$, για κάθε $u, v \in V$.
(δ) $< u, u >\geq 0$ και η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν $u = 0$.

Ο γραμμικός χώρος V εφοδιασμένος μ΄ ένα εσωτερικό γινόμενο καλείται *Ευκλείδειος* αν $K=\mathbb{R}$ και *Ερμητιανός* αν $K=\mathbb{C}$.

Παρατηρούμε ότι αν $K=\mathbb{R}$ η ιδιότητα (γ) γράφεται

$$< u, v >=< v, u > .$$

Από τις ιδιότητες (α), (β) και (γ) έπεται ότι για κάθε $k, l \in K$ και $u_1, u_2, v \in V$ ισχύει

$$< ku_1 + lu_2, v >= k < u_1, v > +l < u_2, v >$$

και

$$< v, ku_1 + lu_2 >= \bar{k} < v, u_1 > +\bar{l} < v, u_2 > .$$

Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned} < ku_1 + lu_2, v > &= < ku_1, v > + < lu_2, v > \\ &= k < u_1, v > +l < u_2, v > \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} < v, ku_1 + lu_2 > &= \overline{< ku_1 + lu_2, v >} \\ &= \overline{k < u_1, v > +l < u_2, v >} \\ &= \bar{k}\ \overline{< u_1, v >} + \bar{l}\ \overline{< u_1, v >} \\ &= \bar{k} < v, u_1 > +\bar{l} < v, u_2 > . \end{aligned}$$

Παράδειγμα 9.1 Θεωρούμε την απεικόνιση $< \, , \, > : K^n \times K^n \to K$ η οποία για κάθε $x=(x_1, \ldots, x_n)$ και $y=(y_1, \ldots, y_n)$ ορίζεται από την σχέση

$$< x, y >= x_1\bar{y}_1 + \cdots + x_n\bar{y}_n$$

Η παραπάνω απεικόνιση ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο επί του K^n. Πράγματι, αν $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $y=(y_1, \ldots, y_n)$, $z=(z_1, \ldots, z_n)$ και $k \in K$, τότε έχουμε

$$\begin{aligned} < x+y, z > &= (x_1+y_1)\bar{z}_1 + \cdots + (x_n+y_n)\bar{z}_n \\ &= (x_1\bar{z}_1 + \cdots + x_n\bar{z}_n) + (y_1\bar{z}_1 + \cdots + y_n\bar{z}_n) \\ &= < x, z > + < y, z > . \end{aligned}$$

και

$$< kx, y >= (kx_1)\bar{y}_1 + \cdots + (kx_n)\bar{y}_n = k < x, y > .$$

Κεφάλαιο 10

Αντιμεταθετικοί Δακτύλιοι

Σ΄ αυτή την ενότητα θ΄ ασχοληθούμε με αντιμεταθετικούς δακτύλιους οι οποίοι έχουν πολλές από τις ιδιότητες του δακτυλίου των ακεραίων αριθμών και του πολυωνυμικού δακτυλίου υπεράνω ενός σώματος. Ειδικότερα, θα μελετήσουμε τις βασικές ιδιότητες των δακτυλίων μονογενών ιδεωδών, των δακτυλίων με μοναδική παραγοντοποίηση και των δακτυλίων της Noether. Επίσης, θα εισάγουμε την απαλοίφουσα δύο πολυωνύμων καθώς και τους δακτύλιους κλασμάτων.

10.1 Δακτύλιοι Μονογενών Ιδεωδών

Θ΄ αρχίσουμε την μελέτη μας με μία ειδική κατηγορία αντιμεταθετικών δακτυλίων οι οποίοι διαθέτουν Ευκλείδεια διαίρεση.

Ορισμός 10.1 Ας είναι A ένα πεδίο ακεραιότητας. Μία συνάρτηση $\vartheta : A \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ καλείται *Ευκλείδεια* αν έχει τις εξής ιδιότητες:
(α) $\vartheta(ab) \geq \vartheta(a)$, για κάθε $a, b \in A \setminus \{0\}$.
(β) Αν $a, b \in A$ και $b \neq 0$, τότε υπάρχουν $q, r \in A$ έτσι, ώστε $a = bq + r$ και $r = 0$ ή $\vartheta(r) < \vartheta(b)$.
Ένα πεδίο ακεραιότητας που έχει μία Ευκλείδεια συνάρτηση καλείται *Ευκλείδειος δακτύλιος*.

Παράδειγμα 10.1 Ο δακτύλιος των ακεραίων $\mathbb{Z}$ είναι Ευκλείδειος. Πράγματι, για κάθε ζεύγος ακεραίων a, b με $b \neq 0$ ισχύει $a = bq + r$

και $0 \leq r < |b|$. Αν επί πλέον $a \neq 0$, τότε $|ab| \geq |b|$. Συνεπώς, η απόλυτη τιμή ορίζει μία Ευκλείδεια συνάρτηση επί του $\mathbb{Z}$.

Παράδειγμα 10.2 Ας είναι K ένα σώμα. Τότε ο δακτύλιος των πολυωνύμων $K[X]$ είναι Ευκλείδειος. Πράγματι, αν $f, g \in K[X]$ με $g \neq 0$, τότε υπάρχουν $q, r \in K[X]$ τέτοια, ώστε $f = qg + r$ και $\deg r < \deg g$. Αν επί πλέον $f \neq 0$, τότε $\deg f + \deg g \geq \deg f$. Άρα, η συνάρτηση

$$\deg : K[X] \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N} : f \longmapsto \deg f$$

είναι Ευκλείδεια.

Παράδειγμα 10.3 Ας θεωρήσουμε το σύνολο

$$\mathbb{Z}[\imath] = \{a + b\imath / a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Σύμφωνα με το Παράδειγμα 4.8, το σύνολο $\mathbb{Z}[\imath]$ είναι δακτύλιος με πράξεις την συνήθη πρόσθεση και πολλαπλασιασμό των μιγαδικών αριθμών. Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση ϑ που αντιστοιχεί σε κάθε $a + b\imath \in \mathbb{C}$ την τιμή $\vartheta(a + b\imath) = a^2 + b^2$ ορίζει μία Ευκλείδεια συνάρτηση επί του $\mathbb{Z}[\imath] \setminus \{0\}$.

Ας είναι $x = x_1 + x_2\imath$ και $y = y_1 + y_2\imath$ δύο στοιχεία του $\mathbb{C}$. Τότε

$$\begin{aligned} \vartheta(xy) &= (x_1y_1 - x_2y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2 \\ &= (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) \\ &= \vartheta(x)\vartheta(y). \end{aligned}$$

Έτσι, αν $x, y \in \mathbb{Z}[\imath]$ με $xy \neq 0$, ισχύει $\vartheta(xy) \geq \vartheta(x)$. Στη συνέχεια, ας είναι $y \neq 0$. Έχουμε $x/y = u + v\imath$, όπου

$$u = \frac{x_1y_1 + x_2y_2}{y_1^2 + y_2^2}, \quad v = \frac{x_2y_1 - y_2x_1}{y_1^2 + y_2^2}.$$

Επιλέγουμε ακέραιους m, n με

$$|m - u| \leq 1/2, \quad |n - v| \leq 1/2$$

και θέτουμε

$$k = m + n\imath, \quad l = (u - m) + (v - n)\imath.$$

Έχουμε

Κεφάλαιο 11

Πρότυπα

Σ΄ αυτή την ενότητα θ΄ ασχοληθούμε με την δομή των προτύπων επί ενός αντιμεταθετικού δακτυλίου. Αυτή η δομή γενικεύει αρκετές γνωστές δομές όπως αυτή του γραμμικού χώρου, του ιδεώδους ενός αντιμεταθετικού δακτυλίου κλπ. Θα μελετήσουμε τους μορφισμούς, την παραγωγή υποπροτύπων και τις ειδικές κατηγορίες των ελευθέρων και Νοθεριανών προτύπων. Στη συνέχεια θα εισάγουμε τις έννοιες του τανυστικού γινομένου και της ακριβής ακολουθία προτύπων. Τέλος θα ασχοληθούμε με τις δομές του προτύπου κλασμάτων και της άλγεβρας.

11.1 Ορισμός - Παραδείγματα

Ας είναι A ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος, $(M,+)$ μία αντιμεταθετική ομάδα και $\mu : A \times M \longrightarrow M$ μία απεικόνιση. Θα συμβολίζουμε πιο απλά την εικόνα του ζεύγους (a,m) με am.

Ορισμός 11.1 Η τριάδα $(M,+,\mu)$ καλείται A-*πρότυπο* ή *πρότυπο επί του* A, αν για κάθε $k,l \in A$ και $u,v \in M$ ισχύουν τα εξής:
(α) $k(u+v) = ku + kv$,
(β) $(k+l)u = ku + lu$,
(γ) $(kl)u = k(lu)$,
(δ) $1u = u$.
Η απεικόνιση μ καλείται *βαθμωτός πολλαπλασιασμός*.

Παράδειγμα 11.1 Κάθε διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος K είναι ένα K-πρότυπο.

Παράδειγμα 11.2 Κάθε αβελιανή ομάδα M είναι ένα $\mathbb{Z}$-πρότυπο με βαθμωτό πολλαπλασιασμό $(\pm a)m = \pm(m + \cdots + m)$ (a-φορές), για κάθε $a \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 11.3 Κάθε ιδεώδες του A είναι ένα A-πρότυπο με πρόσθεση και βαθμωτό πολλαπλασιασμό τις αντίστοιχες πράξεις του A. Ειδικότερα, ο δακτύλιος A είναι ένα A-πρότυπο.

Παράδειγμα 11.4 Ας είναι R ένας οποιοσδήποτε δακτύλιος ο οποίος περιέχει τον A ως υποδακτύλιό του. Τότε ο δακτύλιος R είναι ένα A-πρότυπο με πράξεις την πρόσθεση του R και βαθμωτό πολλαπλασιασμό $(a, r) \mapsto ar$, όπου ar είναι το γινόμενο των $a \in A$ και $r \in R$ μέσα στο R. Ειδικότερα, ο δακτύλιος πολυωνύμων $A[X]$ είναι ένα A-πρότυπο.

Παράδειγμα 11.5 Ας είναι $(M_i)_{i\in I}$ μία οικογένεια από A-πρότυπα. Συμβολίζουμε με $\prod_{i\in I} M_i$ το σύνολο που αποτελείται από τις οικογένειες $(x_i)_{i\in I}$ με $x_i \in M_i$. Ορίζουμε μία πρόσθεση και ένα βαθμωτό πολλαπλασιασμό ως εξής:

$$(x_i)_{i\in I} + (y_i)_{i\in I} = (x_i + y_i)_{i\in I}, \quad a(x_i)_{i\in I} = (ax_i)_{i\in I}.$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το σύνολο $\prod_{i\in I} M_i$ με τις δύο αυτές πράξεις δομείται σε A-πρότυπο. Το πρότυπο $\prod_{i\in I} M_i$ καλείται *ευθύ γινόμενο* των M_i, $i \in I$. Αν $M_i = A$, για κάθε $i \in I$, τότε θα συμβολίζουμε το πρότυπο $\prod_{i\in I} M_i$ με A^I. Επιπλέον, στη περίπτωση όπου $I = \{1, \ldots, n\}$, το A^I είναι το κατεσιανό γινόμενο $A^n = A \times \cdots \times A$.

Ας είναι M ένα A-πρότυπο. Από τη ιδιότητα (α) έπεται ότι για κάθε $k \in A$ η αντιστοιχία $m \to km$ ορίζει ένα μορφισμό ομάδων $M \to M$. Επομένως, έχουμε:

$$k0 = 0 \quad \text{και} \quad k(-m) = -(km) \;\; \text{για κάθε } m \in M.$$

Από τη ιδιότητα (β) προκύπτει ότι για κάθε $m \in M$ η αντιστοιχία $k \to km$ ορίζει ένα μορφισμό ομάδων $A \to M$. Έτσι, έχουμε

$$0m = 0 \quad \text{και} \quad (-k)m = -(km) \;\; \text{για κάθε } k \in A.$$

Από το Παράδειγμα 4.4 έχουμε ότι το σύνολο των ενδομορφισμών $\mathrm{End}M$ μίας αντιμεταθετικής ομάδας M είναι δακτύλιος (όχι κατ΄ ανάγκη αντιμεταθετικός).

Κεφάλαιο 12

Επεκτάσεις Σωμάτων

Το κεφάλαιο αυτό είναι αφιερωμένο στις επεκτάσεις σώμάτων. Πρώτα εισάγουμε τα ακέραια στοιχεία επί ενός δακτυλίου και κατόπιν τις αλγεβρικές επεκτάσεις σωμάτων. Μετά μελετάμε τις κατασκευες με κανόνα και διαβήτη εν σχέσει με τα τρία άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας. Κατόπιν αποδεικνύουμε την ύπαρξη του αλγεβρικού καλύμματος για ένα σώμα και στη συνέχεια μελετάμε τις κανονικές επεκτάσεις και τις διαχωρίσιμες επεκτάσεις. Τέλος μελετάμε τις απλές υπερβατικές επεκτάσεις και υπερβατικές βάσεις.

12.1 Ακέραια Στοιχεία

Ας είναι S ένα πεδίο ακεραιότητας και R ένας υποδακτύλιος του.

Ορισμός 12.1 Ένα στοιχείο $v \in S$ καλείται ακέραιο επί του R αν υπάρχει πολυώνυμο $F(X) \in R[X] \setminus \{0\}$ τέτοιο, ώστε $F(v) = 0$.

Παράδειγμα 12.1 Ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $X^2 - 2 = 0$ και επομένως είναι ένα ακέραιο στοιχείο επί του $\mathbb{Z}$.

Πρόταση 12.1 *Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*
(α) Το στοιχείο $v \in S$ είναι ακέραιο επί του R.
(β) Ο δακτύλιος $R[v]$ είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο.
(γ) Υπάρχει ένας υποδακτύλιος R' του S που είναι πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο και $R' \supseteq R[v]$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι ισχύει η πρόταση (α). Τότε υπάρχουν $a_1, \ldots, a_n \in R$ έτσι, ώστε

$$v^n + a_1 v^{n-1} + \cdots + a_n = 0.$$

Συμβολίζουμε με M το R-πρότυπο που παράγεται από τα στοιχεία $1, v, \ldots, v^{n-1}$. Οπότε έχουμε $v^n \in M$. Αν $v^{n+j} \in M$ για $j = 1, \ldots, k$, τότε, καθώς

$$v^{n+k+1} = -a_1 v^{n+k} - \cdots - a_n v^{k+1},$$

παίρνουμε $v^{n+k+1} \in M$. Άρα $v^{n+j} \in M$ $(j = 0, 1, \ldots)$ και επομένως $R[v] = M$. Δηλαδή, ισχύει η (β).

Η συνεπαγωγή (β) $\Rightarrow$ (γ) είναι τετριμμένη. Ας υποθέσουμε στη συνέχεια ότι ισχύει η (γ). Ας είναι $y_1, \ldots, y_n$ ένα σύστημα γεννητόρων του R-προτύπου R'. Καθώς $v, y_i \in R'$, έχουμε $vy_i \in R'$ και επομένως υπάρχουν $a_{i,j} \in R$, ώστε

$$vy_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} y_j.$$

Οπότε

$$\sum_{j=1}^{n} (\delta_{i,j} v - a_{i,j}) y_j = 0 \quad (i = 1, \ldots, n),$$

όπου $\delta_{i,j} = 1$, αν $i = j$ και $\delta_{i,j} = 0$, αν $i \neq j$. Τα στοιχεία $y_1, \ldots, y_n$ αποτελούν μία μη μηδενική λύση του παραπάνω συστήματος μέσα στο σώμα κλασμάτων του S. Οπότε, η ορίζουσα του πίνακα $(\delta_{i,j} v - a_{i,j})$ ισούται με μηδέν. Έτσι, καθώς το v εμφανίζεται μόνο στη κύρια διαγώνιο του πίνακα, το ανάπτυγμα της ορίζουσας δίνει μία εξίσωση της μορφής

$$v^n + a_1 v^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

όπου $a_i \in R$ $(i = 1, \ldots, n)$. Επομένως το στοιχείο v είναι ακέραιο επί του R.

Πόρισμα 12.1 *Ας είναι $x_1, \ldots, x_n \in S$. Αν το x_1 είναι ακέραιο επί του R και για $i = 2, \ldots, n$, το x_i είναι ακέραιο επί του $R[x_1, \ldots, x_{i-1}]$, τότε ο δακτύλιος $R[x_1, \ldots, x_n]$ είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο. Ειδικότερα, κάθε στοιχείο του $R[x_1, \ldots, x_n]$ είναι ακέραιο επί του R.*

Κεφάλαιο 13

Θεωρία του *Galois*

Το τελευταίο αυτό κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στις επεκτάσεις του Galois. Δίνουμε ισοδύναμους χαρακτηρισμούς αυτών των επεκτάσεων, καθώς και το θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας του Galois. Κατόπιν μελετάμε την δομή των πεπερασμένων σωμάτων και τις κυκλοτομικές επεκτάσεις. Τέλος, εξετάζουμε το πρόβλημα της επιλυσιμότητας μίας αλγεβρικής εξίσωσης με ριζικά.

13.1 Επεκτάσεις του *Galois*

Ας είναι L ένα σώμα. Το σύνολο των αυτομορφισμών $\mathrm{Aut}(L)$ του L αποτελεί ομάδα (με πράξη την σύνθεση απεικονίσεων). Θεωρούμε μία υποομάδα G του $\mathrm{Aut}(L)$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το σύνολο

$$Fix(L, G) = \{x \in L / \ \sigma(x) = x, \text{ για κάθε } \sigma \in G\}$$

είναι ένα υπόσωμα του L.

Ορισμός 13.1 Το σώμα $Fix(L, G)$ καλείται *σταθερό σώμα* της ομάδας G.

Πρόταση 13.1 *Ας υποθέσουμε ότι η ομάδα G είναι πεπερασμένη και K είναι το σταθερό σώμα της G. Τότε $[L : K] = |G|$.*

Απόδειξη. Από το Πόρισμα 12.5 έχουμε $|G| \leq [L : K]$. Ας είναι $|G| = r$ και ας υποθέσουμε ότι υπάρχει σύνολο από $r + 1$ στοιχεία

$\{u_0, u_1, \ldots, u_r\} \subseteq L$ που είναι γραμμικά ανεξάρτητο επί του K. Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα

$$\sum_{i=0}^{r} \sigma(u_j)X_j = 0, \quad (\sigma \in G)$$

που έχει r εξισώσεις και $r+1$ αγνώστους. Επομένως, αυτό έχει μία μη μηδενική λύση $(a_0, \ldots, a_r) \in L^{r+1}$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα στοιχεία $a_0, \ldots a_\mu$ είναι $\neq 0$, $a_{\mu+1} = \ldots = a_r = 0$ και ότι αυτή η λύση έχει τα λιγότερα μη μηδενικά στοιχεία. Έτσι, για κάθε $\sigma \in G$ έχουμε

$$\sigma(u_0) = \sum_{i=1}^{\mu} b_i \sigma(u_i),$$

όπου $b_i = -a_i/a_0$ $(i = 1, \ldots, \mu)$. Για $\sigma = I_L$ παίρνουμε

$$u_0 = \sum_{i=1}^{\mu} b_i u_i.$$

Αν $b_i \in K$ $(i = 1, \ldots, \mu)$, τότε, καθώς το σύνολο $\{u_0, \ldots, u_r\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο επί του K, έχουμε $1 = 0$ που είναι άτοπο. Επομένως, κάποια από τα στοιχεία $b_1, \ldots, b_\mu$ δεν ανήκουν στο K. Ας είναι λοιπόν $b_1 \notin K$. Τότε, υπάρχει $\tau \in G$ με $\tau(b_1) \neq b_1$. Παρατηρούμε ότι όταν το σ διατρέχει τα στοιχεία του G το ίδιο συμβαίνει και για το $\tau \circ \sigma$. Έτσι, για κάθε $\sigma \in G$ έχουμε

$$\sigma(u_0) = \sum_{i=1}^{\mu} \tau(b_i)\sigma(u_i)$$

και επομένως προκύπτει η σχέση

$$\sum_{i=1}^{\mu} (\tau(b_i) - b_i)\sigma(u_i) = 0.$$

Καθώς $\tau(b_1) \neq b_1$, παίρνουμε την μη-μηδενική λύση

$$(0, \tau(b_1) - b_1, \ldots, \tau(b_\mu) - b_\mu, 0, \ldots, 0)$$

του αρχικού γραμμικού συστήματος η οποία έχει λιγότερα μηδενικά από την $(a_0, \ldots, a_r)$ που είναι άτοπο. Άρα $[L : K] \leq |G|$. Συνεπώς ισχύει $[L : K] = |G|$.

Παράδειγμα 13.1 Ας είναι K σώμα και $t_1, \ldots, t_n$ αλγεβρικά ανεξάρτητα στοιχεία επί του K. Κάθε μετάθεση της συμμετρικής ομάδας S_n ορίζει έναν αυτομορφισμό επί του σώματος $M = K(t_1, \ldots, t_n)$ με τον εξής τρόπο. Αν $\sigma \in S_n$, τότε ορίζουμε τον αυτομορφισμό

$$\phi_\sigma(f(t_1, \ldots, t_n)) = f(t_{\sigma(1)}, \ldots, t_{\sigma(n)})),$$

για κάθε $f(t_1, \ldots, t_n) \in M$. Συμβολίζουμε επίσης με S_n το σύνολο αυτών των αυτομορφισμών. Εύκολα απόδεικνύεται ότι το σύνολο αυτό αποτελεί ομάδα. Στη συνέχεια θεωρούμε τα στοιχεία

$$s_1 = t_1 + \cdots + t_n, \;\; s_2 = t_1t_2 + \cdots + t_1t_n + \cdots + t_{n-1}t_n, \;\; s_n = t_1 \cdots t_n.$$

Ας είναι $L = K(s_1, \ldots, s_n)$. Θα δείξουμε ότι $Fix(M, S_n) = L$.

Πρώτα παρατηρούμε ότι $s_1, \ldots, s_n \in Fix(M, S_n)$ και έτσι έχουμε $L \subseteq Fix(M, S_n)$. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 13.1, παίρνουμε

$$[M : L] \geq [M : Fix(M, S_n)] = |S_n| = n!.$$

Από την άλλη πλευρά, τα στοιχεία $t_1, \ldots, t_n$ είναι όλες οι ρίζες του πολυωνύμου

$$F(T) = T^n - s_1T^{n-1} + \cdots + (-1)^n s_n$$

και το M είναι το σώμα ριζών του $F(T)$ επί του L. Έτσι, έχουμε $[M : L] \leq n!$. Επομένως, ισχύει $[M : L] = [M : Fix(M, S_n)]$, και καθώς $L \subseteq Fix(M, S_n)$, παίρνουμε $Fix(M, S_n) = L$.

Ας υποθέσουμε ότι K είναι υπόσωμα του L τέτοιο, ώστε η επέκταση L/K είναι αλγεβρική. Συμβολίζουμε με $\mathrm{Gal}(L/K)$ το σύνολο των K-αυτομορφισμών του L, δηλαδή το σύνολο των αυτομορφισμών σ του L με $\sigma(x) = x$, για κάθε $x \in K$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το σύνολο $\mathrm{Gal}(L/K)$ αποτελεί υποομάδα του $\mathrm{Aut}(L)$.

Ορισμός 13.2 Η ομάδα $\mathrm{Gal}(L/K)$ καλείται ομάδα του Galois του L επί του K.

Ας είναι $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. Ας υποθέσουμε ότι $L = K(x_1, \ldots, x_n)$, όπου $x_1, \ldots, x_n$ είναι όλες οι ρίζες ενός πολυωνύμου $f(X) \in K[X]$. Κάθε K-αυτομορφισμός φ ορίζει μία μετάθεση $\sigma \in S_n$ τέτοια, ώστε

Ευρετήριο Όρων