

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΜΙΚΡΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗ και ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ανδρέας Πούλος



*Κάθε γνήσιο αντίτυπο
φέρει την υπογραφή του συγγραφέα*

Εικόνα εξώφυλλου: Γλυπτό με τίτλο Οργανική φόρμα,
έργο του γλύπτη **Νίκου Μπαχαρίδη**, 2009 σε λατυποπαγές πέτρωμα

ISBN 978-960-456-438-5

© Copyright, 2015, Έκδόσεις Ζήτη, Ανδρέας Πούλος

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

Σειρά «Μικρή Βιβλιοθήκη Μαθηματικών Διαγωνισμών», Αρ. 1

Το παρόν έργο πνευματικής ιδιοκτησίας προστατεύεται κατά τις διατάξεις του ελληνικού νόμου (Ν.2121/1993 όπως έχει τροποποιηθεί και ισχύει σήμερα) και τις διεθνείς συμβάσεις περί πνευματικής ιδιοκτησίας. Απαγορεύεται απολύτως η άνευ γραπτής άδειας του εκδότη κατά οποιοδήποτε τρόπο ή μέσο αντιγραφή, φωτοανατύπωση και εν γένει αναπαραγωγή, εκμίσθωση ή δανεισμός, μετάφραση, διασκευή, αναμετάδοση στο κοινό σε οποιαδήποτε μορφή (ηλεκτρονική, μηχανική ή άλλη) και η εν γένει εκμετάλλευση του συνόλου ή μέρους του έργου.

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση
Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr



www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ:
Αρμενοπούλου 27, 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ.: 2310.203.720, Fax: 2310.211.305 • e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΠΩΛΗΣΗ ΛΙΑΝΙΚΗ-ΧΟΝΔΡΙΚΗ:
Χαριλάου Τρικούπη 22, 106 79 Αθήνα
Τηλ.-Fax: 210.3816.650 • e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

Εισαγωγικό Σημείωμα

Το Παράρτημα Κεντρικής Μακεδονίας της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας (Ε.Μ.Ε.), στο πλαίσιο της προσπάθειάς του να δώσει περισσότερα εφόδια στους μαθητές και μαθήτριες που ενδιαφέρονται για τα Μαθηματικά και συμμετέχουν στους μαθηματικούς διαγωνισμούς, προχωρά στη δημιουργία σειράς βιβλίων, αρχής γενομένης από το παρόν, που, όπως φαίνεται και από τον τίτλο του, έχει ως αντικείμενο τη Συνδυαστική. Ο συγγραφέας του βιβλίου αυτού κ. Ανδρέας Πούλος είναι Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών Θεσσαλονίκης και μέλος επί σειρά ετών του Δ.Σ. του Παραρτήματος Κεντρικής Μακεδονίας της Ε.Μ.Ε. συμμετέχοντας εκτός των άλλων σε πολλές από τις δραστηριότητες που αφορούν τους μαθηματικούς διαγωνισμούς.

Ως αντιπρόεδρος του Παραρτήματος και ως καθηγητής του τμήματος Μαθηματικών του Α.Π.Θ. με αντικείμενο διδασκαλίας εκτός των άλλων τη Συνδυαστική, θεωρώ ότι το συγκεκριμένο βιβλίο, έχει αρκετά να προσφέρει σε μαθητές της Μέσης Εκπαίδευσης, τόσο για να διευκολυνθεί η συμμετοχή τους στους μαθηματικούς διαγωνισμούς, όσο και για την απόκτηση ευχέρειας στην αντιμετώπιση προβλημάτων Συνδυαστικής και γενικότερα διακριτών Μαθηματικών. Δεν γίνεται ιδιαίτερα θεωρητική εμβάθυνση των εννοιών που υπεισέρχονται, αλλά με απλούς και κατανοητούς από τους μαθητές τρόπους λύνονται προβλήματα, ανάλογα με αυτά που τίθενται σε μαθηματικούς διαγωνισμούς. Έχουν ταξινομηθεί τα προτεινόμενα προβλήματα σε δύο ομάδες ως προς το είδος και σε κάθε μία ως προς το βαθμό αυξανόμενης δυσκολίας, δίνοντας κάποιες γενικές κατευθύνσεις και υποδειγματικά παραδείγματα. Το βιβλίο δίνει έναυσμα σε μαθητές με αγάπη για τα μαθηματικά να ασχοληθούν περισσότερο με ζητήματα Συνδυαστικής, να ακονίσουν το μυαλό τους και να απολαύσουν το «άρωμα των Μαθηματικών» που αναδύεται από αυτά τα προβλήματα. Το γεγονός ότι οι λύσεις των προβλημάτων δίνονται στο τέλος μετά τη διατύπωση όλων των εκφωνήσεων, θεωρώ ότι είναι καλό, γιατί αφήνει περιθώρια στον μαθητή να προσπαθήσει πρώτα μόνος του και κατόπιν να καταφύγει στη λύση προς επιβεβαίωση ή όχι της προσπάθειάς του.

Η όλη προσπάθεια είναι θετική και κινείται προς την κατεύθυνση που έθεσε το Παράρτημά μας. Ελπίζω και εύχομαι να συνεχιστεί με την έκδοση και άλλων ανάλογων βιβλίων.

Θεσσαλονίκη, Μάρτιος 2015

Πολυχρόνης Μωυσιάδης

Καθηγητής Τμήματος

Μαθηματικών του Α.Π.Θ.

Αντιπρόεδρος του Παραρτήματος

Κεντρικής Μακεδονίας της Ε.Μ.Ε.

Σχετικά με την έκδοση

Το βιβλίο αυτό είναι το πρώτο της σειράς *Μικρή Βιβλιοθήκη Μαθηματικών Διαγωνισμών*, η οποία έχει σκοπό να συμπληρώσει την ελληνική βιβλιογραφία για θέματα μαθηματικών διαγωνισμών που διεξάγει η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία. Ο πρώτος αυτός τόμος αφορά τη Συνδυαστική Απαρίθμηση και τη Συνδυαστική Γεωμετρία. Δεν πρόκειται μόνο για μία συλλογή ασκήσεων και προβλημάτων, αφού περιέχει την αντίστοιχη θεωρία, περιγράφει και αναλύει τις σχετικές έννοιες που εμπλέκονται στα προβλήματα και στις ασκήσεις. Επιλεγμένα προβλήματα, τα οποία επιλύονται πλήρως, αξιοποιούνται ως υποδείγματα για το πώς εφαρμόζονται οι αρχές της Συνδυαστικής και ταυτόχρονα παρέχουν χρήσιμες ιδέες και τεχνικές για την επίλυση των υπόλοιπων προβλημάτων και ασκήσεων. Ο βασικός στόχος είναι να αποτελέσει ένα βοήθημα όχι μόνο για όσους μαθητές ενδιαφέρονται για τη διάκριση σε μαθηματικούς διαγωνισμούς σε προβλήματα των Διακριτών Μαθηματικών, αλλά και να αποτελέσει ένα εγχειρίδιο για ομίλους Μαθηματικών και για συναφείς δραστηριότητες. Τα θέματα που πραγματεύεται και το επίπεδο των προβλημάτων αφορούν έως και το επίπεδο του διαγωνισμού «*Αρχιμήδης*» της Ε.Μ.Ε. Μόνο λίγα επιλεγμένα θέματα προέρχονται από την Εθνική Ολυμπιάδα Μαθηματικών. Συνεπώς, δεν περιλαμβάνονται σύνθετα θέματα που σχετίζονται με τη θεωρία Αριθμών, όπως είναι το αριθμητικό τρίγωνο του Pascal, οι αριθμοί Fibonacci, Ramsey, Bell, Stirling, Lucas, Catalan, πολυωνυμικοί συντελεστές, γραφήματα Euler και Hamilton, γεννήτριες και αναδρομικές σχέσεις, διαταράξεις, κλπ.

Για τη βελτίωση του συγκεκριμένου τόμου και γενικά για προτάσεις σχετικά με την εκδοτική και επιστημονική επάρκεια της σειράς προτρέπουμε τους ενδιαφερόμενους να επικοινωνούν με το Παράρτημα Κεντρικής Μακεδονίας της Ε.Μ.Ε. ή μέσω της ηλεκτρονικής διεύθυνσης του συγγραφέα andremat@otenet.gr.

Ευχαριστώ θερμά τον καθηγητή του Α.Π.Θ. Χρόνη Μωϋσιάδη για την ενθάρρυνση, τις συμβουλές και τις παρατηρήσεις του για το περιεχόμενο του βιβλίου, τον φίλο μου Νίκο Μπαχαρίδη για την ευγενική παραχώρηση της φωτογραφίας του γλυπτού του, και τέλος, τον Νίκο Ζήτη και τον Άρη Σύρμο για την άρτια και ταχύτατη εργασία τους για την έκδοση αυτού του βιβλίου.

Ανδρέας Πούλος

Περιεχόμενα

ΜΕΡΟΣ Α'

Εισαγωγή στη Συνδυαστική Απαρίθμηση

1. Το Αντικείμενο της Συνδυαστικής Απαρίθμησης	11
2. Αρχές και Τεχνικές της Συνδυαστικής	12
Η Αρχή της πλήρους αντιστοιχίας	12
Η προσθετική Αρχή	13
Η πολλαπλασιαστική Αρχή	13
Η Αρχή της διπλής μέτρησης	18
Η πολλαπλασιαστική Αρχή	18
Η Αρχή της περιστεροφωλιάς	21
Το πρόβλημα του Mississippi	22
Πίνακας Βασικών Τύπων Συνδυαστικής	23
Χρήσιμοι Τύποι Απαριθμήσεων	24
3. Ασκήσεις και Προβλήματα Συνδυαστικής Απαρίθμησης	25
3α. Ασκήσεις και Προβλήματα 1 ^{ου} βαθμού δυσκολίας	26
3β. Ασκήσεις και Προβλήματα 2 ^{ου} βαθμού δυσκολίας	31
3γ. Ασκήσεις και Προβλήματα 3 ^{ου} βαθμού δυσκολίας	37

ΜΕΡΟΣ Β'

Εισαγωγή στη Συνδυαστική Γεωμετρία

4. Το Αντικείμενο και οι Τεχνικές της Συνδυαστικής Γεωμετρίας	43
5. Ασκήσεις και Προβλήματα Συνδυαστικής Γεωμετρίας	53
5α. Ασκήσεις και Προβλήματα 1 ^{ου} βαθμού δυσκολίας	54
5β. Ασκήσεις και Προβλήματα 2 ^{ου} βαθμού δυσκολίας	57
5γ. Ασκήσεις και Προβλήματα 3 ^{ου} βαθμού δυσκολίας	61
6. Αποδείξεις Αλγεβρικών Τύπων με τη βοήθεια της Συνδυαστικής Γεωμετρίας	64

ΜΕΡΟΣ Γ'

67

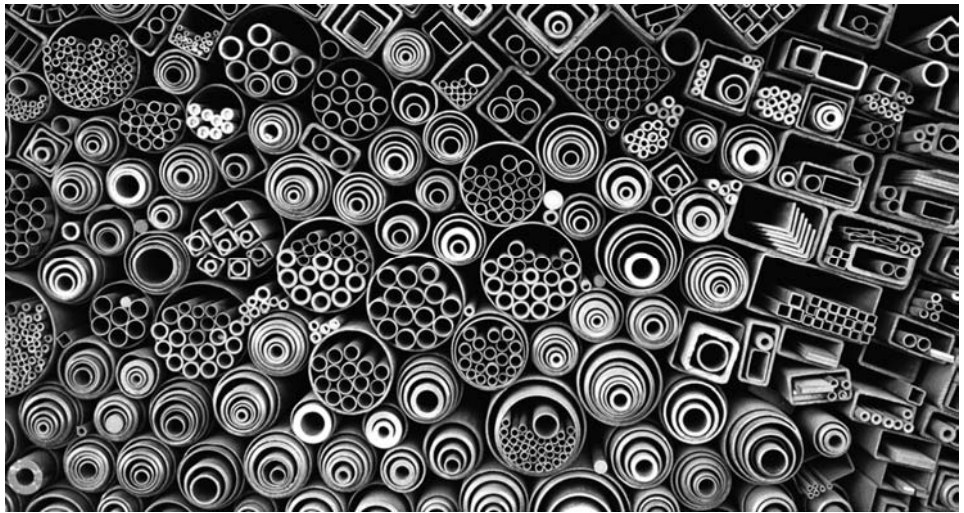
Οι Λύσεις των Ασκήσεων και Προβλημάτων

Οι λύσεις των προβλημάτων από Π.1.1. έως και Π.1.44	69
Οι λύσεις των προβλημάτων από Π.2.1. έως και Π.2.45	77
Οι λύσεις των προβλημάτων από Π.3.1. έως και Π.3.20	92
Οι λύσεις των προβλημάτων από Π.4.1. έως και Π.4.16.....	102
Οι λύσεις των προβλημάτων από Π.5.1. έως και Π.5.20.....	109
Οι λύσεις των προβλημάτων από Π.6.1. έως και Π.6.12.....	118
 7. Βιβλιογραφικές Αναφορές – Παραπομπές	 127

A
Μέρος

Εισαγωγή στη Συνδυαστική Απαρίθμηση





1. Το Αντικείμενο της Συνδυαστικής Απαρίθμησης

Με τον όρο **Συνδυαστική Απαρίθμηση** εννοούμε ένα σύνολο τεχνικών με τις οποίες μπορούμε να υπολογίζουμε το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου αντικειμένων χωρίς να καταφεύγουμε στην ένα προς ένα απαρίθμηση τους, η οποία προφανώς πολλές φορές είναι εξαιρετικά χρονοβόρα και σε άλλες περιπτώσεις είναι ανέφικτη. Για παράδειγμα, το ερώτημα πόσες είναι οι διαγώνιες ενός εξαπλεύρου, δεν είναι πρόβλημα της Συνδυαστικής Απαρίθμησης, επειδή ο αριθμός αυτός είναι «μικρός» και προκύπτει από άμεση μέτρηση, όμως το πλήθος των διαγωνίων ενός πολυγώνου με 10^6 πλευρές είναι ένα ερώτημα συμβατό με αυτόν τον τομέα των Μαθηματικών.

Περιγράφουμε ορισμένα προβλήματα – ερωτήματα, τα οποία σκιαγραφούν το είδος των θεμάτων που απασχολούν τη Συνδυαστική Απαρίθμηση, την οποία στο εξής θα ονομάζουμε απλά **Συνδυαστική**.

1. Πόσα ψηφία περιέχει το σύνολο των φυσικών αριθμών που είναι πολλαπλάσια του 3, είναι μικρότεροι από το 3.000.000 και τα ψηφία τους είναι σε φθίνουσα διάταξη;
2. Σε ένα τουρνουά σκακιού συμμετέχουν 100 σκακιστές. Πόσοι αγώνες πρέπει να πραγματοποιηθούν, ώστε κάθε σκακιστής να παίξει μία παρτίδα σκάκι με κάθε έναν από τους υπόλοιπους σκακιστές;
3. Ποιο είναι το πλήθος των ακεραίων θετικών λύσεων της εξίσωσης $x + y + z = 100$, για όλες τις τιμές των μεταβλητών x, y, z ;
4. Επιλέγουμε 10 φυσικούς αριθμούς από το σύνολο $\{1, 2, 3, \dots, 99, 100\}$. Πόσες είναι οι διαφορετικές δεκάδες αριθμών που είναι δυνατόν να επιλεγούν; Μπορούμε πάντα να χωρίσουμε αυτούς τους 10 επιλεγμένους αριθμούς σε δύο σύνολα αριθμών, ώστε το άθροισμα των αριθμών σε κάθε σύνολο να είναι ίσο με το άθροισμα των αριθμών του άλλου;
5. Μία πόρτα έχει τρεις ηλεκτρονικές κλειδαριές και ανοίγει μόνο με τη σωστή χρήση ηλεκτρονικών καρτών. Κάθε κάρτα αποτελείται από έναν τετραψήφιο αριθμό (δεν περιλαμβάνει το ψηφίο 0). Ποιο είναι το μέγιστο πλήθος των δυνατών δοκιμών που απαιτούνται για να ανοίξει η πόρτα;
6. Έχουμε ένα πλήθος από $2n + 1$ ίδια νομίσματα. Θέλουμε να τοποθετηθούν σε 3 διαφορετικά κουτιά, έτσι ώστε κάθε κουτί να περιέχει μικρότερο αριθμό νομισμάτων από όσα περιέχουν τα άλλα δύο κουτιά μαζί. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

7. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να βαφούν 20 αριθμημένες σφαίρες, έτσι ώστε δύο από αυτές να βαφούν με το χρώμα Α, τρεις με το χρώμα Β, τέσσερεις με το χρώμα Γ, πέντε με το χρώμα Δ και οι υπόλοιπες σφαίρες με το χρώμα Ε;
8. Είναι γνωστό ότι οι πλευρές και οι διαγώνιες ενός κανονικού εξαγώνου είναι 15. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τους αριθμούς από το 1 έως και το 15 στις πλευρές και τις διαγώνιες του εξαγώνου αυτού;
9. Ποιο είναι το πλήθος των εξαψήφιων αριθμών που σχηματίζονται από τα ψηφία 1, 3, 5, 7, 9 και περιέχουν ένα μόνο ζεύγος ίσων ψηφίων σε διαδοχικές θέσεις, π.χ. ο αριθμός 175539.

Η Συνδυαστική Απαρίθμηση έχει εφαρμογές σε όλους τους τομείς των Μαθηματικών, διότι σε πολλά προβλήματα απαιτείται η γνώση του πλήθους των αντικειμένων με τα οποία ασχολούμαστε ή σκοπεύουμε να ασχοληθούμε με ακρίβεια και ταχύτητα. Δεν είναι τυχαίο ότι η Συνδυαστική Απαρίθμηση συχνά αναφέρεται ως «*Η τέχνη να μετράμε χωρίς μέτρημα*».

Προβλήματα Συνδυαστικής τίθενται σε πολλούς διαγωνισμούς Μαθηματικών, διότι δεν απαιτούν γνώσεις και κατανόηση πολλών μαθηματικών εννοιών, αλλά πρωτοτυπία στη σκέψη, ευφυή προσέγγιση του προβλήματος και οικονομία στα μέσα και στις τεχνικές που χρησιμοποιεί ο λύτης.

2.

Αρχές και Τεχνικές της Συνδυαστικής

► Η Αρχή της πλήρους αντιστοιχίας

Αυτή μας επιτρέπει να βεβαιωθούμε αν δύο σύνολα έχουν ίσο πλήθος στοιχείων. Διατυπώνεται ως εξής:

Εάν υπάρχει μία αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων δύο συνόλων Α και Β, ώστε σε κάθε στοιχείο του Α αντιστοιχεί ένα και μόνο στοιχείο του Β και αντίστροφα, τότε η αντιστοιχία αυτή ονομάζεται **πλήρης**.

Αν μεταξύ των στοιχείων δύο συνόλων Α και Β ορίζεται μία πλήρης αντιστοιχία, τότε θεωρούμε ότι τα σύνολα αυτά έχουν ίσο πλήθος στοιχείων και γράφουμε $|A| = |B|$.

3. Ασκήσεις και Προβλήματα Συνδυαστικής Απαρίθμησης

Οι ασκήσεις και τα προβλήματα που ακολουθούν αφορούν όλες τις τεχνικές και τους τύπους της Συνδυαστικής Απαρίθμησης χωρίς να είναι ταξινομημένες ανά κατηγορία (π.χ. Αρχή περιστεροφωλιάς), ώστε ο λύτης να αναπτύξει μόνος πρωτοβουλίες και κριτήρια επιλογής για την επίλυσή τους. Το μοναδικό κριτήριο ταξινόμησης είναι αυτό του βαθμού δυσκολίας.

Ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό των προβλημάτων Συνδυαστικής Απαρίθμησης, το οποίο έχουν διαπιστώσει πολλοί λύτες είναι το εξής. Σε αντίθεση με τα προβλήματα Άλγεβρας, Γεωμετρίας, κ.ά., στα οποία όταν δοθεί η λύση, είμαστε σχεδόν σίγουροι ότι αυτή είναι σωστή, σε πολλά από τα προβλήματα της Συνδυαστικής η απάντηση ή ο τρόπος προσέγγισης δεν μας παρέχει κάποια βεβαιότητα ότι τα έχουμε επιλύσει ή τα έχουμε αντιμετωπίσει σωστά. Μόνο η εμπειρία και η βαθμιαία εξοικείωση μπορούν να μας δώσουν μία αίσθηση σιγουριάς και να μας απαλλάξουν από την αμηχανία και την αβεβαιότητα.

Γενική συμβουλή. Για κάθε ένα από αυτά τα προβλήματα, καλό είναι να τα γενικεύσετε και να προσπαθήσετε να τα επιλύσετε στη γενικότερη μορφή τους. Αυτό καλό είναι να γίνει, αφού επιλυθούν όλες οι ασκήσεις και τα προβλήματα πρώτου και δεύτερου βαθμού δυσκολίας.



3α. Ασκήσεις και Προβλήματα 1^{ου} βαθμού δυσκολίας

Π.1.1. Με πόσους τρόπους μπορούμε να βάλουμε σε μια σειρά τρία διαφορετικά αντικείμενα, από ένα σύνολο 5 διαφορετικών αντικειμένων;

Π.1.2. Να αποδείξετε ότι μεταξύ 3 ατόμων υπάρχουν τουλάχιστον δύο άτομα του ίδιου φύλου.

Π.1.3. Σε ένα πειραματικό εργαστήριο υπάρχουν 7 ποντίκια αρσενικά και 7 ποντίκια θηλυκά. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός ποντικών που πρέπει να επιλέξουμε, αν δεν γνωρίζουμε το φύλο τους, ώστε να είναι πιθανό ότι κάποια από αυτά θα γεννήσουν ποντικάκια;

Π.1.4. Έχουμε ένα κουτί με 12 άσπρες μπάλες, 20 μαύρες, 7 πράσινες και 8 κόκκινες μπάλες. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός από μπάλες που πρέπει να επιλέξουμε, ώστε τουλάχιστον 10 από αυτές να έχουν το ίδιο χρώμα;

Π.1.5. Ένας διευθυντής Γυμνασίου επέλεξε και από τις τρεις τάξεις συνολικά 25 μαθητές για να εκπροσωπήσουν το σχολείο σε μια εκδήλωση. Να αποδείξετε ότι ανάμεσά τους, υπάρχουν τουλάχιστον 9 μαθητές, οι οποίοι είναι από την ίδια τάξη.

Π.1.6. Δύο Γυμνάσια έχουν από 50 μαθητές στην Β τάξη τους. Αποφάσισαν να κληρώσουν από έναν μαθητή τους για μία συνάντηση. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει αυτή η κλήρωση;

Π.1.7. Ένας βοτανικός κήπος έχει 5 γέφυρες για να επισκεφθεί κάποιος το μεγάλο θερμοκήπιο, που βρίσκεται στη λίμνη με τα νούφαρα. Με πόσους τρόπους μπορεί κάποιος να φθάσει ως εκεί και να επιστρέψει, αν δεν πρέπει να ξαναπεράσει την ίδια γέφυρα;

Π.1.8. Έχουμε 10 ανδρόγυνα. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός ατόμων που πρέπει να επιλέξουμε τυχαία ανάμεσα σε αυτά τα 20 άτομα, ώστε να υπάρχει ανάμεσά σε αυτά ένα τουλάχιστον ανδρόγυνο;

Π.1.9. Έχουμε να επιλέξουμε ένα αντικείμενο ανάμεσα σε 20 διαφορετικά κόκκινα αντικείμενα και ένα αντικείμενο ανάμεσα σε 24 διαφορετικά μαύρα αντικείμενα. α) Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε ένα αντικείμενο από το κάθε χρώμα; β) Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε ένα αντικείμενο από το κάθε χρώμα, αν ήδη έχουμε επιλέξει ένα αντικείμενο;

Π.1.10. Σε μία συνάντηση κορυφής υπάρχουν πρωθυπουργοί 5 κρατών που μιλούν όλοι διαφορετικές γλώσσες. Πόσοι μεταφραστές που μεταφράζουν μόνο

μία γλώσσα, απαιτούνται για να μεταφράσουν τις μεταξύ τους ανά δύο συνομιλίες; Αν οι πρωθυπουργοί ήταν 10, ποιος είναι ο αριθμός των απαιτούμενων μεταφραστών;

Π.1.11. Μεταξύ 13 ατόμων, να αποδείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο άτομα που είναι γεννημένα τον ίδιο μήνα.

Π.1.12. Από 7 αγόρια και 4 κορίτσια πρέπει να επιλέξουμε 6 άτομα για μία επιτροπή. α) Πόσες διαφορετικές επιλογές έχουμε, αν δύο από τα άτομα της επιτροπής πρέπει να είναι κορίτσια. β) Ποια είναι η απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα, αν τουλάχιστον δύο από τα μέλη της επιτροπής πρέπει να είναι κορίτσια;

Π.1.13. Με πόσους τρόπους μπορεί να τοποθετηθούν 8 ζευγάρια σε μία ευθεία, ώστε τα άτομα του ίδιου ζεύγους να κάθονται μαζί;

Π.1.14. Πόσοι είναι οι τετραψήφιοι περιττοί αριθμοί που έχουν όλα τα ψηφία τους διαφορετικά;

Π.1.15. Πόσα διαφορετικά αποτελέσματα μπορούμε να έχουμε, όταν ρίχνουμε ταυτόχρονα τρία όμοια ζάρια; Γενικότερα, για n όμοια ζάρια;

Π.1.16. Οι γυναίκες ενός χωριού έχουν βαμμένα κόκκινα τα νύχια των χεριών τους, όλες με διαφορετικό τρόπο. Π.χ. μία γυναίκα έχει βάψει τα τρία πρώτα δάκτυλα στο αριστερό χέρι, μία άλλη τον αντίχειρα στο δεξί χέρι κλπ. Πόσες είναι όλες οι γυναίκες του χωριού; Να επιλύσετε το πρόβλημα, όταν τα χρώματα είναι τρία χρώματα και σε μία γενικευμένη μορφή με n χρώματα.

Π.1.17. Ένας κωδικός ασφαλείας αποτελείται από ένα έως 4 συνεχόμενα ψηφία και 4 γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου. Κάθε γράμμα και κάθε ψηφίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί πολλαπλά. Πόσοι διαφορετικοί κωδικοί μπορεί να παραχθούν με αυτό τον τρόπο;

Π.1.18. Τα άτομα Α, Β, Γ, Δ και Ε είναι παρουσιαστές σε μία ραδιοφωνική εκπομπή την ίδια ημέρα. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να μιλήσουν στην εκπομπή, ώστε το άτομο Β να μιλήσει μετά το Α, όχι όμως απαραίτητα αμέσως μετά από αυτόν;

Π.1.19. Σε ένα παιδί από την Ισπανία του δίνονται το πολύ τρία διαφορετικά ονόματα. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή των ονομάτων, αν οι γονείς θέλουν να τα επιλέξουν από έναν κατάλογο 300 ονομάτων;

Π.1.20. Από ένα πλήθος n ατόμων (με $n \geq 6$) επιλέγουμε τρία ζευγάρια που θα πάνε δωρεάν σε τρεις διαφορετικές εκδρομές. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό; (Προέρχεται από το Νο 6 των βιβλιογραφικών παραπομπών).