Αθανάσιος Πρίκας

Κυματική - Οπτική

Για φοιτητές ΑΕΙ, ΑΤΕΙ και φυσικούς

- Συνοπτική θεωρία
- 216 Λυμένα προβλήματα
- 241 Προβλήματα για λύση με αναλυτική απάντηση

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα

Πρίκας Αθανάσιος
Διδάκτωρ Φυσικής Στοιχειωδών Σωματίων
Μύτικας Αιτωλοακαρνανίας, 300 19
Τηλ: 26460 81535
E-mail: aprikas@central.ntua.gr

ISBN 978-960-456-162-9

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση
Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 23920 72.222 (10 γραμ.) - Fax: 23920 72.229
e-mail: info@ziti.gr

Βιβλιοπωλείο

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ. 2310 203.720, Fax 2310 211.305
e-mail: sales@ziti.gr

www.ziti.gr

Πρόλογος

Στο βιβλίο αυτό ασχολούμαστε με τα αντικείμενα της Κυματικής και της Οπτικής, όπως αυτά διδάσκονται στα ΑΕΙ και ΑΤΕΙ. Το βιβλίο περιλαμβάνει σε κάθε κεφάλαιο τη *θεωρία συνοπτικά*, με περισσότερες επεξηγήσεις στα δυσκολότερα σημεία, μια σειρά *λυμένων ασκήσεων* (συνολικά 216) και τέλος *ασκήσεις για επίλυση* (συνολικά 241). Για τις τελευταίες δίνουμε αναλυτικές απαντήσεις (με επεξηγήσεις όπου χρειάζονται) στο τέλος του βιβλίου.

Διαπραγματευόμαστε εκτός από τα «κλασικά» θέματα Κυματικής και Οπτικής, και το αντικείμενο των ταλαντώσεων, ως εισαγωγικό κομμάτι στις κυμάνσεις, όπως και περισσότερο εξειδικευμένα ζητήματα Κυματικής και Οπτικής (κύματα σε 2 και 3 διαστάσεις, ανάλυση Fourier, εξισώσεις Fresnel, το φως στην ύλη κ.α.)

Προσπαθήσαμε επίσης σε κάθε κεφάλαιο να παρουσιάσουμε μια ευρεία ποικιλία διαφορετικών ασκήσεων: Περισσότερο απλές εφαρμογές σε καθημερινά φυσικά προβλήματα, θέματα που απαιτούν περισσότερη «κρίση», προβλήματα που απαιτούν συγκεκριμένα, έστω και κοπιαστικά, μαθηματικά βήματα, όπως και προβλήματα που απαιτούν περισσότερο «εξωτικές» μαθηματικές τεχνικές. Στόχος μας είναι να καλύψουμε κάθε πιθανή εκπαιδευτική ανάγκη, όπως και να βοηθήσουμε ώστε το αντικείμενο της Κυματικής – Οπτικής να γίνει κτήμα κάθε ενδιαφερόμενου, φοιτητή, εκπαιδευτικού, υποψήφιου κατατακτηρίων εξετάσεων. Πιστεύουμε ότι μόνο αν καταλαβαίνουμε το «τί, πώς και γιατί» της Φυσικής γινόμαστε ικανότεροι στην επίλυση προβλημάτων.

Αθανάσιος Πρίκας
athanasios_prikas@yahoo.gr

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1ο

ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 6ο

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΟΠΤΙΚΗ

Κεφάλαιο 7ο

ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΟΠΤΙΚΗ

Κεφάλαιο 8ο

ΜΕΡΙΚΑ ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΟΠΤΙΚΗΣ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Κεφάλαιο 1

ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

1.1 | Απλή αρμονική ταλάντωση

Θεωρία

Κινηματική της απλής αρμονικής ταλάντωσης

Ένα σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση όταν ικανοποιεί την εξίσωση:

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0) \qquad (1.1.1)$$

με x την απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας, $x_{\max} = A$ τη μέγιστη δυνατή απομάκρυνση ή πλάτος της ταλάντωσης, ω την κυκλική συχνότητα που εξαρτάται από την περίοδο T ή τη συχνότητα f μέσα από τις σχέσεις: $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$ και φ_0 την αρχική φάση η οποία δεν έχει ιδιαίτερη φυσική σημασία και προκύπτει από το ότι ξεκινήσαμε να παρατηρούμε την κίνηση του κινητού όχι τη στιγμή που διερχόταν από τη θέση ισορροπίας με θετική ταχύτητα αλλά κάποια άλλη στιγμή. Από την 1.1.1 έπεται:

$$\upsilon \equiv \frac{dx}{dt} = \omega A\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad (1.1.2)$$

$$a \equiv \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi_0) \qquad (1.1.3)$$

με $\upsilon_{\max} = \omega A$ και $a_{\max} = \omega^2 A$.

Να σημειώσουμε ότι το «σταθερό» μέρος των ταλαντώσεων, αυτό δηλαδή που εμφανίζεται σε όλες τις σχέσεις είναι το $\sin(\omega t + \varphi_0)$ (είτε η αντίστοιχη παράσταση με το συνημίτονο). Το x και το A μπορεί να είναι όπως εδώ οι απομακρύνσεις από τη θέση ισορροπίας, μπορεί να είναι γωνίες, μπορεί να είναι το φορτίο ενός πυκνωτή. Γενικά όποιο μέγεθος υπακούει στην 1.1.1 λέμε ότι ταλαντώνεται αρμονικά.

Η διαφορική εξίσωση της απλής αρμονικής ταλάντωσης (αλλιώς: «η δύναμη στην α.α.τ.»)

Από τη σύγκρισή των 1.1.1 και της δεύτερης εξίσωσης της 1.1.3 έπεται ότι:

$$a=-\omega^2 x \;\; \Rightarrow$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2 x \qquad (1.1.4)$$

Όταν λοιπόν ένα φυσικό μέγεθος (απομάκρυνση, γωνία, φορτίο πυκνωτή) υπακούει στην 1.1.4 (ισοδύναμα στην 1.1.1) θα λέμε ότι εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Το ω^2 παίζει το ρόλο μιας θετικής σταθεράς. Έτσι, αν καταλήξουμε ότι στο απλό εκκρεμές, για παράδειγμα, η γωνία που σχηματίζει το νήμα με την κατακόρυφο υπακούει στην εξίσωση: $\dfrac{d^2\theta}{dt^2}=-c\theta$, με $c>0$, τότε η γωνία μεταβάλλεται με το χρόνο με μια σχέση της μορφής: $\theta=\theta_{\max}\sin\left(\sqrt{c}t+\varphi_0\right)$, με άλλο λόγια το σώμα εκτελεί όντως αρμονική ταλάντωση, με το $\sqrt{c}$ να είναι το ω.

Η 1.1.4 είναι η διαφορική εξίσωση της ταλάντωσης.

Αν πολλαπλασιάσουμε την 1.1.4 με τη μάζα του σώματος, τότε χρησιμοποιώντας το 2^o νόμο του Νεύτωνα θα πάρουμε:

$$\Sigma F=-m\omega^2 x=-Dx\,, \quad D=m\omega^2 \qquad (1.1.5)$$

Μια άλλη διαφορική εξίσωση της απλής αρμονικής ταλάντωσης (αλλιώς: «η ενέργεια στην α.α.τ.»):

Μπορεί να αποδείξει κανείς ότι ισχύει για την κινητική και τη δυναμική ενέργεια μιας ταλάντωσης:

$$K+U=C \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}Dx^2=C\,,$$

$$C=E_{tot.}=\frac{1}{2}Dx_{\max}^2=\frac{1}{2}mv_{\max}^2 \qquad (1.1.6)$$

Γενικά ένα φυσικό μέγεθος x ταλαντώνεται αρμονικά με κυκλική συχνότητα ω αρκεί να ισχύει:

$$\dot{x}^2+\omega^2 x^2=\sigma\tau\alpha\theta. \qquad (1.1.7)$$

με $\dot{x}=dx/dt$.

Λυμένα Προβλήματα

1.1.1 Αποδείξτε ότι η γενικότερη λύση της 1.1.4 είναι η $x = A_1 \sin\omega t + A_2 \cos\omega t$.

Εκφράστε τους συντελεστές A_1 και A_2 συναρτήσει των A και φ_0.

Λύση:

$$x = A_1 \sin\omega t + A_2 \cos\omega t \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A_1 \sin\omega t - \omega^2 A_2 \cos\omega t = -\omega^2 x .$$

Άρα η συγκεκριμένη συνάρτηση είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης. Μήπως η διαφορική εξίσωση έχει και άλλες «επιπλέον» λύσεις, οι οποίες δεν καλύπτονται από την παρακάτω συνάρτηση;

$$x = A_1 \sin\omega t + A_2 \cos\omega t . \qquad (1)$$

Όχι. Διότι η 1.1.4 είναι δεύτερης τάξης (δηλαδή περιλαμβάνει μέχρι και 2η παράγωγο), άρα οι σταθερές που θα εμφανίζονται στη λύση της θα είναι δύο, είτε οι A_1 και A_2 της (1), είτε οι A και φ_0 της 1.1.1. Οι 1.1.1 και η (1) είναι ισοδύναμες αρκεί να ικανοποιούνται κάποιες σχέσεις ανάμεσα στις δύο ομάδες σταθερών. Αυτές ακριβώς τις σχέσεις θα βρούμε τώρα. Αναπτύσσοντας το ημίτονο της 1.1.1 έπεται:

$$x = A\cos\varphi_0 \sin\omega t + A\sin\varphi_0 \cos\omega t . \qquad (2)$$

Συγκρίνοντας τις (1) και (2) έπεται:

$$A_1 = A\cos\varphi_0 \quad \text{και} \quad A_2 = A\sin\varphi_0 .$$

1.1.2 **α)** Ξεκινώντας από την 1.1.1, αποδείξτε τις 1.1.4 και 1.1.7.
β) Ξεκινώντας από την 1.1.4, αποδείξτε την 1.1.1 και την 1.1.7.
γ) Ξεκινώντας από την 1.1.7, αποδείξτε τις 1.1.1 και 1.1.4

Λύση:

α) Αν

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0) \qquad (1)$$

τότε έπεται:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x ,$$

οπότε αποδείξαμε την 1.1.4. Θα αποδείξουμε τώρα την 1.1.7. Έχουμε:

$$\omega^2 x^2 = \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)\ . \qquad (2)$$

Επίσης από την (1) έπεται:

$$\dot{x} = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \dot{x}^2 = \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) \qquad (3)$$

Προσθέτοντας τις (2) και (3) έπεται η 1.1.7.

β) $$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x \Rightarrow \frac{d\dot{x}}{dt} = -\omega^2 x \Rightarrow d\dot{x} = -\omega^2 x dt \Rightarrow$$

$$\dot{x} d\dot{x} = -\dot{x}\omega^2 x dt = -\omega^2 x \frac{dx}{dt} dt = -\omega^2 x dx \Rightarrow \int \dot{x} d\dot{x} = -\omega^2 \int x dx \Rightarrow$$

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = -\omega^2 \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow \dot{x}^2 + \omega^2 x^2 = c_1 \qquad (4)$$

Έτσι αποδείξαμε από την 1.1.4 την 1.1.7. Θα συνεχίσουμε για να αποδείξουμε την 1.1.1. Από την (4) έπεται:

$$\dot{x} = \sqrt{c_1 - \omega^2 x^2} \Rightarrow \int dt = \int \frac{dx}{\sqrt{c_1 - \omega^2 x^2}}\ . \qquad (5)$$

Αν δε θέλουμε να καταφύγουμε σε πίνακα για το δεξιό ολοκλήρωμα, θα το υπολογίσουμε. Θέτω $\omega x = \sqrt{c_1}\sin z$, οπότε ο παρονομαστής του ολοκληρώματος της (5) γίνεται $\sqrt{c_1}\cos z$ και ο αριθμητής $\frac{\sqrt{c_1}}{\omega}\cos z dz$, άρα τελικά από την (5) έπεται:

$$t + c_2 = \frac{z}{\omega} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{c_1}}{\omega}\sin z = \frac{\sqrt{c_1}}{\omega}\sin(\omega t + \omega c_2)$$

δηλαδή έχει τη μορφή της 1.1.1.

γ) Στο δεύτερο σκέλος του ερωτήματος β ξεκινήσαμε από την 1.1.7 και αποδείξαμε την 1.1.1. Για να αποδείξουμε την 1.1.4 από την 1.1.7 παραγωγίζουμε την τελευταία:

$$\dot{x}^2 + \omega^2 x^2 = \sigma\tau\alpha\theta. \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2\right) = 0 \Rightarrow 2\dot{x}\ddot{x} + 2\omega^2 x\dot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x\ .$$

1.1.3 Σε μια απλή αρμονική ταλάντωση με δεδομένα τα m, k και A να υπολογίσετε τις μέσες τιμές ως προς το χρόνο και ως προς την απόσταση:

α) Της θέσης.

β) Της ταχύτητας.

γ) Της κινητικής ενέργειας.

δ) Της δυναμικής ενέργειας.

Λύση:

Η μέση τιμή ενός φυσικού μεγέθους, έστω p, ως προς το χρόνο ορίζεται ως:

$$\langle p \rangle_t = \frac{\int p dt}{\int dt},$$

όπου το χρονικό διάστημα $\Delta t = \int dt$ είναι ένα αντιπροσωπευτικό, για παράδειγμα ακέραιο πολλαπλάσιο της περιόδου, ή απλώς ένα πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα. Ομοίως, η μέση τιμή ενός μεγέθους ως προς τη θέση είναι:

$$\langle p \rangle_x = \frac{\int p dx}{\int dx}.$$

Επειδή η αρχική φάση, δηλαδή το πότε αρχίσαμε να μετράμε το χρόνο, δεν παίζει ρόλο στα μέσα μεγέθη του συστήματος, θα την αγνοήσουμε. Να σημειώσουμε πάντως ότι για τη μέση τιμή ενός μεγέθους ως προς την απόσταση πρέπει να είμαστε λίγο περισσότερο προσεκτικοί, γιατί μπορεί ο χρόνος να μη γυρίζει πίσω, η απόσταση όμως γυρνάει. Δηλαδή, αν υπολογίσουμε τη μέση τιμή ενός μεγέθους ως προς την απόσταση κατά τη διάρκεια μιας περιόδου, όταν δηλαδή το κινητό κινείται από το $-A$ στο A και ξανά πίσω στο $-A$, τότε κατά πάσα πιθανότητα η μέση τιμή αυτού του μεγέθους θα είναι μηδενική (εξαιρούνται μερικά μεγέθη όπως το έργο της τριβής που δεν είναι συναρτήσεις της θέσης). Για να βρούμε λοιπόν μέση τιμή ως προς τη θέση, θα ολοκληρώνουμε, για παράδειγμα από το $-A$ μέχρι το A. Μάλιστα, λόγω της συμμετρίας που παρουσιάζουν μερικά μεγέθη (όσα είναι άρτιες συναρτήσεις της θέσης), θα μπορούσαμε να ολοκληρώσουμε και από το 0 ως το A. Γενικά οι μέσες τιμές ως προς το χρόνο διαφέρουν από τις μέσες τιμές ως προς τη θέση, πράγμα που έχουμε συναντήσει και στη Μηχανική (μέση δύναμη ως προς το χρόνο = ώθηση δια χρόνος, μέση δύναμη ως προς την απόσταση = έργο δια απόσταση, ενώ οι δύο μέσες τιμές συμπίπτουν σπάνια, για παράδειγμα όταν η δύναμη είναι σταθερή.)

α) Άρα για τη θέση:

$$\langle x\rangle_t=\frac{\int xdt}{\int dt}=\frac{\int_0^{2\pi/\omega}A\sin\omega tdt}{\int_0^{2\pi/\omega}dt}=\frac{\left(\frac{A}{\omega}\right)(-\cos\omega t)\Big|_0^{2\pi/\omega}}{\frac{2\pi}{\omega}}=0\,,$$

όπου $2\pi/\omega$ είναι η περίοδος. Επίσης, με όμοιο τρόπο:

$$\langle x\rangle_x=\frac{\int_{-A}^{A}xdx}{\int_{-A}^{A}dx}=\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)_{-A}^{A}}{2A}=0\,.$$

Αυτά τα αποτελέσματα είναι σύμφωνα με τη διαισθητική αντίληψη που έχουμε για τις μέσες τιμές.

β)

$$\langle \dot{x}\rangle_t=\frac{\int \dot{x}dt}{\int dt}=\frac{\int_0^{2\pi/\omega}\omega A\cos\omega tdt}{\int_0^{2\pi/\omega}dt}=\frac{A(\sin\omega t)\big|_0^{2\pi/\omega}}{\frac{2\pi}{\omega}}=0\,.$$

Επίσης:

$$\langle \dot{x}\rangle_x=\frac{\int_{-A}^{A}\dot{x}dx}{\int_{-A}^{A}dx}\,.$$

Επειδή $dx=\dot{x}dt$, άρα:

$$\langle \dot{x}\rangle_x=\frac{\int_{-T/4}^{T/4}\dot{x}^2dt}{2A}=\frac{\int_{-T/4}^{T/4}\omega^2A^2\cos^2\omega tdt}{2A}\,.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τον τύπο

$$\cos a\cos b=\tfrac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$$

(βλ. το μαθηματικό παράρτημα) που εδώ γράφεται: $\cos^2\omega t=\frac{1}{2}\cos2\omega t+\frac{1}{2}$.

Άρα

$$\langle \dot{x}\rangle_x=\frac{\omega^2A\int_{-T/4}^{T/4}(\cos2\omega t+1)dt}{4}=\frac{\omega^2A}{4}\left(\frac{\sin2\omega t}{2\omega}+t\right)_{-\pi/2\omega}^{\pi/2\omega}=\omega A\frac{\pi}{4}\,.$$

γ) Προσέξτε ότι δε μπορούμε να πάρουμε τη μέση τιμή της ταχύτητας ή της θέσης, να την υψώσουμε στο τετράγωνο και έτσι να βρούμε έτσι τη μέση τιμή της κινητικής ή της δυναμικής ενέργειας. Άλλο πράγμα είναι το τετράγωνο του αθροίσματος (του ολοκληρώματος) και άλλο πράγμα το άθροισμα (το ολοκλήρωμα) των τετραγώνων.

$$\langle K \rangle_t = \frac{\int K dt}{\int dt} = \frac{\int_0^{2\pi/\omega} \frac{1}{2} m\dot{x}^2 dt}{\int_0^{2\pi/\omega} dt} = \frac{m\omega^3 A^2}{4\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2 \omega t dt =$$

$$= \frac{m\omega^3 A^2}{4\pi} \frac{\pi}{\omega} = \frac{1}{4} m\omega^2 A^2,$$

που μας δίνει το γνωστό αποτέλεσμα, ότι η μέση τιμή της κινητικής ενέργειας ως προς το χρόνο είναι ίση με το ήμισυ της ολικής ενέργειας του ταλαντωτή. Για τη μέση τιμή της κινητικής ενέργειας ως προς τη θέση:

$$\langle K \rangle_x = \frac{\int_{-A}^{A} K dx}{\int_{-A}^{A} dx} = \frac{\int_{-T/4}^{T/4} \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \dot{x} dt}{2A} = \frac{m}{4} \omega^3 A^2 \int_{-T/4}^{T/4} \cos^3 \omega t dt =$$

$$= \frac{m}{4} \omega^3 A^2 \frac{4}{3\omega} = \frac{1}{3} m\omega^2 A^2,$$

όπου το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως εξής:

$$\int \cos^3 \omega t dt = \left(\frac{1}{\omega}\right) \int (1 - \sin^2 \omega t) d(\sin \omega t) .$$

δ) Η μέση τιμή της δυναμικής ενέργειας ως προς το χρόνο θα μπορούσε να βρεθεί και με αφαίρεση της μέσης τιμής της κινητικής ενέργειας ως προς το χρόνο από την ολική ενέργεια, που είναι σταθερή. Με οποιονδήποτε τρόπο θα καταλήγαμε στο γνωστό μας αποτέλεσμα ότι

$$\langle U \rangle_t = \frac{\int U dt}{\int dt} = \frac{1}{4} m\omega^2 A^2 .$$

Επίσης με όμοιο τρόπο μπορούμε να βρούμε και τη μέση τιμή της δυναμικής ενέργειας ως προς την απόσταση, οπότε θα είχαμε ότι:

$$\langle U\rangle_x = \langle E_{tot.}\rangle_x - \langle K\rangle_x = E_{tot.} - \langle K\rangle_x = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{3}m\omega^2 A^2 =$$

$$= \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{3}kA^2 = \frac{1}{6}kA^2.$$

Θα δούμε τώρα αν η ολοκλήρωση δίνει τα ίδια αποτελέσματα. Όντως:

$$\langle U\rangle_x = \frac{\int_{-A}^{A} U dx}{\int_{-A}^{A} dx} = \frac{\int_{-A}^{A} \frac{1}{2}kx^2 dx}{2A} = \frac{k}{4A}\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-A}^{A} = \frac{1}{6}kA^2.$$

1.1.4 Ποια είναι η πιθανότητα να βρούμε ένα σωμάτιο που εκτελεί α.α.τ.:

α) Με $K \le E_{tot.}$

β) Στην περιοχή $0 \le x \le A/2$.

γ) Με $\upsilon \le \upsilon_{\max}/2$.

Λύση:

α) Σε κάθε χρονική στιγμή η κινητική ενέργεια του κινητού είναι μικρότερη ή ίση με την ολική ενέργεια. Άρα η σχέση που μας δίνει είναι σε κάθε χρονική στιγμή αληθής, δηλαδή η πιθανότητα να βρούμε το κινητό σε αυτή την κατάσταση είναι μονάδα.

β) Θα περιορίσουμε τη μελέτη μας στην πρώτη περίοδο, αφού η κίνηση επαναλαμβάνεται. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι για ένα κινητό που εκτελεί α.α.τ. ισχύει: $x = A\sin\omega t$, αφού η αρχική φάση δεν παίζει κανένα ρόλο στη δυναμική του προβλήματος. Θα βρούμε σε ποιες χρονικές στιγμές το κινητό περνά από τις θέσεις $x=0$ και $x=A/2$. Για

$$x=0 \Rightarrow \sin\omega t = 0 \Rightarrow t = k\frac{T}{2}.$$

Οι αποδεκτές τιμές για το k ώστε ο χρόνος να είναι μικρότερος ή ίσος της μιας περιόδου είναι: $k=0,1,2$. Άρα $t_1^{x=0}=0$, $t_2^{x=0}=T/2$, $t_3^{x=0}=T$ και λοιπά. Για

$$x=A/2 \Rightarrow \sin\omega t = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{T}{2}\left(2k+\frac{1}{6}\right) \text{ ή } t = \frac{T}{2}\left(2k+\frac{5}{6}\right).$$

Εδώ οι αποδεκτές τιμές για το k ώστε ο χρόνος να είναι μικρότερος ή ίσος της μιας περιόδου είναι $k=0$ είτε για την πρώτη είτε για τη δεύτερη λύση. Άρα, οι χρόνοι στους οποίους διέρχεται κατά την πρώτη περίοδο από τη θέση $x=A/2$

το κινητό είναι: $t_1^{x=A/2}=T/12$, $t_2^{x=A/2}=5T/12$. Άρα, στη διάρκεια της 1ης περιόδου το κινητό βρίσκεται στην περιοχή $0\le x\le A/2$ κατά τα χρονικά διαστήματα: Από $t_1^{x=0}$ ως $t_1^{x=A/2}$ (διάρκεια $T/12$) και από $t_2^{x=A/2}$ ως $t_2^{x=0}$ (διάρκεια πάλι $T/12$). Άρα κατά τη διάρκεια μιας περιόδου το κινητό βρίσκεται για χρόνο $2T/12=T/6$ στη ζητούμενη περιοχή και άρα η πιθανότητα εύρεσής του σε αυτή είναι 1/6.

γ) Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να βρούμε τις χρονικές στιγμές κατά τη διάρκεια της πρώτης περιόδου κίνησης του κινητού, στις οποίες έχουμε:

$$\upsilon=\frac{\upsilon_{\max}}{2}\ \Rightarrow\ t=\frac{T}{2}\left(2k+\frac{1}{3}\right)\ \text{ ή }\ t=\frac{T}{2}\left(2k-\frac{1}{3}\right).$$

Για την πρώτη περίπτωση το αποδεκτό k είναι το 0 και για τη δεύτερη περίπτωση είναι το 1. Οι αντίστοιχοι χρόνοι είναι: $t_1=T/6$ και $t_2=5T/6$, οπότε για $t_1\le t\le t_2$ (διάρκεια $2T/3$) το κινητό έχει $\upsilon\le\upsilon_{\max}/2$, άρα η πιθανότητα να το εντοπίσουμε με αυτό το χαρακτηριστικό είναι $\dfrac{2T/3}{T}=2/3$.

1.1.5 Η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας ενός φυσικού συστήματος είναι η $U(x)$, η οποία παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο σε ένα σημείο x_0 ενώ υπάρχουν οι παράγωγοι κάθε τάξεως σε αυτό το σημείο. Να αποδείξετε ότι για μικρές απομακρύνεις από τη θέση ισορροπίας το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και να προσδιοριστεί η κυκλική του συχνότητα. Δίνεται η μάζα του συστήματος και το $U''(x=x_0)\neq 0$.

Λύση:

Αναπτύσσουμε σε δυναμοσειρά τη συνάρτηση του δυναμικού γύρω από το x_0, οπότε έχουμε:

$$U(x)=U(x_0)+\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=x_0}(x-x_0)+\frac{1}{2!}\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=x_0}(x-x_0)^2+\frac{1}{3!}\left.\frac{d^3U}{dx^3}\right|_{x=x_0}(x-x_0)^3+\dots$$

Από αυτούς τους όρους, ο $U(x_0)$ είναι μια σταθερά και μπορούμε να τον απαλείψουμε, αφού μόνο οι διαφορές της δυναμικής ενέργειας έχουν φυσική σημασία και όχι οι απόλυτες τιμές της, ο όρος $\left.\dfrac{dU}{dx}\right|_{x=x_0}$ είναι μηδέν γιατί στο σημείο αυτό υπάρχει τοπικό ελάχιστο, και οι όροι που περιέχουν παραγώγους τρίτης ή

μεγαλύτερης τάξεως, όπως ο $\left.\frac{1}{3!}\frac{d^3U}{dx^3}\right|_{x=x_0}(x-x_0)^3$ είναι αμελητέοι γιατί το $x-x_0$ είναι πολύ μικρό (μικρές απομακρύνσεις από τη θέση ισορροπίας) και αν υψωθεί και σε μια δύναμη γίνεται ακόμη μικρότερο. Άρα η δυναμική ενέργεια είναι της μορφής:

$$U(x)=\frac{U''(x=x_0)}{2}(x-x_0)^2$$

και αν ορίσουμε μια καινούρια συντεταγμένη, τη $X=x-x_0$, αν δηλαδή αναφερόμαστε στις απομακρύνσεις από το σημείο ισορροπίας, τότε μπορούμε να γράψουμε: $U(X)=\frac{1}{2}U''(0)X^2$. Επίσης η ταχύτητα μπορεί να γραφεί: $\upsilon=\frac{dx}{dt}=\frac{dX}{dt}$. Άρα, έχουμε και την κινητική και τη δυναμική ενέργεια στη μορφή 1.1.6, με $D=U''(0)$ και άρα όντως το σώμα εκτελεί α.α.τ. με κυκλική συχνότητα:

$$\omega=\sqrt{\frac{U''(0)}{m}}\,.$$

Αν δε θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε την 1.1.6, μπορούμε να βρούμε τη δύναμη από τη σχέση της Μηχανικής: $F=-\frac{dU}{dx}$, η οποία έχει την κατάλληλη μορφή ώστε το σώμα να κάνει α.α.τ.

1.1.6 Ένα σώμα έχει δυναμική ενέργεια που δίνεται από τη σχέση:

$$U=\begin{cases}\frac{1}{2}Dx^2 & x\geq 0\\ \infty & x<0\end{cases}.$$

α) Περιγράψτε ένα φυσικό σύστημα το οποίο αντιστοιχεί σε αυτό το είδος της δυναμικής ενέργειας.

β) Δώστε την εξίσωση της θέσης του κινητού.

γ) Δείξτε ότι η κίνηση είναι περιοδική και βρείτε την περίοδό της. Δίνεται η ολική ενέργεια του συστήματος E_{tot}.

Λύση:

α) Ας θεωρήσουμε ένα οριζόντιο ελατήριο το οποίο έχει φυσικό μήκος l_0, με το δεξιό του άκρο είναι ελεύθερο και το αριστερό του άκρο ακλόνητα στερεωμέ-

νο. Στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου υπάρχει ένας τοίχος, ο οποίος μόλις ακουμπά σε αυτό. Τοποθετούμε μια σημειακή μάζα στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου και το συσπειρώνουμε κατά A. Το ελατήριο αποσυμπιέζεται, και στο $x=0$ η σημειακή μάζα χτυπά στον ακλόνητο τοίχο. Αν η κρούση είναι ελαστική (αν θέλουμε να ορίζεται συνάρτηση δυναμικής ενέργειας, θα πρέπει όλες οι δυνάμεις στο σύστημα να είναι συντηρητικές και άρα θα πρέπει οι κρούσεις να είναι ελαστικές), τότε η σημειακή μάζα αναπηδά στον τοίχο με την ίδια ταχύτητα κατά μέτρο ($\upsilon_{\max}$), με την οποία προσέκρουσε σε αυτόν. Είναι δηλαδή σαν το σύστημα να εκτελεί «μισή ταλάντωση».

β) Η εξίσωση της θέσης για το σύστημα στο οποίο τη χρονική στιγμή μηδέν το ελατήριο θα είχε μηδενική συσπείρωση, θα ήταν: $x=A\left|\sin\omega t\right|$. Το απόλυτο είναι η μόνη συνάρτηση η οποία μπορεί να αναπαραστήσει αυτές τις αναπηδήσεις του σωματίου. Το A θα βρεθεί από την ολική ενέργεια του συστήματος:

$$E_{tot}=\frac{1}{2}DA^2 \Leftrightarrow A=\sqrt{\frac{2E_{tot}}{D}}$$

γ) Ισχύει:

$$A\left|\sin\left[\omega\left(t+\frac{\pi}{\omega}\right)\right]\right|=A\left|\sin\omega t\right|,$$

και ο π/ω είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός για τον οποίο επαναλαμβάνεται η συνάρτηση, άρα αυτή είναι περιοδική με περίοδο ίση με τη μισή της περιόδου μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης, δηλαδή της περιοδικής κίνησης που θα εκτελούσε το κινητό αν δεν υπήρχε ο τοίχος. Αυτό είναι σύμφωνο με τη διαισθητική μας αντίληψη ότι το κινητό ολοκληρώνει αυτή την κίνηση στο μισό χρόνο που χρειάζεται για να ολοκληρώσει μια πλήρη ταλάντωση.

1.1.7 Ένα οριζόντιο ελατήριο που υπακούει στο νόμο του Hooke έχει φυσικό μήκος l_0 και μάζα M και στο ελεύθερο άκρο του προσδένεται μάζα m. Να βρεθεί μια έκφραση για την ολική ενέργεια του συστήματος και να αποδειχθεί ότι αυτό μπορεί να εκτελεί α.α.τ. Να βρεθεί η κυκλική συχνότητά της.

Λύση:

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος προκύπτει από το έργο του ελατηρίου. Αν το ελατήριο υπακούει στο νόμο του Hooke, τότε μπορεί να δείξει κανείς ότι:

$$U(x)=\int_x^0 -kx\,dx=\tfrac{1}{2}kx^2.$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι το άθροισμα της κινητικής ενέργειας της μάζας και της κινητικής του ελατηρίου. Η κινητική ενέργεια της m είναι $\frac{1}{2}mv^2$. Θα βρούμε την κινητική ενέργεια του ελατηρίου. Η ταχύτητα του στοιχειώδους τμήματος του ελατηρίου που βρίσκεται στο ακλόνητο άκρο του είναι μηδενική. Η ταχύτητα του στοιχειώδους τμήματος που βρίσκεται στην πλευρά της μάζας m είναι όση και η ταχύτητα αυτής της μάζας. Η ταχύτητα u του κομματιού του ελατηρίου που απέχει απόσταση x από το ακλόνητο άκρο του έχει μια ενδιάμεση τιμή, και είναι ανάλογη αυτής της απόστασης, άρα $u=\frac{x}{l_0}v$, άρα η κινητική ενέργεια από αυτό το στοιχειώδες τμήμα μάζας dm είναι:

$$dK_{\varepsilon\lambda.}=\frac{1}{2}dm\frac{x^2}{l_0^2}v^2 \Rightarrow dK_{\varepsilon\lambda.}=\frac{1}{2}\rho dx\frac{x^2}{l_0^2}v^2=\frac{1}{2}\frac{M}{l_0}dx\frac{x^2}{l_0^2}v^2 \Rightarrow$$

$$K_{\varepsilon\lambda.}=\int_0^{l_0}\frac{1}{2}\frac{Mv^2}{l_0^3}x^2dx=\frac{1}{6}Mv^2,$$

όπου θεωρήσαμε τη γραμμική πυκνότητα μάζας του ελατηρίου: $\rho=\frac{dm}{dx}$, η οποία, προκειμένου για ομογενές ελατήριο, δίνει: $\rho=\frac{M}{l_0}$. Άρα η συνολική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι:

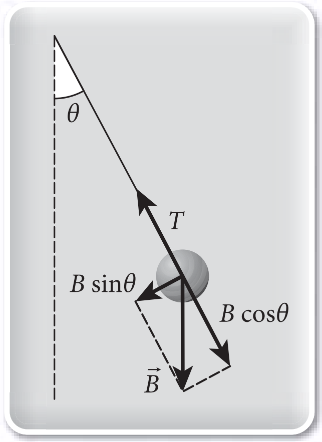
$$K=\frac{1}{2}\left(m+\frac{M}{3}\right)v^2.$$

Βλέπουμε άρα ότι το άθροισμα δυναμικής και κινητικής ενέργειας είναι της μορφής 1.1.6 και άρα όντως το σύστημα εκτελεί α.α.τ. Η περίοδος αυτής είναι η τετραγωνική ρίζα του σταθερού παράγοντα της δυναμικής ενέργειας προς το σταθερό παράγοντα της κινητικής ενέργειας:

$$\omega=\sqrt{D\Big/\left(m+\frac{M}{3}\right)}.$$

1.1.8 Να αποδειχθεί με δύο τρόπους (από τη συνισταμένη δύναμη και από την έκφραση για την ενέργεια του συστήματος) ότι μία σημειακή μάζα m προσδεμένη στο άκρο μη εκτατού νήματος μήκους l εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση για μικρές απομακρύνσεις από τη θέση ισορροπίας.

Λύση:



Χρησιμοποιώντας τη δύναμη μπορούμε να δούμε ότι η συνιστώσα $T - B\cos\theta$ λειτουργεί ως κεντρομόλος δύναμη για την κίνηση της σημειακής μάζας και η συνιστώσα $B\sin\theta = \frac{mg}{l}x$ παίζει το ρόλο της δύναμης επαναφοράς η οποία είναι όντως ανάλογη της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας.

Η σταθερά αναλογίας της ταλάντωσης είναι:

$$\omega^2 = \frac{mg}{l}\Big/ m = \frac{g}{l}.$$

Μπορούμε σε ανάλογα συμπεράσματα να καταλήξουμε φτάνοντας σε μια εξίσωση όπως οι 1.1.6, 1.1.7: Η ενέργεια του απλού εκκρεμούς είναι η κινητική του και η δυναμική λόγω του βαρυτικού πεδίου, δηλαδή:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgl(1-\cos\theta).$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση π2.13 $\cos a + \cos b = 2\cos\left[\tfrac{1}{2}(a+b)\right]\cos\left[\tfrac{1}{2}(a-b)\right]$, μπορούμε το $1-\cos\theta = \cos 0 + \cos(\theta+\pi)$ να το γράψουμε:

$$1-\cos\theta = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin^2\frac{\theta}{2} = 2\left(\frac{x}{2l}\right)^2 = \frac{1}{2l^2}x^2.$$

Άρα η ολική ενέργεια είναι της μορφής:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{mg}{l}x^2$$

και άρα όντως το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

Προβλήματα για Λύση

1.1.9 Ένα σώμα βρίσκεται σε μια λακκούβα η οποία έχει σχήμα παραβολικό: Όταν απομακρυνόμαστε κατά x από το κατώτερο σημείο της και κατά τον οριζόντιο άξονα, τότε η αντίστοιχη απομάκρυνσή μας κατά τον κατακόρυφο άξονα είναι $y = ax^2$, όπου a μία γνωστή θετική σταθερά. Αποδείξτε ότι ένα σώμα που μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές μέσα στη λακκούβα, εκτελεί αρμονική ταλάντωση και προσδιορίστε την περίοδό της. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας.

1.1.10 Ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση διέρχεται από το σημείο x_1 με ταχύτητα $\dot{x}_1$ και από το σημείο x_2 με ταχύτητα $\dot{x}_2$. Να προσδιοριστεί το πλάτος της ταλαντώσεως και η περίοδός της.

1.1.11 Αν για ένα κινητό που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση ισχύει:

$$x = A\sin\omega t,$$

σε ποιες χρονικές στιγμές:

α) Η απομάκρυνση γίνεται μισή της μέγιστης.

β) Η κινητική και η δυναμική ενέργεια εξισώνονται.

1.1.12 Αν δίνεται η περίοδος ενός κινητού που εκτελεί α.α.τ., ποιοι είναι οι χρόνοι που χρειάζεται για να μεταβεί το κινητό από τη θέση $x_1 = A/2$, αν σε αυτή κινείται με θετική ταχύτητα:

α) Στην ίδια θέση για 1η και 2η φορά.

β) Στη θέση $x_2 = -A/2$ για 1η και 2η φορά. Παίζει ρόλο η αρχική φάση;

1.1.13 Δίνονται οι αρχικές συνθήκες x_0 και $\dot{x}_0$, δηλαδή η θέση και η ταχύτητα ενός ταλαντωτή στο χρόνο μηδέν. Δείξτε ότι συναρτήσει των αρχικών του συνθηκών, το πλάτος και η αρχική του φάση δίνονται από τις σχέσεις:

$$A = \left(x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2} \right), \quad \varphi_0 = \arctan\frac{\omega x_0}{\dot{x}_0}.$$

1.1.14 Ας υποθέσουμε ότι η καρδιά ενός παράξενου είδους ζώου είναι περίπου σφαιρική με μέση ακτίνα r_0. Αυτή η ακτίνα ταλαντώνεται γύρω από τη

«θέση ισορροπίας» και η ακριβής τιμή της δίνεται κάθε στιγμή από τη σχέση: $r = r_0 + \Delta r$, με $\Delta r = \Delta r_0 \sin\omega t$.

α) Μπορούμε να πούμε ότι η ακτίνα ή η επιφάνεια ή ο όγκος της καρδιάς εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση;

β) Ποιες είναι οι αντίστοιχες σχέσεις που μπορούμε να γράψουμε για την επιφάνεια S και τον όγκο V;

γ) Μπορούμε να πούμε ότι το ΔS και το ΔV εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση; Με ποια προϋπόθεση;

δ) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της επιφάνειας και του όγκου της καρδιάς συναρτήσει του χρόνου;

1.1.15 Ποιο κλάσμα της περιόδου ενός απλού αρμονικού ταλαντωτή η κινητική ενέργεια είναι μεγαλύτερη από τη μισή της μέγιστης; Ποιο κλάσμα της περιόδου η δυναμική ενέργεια είναι μεγαλύτερη από τη μισή της μέγιστης;

1.1.16 Ποιο κλάσμα της περιόδου ενός απλού αρμονικού ταλαντωτή η ταχύτητα του σώματος είναι μεγαλύτερη από τη μισή της μέγιστης;

1.1.17 Δύο αρμονικοί ταλαντωτές περιγράφονται από τις σχέσεις:

$$x_1 = A\sin\omega t \quad \text{και} \quad x_2 = A\sin 2\omega t.$$

Ποιες είναι οι χρονικές στιγμές κατά τις οποίες οι δύο ταλαντωτές έχουν κοινές απομακρύνσεις;