

Παναγιώτης Πρίνος

Καθηγητής Υδραυλικής Μηχανικής, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών Α.Π.Θ.

Υδραυλική Κλειστών & Ανοικτών Αγωγών



ISBN 978-960-456-344-9

© Copyright, Απρίλιος 2013, Πρίνος Παναγιώτης, Εκδόσεις Ζήτη

Το παρόν έργο πνευματικής ιδιοκτησίας προστατεύεται κατά τις διατάξεις του ελληνικού νόμου (Ν.2121/1993 όπως έχει τροποποιηθεί και ισχύει σήμερα) και τις διεθνείς συμβάσεις περί πνευματικής ιδιοκτησίας. Απαγορεύεται απολύτως η άνευ γραπτής άδειας του εκδότη κατά οποιοδήποτε τρόπο ή μέσο αντιγραφή, φωτοανατύπωση και εν γένει αναπαραγωγή, εκμίσθωση ή δανεισμός, μετάφραση, διασκευή, αναμετάδοση στο κοινό σε οποιαδήποτε μορφή (ηλεκτρονική, μηχανική ή άλλη) και η εν γένει εκμετάλλευση του συνόλου ή μέρους του έργου.

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση
Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & ΣΙΑ ΟΕ

18^ο χλμ Θεσσαλονίκης - Περαιάς
Τ.Θ. 4171 • Περαιά Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr



www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ:

Αρμενοπούλου 27 - 546 35 Θεσσαλονίκη • Τηλ.: 2310-203.720 • Fax 2310-211.305
e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΕΝΩΣΗ ΕΚΔΟΤΩΝ ΒΙΒΛΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ:

Στοά του Βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5) - 105 64 ΑΘΗΝΑ • Τηλ.-Fax: 210-3211.097

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ - ΑΠΟΘΗΚΗ ΑΘΗΝΩΝ:

Χαριλάου Τρικούπη 22 - Τ.Κ. 106 79, Αθήνα • Τηλ.-Fax: 210-3816.650
e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται πρωταρχικά στους φοιτητές Πολιτικούς Μηχανικούς και καλύπτει την ύλη του μαθήματος «Υδραυλική» (μάθημα κορμού, 4^ο εξάμηνο), που προλαμβάνει την Υδραυλική Κλειστών Αγωγών και Ανοικτών Αγωγών και διδάσκεται στο Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών του ΑΠΘ.

Επίσης, μπορούν να συμβουλευτούν το βιβλίο αυτό, μεταπτυχιακοί φοιτητές, υποψήφιοι διδάκτορες και επαγγελματίες Πολιτικοί Μηχανικοί που ασχολούνται με θέματα όπως η διαστασιολόγηση αγωγών σε δίκτυα ύδρευσης και δίκτυα αποχέτευσης, η επιλογή αντλιών για την χρήση τους σε αντλιοστάσια, ο σχεδιασμός ανοικτών αγωγών και η αντιπλημμυρική προστασία ποταμών και υδατορευμάτων μεταξύ άλλων.

Στο βιβλίο, που περιλαμβάνει συνολικά δέκα κεφάλαια, (τέσσερα κεφάλαια για την Υδραυλική Κλειστών Αγωγών και έξι κεφάλαια για την Υδραυλική Ανοικτών αγωγών), παρουσιάζονται οι βασικές αρχές της διατήρησης μάζας, ορμής και ενέργειας, τα κύρια χαρακτηριστικά της ροής σε σωλήνες και σε ανοικτούς αγωγούς και οι αντίστοιχες εφαρμογές τους. Αναλύονται επίσης πρακτικά θέματα και επιλύονται προβλήματα που θα αντιμετωπίσει ο Υδραυλικός Πολιτικός Μηχανικός στην πράξη όπως η διαστασιολόγηση σωλήνων και ο υπολογισμός απωλειών ενέργειας, ο υδραυλικός υπολογισμός δικτύων ύδρευσης (ακτινωτών και βροχωτών), η επιλογή και χρήση κατάλληλων αντλιών σε δίκτυα ύδρευσης και αποχέτευσης, ο σχεδιασμός ανοικτών αγωγών με σταθερή κοίτη, όπως επίσης και αλλουβιακών υδατορευμάτων καθώς και ο σχεδιασμός έργων για την εκπόνηση της ενέργειας (υδραυλικό άλμα, λεκάνες εκτόνωσης).

Το βιβλίο βασίζεται στην διδακτική εμπειρία του συγγραφέα στα μαθήματα Υδραυλικής και Υδραυλικής Ανοικτών Αγωγών από το 1992 και την ερευνητική εμπειρία του σε αντίστοιχα θέματα από το 1981 οπότε και ξεκίνησε την εκπόνηση της διδακτορικής του διατριβής στο αντικείμενο της Υδραυλικής Ανοικτών αγωγών σύνθετης διατομής στο Πανεπιστήμιο Οττάβας του Καναδά.

Για την ολοκλήρωση του βιβλίου συνέβαλαν (α) η κ. Ολυμπία Καζαντζόγλου με την συγγραφή των σημειώσεων που βασίστηκε το βιβλίο αυτό (β) ο Λέκτορας Ζήσης Μάλλιος με την ψηφιοποίηση των διαγραμμάτων (γ) οι συνεργάτες μου

Δρ. Θεοχάρης Κόφτης και Αντρέας Παπατσιότσος με την επίλυση παραδειγμάτων και (δ) ο εκδοτικός οίκος Ζήτη με την άψογη εκτύπωση τους οποίους και ευχαριστώ ολόθερμα.

Ο Συγγραφέας

Παναγιώτης ΠΡΙΝΟΣ

Καθηγητής Υδραυλικής Μηχ.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1: Στρωτή και Τυρβώδης Ροή σε Σωλήνες

| | | |
|-------|---|----|
| 1.1 | Χαρακτηριστικά Στρωτής και Τυρβώδους Ροής | 1 |
| 1.1.1 | Στρωτή ή Τυρβώδης Ροή..... | 2 |
| 1.1.2 | Περιοχή Εισόδου και Πλήρως Αναπτυγμένη Ροή | 4 |
| 1.1.3 | Πίεση και Διατμητική Τάση | 6 |
| 1.2 | Στρωτή Ροή σε Σωλήνες | 9 |
| 1.2.1 | Από την Εφαρμογή του 2 ^{ου} Νόμου του Νεύτωνα σε ένα Στοιχείο του Ρευστού..... | 9 |
| 1.2.2 | Από τις Εξισώσεις Navier - Stokes | 16 |
| 1.2.3 | Από Διαστατική Ανάλυση..... | 18 |
| 1.2.4 | Εξίσωση Ενέργειας | 20 |
| 1.3 | Πλήρως Αναπτυγμένη Τυρβώδης Ροή | 21 |
| 1.3.1 | Μετάβαση από Στρωτή σε Τυρβώδη Ροή..... | 22 |
| 1.3.2 | Τυρβώδεις Διατμητικές Τάσεις..... | 24 |
| 1.3.3 | Προσομοίωση των Τυρβωδών Τάσεων – Μοντέλα Τύρβης | 31 |
| 1.3.4 | Κατανομή Ταχύτητας σε Λεία και Τραχεία Τυρβώδη Ροή | 34 |
| 1.4 | Διαστατική Ανάλυση της Ροής σε Σωλήνα | 42 |
| 1.4.1 | Το Διάγραμμα Moody..... | 42 |
| 1.4.2 | Τοπικές Απώλειες | 51 |
| | Ασκήσεις για Λύση | 71 |

Κεφάλαιο 2: Προβλήματα Ροής σε Σωλήνες

| | | |
|-------|---|----|
| 2.1 | Εισαγωγή..... | 77 |
| 2.2 | Προβλήματα Ροής σε Σωλήνες | 77 |
| 2.2.1 | Πρόβλημα Πιεζομετρικού Φορτίου | 77 |
| 2.2.2 | Πρόβλημα Παροχής..... | 78 |
| 2.2.3 | Το Πρόβλημα της Διαμέτρου | 80 |
| 2.3 | Ροή σε Σωλήνα - Σίφωνα – Το φαινόμενο της Σπηλαίωσης..... | 84 |
| 2.4 | Σωλήνες σε Σειρά, σε Παράλληλη Διάταξη και Ισοδύναμος Σωλήνας | 87 |
| 2.4.1 | Σωλήνες σε Σειρά | 89 |
| 2.4.2 | Παράλληλοι Σωλήνες | 90 |

| | |
|---------------------------------------|-----|
| 2.4.3 Προβλήματα Τριών Δεξαμενών..... | 94 |
| Ασκήσεις για Λύση | 105 |

Κεφάλαιο 3: Σχεδιασμός και Ανάλυση Δικτύων

| | |
|--|-----|
| 3.1 Πρότυπα Ζήτησης Νερού..... | 115 |
| 3.2 Απώλεια Φορτίου σε Σωλήνες | 116 |
| 3.2.1 Απώλεια Φορτίου σε Σωλήνα με Ζήτηση στους Κόμβους | 116 |
| 3.2.2 Απώλεια Φορτίου σε Σωλήνα με Κατανεμημένη Ζήτηση | 117 |
| 3.3 Ανάλυση Σωλήνων Μεταφοράς Νερού | 118 |
| 3.4 Ανάλυση των Κεντρικών Αγωγών Διανομής | 120 |
| 3.5 Δίκτυα Διανομής | 121 |
| 3.6 Ανάλυση Ακτινωτών Δικτύων | 123 |
| 3.7 Ανάλυση Βροχωτών Δικτύων | 129 |
| 3.7.1 Μέθοδος Hardy Cross..... | 130 |
| 3.7.2 Μέθοδος Newton - Raphson..... | 140 |
| 3.7.3 Μέθοδος Γραμμικής Θεωρίας | 144 |
| 3.8 Ανάλυση Δικτύων με το EPANET..... | 148 |
| 3.8.1 Εισαγωγή..... | 148 |
| 3.8.2 Δυνατότητες Υδραυλικής Προσομοίωσης (μοντελοποίησης) | 149 |
| 3.8.3 Δυνατότητες Προσομοίωσης Ποιότητας Νερού..... | 149 |
| 3.8.4 Φυσικά Χαρακτηριστικά | 150 |
| 3.8.5 Επίλυση Δικτύων..... | 156 |
| Ασκήσεις για Λύση | 159 |

Κεφάλαιο 4: Αντλίες

| | |
|--|-----|
| 4.1 Εισαγωγή | 165 |
| 4.2 Κατάταξη των Αντλιών | 167 |
| 4.2.1 Ταξινόμηση Δυναμικών Αντλιών | 168 |
| 4.2.2 Ταξινόμηση Αντλιών θετικής εκτόπισης..... | 170 |
| 4.2.3 Πλεονεκτήματα και Μειονεκτήματα | 172 |
| 4.3 Δυναμικές Αντλίες (αντλίες κινητικού τύπου) | 173 |
| 4.3.1 Αντλίες Ακτινικής Ροής ή Φυγόκεντρες Αντλίες | 173 |
| 4.3.2 Αντλίες Αξονικής Ροής (ή αντλίες με έλικα) | 180 |
| 4.3.3 Αντλίες Μικτής Ροής..... | 182 |
| 4.3.4 Αντλίες Περιφερειακής Ροής ή Στροβιλοαντλίες | 183 |
| 4.3.5 Αντλίες Ακροφυσίου (εκχυτήρες) | 184 |

| | | |
|-------|--|-----|
| 4.4 | Θεωρητική Προσέγγιση | 185 |
| 4.5 | Χαρακτηριστικά Απόδοσης Αντλίας..... | 193 |
| 4.6 | Καθαρό Θετικό Φορτίο Αναρρόφησης (Net Positive Suction Head, NPSH) | 202 |
| 4.7 | Χαρακτηριστικά Συστήματος και Επιλογή Αντλίας..... | 206 |
| 4.8 | Αδιάστατοι Παράμετροι και Νόμοι Ομοιότητας..... | 219 |
| 4.8.1 | Νόμοι Ομοιότητας Αντλίας | 222 |
| 4.8.2 | Ειδική Ταχύτητα | 226 |
| 4.8.3 | Ειδική Ταχύτητα Αναρρόφησης..... | 229 |
| 4.9 | Σπηλαίωση Αντλιών | 230 |
| | Ασκήσεις για Λύση | 237 |

Κεφάλαιο 5: Χαρακτηριστικά της Ροής σε Ανοικτούς Αγωγούς

| | | |
|-------|--|-----|
| 5.1 | Εισαγωγή..... | 253 |
| 5.2 | Κατηγορίες Ανοικτών Αγωγών | 255 |
| 5.3 | Κατηγορίες Ροής..... | 259 |
| 5.3.1 | Στρωτή και Τυρβώδης Ροή | 259 |
| 5.3.2 | Υποκρίσιμη και Υπερκρίσιμη Ροή | 261 |
| 5.3.3 | Μόνιμη και μη Μόνιμη Ροή | 262 |
| 5.3.4 | Ομοιόμορφη και Ανομοιόμορφη Ροή | 262 |
| 5.3.5 | Μονοδιάστατη, Διδιάστατη και Τρισδιάστατη Ροή..... | 263 |
| 5.4 | Βασικές Εξισώσεις..... | 264 |
| 5.4.1 | Εξίσωση Συνέχειας | 264 |
| 5.4.2 | Εξίσωση Ενέργειας | 265 |
| 5.4.3 | Εξίσωση Ορμής | 267 |

Κεφάλαιο 6: Ομοιόμορφη Ροή

| | | |
|-------|--|-----|
| 6.1 | Εισαγωγή..... | 269 |
| 6.2 | Κατανομή Διατμητικής Τάσης και Ταχύτητας..... | 269 |
| 6.3 | Εξίσωση Chezy..... | 274 |
| 6.4 | Εξίσωση Manning..... | 275 |
| 6.4.1 | Ισοδύναμος Συντελεστής Manning..... | 280 |
| 6.4.2 | Ομοιόμορφη Ροή σε Αγωγούς Συνθέτου Διατομής | 282 |
| 6.4.3 | Επιλογή του Συντελεστή Manning η για Φυσικούς Αγωγούς..... | 286 |
| 6.5 | Παροχευτικότητα Αγωγού..... | 288 |
| 6.6 | Καμπύλες Z_1 για Ορθογωνικούς και Τραπεζοειδείς Αγωγούς..... | 289 |

| | | |
|-------|--|-----|
| 6.7 | Ροή σε Κυκλικούς Αγωγούς (σωλήνες) | 292 |
| 6.7.1 | Πολλαπλότητα Ομοιόμορφου Βάθους | 295 |
| 6.7.2 | Υπολογισμός της Διαμέτρου | 296 |
| 6.8 | Προσεγγιστικές Σχέσεις για τον Υπολογισμό του Ομοιόμορφου Βάθους | 298 |
| 6.8.1 | Ορθογωνική Διατομή | 298 |
| 6.8.2 | Τραπεζοειδής Διατομή | 299 |
| 6.8.3 | Κυκλική Διατομή..... | 299 |
| 6.9 | Σχεδιασμός Αγωγών | 305 |
| 6.9.1 | Σχεδιασμός Αγωγών με Σταθερή, Αμετάβλητη Διατομή | 306 |
| 6.9.2 | Η Έννοια της Βέλτιστης Υδραυλικής Διατομής | 306 |
| 6.9.3 | Σχεδιασμός Αγωγών Λυμάτων, Όμβριων | 312 |
| 6.9.4 | Σχεδιασμός Αγωγών με Βλάστηση (γρασίδι) | 316 |
| | Ασκήσεις για Λύση | 320 |

Κεφάλαιο 7: Η Αρχή της Ενέργειας

| | | |
|-------|---|-----|
| 7.1 | Εισαγωγή | 323 |
| 7.2 | Ειδική Ενέργεια..... | 323 |
| 7.2.1 | Διάγραμμα Ειδικής Ενέργειας | 324 |
| 7.2.2 | Διάγραμμα Αδιάστατης Ειδικής Ενέργειας | 325 |
| 7.2.3 | Διάγραμμα Βάθους – Παροχής | 328 |
| 7.2.4 | Κρίσιμη Κλίση Πυθμένα | 329 |
| 7.2.5 | Εναλασσόμενα Βάθη..... | 330 |
| 7.3 | Υπολογισμός Κρίσιμου Βάθους | 330 |
| 7.3.1 | Καμπύλες Συντελεστή Διατομής | 331 |
| 7.3.2 | Προσεγγιστικές Σχέσεις για τον Υπολογισμό του Κρίσιμου Βάθους | 336 |
| 7.4 | Διατομές Ελέγχου | 341 |
| 7.5 | Εφαρμογές Ειδικής Ενέργειας και Κρίσιμου Βάθους | 342 |
| 7.5.1 | Ροή σε Αγωγό με Βαθμιαία Μείωση του Πλάτους..... | 342 |
| 7.5.2 | Ροή σε Αγωγό με Αναβαθμό | 346 |
| | Ασκήσεις για Λύση | 355 |

Κεφάλαιο 8: Η Αρχή της Ορμής – Το Υδραυλικό Άλμα

| | | |
|-------|------------------------------------|-----|
| 8.1 | Εισαγωγή | 359 |
| 8.2 | Εξίσωση Ορμής – Ειδική Δύναμη..... | 359 |
| 8.2.1 | Διάγραμμα Ειδικής Δύναμης | 360 |

| | |
|--|-----|
| 8.3 Το Υδραυλικό Άλμα | 363 |
| 8.4 Το Υδραυλικό Άλμα σε Οριζόντιους Αγωγούς..... | 365 |
| 8.4.1 Συζυγή Βάθη Άλματος σε Αγωγούς Ορθογωνικής Διατομής | 365 |
| 8.4.2 Συζυγή Βάθη Άλματος σε Αγωγούς μη-Ορθογωνικής Διανομής | 367 |
| 8.4.3 Μήκος του Άλματος..... | 370 |
| 8.5 Υδραυλικό Άλμα σε Κεκλιμένους Αγωγούς..... | 374 |
| 8.6 Κεκλιμένο Άλμα..... | 377 |
| 8.6 Σκέδαση Ενέργειας..... | 382 |
| 8.6.1 Υδραυλικό Άλμα σε Καταβαθμό | 385 |
| 8.6.2 Υδραυλικό Άλμα σε Αναβαθμό | 387 |
| 8.6.3 Λεκάνες Εκτόνωσης..... | 390 |
| 8.6.4 Υδραυλικό Άλμα σε Ορθογωνικούς Αγωγούς Αυξανόμενου Πλάτους | 400 |
| Ασκήσεις για Λύση | 404 |

Κεφάλαιο 9: Ανομοιόμορφη Ροή – Βαθμιαία Μεταβαλλόμενη Ροή

| | |
|--|-----|
| 9.1 Γενικά | 407 |
| 9.2 Βασικές Εξισώσεις..... | 408 |
| 9.3 Χαρακτηριστικά των Προφίλς (Καμπύλων Ελεύθερης Επιφάνειας) | 411 |
| 9.4 Κατηγορίες Προφίλς | 413 |
| 9.4.1 Προφίλς Ήπιας Κλίσης (M) | 413 |
| 9.4.2 Προφίλς Απότομης Κλίσης (S)..... | 416 |
| 9.4.3 Προφίλς Κρίσιμης Κλίσης (C) | 417 |
| 9.4.4 Προφίλς Οριζόντιας και Αντίθετης Κλίσης (H και A)..... | 418 |
| 9.4.5 Σύνθεση Προφίλς | 420 |
| 9.5 Υπολογισμός Βαθμιαία Μεταβαλλόμενης Ροής σε Πρισματικούς Αγωγούς | 422 |
| 9.5.1 Αριθμητική Ολοκλήρωση..... | 422 |
| 9.5.2 Άμεση Ολοκλήρωση..... | 424 |
| 9.5.3 Η Μέθοδος Βήματος..... | 428 |
| 9.6 Βαθμιαία Μεταβαλλόμενη Ροή σε μη Πρισματικούς Αγωγούς | 433 |
| 9.6.1 Μέθοδος Σταθερού Βήματος..... | 434 |
| 9.6.2 Το μοντέλο HEC-RAS (Hydrologic Engineering Center-River Analysis System) | 435 |
| 9.7 Το Πρόβλημα της Παροχής | 441 |
| 9.7.1 Επίδραση Τοπικών “Διαταραχών” στην Παροχή..... | 444 |
| 9.8 Ροή σε Αγωγό που Συνδέει Δύο Δεξαμενές | 448 |
| 9.8.1 Ροή από Λίμνη Σταθερού Βάθους..... | 450 |
| 9.8.2 Ροή σε Λίμνη Σταθερού Βάθους..... | 451 |

| | |
|------------------------------------|-----|
| 9.8.3 Αριθμητικοί Υπολογισμοί..... | 451 |
| Ασκήσεις για Λύση | 456 |

Κεφάλαιο 10: Ροή σε Αλλουβιακά Υδατορεύματα

| | |
|--|-----|
| 10.1 Εισαγωγή | 465 |
| 10.2 Συνθήκες Έναρξης της Κίνησης..... | 466 |
| 10.2.1 Κρίσιμη Ελκτική Δύναμη (Κρίσιμη Τάση)..... | 466 |
| 10.3 Μορφολογία Πυθμένα – Καθεστώτα της Ροής..... | 473 |
| 10.3.1 Περιγραφή των Καθεστώτων της Ροής..... | 473 |
| 10.3.2 Η Σημασία των Καθεστώτων της Ροής | 477 |
| 10.3.3 Πρόβλεψη των Καθεστώτων της Ροής..... | 478 |
| 10.4 Αντίσταση στη Ροή σε Αλλουβιακά Υδατορεύματα..... | 483 |
| 10.4.1 Μέθοδοι Υπολογισμού Στάθμης - Παροχής..... | 485 |
| 10.5 Σχεδιασμός Αλλουβιακών Αγωγών | 494 |
| 10.5.1 Εισαγωγή..... | 494 |
| 10.5.2 Αγωγοί με Σταθερή Διατομή..... | 495 |
| 10.5.3 Αγωγοί με Μεταβαλλόμενη Διατομή | 496 |
| 10.5.4 Αλλουβιακά Υδατορεύματα | 503 |
| Ασκήσεις για Λύση | 508 |
| Βιβλιογραφικές Αναφορές | 511 |



Κεφάλαιο

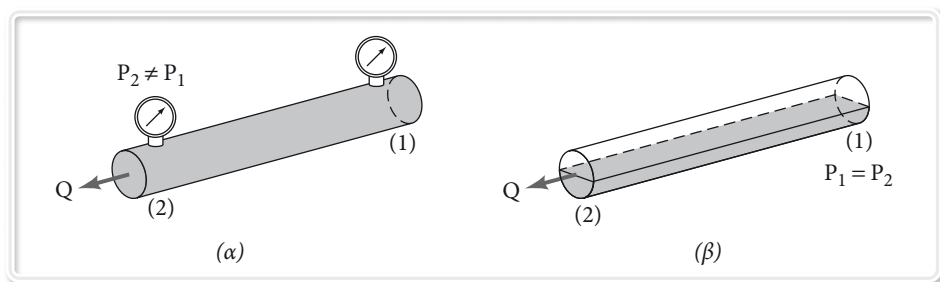
ΣΤΡΩΤΗ ΚΑΙ ΤΥΡΒΩΔΗΣ ΡΟΗ ΣΕ ΣΩΛΗΝΕΣ

1.1 Χαρακτηριστικά Στρωτής και Τυρβώδους Ροής

Πριν την εφαρμογή των βασικών εξισώσεων σε προβλήματα ροής σε σωλήνες, θα αναλυθούν ορισμένες από τις βασικές έννοιες της στρωτής και τυρβώδους ροής σε σωλήνες. Στη συνέχεια θα γίνει διαμόρφωση και επίλυση διάφορων σημαντικών προβλημάτων ροής.

Οι περισσότεροι από τους συνηθισμένους αγωγούς που χρησιμοποιούνται για τη μεταφορά ρευστού είναι κυκλικής διατομής (σωλήνες). Για παράδειγμα οι σωλήνες ύδρευσης, οι σωλήνες άρδευσης είναι αγωγοί που είναι σχεδιασμένοι να αντέχουν μια σημαντική διαφορά πίεσης στα τοιχώματα τους χωρίς αδικαιολόγητη στρέβλωση του σχήματός τους. Τυπικοί αγωγοί μη κυκλικής διατομής είναι οι αγωγοί θέρμανσης και ψύξης που είναι συχνά ορθογωνικής διατομής. Κανονικά, η διαφορά πίεσης μεταξύ του εσωτερικού και του εξωτερικού των αγωγών αυτών είναι σχετικά μικρή. Οι περισσότερες από τις βασικές αρχές είναι ανεξάρτητες από το σχήμα της διατομής, αν και οι λεπτομέρειες της ροής μπορεί να εξαρτώνται από αυτό. Παρακάτω, θα θεωρήσουμε δεδομένο ότι ο αγωγός είναι κυκλικής διατομής και θα δείξουμε τις διαφοροποιήσεις για άλλες διατομές.

Για όλες τις ροές του κεφαλαίου αυτού, υποθέτουμε ότι ο σωλήνας είναι τελείως γεμάτος με το ρευστό που μεταφέρεται, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.1α. Έτσι, δεν θα εξετάσουμε ένα σωλήνα (οχετό) μέσω του οποίου ρέει νερό της βροχής με ελεύθερη επιφάνεια, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.1β που ονομάζεται ανοικτός αγωγός. Η διαφορά μεταξύ της ροής σε ανοικτούς και κλειστούς αγωγούς οφείλεται στον θεμελιώδη μηχανισμό που δημιουργεί τη ροή. Για τη ροή ανοικτού αγωγού, η βαρύτητα είναι η μόνη κινητήρια δύναμη. Για τη ροή σε σωλήνα, η βαρύτητα μπορεί να είναι σημαντική, όταν ο σωλήνας δεν είναι οριζόντιος, αλλά η κύρια κινητήρια δύναμη είναι η κλίση (μεταβολή) πίεσης κατά μή-

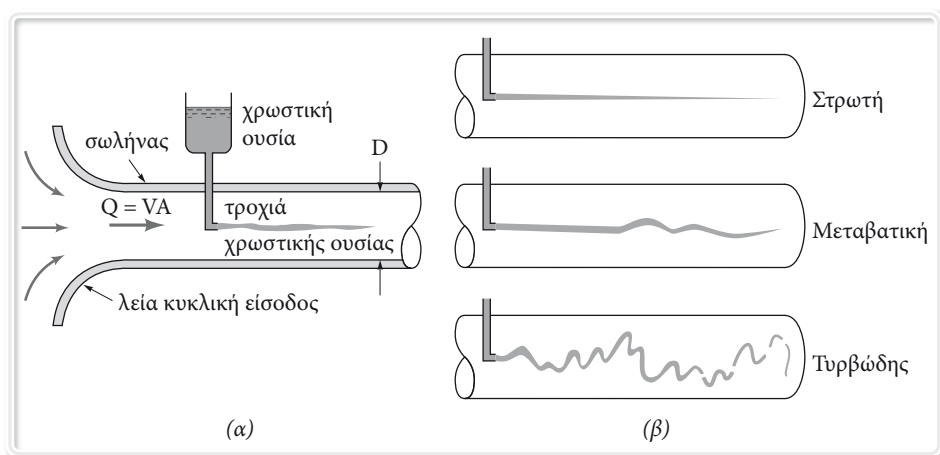


Σχήμα 1.1: (α) Ροή υπό πίεση σε σωλήνα (β) Ροή σε ανοικτό αγωγό.

κος του σωλήνα. Αν ο σωλήνας δεν είναι γεμάτος, δεν είναι δυνατόν να διατηρηθεί αυτή η διαφορά πίεσης,

1.1.1 Στρωτή ή Τυρβώδης Ροή

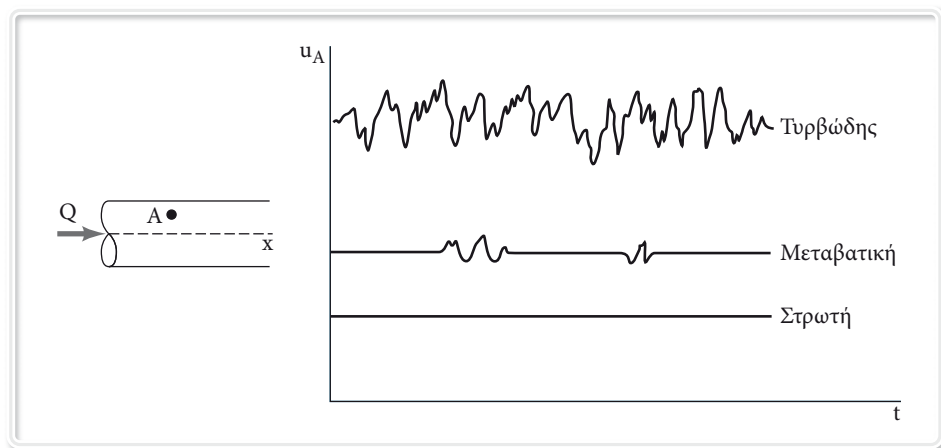
Η ροή ενός ρευστού σε ένα σωλήνα μπορεί να είναι στρωτή ή τυρβώδης. Ο Reynolds (1842-1912), ένας Βρετανός μαθηματικός, ήταν ο πρώτος που διέκρινε την διαφορά μεταξύ των δύο αυτών ροών με τη χρήση μιας απλής συσκευής όπως φαίνεται στο σχήμα 1.2α. Εάν το νερό ρέει σ' ένα σωλήνα διαμέτρου D με μια μέση ταχύτητα U , παρατηρούνται τα ακόλουθα χαρακτηριστικά με έγχυση μιας ουδέτερης χρωστικής ουσίας. Για "αρκετά μικρές παροχές" η χρωστική ουσία παραμένει σε μια καλά καθορισμένη γραμμή που ρέει κατά μήκος, με μικρή μόνο διαταραχή λόγω της μοριακής διάχυσης της χρωστικής στο νερό. Για μια



Σχήμα 1.2: (α) Πειραματική Διάταξη για τον τύπο της ροής, (β) Τροχιά χρωστικής ουσίας

κάπως μεγαλύτερη “ενδιάμεση παροχή” η χρωστική ουσία μεταβάλλεται στο χρόνο και χώρο, και διαλείπουσες εκρήξεις τυχαίας συμπεριφοράς εμφανίζονται κατά μήκος της τροχιάς. Από την άλλη πλευρά, για “αρκετά μεγάλη παροχή”, η χρωστική ουσία σχεδόν αμέσως διαχέεται και εξαπλώνεται σε όλο τον σωλήνα κατά τρόπο τυχαίο. Αυτά τα τρία γνωρίσματα χαρακτηρίζουν την *στρωτή*, *μεταβατική* και *τυρβώδη* ροή, αντίστοιχα και φαίνονται στο σχήμα 1.2β.

Οι μεταβολές που φαίνονται στο σχήμα 1.3 αντιπροσωπεύουν την x συνιστώσα της ταχύτητας ως συνάρτηση του χρόνου σε ένα σημείο A στη ροή. Οι τυχαίες διακυμάνσεις της τυρβώδους ροής (μαζί με την ανάμιξη των σωματιδίων) είναι αυτές που διασπείρουν την χρωστική ουσία σε όλο το σωλήνα και προκαλούν την ακανόνιστη κίνηση που φαίνεται στο σχήμα 1.2β. Για στρωτή ροή σε ένα σωλήνα υπάρχει μόνο μία συνιστώσα της ταχύτητας. Για τυρβώδη ροή η κυρία συνιστώσα της ταχύτητας είναι επίσης κατά μήκος του σωλήνα, αλλά είναι ασταθής (τυχαία) και συνοδεύεται από τυχαίες συνιστώσες κάθετες στον άξονα του σωλήνα. Μια τέτοια κίνηση σε μια τυπική ροή συμβαίνει πάρα πολύ γρήγορα και δεν μπορούμε εύκολα να τη παρακολουθήσουμε.



Σχήμα 1.3: Χρονική μεταβολή της ταχύτητας στο σημείο A

Δεν θα πρέπει να χαρακτηρίζουμε ποσότητες (μεγέθη) της ροής ως “Μεγάλες” ή “μικρές”, όπως για παράδειγμα “αρκετά μικρές παροχές”. Θα πρέπει να προσδιοριστεί η κατάλληλη αδιάστατη ποσότητα και να χαρακτηριστεί αυτή ως “μικρή” ή “μεγάλη”. Μια ποσότητα είναι “μεγάλη” ή “μικρή” μόνο σε σχέση με την ποσότητα αναφοράς. Ο λόγος των δύο αυτών ποσοτήτων προσδιορίζει μια αδιάστατη ποσότητα.

Για ροή σε σωλήνα η πιο σημαντική αδιάστατη παράμετρος είναι ο αριθμός Reynolds, Re που ορίζεται σαν ο λόγος των αδρανειακών δυνάμεων ως προς τις δυνάμεις λόγω του ιξώδους (συνεκτικές δυνάμεις). Ως εκ τούτου, στην προηγούμενη παράγραφο, ο όρος παροχή θα πρέπει να αντικατασταθεί από τον αριθμό Reynolds, $Re = UD/\nu$, όπου U είναι η μέση ταχύτητα ροής στο σωλήνα, D η διάμετρος του σωλήνα, ν το κινηματικό ιξώδες του ρευστού. Δηλαδή, η ροή σε ένα αγωγό είναι στρωτή, μεταβατική, ή τυρβώδης εφόσον ο αριθμός Reynolds είναι “αρκετά μικρός”, “ενδιάμεσος” ή “αρκετά μεγάλος”. Δεν είναι μόνο η ταχύτητα του ρευστού που καθορίζει το χαρακτήρα της ροής. Το ιξώδες, η πυκνότητα, καθώς και το μέγεθος του σωλήνα είναι εξίσου σημαντικοί παράμετροι.

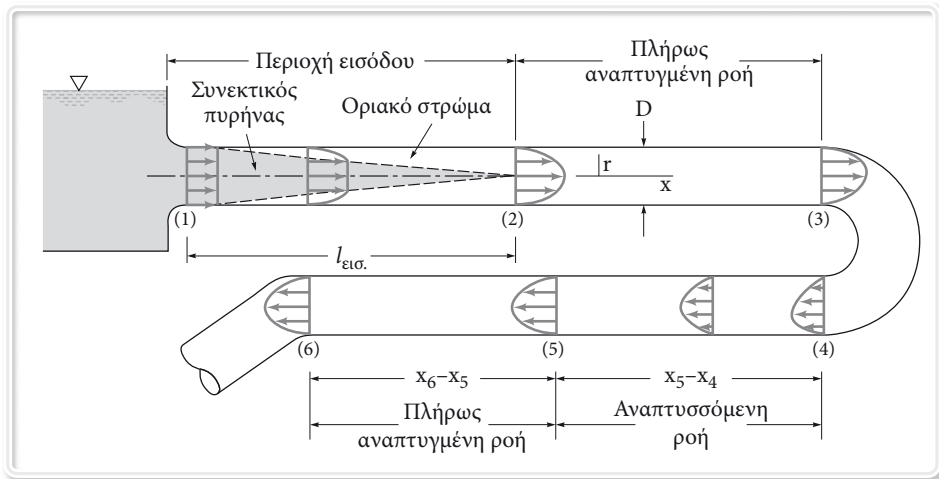
Αυτές οι παράμετροι συνδυάζονται για να προσδιορίσουν τον αριθμό Reynolds. Η διάκριση μεταξύ στρωτής και τυρβώδους ροής σε σωλήνες και η εξάρτησή τους από μια κατάλληλη αδιάστατη ποσότητα αρχικά επισημάνθηκε από τον Reynolds το 1883.

Οι περιοχές του αριθμού Reynolds για τις οποίες έχουμε στρωτή, μεταβατική, ή τυρβώδη ροή δεν μπορούν να καθορισθούν επακριβώς. Η πραγματική μετάβαση από στρωτή σε τυρβώδη ροή μπορεί να πραγματοποιηθεί σε διάφορους αριθμούς Reynolds, ανάλογα με το πόσο η ροή έχει διαταραχθεί από τις ταλαντώσεις του σωλήνα, από την τραχύτητα της περιοχής εισόδου, κλπ. Γενικά, η ροή σε σωλήνα είναι στρωτή, αν ο αριθμός Reynolds είναι μικρότερος από περίπου 2100. Η ροή σε ένα σωλήνα είναι τυρβώδης, εφόσον ο αριθμός Reynolds είναι μεγαλύτερος από περίπου 4000. Για αριθμούς Reynolds μεταξύ των δύο αυτών ορίων, η ροή μπορεί να εναλλάσσεται μεταξύ στρωτής και τυρβώδους με ένα φαινομενικά τυχαίο τρόπο (μεταβατική ροή).

1.1.2 Περιοχή Εισόδου και Πλήρως Αναπτυγμένη Ροή

Κάθε ρευστό που ρέει σε έναν σωλήνα πρέπει να εισέλθει στο σωλήνα από κάποια τοποθεσία. Η περιοχή της ροής κοντά στο σημείο όπου το ρευστό εισέρχεται στο σωλήνα ονομάζεται **περιοχή εισόδου** και φαίνεται στο σχήμα 1.4.

Όπως φαίνεται στο σχήμα 1.4, το ρευστό εισέρχεται στον σωλήνα με ένα σχεδόν ομοιόμορφο προφίλ ταχύτητας στη διατομή (1). Καθώς το ρευστό ρέει στον σωλήνα, οι συνεκτικές δυνάμεις στο τοίχωμα (δυνάμεις λόγω ιξώδους) προκαλούν το “κόλλημα” του ρευστού στο τοίχωμα (οριακή συνθήκη “μη-ολίσθησης”). Αυτό ισχύει είτε το ρευστό είναι ο αέρας ή ένα πολύ παχύρρευστο λάδι. Έτσι, ένα **οριακό στρώμα** στο οποίο οι συνεκτικές επιδράσεις είναι σημαντικές, δημιουργείται κατά μήκος του τοιχώματος του σωλήνα τέτοιο ώστε το αρχικό προφίλ ταχύτητας μεταβάλλεται με την απόσταση κατά μήκος του σωλήνα, x , έως ότου



Σχήμα 1.4: Περιοχή εισόδου, Αναπτυσσόμενη ροή και Πλήρως Αναπτυγμένη ροή σε σωλήνα

το ρευστό φτάσει στο τέλος της περιοχής εισόδου, διατομή (2), πέραν του οποίου το προφίλ ταχύτητας δεν μεταβάλλεται με το x . Το οριακό στρώμα έχει αυξηθεί σε πάχος για να καλύψει πλήρως τον σωλήνα. Οι συνεκτικές επιδράσεις έχουν μεγάλη σημασία μέσα στο οριακό στρώμα. Για το ρευστό έξω από το οριακό στρώμα (στον μη συνεκτικό πυρήνα γύρω από τον άξονα από την διατομή (1) στην (2)) οι συνεκτικές επιδράσεις είναι αμελητέες.

Το σχήμα του προφίλ της ταχύτητας στο σωλήνα εξαρτάται από το αν η ροή είναι στρωτή ή τυρβώδης, όπως επίσης και το μήκος της περιοχής εισόδου. Όπως και με πολλές άλλες ιδιότητες της ροής σε σωλήνα, το αδιάστατο μήκος εισόδου, συσχετίζεται πολύ καλά με τον αριθμό Reynolds.

Τυπικά μήκη εισόδου δίνονται από τις σχέσεις:

$$\frac{l_{\text{εισ}}}{D} = 0.06 \text{Re} \quad \text{για στρωτή ροή} \quad (1.1)$$

και

$$\frac{l_{\text{εισ}}}{D} = 4.4(\text{Re})^{1/6} \quad \text{για τυρβώδη ροή} \quad (1.2)$$

Για ροές με πολύ χαμηλό αριθμό Reynolds, το μήκος εισόδου (μήκος ανάπτυξης της ροής) μπορεί να είναι αρκετά μικρό, ενώ για ροές με μεγάλο αριθμό Reynolds το μήκος αυτό μπορεί να είναι ίσο με πολλές διαμέτρους σωλήνα πριν από το τέλος της περιοχής εισόδου. Για πολλά πρακτικά προβλήματα της μηχανικής

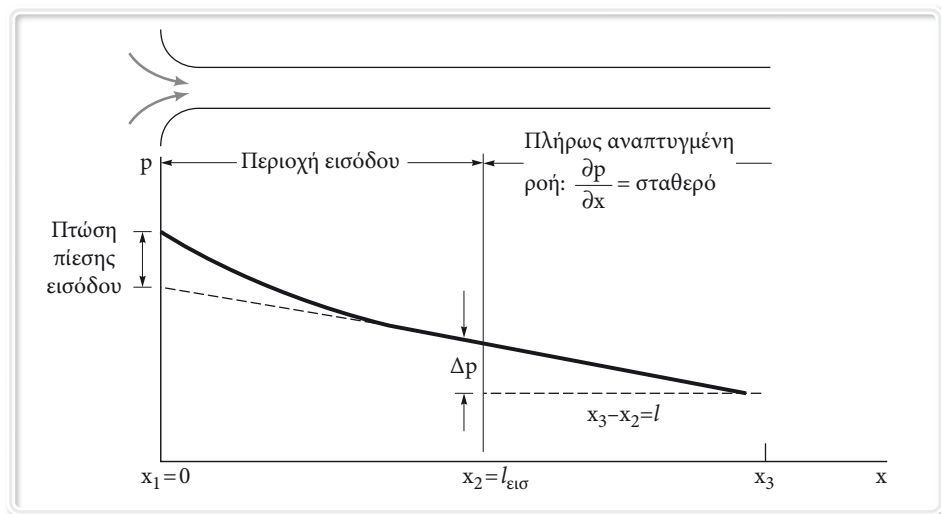
νικής, ο υπολογισμός του προφίλ ταχύτητας και της πίεσης κατά μήκος της περιοχής εισόδου είναι αρκετά περίπλοκος. Ωστόσο, μόλις το ρευστό φτάσει στο τέλος της περιοχής εισόδου, διατομή (2) του Σχήματος 1.4, η ροή είναι απλούστερο να περιγραφεί, επειδή η ταχύτητα είναι συνάρτηση μόνο της ακτινικής απόστασης r , και ανεξάρτητη του x . Αυτό ισχύει μέχρι την αλλαγή των χαρακτηριστικών του σωλήνα, όπως μια αλλαγή στη διάμετρο, ή όταν το ρευστό ρέει μέσα από μια στροφή, βαλβίδα, ή κάποιο άλλο εξάρτημα στη διατομή (3). Η ροή μεταξύ των (2) και (3) ονομάζεται **πλήρως αναπτυγμένη**. Μετά από τη διακοπή της πλήρως αναπτυγμένης ροής [στη διατομή (4)], η ροή ξεκινά σταδιακά την επιστροφή της στα χαρακτηριστικά της πλήρως αναπτυγμένης ροής [διατομή (5)] και συνεχίζει με αυτό το προφίλ μέχρι να συναντήσει το επόμενο υδραυλικό εξάρτημα του σωλήνα [διατομή (6)]. Σε πολλές περιπτώσεις, ο σωλήνας είναι αρκετά μεγάλος, ώστε να υπάρχει ένα σημαντικό μήκος πλήρως αναπτυγμένης ροής σε σύγκριση με το μήκος της αναπτυσσόμενης ροής. Σε άλλες περιπτώσεις, η απόσταση μεταξύ ενός υδραυλικού εξαρτήματος (γωνία, βάνα, βαλβίδα, κ.λπ.) του συστήματος σωληνώσεων και του επόμενου είναι τόσο μικρή ώστε πλήρως αναπτυγμένη ροή δεν επιτυγχάνεται ποτέ.

1.1.3 Πίεση και Διατμητική Τάση

Πλήρως αναπτυγμένη, μόνιμη ροή σε σωλήνα σταθερής διαμέτρου μπορεί να εμφανισθεί από την δράση δυνάμεων λόγω βαρύτητας ή/και λόγω πίεσης. Για ροή σε οριζόντιο σωλήνα, η βαρύτητα δεν έχει καμία επίπτωση, εκτός από μια μεταβολή στην υδροστατική πίεση εγκάρσια του σωλήνα, που είναι συνήθως αμελητέα. Η διαφορά πίεσης, ανάμεσα σε δυο διατομές του οριζόντιου σωλήνα είναι αυτή που δημιουργεί την ροή στον σωλήνα. Οι συνεκτικές δυνάμεις (δυνάμεις λόγω του ιξώδους) είναι αυτές που αποτελούν τις δυνάμεις αντίδρασης στις δυνάμεις λόγω πίεσης, επιτρέποντας την ροή του ρευστού μέσα στον σωλήνα χωρίς επιτάχυνση. Αν οι συνεκτικές επιδράσεις ήταν απύσυχες σε τέτοιες ροές, η πίεση θα ήταν σταθερή σε όλο το μήκος του σωλήνα, εκτός από την υδροστατική μεταβολή.

Σε μη πλήρως αναπτυγμένες περιοχές της ροής, όπως η περιοχή εισόδου του αγωγού, το ρευστό επιταχύνει ή επιβραδύνει καθώς ρέει. Το προφίλ ταχύτητας αλλάζει από ομοιόμορφο στην είσοδο του σωλήνα σε προφίλ πλήρως αναπτυγμένο στο τέλος της περιοχής εισόδου. Έτσι, στην περιοχή εισόδου υπάρχει μια ισορροπία μεταξύ δυνάμεων πίεσης, ιξώδους, και αδράνειας (επιτάχυνσης). Το αποτέλεσμα είναι μια κατανομή της πίεσης κατά μήκος του οριζόντιου σωλήνα,

όπως φαίνεται στο σχήμα 1.5. Η διαφορά πίεσης είναι μεγαλύτερη στην περιοχή της εισόδου σε σχέση με αυτή στην περιοχή της πλήρως ανεπτυγμένη ροής όπου είναι σταθερή.



Σχήμα 1.5: Κατανομή της πίεσης κατά μήκος ενός οριζόντιου σωλήνα

Το γεγονός ότι υπάρχει μη-μηδενική κλίση πίεσης κατά μήκος του οριζόντιου σωλήνα είναι αποτέλεσμα των συνεκτικών επιδράσεων. Αν το ιξώδες ήταν μηδέν, η πίεση δεν θα μεταβαλλόταν ανάλογα με το x . Η ανάγκη για την πτώση της πίεσης μπορεί να θεωρηθεί από δύο διαφορετικές οπτικές γωνίες. Από την άποψη της ισορροπίας δυνάμεων, η δύναμη λόγω πίεσης είναι απαραίτητη για να υπερνικήσει τις δημιουργούμενες συνεκτικές δυνάμεις. Από την άποψη της ενεργειακής ισορροπίας, το έργο που επιτελεί η δύναμη λόγω πίεσης είναι αναγκαίο προκειμένου να υπερνικηθεί η σκέδαση της ενέργειας του ρευστού λόγω ιξώδους. Αν ο σωλήνας δεν είναι οριζόντιος, η κλίση πίεσης κατά μήκος του οφείλεται εν μέρει στη συνιστώσα του βάρους στην διεύθυνση αυτή. Όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 1.2.1, η συνεισφορά αυτή λόγω του βάρους είτε επιταχύνει είτε επιβραδύνει τη ροή, ανάλογα με το αν η ροή είναι προς τα κάτω η προς τα πάνω.

Η φύση της ροής στον σωλήνα εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από το αν η ροή είναι στρωτή ή τυρβώδης. Αυτό αποτελεί άμεση συνέπεια των διαφορών ως προς τη φύση των διατμητικών τάσεων στη στρωτή και τυρβώδη ροή. Όπως αναφέρεται στην ενότητα 1.3.3, η διατμητική τάση στην στρωτή ροή είναι άμεσο αποτέλεσμα της μεταφοράς ορμής μεταξύ των τυχαία κινούμενων μορίων (μικρο-

σκοπικό φαινόμενο). Η διατμητική τάση στην τυρβώδη ροή είναι σε μεγάλο βαθμό αποτέλεσμα της μεταφοράς ορμής μεταξύ των τυχαία κινούμενων σωματιδίων του ρευστού πεπερασμένου μεγέθους (μακροσκοπικό φαινόμενο). Το τελικό αποτέλεσμα είναι ότι οι φυσικές ιδιότητες της διατμητικής τάσης είναι αρκετά διαφορετικές για στρωτή ροή από ό, τι για τυρβώδη ροή.

Όπως αναφέρθηκε προηγούμενα, η ροή σε ευθύγραμμο αγωγό, σταθερής διαμέτρου και μεγάλου μήκους γίνεται πλήρως ανεπτυγμένη. Δηλαδή, το προφίλ ταχύτητας είναι το ίδιο σε οποιαδήποτε διατομή του σωλήνα. Αν και αυτό ισχύει ανεξαρτήτως του εάν η ροή είναι στρωτή ή τυρβώδης, οι λεπτομέρειες του προφίλ της ταχύτητας, και άλλων χαρακτηριστικών της ροής είναι εντελώς διαφορετικές για τους δύο αυτούς τύπους ροής. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, η γνώση του προφίλ της ταχύτητας μπορεί να οδηγήσει άμεσα σε άλλες χρήσιμες πληροφορίες όπως η πτώση πίεσης, η απώλεια φορτίου, η παροχή κλπ. Έτσι, ξεκινάμε με την ανάπτυξη της εξίσωσης για το προφίλ της ταχύτητας σε πλήρως ανεπτυγμένη στρωτή ροή. Εάν η ροή δεν έχει αναπτυχθεί πλήρως, η θεωρητική ανάλυση γίνεται πιο περίπλοκη. Εάν η ροή είναι τυρβώδης, μια αυστηρή θεωρητική ανάλυση δεν είναι ακόμη δυνατή.

Παρόλο που οι περισσότερες ροές είναι τυρβώδεις και όχι στρωτές, και πολλοί αγωγοί δεν έχουν μεγάλο μήκος ώστε να επιτρέπουν την επίτευξη πλήρως αναπτυγμένης ροής, μια θεωρητική επεξεργασία και η πλήρης κατανόηση της πλήρως αναπτυγμένης στρωτής ροής έχει μεγάλη σημασία. Πρώτον, αποτελεί μια από τις λίγες θεωρητικές αναλύσεις για συνεκτικές ροές που μπορούν να πραγματοποιηθούν “ακριβώς” (μέσα στο πλαίσιο εντελώς γενικών παραδοχών) χωρίς τη χρήση άλλων *ad hoc* υποθέσεων ή προσεγγίσεων. Η κατανόηση της μεθόδου ανάλυσης και τα επιτευχθέντα αποτελέσματα εξασφαλίζουν μια βάση για πιο περίπλοκες αναλύσεις. Δεύτερον, υπάρχουν πολλές πρακτικές καταστάσεις που αφορούν τη χρήση πλήρως αναπτυγμένης στρωτής ροής σε σωλήνα.

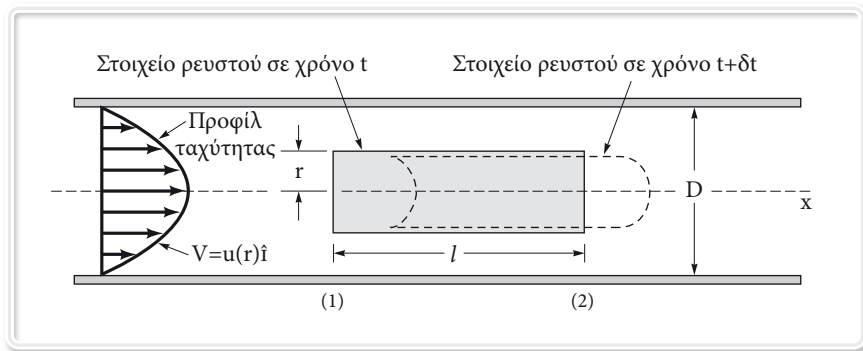
Υπάρχουν πολλοί τρόποι για να εξάγουμε σημαντικά αποτελέσματα που αφορούν την πλήρως αναπτυγμένη στρωτή ροή. Τρεις εναλλακτικοί τρόποι περιλαμβάνουν:

- (1) την εφαρμογή του 2^{ου} Νόμου του Νεύτωνα σε ένα στοιχείο του ρευστού,
- (2) τις εξισώσεις Navier-Stokes (εξ. ορμής), και
- (3) μεθόδους διαστατικής ανάλυσης.

1.2 Στρωτή Ροή σε Σωλήνες

1.2.1 Από την Εφαρμογή του 2^{ου} Νόμου του Νεύτωνα σε ένα Στοιχείο του Ρευστού

Θεωρούμε ένα τμήμα του ρευστού τη χρονική στιγμή t όπως φαίνεται στο σχήμα 1.6.



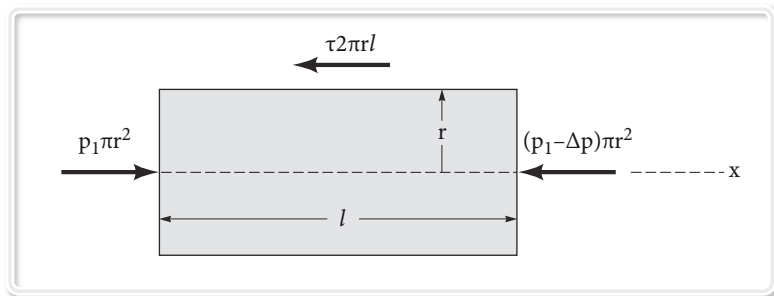
Σχήμα 1.6: Κίνηση ενός κυλινδρικού στοιχείου του ρευστού σε σωλήνα

Πρόκειται για ένα κυκλικό κύλινδρο ρευστού μήκους L και ακτίνας r με κέντρο τον άξονα του οριζώντιου σωλήνα διαμέτρου D . Επειδή η ταχύτητα δεν είναι ομοιόμορφη σε όλο τον σωλήνα, οι αρχικές επίπεδες επιφάνειες του υγρού κυλίνδρου κατά τη χρονική στιγμή t παραμορφώνονται όταν το ρευστό στοιχείο έχει μετακινηθεί στη νέα του θέση κατά μήκος του σωλήνα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Εάν η ροή είναι πλήρως αναπτυγμένη και μόνιμη, η στρέβλωση κάθε επιφάνειας του υγρού στοιχείου είναι ίδια, και κανένα μέρος του υγρού δεν έχει παρουσιάσει επιτάχυνση καθώς ρέει. Η τοπική επιτάχυνση είναι μηδενική, διότι η ροή είναι μόνιμη, και η επιτάχυνση λόγω συναγωγής είναι μηδενική, διότι η ροή είναι πλήρως ανεπτυγμένη. Έτσι, κάθε μέρος του ρευστού ρέει απλώς κατά μήκος της τροχιάς του παράλληλα στα τοιχώματα του σωλήνα με σταθερή ταχύτητα, αν και τα γειτονικά σωματίδια έχουν ελαφρώς διαφορετικές ταχύτητες. Η ταχύτητα ποικίλλει από τη μία τροχιά στην επόμενη. Αυτή η μεταβολή της ταχύτητας, σε συνδυασμό με το ιξώδες του ρευστού, παράγει την διατμητική τάση.

Εάν οι επιδράσεις της βαρύτητας θεωρηθούν αμελητέες, η πίεση είναι σταθερή σε κάθε διατομή του σωλήνα, αν και διαφέρει κατά μήκος του σωλήνα από τη μία διατομή στην άλλη. Έτσι, εάν η πίεση στη διατομή (1) είναι $p = p_1$, στη δια-

τομή (2) είναι $p_2 = p_1 - \Delta p$. Θεωρούμε ότι η πίεση μειώνεται στην κατεύθυνση της ροής έτσι ώστε $\Delta p > 0$. Μια διατμητική τάση τ , δρα στην επιφάνεια του κυλίνδρου που είναι συνάρτηση της ακτίνας του κυλίνδρου, $\tau = \tau(r)$.

Όπως συνηθίζεται στην υδροστατική, έχουμε απομονώσει τον κύλινδρο του υγρού, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.7 και εφαρμόζουμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα.



Σχήμα 1.7: Διάγραμμα Ελεύθερου Σώματος σε κυλινδρικό όγκο ελέγχου.

Στην περίπτωση αυτή, παρόλο που το ρευστό κινείται, δεν επιταχύνεται, και επομένως $a_x = 0$. Έτσι, η πλήρως αναπτυγμένη ροή σε οριζόντιο σωλήνα είναι απλώς μια ισορροπία μεταξύ της πίεσης και των συνεκτικών δυνάμεων, η διαφορά πίεσης που δρα στις επίπεδες επιφάνειες του κυλίνδρου εμβαδού πr^2 και η διατμητική τάση που ενεργεί στην πλευρική επιφάνεια του κυλίνδρου εμβαδού $2\pi r l$. Αυτή η ισορροπία δυνάμεων μπορεί να γραφτεί ως

$$F_x = (p_1)\pi r^2 - (p_1 - \Delta p)\pi r^2 - (\tau)2\pi r l = 0$$

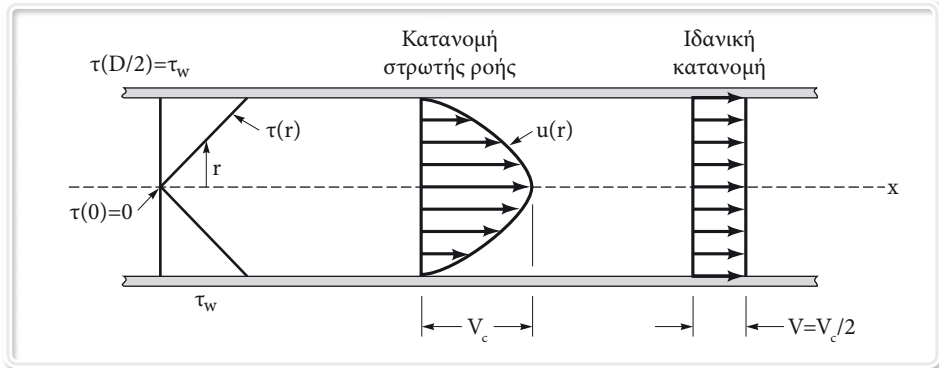
που μπορεί να απλοποιηθεί ώστε να δώσει

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{2\tau}{r} \quad (1.3)$$

Η Εξίσωση (1.3) αντιπροσωπεύει τη βασική ισορροπία δυνάμεων που απαιτείται για την κίνηση κάθε υγρού σωματιδίου κατά μήκος του σωλήνα με σταθερή ταχύτητα. Δεδομένου ότι τα Δp και l δεν είναι συναρτήσεις της ακτινικής συντεταγμένης, r , και ο όρος $2\tau/r$ θα πρέπει επίσης να είναι ανεξάρτητος του r . Δηλαδή $\tau = Cr$, όπου το C είναι μια σταθερά. Στον άξονα του σωλήνα ($r=0$) δεν υπάρχει διατμητική τάση ($\tau=0$) και στο τοίχωμα του σωλήνα ($r=D/2$) η διατμητική τάση είναι μέγιστη και ονομάζεται διατμητική τάση τοιχώματος. Επομένως $C=2\tau_w/D$, και η κατανομή των διατμητικών τάσεων σε όλο τον σωλήνα είναι γραμμική συνάρτηση της ακτινικής συντεταγμένης

$$\tau = \frac{2\tau_w r}{D} \quad (1.4)$$

όπως φαίνεται στο σχήμα 1.8.



Σχήμα 1.8: Κατανομή διατμητικής τάσης σε σωλήνα (για στρωτή η τυρβώδη ροή) και τυπική κατανομή της ταχύτητας

Η γραμμική εξάρτηση του τ με το r είναι αποτέλεσμα της δύναμης πίεσης που είναι ανάλογη με το r^2 και η διατμητική δύναμη είναι ανάλογη με το r . Αν το ιξώδες ήταν μηδέν δεν θα υπήρχε διατμητική τάση, και η πίεση θα ήταν σταθερή σε όλον τον οριζόντιο σωλήνα ($\Delta p = 0$). Όπως φαίνεται από τις εξ. (1.3) και (1.4), η πτώση πίεσης και η διατμητική τάση του τοιχώματος συσχετίζονται με την σχέση

$$\Delta p = \frac{4l\tau_w}{D} \quad (1.5)$$

Μια μικρή διατμητική τάση μπορεί να παράγει μια μεγάλη διαφορά πίεσης αν ο σωλήνας έχει αρκετό μήκος.

Παρά το γεγονός ότι αναφερόμαστε για στρωτή ροή, μια πιο προσεκτική εξέταση των υποθέσεων που εμπλέκονται στην εξαγωγή των εξ. (1.3), (1.4) και (1.5) δείχνει ότι αυτές οι εξισώσεις ισχύουν για στρωτή και για τυρβώδη ροή. Για την επέκταση της ανάλυσης θα πρέπει να καθοριστεί ο τρόπος συσχέτισης της διατμητικής τάσης με την ταχύτητα. Αυτό είναι το κρίσιμο βήμα που διαχωρίζει την ανάλυση της στρωτής ροής από εκείνη της τυρβώδους ροής. Όπως αναφέρθηκε στην ενότητα (1.3), η εξάρτηση της διατμητικής τάσης για την τυρβώδη ροή είναι πολύ σύνθετη. Ωστόσο, για στρωτή ροή ενός Νευτώνειου ρευστού, η διατμητική τάση είναι απλά ανάλογη με τη κλίση της ταχύτητας. Η σχέση γίνεται

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr} \quad (1.6)$$

Το αρνητικό πρόσημο περιλαμβάνεται για να δώσει $\tau > 0$ για $du/dr < 0$ (η ταχύτητα μειώνεται από τον άξονα του σωλήνα στο τοίχωμα). Οι εξισώσεις (1.3) και (1.6) αντιπροσωπεύουν τις δύο βασικές εξισώσεις για την πλήρως αναπτυγμένη στρωτή ροή ενός Νευτώνειου ρευστού σε οριζόντιο σωλήνα. Η πρώτη είναι ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα και η άλλη είναι ο ορισμός του Νευτώνειου ρευστού. Με το συνδυασμό αυτών των δύο εξισώσεων παίρνουμε

$$\frac{du}{dr} = -\left(\frac{\Delta p}{2\mu l}\right)r$$

που μπορεί να ολοκληρωθεί για να δώσει το προφίλ ταχύτητας ως εξής:

$$\int du = -\frac{\Delta p}{2\mu l} \int r dr$$

ή

$$u = -\left(\frac{\Delta p}{4\mu l}\right)r^2 + c_1$$

όπου c_1 είναι μια σταθερά. Επειδή το ρευστό είναι συνεκτικό “κολλάει” στο τοίχωμα του σωλήνα ($u=0$ για $r=D/2$), έτσι ώστε $c_1=(\Delta p/16\mu l)/D^2$.

Έτσι, το προφίλ ταχύτητας μπορεί να γραφεί ως:

$$u(r) = \frac{\Delta p D^2}{16\mu l} \left[1 - \left(\frac{2r}{D} \right)^2 \right] = V_c \left[1 - \left(\frac{2r}{D} \right)^2 \right] \quad (1.7)$$

όπου V_c είναι η κεντρική ταχύτητα ($=\Delta p D^2/16\mu l$). Μια εναλλακτική έκφραση μπορεί να γραφτεί χρησιμοποιώντας τη σχέση μεταξύ της διατμητικής τάσης στο τοίχωμα και της κλίσης πίεσης (Εξ. (1.5) και (1.7)) για να δώσει

$$u(r) = \frac{\tau_w D}{4\mu} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

όπου R είναι η ακτίνα του σωλήνα.

Αυτό το προφίλ ταχύτητας, (σχήμα 1.8), είναι παραβολικό στην ακτινική συντεταγμένη, r , έχει μέγιστη ταχύτητα στον κεντρικό άξονα του σωλήνα, και ελάχιστη ταχύτητα (μηδέν) στο τοίχωμα του σωλήνα.

Η παροχή όγκου μέσω του σωλήνα μπορεί να υπολογιστεί με την ολοκλήρωση του προφίλ ταχύτητας σε όλη την διατομή του σωλήνα. Δεδομένου ότι η ροή

έχει άξονα συμμετρίας, η ταχύτητα είναι σταθερή σε μικρά στοιχεία που αποτελείται από δακτυλίους ακτίνας r και πάχους dr . Έτσι,

$$Q = \int u dA = \int_{r=0}^{r=R} u(r) 2\pi r dr = 2\pi V_c \int_0^R \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] r dr$$

ή

$$Q = \frac{\pi R^2 V_c}{2}$$

Εξ ορισμού, η μέση ταχύτητα είναι η παροχή διαιρεμένη με το εμβαδόν διατομής, έτσι ώστε για αυτή τη ροή

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{\pi R^2 V_c}{2\pi R^2} = \frac{V_c}{2} = \frac{\Delta p D^2}{32\mu l} \quad (1.8)$$

και

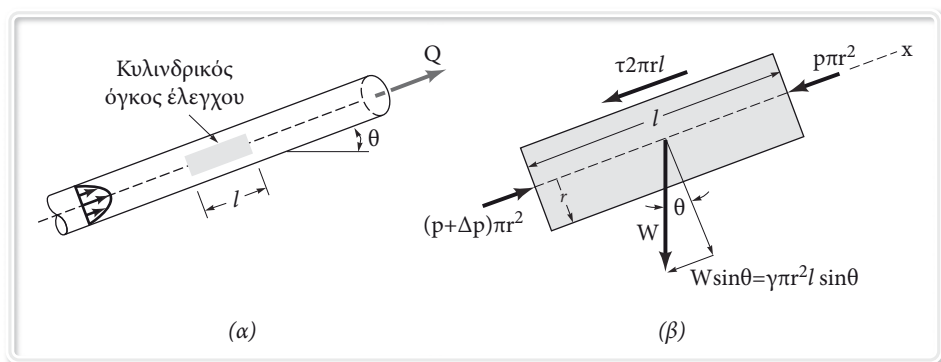
$$Q = \frac{\pi D^4 \Delta p}{128\mu l} \quad (1.9)$$

Όπως φαίνεται από την εξ. (1.8) η μέση ταχύτητα είναι το μισό της μέγιστης ταχύτητας. Γενικά, για άλλα προφίλ ταχύτητας (όπως για τυρβώδη ροή σε σωλήνα), η μέση ταχύτητα δεν είναι ο μέσος όρος της μέγιστης και ελάχιστης ταχύτητας, όπως είναι για το παραβολικό προφίλ της στρωτής ροής. Τα δύο προφίλ ταχύτητας που φαίνονται στο σχήμα 1.8 δίνουν την ίδια παροχή. Το ένα προφίλ είναι ένα ιδεατό ιδανικό προφίλ και το άλλο είναι το πραγματικό προφίλ στρωτής ροής.

Τα παραπάνω αποτελέσματα επιβεβαιώνουν τις εξής ιδιότητες της στρωτής ροής σε σωλήνα. Για έναν οριζόντιο σωλήνα η παροχή είναι:

- (α) ανάλογη με την πτώση της πίεσης,
- (β) αντιστρόφως ανάλογη με το ιξώδες,
- (γ) αντιστρόφως ανάλογη με το μήκος του σωλήνα, και
- (δ) ανάλογη με τη διάμετρο του σωλήνα στην τέταρτη δύναμη.

Με όλες τις άλλες παραμέτρους σταθερές, μία διπλάσια αύξηση της διαμέτρου θα αυξήσει την παροχή 16 φορές (η παροχή εξαρτάται σε πολύ μεγάλο βαθμό από το μέγεθος του σωλήνα). Ένα σφάλμα 2% στη διάμετρο δίνει ένα σφάλμα 8% στην παροχή. Οι ιδιότητες της στρωτής ροής διερευνήθηκαν για πρώτη φορά πειραματικά από δύο ανεξάρτητους ερευνητές, τον Hagen (1797-1884) το 1839 και τον Poiseuille (1799-1869) το 1840, και η ροή ονομάζεται ροή *Hagen-Poiseuille*. Η εξίσωση (1.9) αναφέρεται και ως νόμος του Poiseuille. Όλα



Σχήμα 1.9: Διάγραμμα Ελεύθερου σώματος σε κυλινδρικό όγκο ελέγχου για ροή σε κεκλιμένο σωλήνα.

αυτά τα αποτελέσματα αναφέρονται σε στρωτή ροή (ροή με αριθμό Reynolds μικρότερο από περίπου 2100) σε οριζόντιο σωλήνα.

Η αναγκαία προσαρμογή για μη-οριζόντιους σωλήνες (σχήμα 1.9), μπορεί εύκολα να γίνει με την αντικατάσταση της πτώσης πίεσης Δp , από τη συνδυασμένη επίδραση της πίεσης Δp και της βαρύτητας, $\gamma l \sin \theta$, όπου θ είναι η γωνία μεταξύ του σωλήνα και του οριζόντιου επιπέδου. Αν η ροή είναι προς τα πάνω $\theta > 0$, ενώ αν η ροή είναι προς τα κάτω $\theta < 0$. Αυτό μπορεί να φανεί από την ισορροπία δυνάμεων στην διεύθυνση x (κατά μήκος του άξονα του σωλήνα) στον κύλινδρο του υγρού όπως φαίνεται στο σχήμα (1.9β). Η μέθοδος είναι ακριβώς ανάλογη με εκείνη που χρησιμοποιείται για την εξίσωση Bernoulli όταν η ροϊκή γραμμή δεν είναι οριζόντια. Η τελική δύναμη στην διεύθυνση x είναι ένας συνδυασμός της δύναμης πίεσης και της συνιστώσας του βάρους σε αυτήν την διεύθυνση, και το αποτέλεσμα είναι μια ελαφρά τροποποιημένη μορφή της εξ. (1.3) που δίνεται από:

$$\frac{\Delta p - \gamma L \sin \theta}{L} = \frac{2\tau}{r} \quad (1.10)$$

Κατά συνέπεια, όλα τα αποτελέσματα για το οριζόντιο σωλήνα ισχύουν υπό την προϋπόθεση ότι η διαφορά πίεσης τροποποιείται για το υψόμετρο, δηλαδή, ο όρος Δp αντικαθίσταται από τον $\Delta p - \gamma L \sin \theta$ έτσι ώστε:

$$V = \frac{(\Delta p - \gamma L \sin \theta) D^2}{32\mu L} \quad (1.11)$$

και

$$Q = \frac{\pi(\Delta p - \gamma L \sin\theta)D^4}{128\mu L} \quad (1.12)$$

Είναι φανερό ότι η κινητήρια δύναμη για τη ροή σε σωλήνα μπορεί να είναι είτε μια πτώση πίεσης στην διεύθυνση της ροής Δp , ή η συνιστώσα του βάρους στην διεύθυνση της ροής $-\gamma L \sin\theta$. Εάν η ροή είναι προς τα κάτω, η βαρύτητα βοηθά τη ροή (μια μικρότερη πτώση πίεσης είναι απαραίτητη, $\sin\theta < 0$). Αν η ροή είναι προς τα πάνω, η βαρύτητα είναι ενάντια στη ροή (απαιτείται μεγαλύτερη πτώση πίεσης, $\sin\theta > 0$).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1 Στρωτή Ροή

Λάδι ιξώδους $\mu = 0.4 \text{ Ns/m}^2$ και πυκνότητας $\rho = 900 \text{ kg/m}^3$ ρέει σε ένα σωλήνα διαμέτρου $D = 0.02 \text{ m}$.

(α) Για παροχή $Q = 2.0 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$ πόση είναι η απαιτούμενη πτώση πίεσης ($p_1 - p_2$) όταν ο σωλήνας είναι οριζόντιος με $x_1 = 0$ και $x_2 = 10 \text{ m}$.

(β) Ποια πρέπει να είναι η κλίση του σωλήνα θ για την ίδια παροχή και για $p_1 = p_2$.

(γ) Για τις συνθήκες του (β), αν $p_1 = 200 \text{ kPa}$, ποια είναι η πίεση σε απόσταση $x_3 = 5 \text{ m}$ (η διεύθυνση x είναι κατά μήκος του σωλήνα).

Λύση

(α) Υπολογισμός αριθμού Reynolds

$$Re = \frac{U \cdot D}{\nu} = \frac{(Q/A)D\rho}{\mu} = 2.87 < 2000$$

Άρα η ροή είναι στρωτή.

Η πτώση πίεσης δίνεται από την σχέση:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{128\mu L Q}{\pi D^4} = 20.400 \text{ N/m}^2 = 20.4 \text{ kPa}$$

(β) Από την εξίσωση $Q = \frac{\pi(\Delta p - \gamma L \sin\theta)D^4}{128\mu L}$ και για $\Delta p = 0$ έχουμε:

$$\sin\theta = -\frac{128\mu Q}{\pi \rho g D^4} \Rightarrow \theta = -13.34^\circ$$

Μια μεταβολή $\Delta z = l \sin\theta = (10 \text{ m}) \cdot \sin(-13.34^\circ) = -2.31 \text{ m}$, αντιστοιχεί σε

μεταβολή της πίεσης

$$\Delta p = \rho g \Delta z = (900 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(2.31 \text{ m}) = 20.400 \text{ N/m}^2$$

Η μεταβολή της πίεσης είναι ίδια με αυτή για οριζόντιο σωλήνα.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Για $Q = 1.0 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ και $p_1 = p_2$ η τιμή του θ από την παραπάνω εξίσωση είναι $\sin \theta = -1.15$, **άτοπο**. Η ροή αυτή δεν είναι δυνατή. Το βάρος του υγρού δεν είναι αρκετό για να υπερνικήσει τις συνεκτικές δυνάμεις (δυνάμεις λόγω τριβής). Χρειάζεται ένας σωλήνας μεγαλύτερης διαμέτρου για την παροχή αυτή.

- (γ) Αφού για τις συνθήκες του (β) $p_1 = p_2$ η πίεση είναι σταθερή κατά μήκος του σωλήνα και επομένως και στην θέση $x_3 = 5 \text{ m}$ η πίεση θα είναι $p_3 = 200 \text{ kPa}$.

1.2.2 Από τις Εξισώσεις Navier - Stokes

Στην προηγούμενη ενότητα εξήχθησαν αποτελέσματα για πλήρως ανεπτυγμένη στρωτή ροή σε σωλήνες με την εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα και την παραδοχή Νευτώνειου ρευστού. Όταν αυτός ο νόμος και οι παραδοχές εφαρμόζονται σε μια γενική ροή ρευστού το αποτέλεσμα είναι οι εξισώσεις Navier-Stokes.

Η γενική κίνηση ενός ασυμπίεστου Νευτώνειου ρευστού διέπεται από την εξίσωση συνέχειας (διατήρηση της μάζας) και την εξίσωση της ορμής που γράφονται όπως:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_i \partial x_j} - g \quad (1.14)$$

Όπου U_i = συνιστώσα της ταχύτητας στην i διεύθυνση, P = στατική πίεση, g = επιτάχυνση λόγω βαρύτητας.

Για μόνιμη, πλήρως ανεπτυγμένη ροή σε σωλήνα, η ταχύτητα έχει μόνο την αξονική συνιστώσα, η οποία είναι συνάρτηση μόνο της ακτινικής συντεταγμένης. Για αυτές τις συνθήκες, η αριστερή πλευρά της εξίσωσης (1.14) είναι μηδέν. Αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι το ρευστό δεν έχει επιτάχυνση καθώς ρέει κατά

μήκος του σωλήνα. Ο ίδιος περιορισμός χρησιμοποιήθηκε και στη προηγούμενη ενότητα. Έτσι, οι εξισώσεις Navier - Stokes γίνονται:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0, \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} = \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_i \partial x_j} - g \quad (1.15)$$

Η ροή διέπεται από την ισορροπία της πίεσης, του βάρους, και των συνεκτικών (ιξωδών) δυνάμεων στην διεύθυνση της ροής, παρόμοια με αυτή που φαίνεται στο σχήμα 1.10 και στην εξ. (1.11). Εάν η ροή δεν είχε αναπτυχθεί πλήρως (όπως στην περιοχή εισόδου, για παράδειγμα), δεν θα ήταν δυνατή η απλοποίηση των εξισώσεων Navier-Stokes στην μορφή που δίνεται στην εξ. (1.15). Οι μη γραμμικοί όροι δεν θα ήταν μηδέν και η λύση θα ήταν πολύ δύσκολο να επιτευχθεί.

Λόγω της υπόθεσης ότι η ταχύτητα είναι συνάρτηση μόνο της απόστασης r , η εξίσωση συνέχειας ικανοποιείται αυτόματα. Αυτή η συνθήκη διατήρησης της μάζας επίσης αυτόματα ικανοποιείται από την υπόθεση ασυμπίεστης ροής στην προηγούμενη ενότητα. Το ρευστό ρέει σε μια διατομή του σωλήνα με τον ίδιο ρυθμό που ρέει σε οποιαδήποτε άλλη διατομή (Σχήμα 1.7).

Όταν η εξίσωση γραφεί σε πολικές συντεταγμένες η συνιστώσα της εξ. (1.15) κατά μήκος του σωλήνα γίνεται:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \sin \theta = \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (1.16)$$

Δεδομένου ότι η ροή έχει αναπτυχθεί πλήρως, $u = u(r)$ και η δεξιά πλευρά είναι συνάρτηση μόνο του r . Η αριστερή πλευρά είναι συνάρτηση μόνο του x . Αποδείχτηκε ότι αυτό οδηγεί στην συνθήκη ότι η βαθμίδα πίεσης στην διεύθυνση x είναι σταθερά. Η ίδια συνθήκη χρησιμοποιήθηκε για την εξαγωγή της εξ. (1.3).

Από την εξ. (1.16) φαίνεται ότι η επίδραση ενός μη οριζόντιου σωλήνα εισέρχεται στις εξισώσεις Navier-Stokes με τον ίδιο τρόπο, όπως συζητήθηκε στην προηγούμενη ενότητα. Η κλίση πίεσης στην διεύθυνση ροής σε συνδυασμό με την επίδραση του βάρους στην ίδια διεύθυνση προκαλούν μια ενεργή κλίση πίεσης $(-\Delta p/L + \rho g \sin \theta)$.

Το προφίλ της ταχύτητας προκύπτει από την ολοκλήρωση της εξ. (1.16). Δεδομένου ότι είναι μια εξίσωση δεύτερης τάξης είναι απαραίτητες δύο οριακές συνθήκες (1) το ρευστό δεν ολισθαίνει στο τοίχωμα (όπως συνέβη και στην εξ. (1.7)) και (2), η ταχύτητα παραμένει περιορισμένη σε όλη τη ροή (ειδικά $u < \infty$ για $r=0$) ή λόγω συμμετρίας, σε $\frac{\partial u}{\partial r} = 0$ για $r=0$.

Στην προηγούμενη ενότητα μόνο μια οριακή συνθήκη (συνθήκη μη ολίσθησης στο τοίχωμα) ήταν απαραίτητη γιατί η εξίσωση ήταν μια εξίσωση πρώτης τάξης. Η άλλη συνθήκη $\frac{\partial u}{\partial r}=0$ για $r=0$ ήταν αυτόματα ενσωματωμένη στην

ανάλυση, λόγω του γεγονότος ότι $\tau = -\mu \frac{\partial u}{\partial r}$ και $\tau = \frac{2\tau_w r}{D} = 0$ για $r=0$. Τα α-

ποτελέσματα που προκύπτουν είτε από την εφαρμογή σε ένα κύλινδρο ρευστού (ενότητα 1.2.1) ή από την επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes είναι ακριβώς τα ίδια. Ομοίως, οι βασικές παραδοχές όσον αφορά τη δομή της ροής είναι οι ίδιες. Αυτό δεν πρέπει να προκαλεί έκπληξη, διότι και οι δύο μέθοδοι βασίζονται στην ίδια αρχή, τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα. Η μία περιορίζεται σε πλήρως αναπτυγμένη στρωτή ροή σε σωλήνα (διάγραμμα ελευθέρου σώματος) και η άλλη αρχίζει με τις γενικές εξισώσεις που διέπουν την ροή (εξισώσεις Navier-Stokes) με τους κατάλληλους περιορισμούς όσον αφορά την πλήρως αναπτυγμένη στρωτή ροή.

1.2.3 Από Διαστατική Ανάλυση

Αν και η πλήρως αναπτυγμένη στρωτή ροή σε σωλήνες είναι απλή ώστε να επιτρέπει τις μάλλον απλές λύσεις που παρουσιάστηκαν στις δύο προηγούμενες ενότητες, είναι χρήσιμο να εξεταστεί η ροή αυτή και με την διαστατική ανάλυση. Έτσι, υποθέτουμε ότι η πτώση πίεσης στο οριζόντιο σωλήνα, είναι συνάρτηση της μέσης ταχύτητας του ρευστού στο σωλήνα, V , το μήκος του σωλήνα L , τη διάμετρο του σωλήνα, D , και το ιξώδες του ρευστού ν . Δεν έχουμε συμπεριλάβει τη πυκνότητα ή το ειδικό βάρος του ρευστού ως παραμέτρους, διότι για τέτοιες ροές δεν είναι σημαντικές παράμετροι. Δεν υπάρχει ούτε το γινόμενο μάζας (πυκνότητας) επιτάχυνσης ούτε η συνιστώσα του βάρους στην κατεύθυνση της ροής που να εμπλέκονται. Έτσι έχουμε

$$\Delta p = f(V, L, D, \mu)$$

Υπάρχουν πέντε μεταβλητές που μπορεί να περιγραφούν από την άποψη των τριών διαστάσεων αναφοράς (M, L, T). Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της διαστατικής ανάλυσης, η ροή αυτή μπορεί να περιγραφεί με $k-r = 5-3 = 2$ αδιάστατες ομάδες. Μια τέτοια περιγραφή είναι

$$\frac{D\Delta p}{\mu V} = \phi\left(\frac{L}{D}\right) \quad (1.17)$$

όπου $\phi (L/D)$ είναι μια άγνωστη συνάρτηση του λόγου του μήκους προς την διάμετρο του σωλήνα.

Αν και αυτό είναι το μόνο που μπορεί να εξαχθεί από την διαστατική ανάλυση, φαίνεται λογικό να υποθέσουμε επίσης ότι η πτώση πίεσης είναι ανάλογη με το μήκος του σωλήνα.

Ο μόνος τρόπος για να ισχύει αυτό είναι εάν $\phi(L/D) = CL/D$ όπου το C είναι μια σταθερά. Έτσι, η εξ. (1.17) γίνεται

$$\frac{D\Delta p}{\mu V} = \frac{CL}{D}$$

η οποία μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{C\mu V}{D^2}$$

ή

$$Q = AV = \frac{(\pi/4C)\Delta p D^4}{\mu l} \quad (1.18)$$

Η βασική συσχέτιση για τη στρωτή ροή σε σωλήνα που δίνεται από την εξ. (1.18) είναι η ίδια με εκείνη που λαμβάνεται με την ανάλυση των δύο προηγούμενων ενοτήτων. Η τιμή του C πρέπει να καθορίζεται από την θεωρία (όπως γίνεται στις δύο προηγούμενες ενότητες) ή από πειράματα. Για αγωγούς άλλων διατομών, η τιμή του C είναι διαφορετική.

Συνήθως είναι προτιμότερο να περιγραφεί μια διαδικασία με αδιάστατες ποσότητες. Για το σκοπό αυτό θα ξαναγράψουμε την εξίσωση της πτώσης πίεσης για στρωτή ροή σε οριζόντιο σωλήνα, (Εξ. 1.8), όπως $\Delta p = 32\mu LV/D^2$ και θα διαιρέσουμε αμφότερες πλευρές με την δυναμική πίεση $\rho V^2/2$ για να λάβουμε την παρακάτω αδιάστατη μορφή όπως

$$\frac{\Delta p}{1/2\rho V^2} = \frac{(32\mu LV/D^2)}{1/2\rho V^2} = 64\left(\frac{\mu}{\rho VD}\right)\left(\frac{L}{D}\right) = \frac{64}{\text{Re}}\left(\frac{L}{D}\right)$$

Αυτή συχνά γράφεται ως

$$\Delta p = f \frac{1}{D} \frac{\rho V^2}{2}$$

όπου η αδιάστατη ποσότητα

$$f = \frac{\Delta p(D/l)}{(\rho V^2/2)}$$

ονομάζεται **συντελεστής τριβής**, ή μερικές φορές **συντελεστής τριβής Darcy** [Darcy, (1803-1858)]. Έτσι, ο συντελεστής τριβής για στρωτή, πλήρως ανεπτυγμένη ροή σε σωλήνα είναι

$$f = \frac{64}{\text{Re}} \quad (1.19)$$

Αντικαθιστώντας την πτώση πίεσης με την διατμητική τάση στο τοίχωμα (εξ. 1.5), παίρνουμε μια εναλλακτική έκφραση για το συντελεστή τριβής, όπως μια αδιάστατη διατμητική τάση τοιχώματος

$$f = \frac{8\tau_w}{\rho V^2} \quad (1.20)$$

Η γνώση του συντελεστή τριβής θα μας επιτρέψει να αποκτήσουμε αρκετές πληροφορίες σχετικά με την ροή σε σωλήνα. Για την τυρβώδη ροή η συσχέτιση του συντελεστή τριβής με τον αριθμό Reynolds είναι πολύ πιο περίπλοκη από αυτή που δίνεται από την Εξ. (1.19) για στρωτή ροή. Το θέμα αυτό αναλύεται λεπτομερώς στην ενότητα 1.4.

1.2.4 Εξίσωση Ενέργειας

Στις τρεις προηγούμενες ενότητες εξήχθησαν τα βασικά αποτελέσματα της στρωτής ροής από την εφαρμογή του 2^{ου} νόμου του Νεύτωνα ή από την διαστατική ανάλυση. Είναι εξίσου σημαντικό να κατανοήσουμε επίσης την εξίσωση της ενέργειας σε τέτοιες ροές. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε την εξίσωση ενέργειας για ασυμπίεστη, μόνιμη ροή μεταξύ δύο θέσεων που γράφεται όπως

$$\frac{P_1}{\gamma} + a_1 \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + a_2 \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_f \quad (1.21)$$

Υπενθυμίζουμε ότι οι συντελεστές κινητικής ενέργειας a_1 και a_2 , αντισταθμίζουν το γεγονός ότι το προφίλ της ταχύτητας στον σωλήνα δεν είναι ομοιόμορφο. Για ομοιόμορφο προφίλ ταχύτητας $a=1$ ενώ για ανομοιόμορφο $a>1$. Ο όρος h_f (απώλεια φορτίου) λαμβάνει υπόψη του απώλειες ενέργειας που σχετίζονται με τη ροή. Η απώλεια αυτή είναι άμεση συνέπεια της συνεκτικής (ιξώδους) σκέδασης που παρουσιάζεται σε όλο το ρευστό στο σωλήνα. Για ιδανικό (μη συνεκτικό) ρευστό η απώλεια φορτίου είναι μηδενική και η εξίσωση της ενέργειας απλοποιείται στη γνωστή εξίσωση Bernoulli.

Παρά το γεγονός ότι το προφίλ της ταχύτητας για συνεκτική ροή σε σωλήνες

δεν είναι ομοιόμορφο για πλήρως ανεπτυγμένη ροή, το προφίλ δεν αλλάζει από τη διατομή (1) στη διατομή (2), και επομένως $a_1 = a_2$. Έτσι, η κινητική ενέργεια είναι η ίδια και στις δυο διατομές και η εξίσωση ενέργειας γίνεται

$$\left(\frac{p_1}{\gamma} + z_1 \right) - \left(\frac{p_2}{\gamma} + z_2 \right) = h_f \quad (1.22)$$

Η ενέργεια που σκεδάζεται (χάνεται) από τις συνεκτικές δυνάμεις μέσα στο ρευστό παρέχεται από το υπερβάλλον έργο των δυνάμεων πίεσης και βαρύτητας.

Η σύγκριση των εξ. (1.22) και (1.10) δείχνει ότι η απώλεια φορτίου δίνεται από την σχέση:

$$h_f = \frac{2\tau L}{\gamma r}$$

η οποία με τη χρήση της εξ. (1.4), μπορεί να ξαναγραφεί με τη μορφή:

$$h_f = \frac{4L\tau_w}{\gamma D} \quad (1.23)$$

Η διατμητική τάση στο τοίχωμα (που είναι άμεσα συνδεδεμένη με το ιξώδες και τη διατμητική τάση σε ολόκληρο το ρευστό) είναι υπεύθυνη για την απώλεια φορτίου. Μια πιο προσεκτική εξέταση των υποθέσεων που εμπλέκονται στην εξαγωγή της εξ. (1.23) δείχνει ότι αυτή ισχύει για στρωτή και για τυρβώδη ροή.

1.3 Πλήρως Αναπτυγμένη Τυρβώδης Ροή

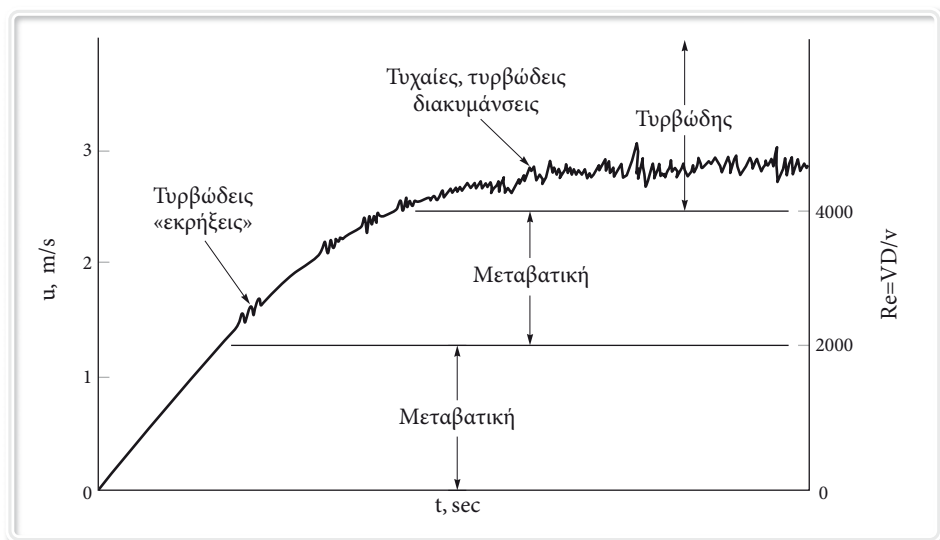
Στην προηγούμενη ενότητα παρουσιάσθηκαν τα χαρακτηριστικά της πλήρως αναπτυγμένης στρωτής ροής σε σωλήνες. Δεδομένου ότι τυρβώδης ροή σε σωλήνα εμφανίζεται πιο συχνά σε πρακτικά προβλήματα, είναι απαραίτητο να έχουμε παρόμοιες πληροφορίες για την τυρβώδη ροή σε σωλήνες. Παρόλα αυτά, η τυρβώδης ροή είναι μια πολύ σύνθετη διαδικασία. Πολλοί ερευνητές έχουν κάνει ιδιαίτερες προσπάθειες προκειμένου να κατανοήσουν τα χαρακτηριστικά και τις διαδικασίες της τυρβώδους ροής. Παρά το γεγονός ότι σημαντικές γνώσεις για τις τυρβώδεις ροές έχουν αποκτηθεί, εξακολουθούν να υπάρχουν αρκετά θέματα για έρευνα.

1.3.1 Μετάβαση από Στρωτή σε Τυρβώδη Ροή

Οι ροές έχουν ταξινομηθεί ως στρωτές ή τυρβώδεις. Για οποιοδήποτε ροϊκό πεδίο, υπάρχει μία (ή περισσότερες) αδιάστατη παράμετρος τέτοια ώστε για τιμή της παραμέτρου κάτω από μια συγκεκριμένη τιμή η ροή είναι στρωτή, ενώ για τιμή της παραμέτρου μεγαλύτερη από μια συγκεκριμένη τιμή η ροή είναι τυρβώδης.

Οι σημαντικοί παράμετροι που υπεισέρχονται (π.χ. αριθμός Reynolds, αριθμός Mach) και οι κρίσιμες τιμές τους εξαρτώνται από τη κατάσταση της ροής. Για παράδειγμα, η ροή σε ένα σωλήνα η ροή κατά μήκος μιας επίπεδης πλάκας μπορεί να είναι στρωτή ή τυρβώδης, ανάλογα με την τιμή του αριθμού Reynolds. Για ροή σε σωλήνα η τιμή του αριθμού Reynolds θα πρέπει να είναι μικρότερη από περίπου 2100 για στρωτή ροή και μεγαλύτερη από περίπου 4000 για τυρβώδη ροή. Για ροή κατά μήκος μιας επίπεδης πλάκας η μετάβαση από στρωτή σε τυρβώδη ροή εμφανίζεται για έναν αριθμό Reynolds περίπου 500.000 (η κλίμακα μήκους στον αριθμό Reynolds είναι απόσταση από την αρχή (ακμή προσβολής) της πλάκας).

Ας εξετάσουμε ένα σωλήνα μεγάλου μήκους που είναι αρχικά γεμάτος με ρευστό σε κατάσταση ηρεμίας. Με το άνοιγμα της βαλβίδας για την έναρξη της ροής, η ταχύτητα ροής και ο αριθμός Reynolds αυξάνουν από το μηδέν (κατάσταση ηρεμίας) στη μέγιστη τιμή για μόνιμη ροή όπως φαίνεται στο σχήμα 1.10.

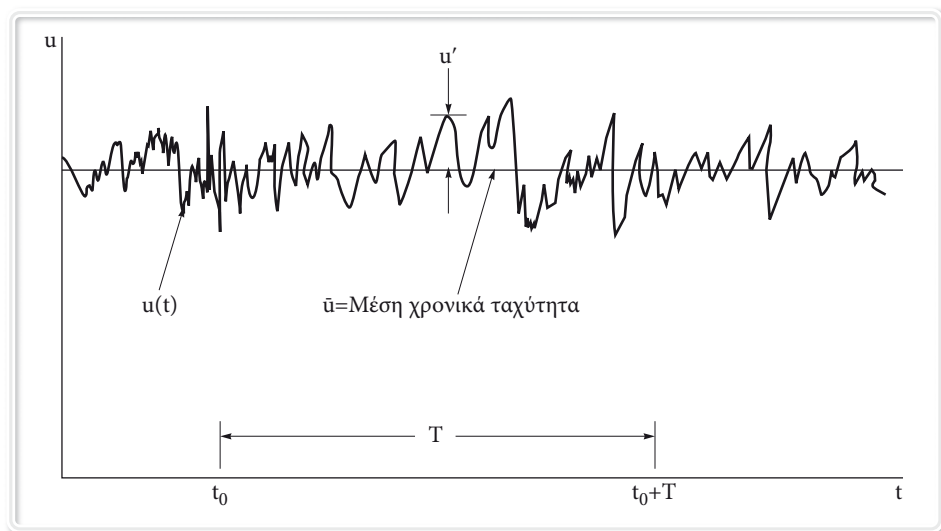


Σχήμα 1.10: Μετάβαση από στρωτή σε τυρβώδη ροή σε σωλήνα.

Υποθέτουμε ότι η μεταβατική διαδικασία είναι αρκετά αργή ώστε οι μη-μόνιμες επιδράσεις να είναι αμελητέες. Για μια αρχική χρονική περίοδο ο αριθμός Reynolds είναι αρκετά μικρός και έτσι εμφανίζεται στρωτή ροή.

Σε κάποια στιγμή, ο αριθμός Reynolds φτάνει το 2100, και η ροή ξεκινά τη μετάβασή της σε τυρβώδη. Διαλείπουσες κηλίδες ή τυρβώδεις “εκρήξεις” εμφανίζονται στη ροή. Επειδή ο αριθμός Reynolds αυξάνεται το σύνολο του πεδίου ροής γίνεται τυρβώδες. Η ροή παραμένει τυρβώδης όσο διάστημα ο αριθμός Reynolds είναι μεγαλύτερος από περίπου 4000.

Ένα τυπικό σήμα της αξονικής συνιστώσας της ταχύτητας που μετράται σε μια δεδομένη θέση στην ροή, φαίνεται στο σχήμα 1.11. Η ακανόνιστη, τυχαία φύση της είναι το χαρακτηριστικό γνώρισμα της τυρβώδους ροής. Ο χαρακτήρας πολλών παραμέτρων της ροής (πτώση πίεσης, μεταφορά θερμότητας, κ.λπ.) εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την ύπαρξη και τη φύση των τυρβωδών διακυμάνσεων ή διαταράξεων. Για ιδανική ροή, ο αριθμός Reynolds είναι άπειρος (αφού το ιξώδες είναι μηδέν), και η ροή μπορεί να θεωρηθεί τυρβώδης. Ωστόσο, ικανοποιητικά αποτελέσματα επιτεύχθηκαν με τη χρήση της εξίσωσης Bernoulli. Ο λόγος για τον οποίον οι απλουστευμένες ιδανικές αναλύσεις έδωσαν αξιόλογα αποτελέσματα είναι ότι οι επιδράσεις του ιξώδους δεν ήταν πολύ σημαντικές και η ταχύτητα που χρησιμοποιείται στους υπολογισμούς ήταν η μέση χρονικά ταχύτητα, (σχήμα 1.11). Ωστόσο ο υπολογισμός της μεταφοράς θερμότητας, της πτώσης πίεσης, και πολλών άλλων παραμέτρων δεν θα ήταν δυνατή χωρίς να



Σχήμα 1.11: Μέση χρονικά ταχύτητα και διακύμανση της ταχύτητας σε τυρβώδη ροή.

λάβουμε υπόψη τις σημαντικές επιδράσεις που σχετίζονται με την τυχαιότητα της ροής.

Οι διαδικασίες ανάμιξης και μεταφορά θερμότητας βελτιώνονται αισθητά στην τυρβώδη ροή σε σύγκριση με την στρωτή ροή. Αυτό οφείλεται στη μακροσκοπική κλίμακα της τυχαιότητας στην τυρβώδη ροή. Η τυχαιότητα αυτή είναι πολύ αποτελεσματική στην μεταφορά ενέργειας και μάζας σε όλο το πεδίο ροής, αυξάνοντας έτσι τους ρυθμούς διάφορων διαδικασιών. Η στρωτή ροή, από την άλλη πλευρά, μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από πολύ μικρά αλλά πεπερασμένου μεγέθους σωματίδια ρευστού που ρέουν ομαλά σε στρώματα, το ένα πάνω στο άλλο. Η μόνη τυχαιότητα και η ανάμιξη πραγματοποιείται στη μοριακή κλίμακα και οδηγεί σε σχετικά μικρούς ρυθμούς μεταφοράς θερμότητας, μάζας, και ορμής.

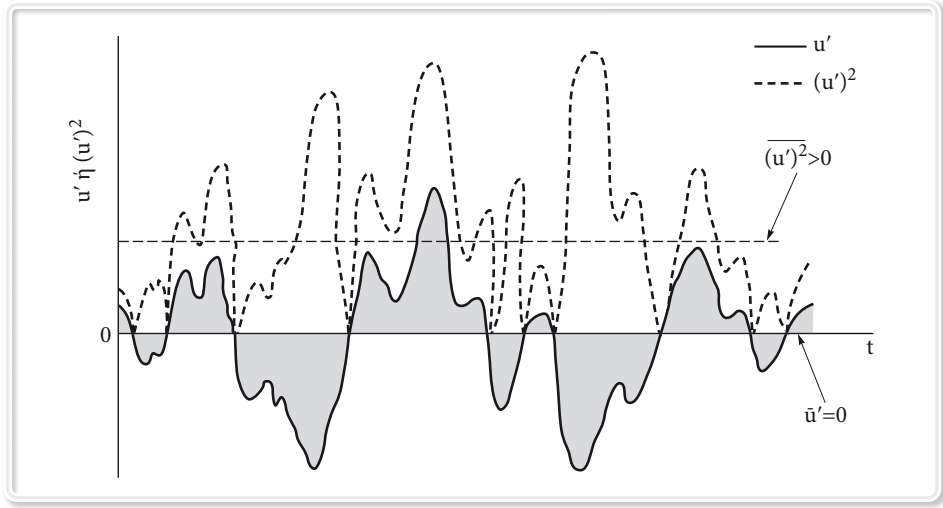
Σε ορισμένες περιπτώσεις η τυρβώδης ροή είναι επιθυμητή. Για τη μεταφορά της απαιτούμενης θερμότητας ανάμεσα σε ένα στερεό και ένα παρακείμενο ρευστό θα ήταν απαραίτητος ένας πολύ μεγάλος εναλλάκτης θερμότητας, αν η ροή ήταν στρωτή. Επίσης, η απαιτούμενη μεταφορά μάζας σε υγρή κατάσταση σε μια κατάσταση ατμών θα απαιτούσε πολύ μεγάλες επιφάνειες, αν η ροή που ρέει στην επιφάνεια ήταν στρωτή και όχι τυρβώδης.

Η τύρβη έχει επίσης σημασία για την ανάμιξη των ρευστών. Ο καπνός από μια καμινάδα θα συνεχιζόταν για μεγάλη απόσταση χωρίς ταχεία διασπορά στο περιβάλλον, αν η ροή ήταν στρωτή και όχι τυρβώδης. Υπό ορισμένες ατμοσφαιρικές συνθήκες αυτό παρατηρείται να συμβαίνει. Αν και υπάρχει ανάμιξη σε μοριακή κλίμακα (στρωτή ροή), είναι αρκετές τάξεις μεγέθους πιο αργή και λιγότερο αποτελεσματική από την ανάμιξη σε μακροσκοπική κλίμακα (τυρβώδης ροή).

Σε άλλες καταστάσεις η στρωτή ροή είναι πιο επιθυμητή από την τυρβώδη ροή. Η πτώση της πίεσης σε σωλήνες (και επομένως οι απαιτήσεις σε ενέργεια για άντληση) μπορεί να είναι σημαντικά χαμηλότερη, αν η ροή είναι στρωτή και όχι τυρβώδης. Η ροή του αίματος μέσω των αρτηριών του ανθρώπου είναι συνήθως στρωτή, εκτός από τις μεγαλύτερες αρτηρίες με μεγάλες παροχές αίματος. Η αεροδυναμική αντίσταση σε μία αεροτομή αεροπλάνου μπορεί να είναι αρκετά μικρότερη στη στρωτή ροή από ό,τι στη τυρβώδη ροή.

1.3.2 Τυρβώδεις Διατμητικές Τάσεις

Η θεμελιώδης διαφορά μεταξύ στρωτής και τυρβώδους ροής βρίσκεται στην χαοτική, τυχαία συμπεριφορά των διαφόρων παραμέτρων του ρευστού. Τέτοιες μεταβολές συμβαίνουν στις τρεις συνιστώσες της ταχύτητας, στη πίεση, στη διατμητική τάση, στη θερμοκρασία, καθώς και σε οποιοδήποτε άλλο χαρακτηριστι-



Σχήμα 1.12: Μέση χρονική τιμή της διακύμανσης της ταχύτητας, \bar{u}' και του τετραγώνου της διακύμανσης, $(\bar{u}')^2$.

κό της ροής. Η τυρβώδης ροή χαρακτηρίζεται από τυχαία, τρισδιάστατη στροβιλότητα. Όπως δείχνει το σχήμα 1.12, αυτές οι ροές μπορούν να περιγραφούν με τις μέσες τιμές (που σημειώνονται με παύλα) και τις διακυμάνσεις τους (που σημειώνονται με $'$).

Έτσι, αν $u = u(x, y, z, t)$ είναι η συνιστώσα της στιγμιαίας ταχύτητας στην x διεύθυνση, τότε η μέση χρονικά τιμή της u είναι

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(x, y, z, t) dt \quad (1.24)$$

όπου το χρονικό διάστημα, T , είναι σημαντικά μεγαλύτερο από την περίοδο των διακυμάνσεων, αλλά σημαντικά μικρότερο από κάθε αστάθεια της μέσης ταχύτητας. Αυτό φαίνεται στο σχήμα 1.12.

Η διακύμανση της ταχύτητας u' , είναι το χρονικά μεταβαλλόμενο μέρος που διαφέρει από τη μέση τιμή

$$u = \bar{u} + u' \quad \text{ή} \quad u' = u - \bar{u} \quad (1.25)$$

Σαφώς, η μέση χρονική τιμή των διακυμάνσεων είναι μηδέν αφού οι διακυμάνσεις κατανέμονται ισομερώς στις δύο πλευρές του μέσου όρου.

$$\bar{u'} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (u - \bar{u}) dt = \frac{1}{T} \left(\int_{t_0}^{t_0+T} u dt - \bar{u} \int_{t_0}^{t_0+T} dt \right) = \frac{1}{T} (T\bar{u} - T\bar{u}) = 0$$

Είναι επίσης σαφές, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.13, ότι η τιμή του μέσου όρου είναι θετική αφού το τετράγωνο μιας κυμαινόμενης ποσότητας δεν μπορεί να είναι αρνητικό. Έτσι,

$$(\overline{u'})^2 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (u')^2 dt > 0$$

Από την άλλη πλευρά, η μέση χρονική τιμή του γινομένου των διακυμάνσεων $(\overline{u'v'}, \overline{u'w'}, \overline{v'w'})$ μπορεί να είναι μηδενική ή μη μηδενική (θετική ή αρνητική).

Η δομή και τα χαρακτηριστικά της τύρβης μπορεί να ποικίλλουν από μια κατάσταση ροής σε μία άλλη. Για παράδειγμα, η **ένταση της τύρβης** (ή το επίπεδο της τύρβης) μπορεί να είναι μεγαλύτερο σε ένα πολύ θυελλώδη άνεμο σε σχέση με ό,τι είναι σε έναν σχετικά σταθερό (τυρβώδη) άνεμο. Η ένταση της τύρβης ορίζεται συχνά ως η τετραγωνική ρίζα του μέσου τετραγώνου της διακύμανσης της ταχύτητας διά της μέσης χρονικά ταχύτητας, ή

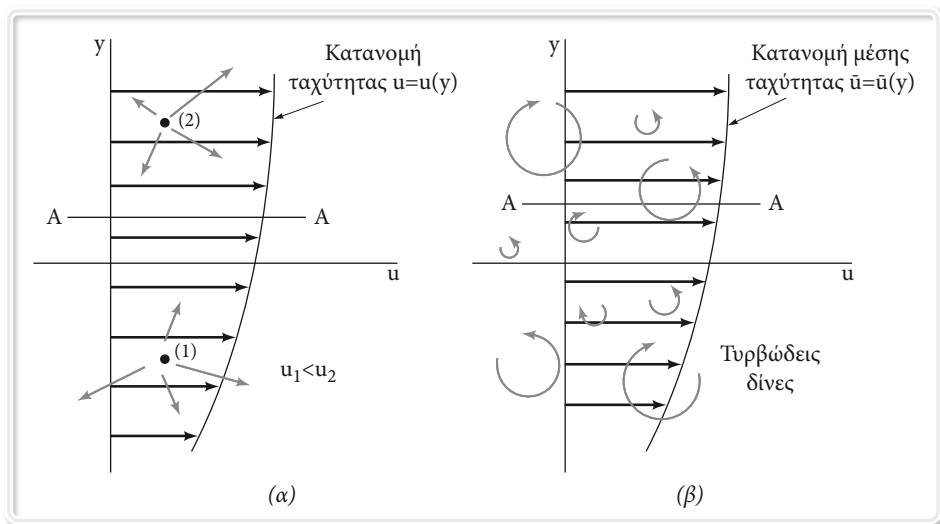
$$\varphi = \frac{\sqrt{(\overline{u'})^2}}{\bar{u}} = \frac{\left[\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (u')^2 dt \right]^{1/2}}{\bar{u}}$$

Όσο μεγαλύτερη είναι η ένταση της τύρβης, τόσο μεγαλύτερη είναι η διακύμανση της ταχύτητας (όπως επίσης και άλλων χαρακτηριστικών της ροής).

Μια άλλη παράμετρος της τύρβης που είναι διαφορετική από μια κατάσταση ροής σε μια άλλη είναι η περίοδος των διακυμάνσεων-η χρονική *κλίμακα* των διακυμάνσεων που φαίνεται στο σχήμα 1.12. Σε πολλές ροές, όπως η ροή του νερού από μια βρύση, τυπικές συχνότητες είναι της τάξης των 10, 100, ή 1000 κύκλων ανά δευτερόλεπτο. Σε άλλες ροές, όπως στο Ρεύμα του Κόλπου στον Ατλαντικό Ωκεανό ή στη ροή από την ατμόσφαιρα στον Δία, οι χαρακτηριστικές τυχαίες ταλαντώσεις μπορεί να έχουν μια χρονική περίοδο της τάξης των ωρών, ημερών ή περισσότερο.

Η έννοια της διατμητικής τάσης για στρωτή ροή θα μπορούσε να επεκταθεί και για την τυρβώδη ροή με αντικατάσταση της στιγμιαίας ταχύτητας με την μέση χρονικά ταχύτητα. Ωστόσο, αρκετές πειραματικές και θεωρητικές μελέτες έχουν δείξει ότι μια τέτοια προσέγγιση οδηγεί σε εντελώς εσφαλμένα αποτελέσματα. Μια φυσική εξήγηση για αυτήν την συμπεριφορά μπορεί να βρεθεί στο φαινόμενο που παράγει την διατμητική τάση.

Η στρωτή ροή μοντελοποιείται σαν ένα σύνολο ρευστών σωματιδίων που ρέουν ομαλά κατά μήκος σε στρώματα. Το ρευστό στην πραγματικότητα, αποτελείται από πολυάριθμα μόρια που κινούνται με σχεδόν τυχαίο τρόπο, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.13α. Η κίνηση αυτή δεν είναι εντελώς τυχαία, μια μικρή τάση σε μια κατεύθυνση παράγει την παροχή που συνδέουμε με την κίνηση



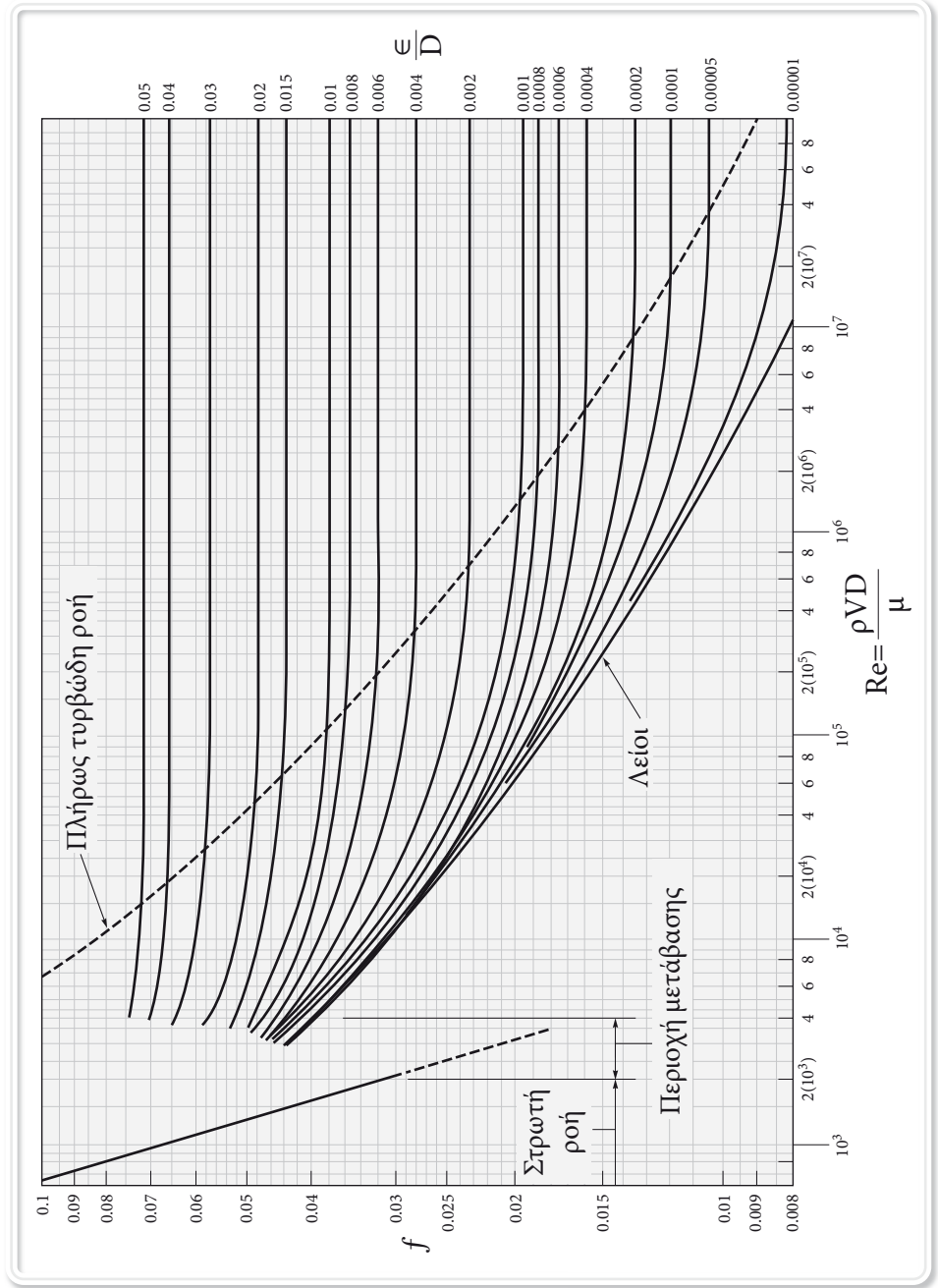
Σχήμα 1.13: (α) Στρωτή ροή λόγω της τυχαίας κίνησης των μορίων, (β) Τυρβώδης ροή λόγω τυχαίων τρισδιάστατων δινών.

των σωματιδίων του ρευστού. Καθώς τα μόρια κινούνται απότομα σε ένα δεδομένο επίπεδο (το επίπεδο Α–Α, για παράδειγμα), αυτά που κινούνται προς τα πάνω προέρχονται από μια περιοχή με μικρότερη x συνιστώσα της ταχύτητας από αυτά που κινούνται προς τα κάτω, τα οποία προέρχονται από μια περιοχή μεγαλύτερης ταχύτητας.

Η παροχή ορμής στη διεύθυνση x μέσω ενός επιπέδου Α–Α οδηγεί σε μία αντίσταση (προς τα αριστερά) του κάτω ρευστού στο πάνω ρευστό και μια ίση αλλά αντίθετη επίδραση του πάνω ρευστού στο κάτω ρευστό. Τα μόρια που κινούνται προς τα πάνω εγκάρσια στο επίπεδο Α–Α πρέπει να επιταχυνθούν από το ρευστό πάνω από αυτό το επίπεδο. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής στη διαδικασία αυτή παράγει (σε μακροσκοπική κλίμακα) μια διατμητική δύναμη. Ομοίως, τα πιο ενεργητικά μόρια που κινούνται προς τα κάτω διασχίζοντας το επίπεδο Α–Α πρέπει να επιβραδυνθούν από το ρευστό κάτω από αυτό το επίπεδο. Αυτή η διατμητική δύναμη εμφανίζεται μόνο εάν υπάρχει μια κλίση (μεταβολή) της ταχύτητας στη διεύθυνση y , διαφορετικά η μέση συνιστώσα της ταχύτητας στη διεύθυνση x (και της ορμής) των ανοδικών και καθοδικών μορίων είναι ακριβώς η ίδια. Επιπλέον, υπάρχουν ελκτικές δυνάμεις μεταξύ των μορίων. Με το συνδυασμό αυτών των επιδράσεων προκύπτει ο γνωστός Νευτώνειος νό-

μος του ιξώδους: $\tau = \mu \frac{d\bar{u}}{dy}$ όπου σε μοριακή βάση το μ σχετίζεται με τη μάζα

και την ταχύτητα (θερμοκρασία) της τυχαίας κίνησης των μορίων.



Σχήμα 1.20: Διάγραμμα Moody

ταβολή της ενεργής διαμέτρου εκτός από την μεταβολή της τραχύτητας σε σημαντικό βαθμό.

Το σχήμα 1.20 δείχνει την συσχέτιση του f με τον αριθμό Re και την σχετική τραχύτητα ε/D και ονομάζεται **διάγραμμα Moody** προς τιμήν του L.F. **Moody**, ο οποίος, μαζί με τον C.F. **Colebrook**, συσχέτισαν τα αρχικά δεδομένα των Nikuradse με την σχετική τραχύτητα των εμπορικά διαθέσιμων υλικών σωλήνων. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι τιμές του ε/D δεν ανταποκρίνονται απαραίτητα σε πραγματικές τιμές που λαμβάνονται από ένα μικροσκοπικό καθορισμό του μέσου ύψους της τραχύτητας της επιφάνειας. Ωστόσο, προβλέπουν τη σωστή συσχέτιση για το $f = \varphi(Re, \varepsilon/D)$.

Τα ακόλουθα χαρακτηριστικά παρατηρούνται από τα δεδομένα του σχήματος 1.20. Για στρωτή ροή, $f = 64/Re$ που είναι ανεξάρτητος από την σχετική τραχύτητα. Για πολύ μεγάλους αριθμούς Reynolds $f = \varphi(\varepsilon/D)$ που είναι ανεξάρτητος από τον αριθμό Reynolds. Για αυτές τις ροές, που ονομάζονται κοινώς **πλήρως τυρβώδεις ροές** το στρωτό υπόστρωμα είναι τόσο λεπτό (το πάχος του μειώνεται με την αύξηση του αριθμού Re) έτσι ώστε η επιφανειακή τραχύτητα να επηρεάζει απόλυτα τον χαρακτήρα της ροής κοντά στο τοίχωμα. Ως εκ τούτου, η πτώση πίεσης που απαιτείται είναι αποτέλεσμα της τυρβώδους διατμητικής τάσης και όχι της στρωτής διατμητικής τάσης που συνήθως βρίσκεται στο συνεκτικό υπόστρωμα. Για τις ροές με μέσες τιμές του Re , ο συντελεστής τριβής εξαρτάται τόσο από τον αριθμό Reynolds όσο και από την σχετική τραχύτητα $f = \varphi(Re, \varepsilon/D)$.

Το κενό στο σχήμα για το οποίο δεν δίνονται τιμές του f ($2100 < Re < 4000$) είναι αποτέλεσμα του γεγονότος ότι η ροή σε αυτή την περιοχή μετάβασης μπορεί να είναι στρωτή ή τυρβώδης (ή μείγμα και των δύο) ανάλογα με τις συνθήκες.

Ακόμα και για λείους σωλήνες ο συντελεστής τριβής δεν είναι μηδέν. Δηλαδή, υπάρχει μια απώλεια φορτίου σε κάθε σωλήνα, ανεξάρτητα από το πόσο λεία είναι η επιφάνεια. Αυτό είναι αποτέλεσμα της οριακής συνθήκης μη-ολίσθησης (το ρευστό “κολλάει” στο τοίχωμα). Υπάρχει πάντα κάποια μικροσκοπική τραχύτητα που παράγει τη συνθήκη μη-ολίσθησης (και επομένως μη μηδενικό f) σε μοριακό επίπεδο, ακόμη και όταν η τραχύτητα είναι σημαντικά μικρότερη από το πάχος του συνεκτικού υποστρώματος. Αυτοί οι σωλήνες ονομάζονται **υδραυλικά λείοι**.

Διάφοροι ερευνητές προσπάθησαν να αναπτύξουν μια αναλυτική έκφραση για το $f = \varphi(Re, \varepsilon/D)$. Σημειώστε ότι το γράφημα Moody καλύπτει ένα εξαιρετικά ευρύ φάσμα των παραμέτρων της ροής. Η περιοχή της μη στρωτής ροής καλύπτει περισσότερο από τέσσερεις τάξεις μεγέθους σε αριθμό Reynolds (από

4×10^3 έως 10^8). Προφανώς, για ένα συγκεκριμένο σωλήνα και ρευστό, οι τυπικές τιμές της μέσης ταχύτητας δεν καλύπτουν όλο αυτό το εύρος. Ωστόσο, λόγω της μεγάλης ποικιλίας σε σωλήνες (D), ρευστά (ρ και μ) και ταχύτητες (V), ένα τέτοιο ευρύ φάσμα σε Re χρειάζεται για να συμπεριλάβει περίπου όλες τις εφαρμογές της ροής σε σωλήνες. Σε πολλές περιπτώσεις η συγκεκριμένη ροή σωλήνα που προκαλεί ενδιαφέρον περιορίζεται σε μια σχετικά μικρή περιοχή του διαγράμματος Moody, και απλές ημι-εμπειρικές εκφράσεις μπορούν να αναπτυχθούν για τέτοιες συνθήκες. Το διάγραμμα Moody, από την άλλη πλευρά, ισχύει για όλες τις μόνιμες, πλήρως αναπτυγμένες, ασυμπίεστες ροές σε σωλήνες.

Η ακόλουθη εξίσωση του Colebrook ισχύει για όλη την περιοχή της μη στρωτής ροής του διαγράμματος Moody

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right) \quad (1.42)$$

Στην πραγματικότητα, το διάγραμμα Moody είναι μια γραφική αναπαράσταση της εξίσωσης αυτής, η οποία είναι μια εμπειρική προσαρμογή των δεδομένων για την πτώση πίεσης σε σωλήνα. Η εξίσωση (1.42) ονομάζεται και εξίσωση του Colebrook. Μια δυσκολία με τη χρήση της είναι ότι το f εμφανίζεται και στα δύο μέρη της εξίσωσης. Δηλαδή, για συγκεκριμένες συνθήκες το f μπορεί να υπολογισθεί με επαναληπτική διαδικασία.

Επίσης έχουν αναπτυχθεί εξισώσεις που προσεγγίζουν επαρκώς τη σχέση του Colebrook και δεν απαιτούν επαναληπτική διαδικασία. Μερικές από τις εξισώσεις αυτές παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.1.

Πίνακας 1.1: Προσεγγιστικές Σχέσεις για τον υπολογισμό του συντελεστή τριβής f .

| Ερευνητές | Σχέση |
|---|--|
| Nikuradse J. (1932) Για $5000 \leq Re \leq 10^6$, $0 \leq \varepsilon/D \leq 0.05$ | $f = \frac{6.4}{\left(\ln(Re) - \ln \left(1 + 0.01 Re \frac{\varepsilon}{D} \left(1 + 10 \sqrt{\frac{\varepsilon}{D}} \right) \right) \right)^{2.4}}$ |
| Moody M.L (1947) Για $4000 \leq Re \leq 10^6$, $0 \leq \varepsilon/D \leq 0.01$ | $f = 0.0055 \left(1 + \left(2 \frac{10^4 \varepsilon}{D} + \frac{10^6}{Re} \right)^{\left(\frac{1}{3} \right)} \right)$ |

| Ερευνητές | Σχέση |
|--|---|
| Wood D.J (1966) Για $4000 \leq Re \leq 10^6$, $0.00001 \leq \varepsilon/D \leq 0.05$ | $f = \alpha + \frac{b}{Re^c}$ $\alpha = 0.53 \left(\frac{\varepsilon}{D} \right) + 0.094 \left(\frac{\varepsilon}{D} \right)^{0.225}$ $b = 88 \left(\frac{\varepsilon}{D} \right)^{0.44}$ $c = 1.62 \left(\frac{\varepsilon}{D} \right)^{0.134}$ |
| Jain A.K. (1976) Για $5000 \leq Re \leq 10^7$ $0.00001 \leq \varepsilon/D \leq 0.05$ | $\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.14 - 2 \log \left(\frac{\varepsilon}{D} \right) + \left(\frac{21.25}{Re^{0.9}} \right) =$ $= -2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3.715} + \left(\frac{6.943}{Re} \right)^{0.9} \right)$ |
| Swamee-Jain (1976) Για $5000 \leq Re \leq 10^8$, $1 \times 10^{-6} \leq \varepsilon/D \leq 0.01$ | $f = \frac{0.25}{\left[\log \left(\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right) \right]^2}$ |
| Chen N.H. (1979) Για $4000 \leq Re \leq 10^8$, $5 \times 10^{-6} \leq \varepsilon/D \leq 0.05$ | $\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7065} - \frac{5.0452}{Re} \times \right.$ $\left. \times \log \left(\frac{(\varepsilon/D)^{1.1098}}{2.8257} - \frac{5.8506}{Re^{0.8981}} \right) \right)$ |
| Round G.F. (1980) Για $4000 \leq Re \leq 10^6$, $0 \leq \varepsilon/D \leq 0.04$ | $\frac{1}{\sqrt{f}} = -1.8 \log \left(0.27 \frac{\varepsilon}{D} - \frac{6.5}{Re} \right)$ |
| Barr D.I.H. (1981) Για $4000 \leq Re \leq 10^6$, $0 \leq \varepsilon/D \leq 0.05$ | $\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} - \frac{4.518 \log \left(\frac{1}{7} Re \right)}{Re \left(1 + \frac{1}{29} Re^{0.52} (\varepsilon/D)^{0.7} \right)} \right)$ |
| Zigrang D.J. και Sylvester (1982) Για $4000 \leq Re \leq 10^6$, $0 \leq \varepsilon/D \leq 0.05$ | $\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} - \frac{5.02}{Re} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} - \frac{5.02}{Re} \right) \times \right.$ $\left. \times \log_{10} \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} - \frac{13}{Re} \right) \right)$ |

| Ερευνητές | Σχέση |
|---|---|
| Haaland (1983) Για $5000 \leq Re \leq 10^8$, $0 \leq \varepsilon/D \leq 0.05$ | $\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.8 \log \left[\left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} \right)^{1.11} + \frac{6.9}{Re} \right]$ |
| Serghides T.K. (1984) Για $4000 \leq Re \leq 10^8$, $0 \leq \varepsilon/D \leq 0.05$ | $f = \left(A - \frac{(B-A)^2}{C-2B+A} \right) \quad \begin{aligned} A &= -2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{12}{Re} \right) \\ B &= -2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51A}{Re} \right) \\ C &= -2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51B}{Re} \right) \end{aligned}$ |
| Swamee P.K. (1993) Για $0 \leq Re \leq 10^8$, $0 \leq \varepsilon/D \leq 0.05$ | $f = \left\{ \left(\frac{64}{Re} \right)^8 + 9.5 \left[\ln \left(\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right) - \left(\frac{2500}{Re} \right)^6 \right]^{-16} \right\}^{0.125}$ |
| Manadilli G. (1997) Για $5200 \leq Re \leq 10^8$, $0 \leq \varepsilon/D \leq 0.05$ | $\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{95}{Re^{0.983}} - \frac{96.82}{Re} \right)$ |
| Romeo E. et al (2001) Για $4000 \leq Re \leq 10^8$, $0 \leq \varepsilon/D \leq 0.05$ | $\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7065} - \frac{5.0272}{Re} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3.827} - \frac{4.567}{Re} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \log \left(\left(\frac{\varepsilon/D}{7.7918} \right)^{0.9924} + \left(\frac{5.3326}{208.815 + Re} \right)^{0.9345} \right) \right) \right)$ |

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.4 Απώλειες φορτίου

Για δεδομένες απώλειες φορτίου ανά μέτρο μήκους να υπολογισθεί η αύξηση της παροχής όταν διπλασιασθεί η διάμετρος ενός σωλήνα διαμέτρου 100 mm με τραχύτητα 1 mm για:

(α) ροή στρωτή

(β) για τυρβώδη ροή με αριθμό Reynolds 10^5 .

Λύση

Οι απώλειες υπολογίζονται από την σχέση

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{Q^2}{2gA^2} \rightarrow \frac{h_f}{L} = \frac{f}{D} \frac{Q^2}{2g \frac{\pi^2 D^4}{16}} \rightarrow \frac{h_f}{L} = \frac{fQ^2}{D^5} 0.0826$$

(α) Για στρωτή ροή έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{f_1 Q_1^2}{D_1^5} &= \frac{f_2 Q_2^2}{D_2^5} \rightarrow \left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)^2 = \frac{f_2}{f_1} \frac{D_1^5}{D_2^5} \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)^2 = \frac{64/\text{Re}}{64/\text{Re}} \frac{D_1^5}{2^5 D_1^5} \rightarrow \left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)^2 = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32} \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)^2 = 32 \rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} = 5.65\end{aligned}$$

(β) Για τυρβώδη ροή έχουμε

$$\left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)^2 = \frac{f_2}{f_1} \frac{1}{2^5}$$

$$\text{Για } \frac{\varepsilon}{D} = \frac{1}{100}, \quad \text{Re} = 10^5 \Rightarrow f_1 = 0.038 \quad (\text{Από διάγραμμα Moody} \\ \text{η σχέση Colebrook-White})$$

$$\text{Για } \frac{\varepsilon}{D} = \frac{1}{200}, \quad \text{Re} = 10^5 \Rightarrow f_2 = 0.031$$

επομένως

$$\left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)^2 = \frac{1.226}{2^5} \rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} = 5.1.$$

1.4.2 Τοπικές Απώλειες

Όπως συζητήθηκε στην προηγούμενη ενότητα η απώλεια φορτίου σε ευθύγραμμο σωλήνα μεγάλου μήκους μπορεί να υπολογιστεί με τη χρήση του συντελεστή τριβής που λαμβάνεται είτε από το διάγραμμα Moody ή από την εξίσωση Colebrook η από τις προσεγγιστικές σχέσεις του Πίνακα. Τα περισσότερα συστήματα σωληνώσεων, όμως, περιλαμβάνουν και διάφορα εξαρτήματα εκτός από σωλήνες. Αυτά τα πρόσθετα στοιχεία (βαλβίδες, καμπύλες, συνδέσεις, συναρμογές και άλλα), προσθέτουν στη συνολική απώλεια φορτίου του συστήματος. Αυτές οι απώλειες ονομάζονται γενικά **δευτερεύουσες ή τοπικές απώλειες**, ενώ το μεγαλύτερο μέρος των απωλειών φορτίου του συστήματος συνδέεται με την τριβή στα τοιχώματα των σωλήνων, και ονομάζονται **κύριες απώλειες**. Αυτό ισχύει σε πολλές περιπτώσεις και ειδικά για $L/D \gg 1000$. Σε άλλες περιπτώσεις

Ασκήσεις για λύση

- 1.1** Η κατανομή της ταχύτητας για τυρβώδη ροή σε σωλήνα μπορεί να εκφραστεί με τη σχέση

$$U = U_{\max} (y/R)^{1/m}$$

όπου U_{\max} = μέγιστη ταχύτητα, R = ακτίνα του σωλήνα και $m = 7$.

- (α) Εξηγήστε με συντομία με ποιες προϋποθέσεις ισχύει ο παραπάνω νόμος
- (β) Ποια είναι η σημασία του μήκους ανάμιξης l_m
- (γ) Βρείτε τη μεταβολή του μήκους ανάμιξης στη διατομή του σωλήνα
- (δ) Αν $R = 10 \text{ cm}$, $U_{\max} = 5 \text{ m/s}$ και η διατμητική τάση στο τοίχωμα είναι 0.02 N/m^2 υπολογίστε τις τιμές του λόγου l_m/R για $y/R = 0, 0.4$ και 0.8 για ροή νερού σε κανονικές συνθήκες θερμοκρασίας και πίεσης.

- 1.2** Για τυρβώδη ροή σε κυλινδρικό αγωγό ακτίνας R , η κατανομή των ταχυτήτων κοντά σε τοίχωμα είναι λογαριθμική, της μορφής

$$\frac{U}{U_*} = \frac{1}{\kappa} \ln y + C$$

όπου U η ταχύτητα σε απόσταση y από το τοίχωμα, U_* η ταχύτητα τριβής, $\kappa=0.4$ και C μια σταθερά.

- (α) Ποιες οι υποθέσεις για να ισχύει η παραπάνω λογαριθμική κατανομή;
- (β) Λαμβάνοντας υπόψη την κατανομή των διατμητικών τάσεων στη διατομή, βρείτε την μεταβολή του μήκους ανάμιξης l_m στη διατομή (σε συνάρτηση με την απόσταση y).
- (γ) Χαράξτε προσεγγιστικά το διάγραμμα $\frac{l_m}{R} = f\left(\frac{y}{R}\right)$. Τι συμπεραίνετε;

- 1.3** Σε κυλινδρικό αγωγό ακτίνας $R = 15 \text{ cm}$ η μεταβολή του πιεζομετρικού φορτίου ανά μέτρο αγωγού είναι $3 \times 10^{-3} \text{ m/m}$. Η ροή του νερού είναι τυρβώδης και η κατανομή της ταχύτητας μπορεί να υπολογισθεί κατά προσέγγιση από τον τύπο

$$\frac{U}{U_*} = 8.74 \left(\frac{y}{R} \right)^{1/7}$$

όπου y = απόσταση από το τοίχωμα, U_* = ταχύτητα τριβής.

Εφαρμόζοντας την θεωρία Boussinesq υπολογίστε τον συντελεστή ιξώδους της τύρβης $\mu_{\text{τυρ}}$ σε απόσταση $y = R/2$ από το τοίχωμα.

- 1.4** Σε έναν οριζόντιο, λείο σωλήνα, διαμέτρου 20 cm, η παροχή νερού είναι 7.5 l/s.

Έξω από την στρωτή υποστοιβάδα, η κατανομή της ταχύτητας είναι λογαριθμική και η μεταβολή της ταχύτητας dU/dy δίνεται από την σχέση

$$\frac{dU}{dy} = 2.5 \times U_* / y$$

όπου U_* = ταχύτητα τριβής, y = απόσταση από το τοίχωμα.

Υπολογίστε τον λόγο $\mu_{\text{τυρ}}/\mu$ σε απόσταση 2.5 cm από το τοίχωμα.

- 1.5** Για λεία, τυρβώδη ροή σε οριζόντιο σωλήνα προσδιορίστε τον λόγο $\mu_{\text{τυρ}}/\mu$ σαν συνάρτηση του y/R (y = απόσταση από το τοίχωμα, R = ακτίνα σωλήνα), αριθμού Reynolds και συντελεστή τριβής. Υπολογίστε την μέγιστη τιμή του παραπάνω λόγου για αριθμούς Reynolds 10^5 , 10^6 και 10^7 .

- 1.6** Νερό θερμοκρασίας 20°C ρέει σε ένα οριζόντιο σωλήνα διαμέτρου 120 mm.

- (α) Αν η πτώση πίεσης στο σωλήνα είναι 2 kPa ανά 10 m σωλήνα ποια είναι η μέγιστη επιτρεπόμενη τραχύτητα του σωλήνα για να θεωρηθεί λείος
- (β) Υπολογίστε τη ταχύτητα ροής σε απόσταση 20 mm από το τοίχωμα στη περίπτωση που
 - (1) ο σωλήνας είναι λείος και
 - (2) η τραχύτητα του σωλήνα είναι 5 φορές μεγαλύτερη από αυτή του (α).

Σε ποια περίπτωση η ταχύτητα είναι μεγαλύτερη;

- 1.7** Για τυρβώδη ροή σε σωλήνα ακτίνας R η κατανομή της ταχύτητας μπορεί να εκφραστεί προσεγγιστικά από την σχέση $U/U_{\text{max}} = (y/R)^{1/m}$ όπου U = τοπική ταχύτητα σε απόσταση y από το τοίχωμα, U_{max} = μέγιστη ταχύτητα στη διατομή, m = σταθερά που παίρνει τη τιμή μεταξύ 7 και 8.

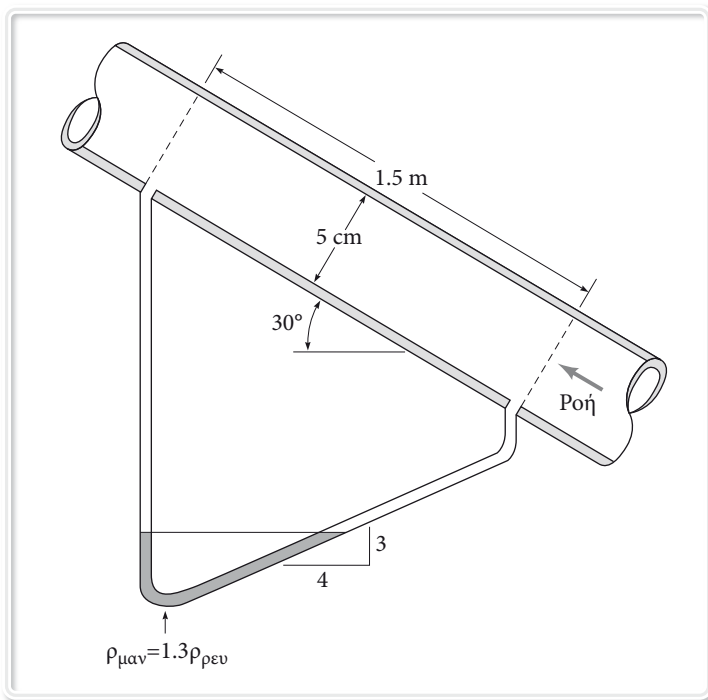
- (α) Ποιόν άλλο νόμο γνωρίζετε για τη κατανομή της ταχύτητας
- (β) Υπολογίστε τη μέση ταχύτητας ροής
- (γ) Βρείτε τη θέση για την οποία η τοπική ταχύτητα είναι ίση με τη μέση ταχύτητα

1.8 Σε τυρβώδη ροή σε λείους σωλήνες μια εμπειρική έκφραση του συντελεστή τριβής f είναι $f = 0.316/Re^{1/4}$ για $Re < 10^5$.

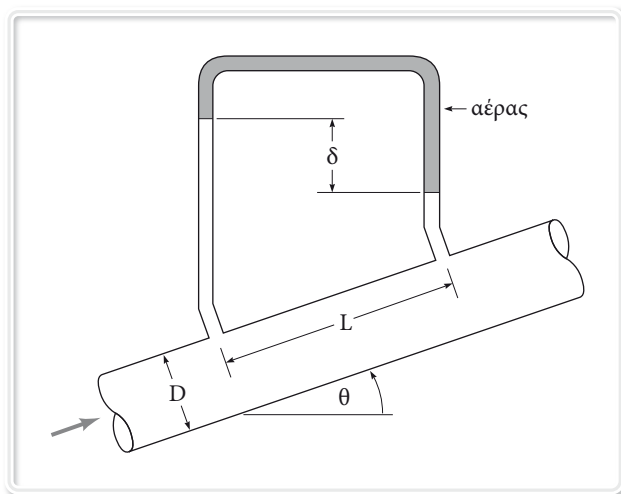
- (α) Δείξτε ότι η πτώση πίεσης είναι ανάλογη με το $U^{7/4}$ (U μέση ταχύτητα ροής)
- (β) Για δεδομένη παροχή πως μεταβάλλεται η πτώση πίεσης με τη διάμετρο D του σωλήνα;

1.9 Ρευστό με δυναμικό ιξώδες 4.8×10^{-3} Pa.s και πυκνότητα 800 kg/m^3 ρέει στο σωλήνα του σχήματος με μέση ταχύτητα 0.15 m/s . Η τραχύτητα του σωλήνα είναι 0.02 cm .

- (α) Προσδιορίστε την μετακίνηση του υγρού στο μανόμετρο και την ένδειξη του μανομέτρου
- (β) Υπολογίστε τη ταχύτητα τριβής και τη τοπική ταχύτητα σε απόσταση 2 cm από το τοίχωμα του σωλήνα
- (γ) Όταν η μέση ταχύτητα γίνει 0.45 m/s υπολογίστε τα αντίστοιχα μεγέθη του (β)



- 1.10** Λάδι πυκνότητας 918 kg/m^3 και ιξώδους $4.8 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ ρέει στο σωλήνα του σχήματος. Υπολογίστε τη διατμητική τάση στο τοίχωμα και τη μέγιστη ταχύτητα στο σωλήνα για $L = 0.8 \text{ m}$, $D = 30 \text{ mm}$, $\theta = 30^\circ$ και $\delta = 25 \text{ mm}$.



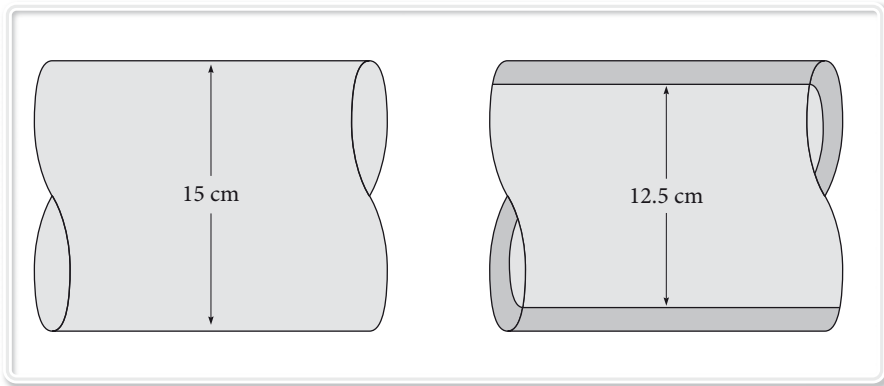
- 1.11** Σε έναν σωλήνα με τραχύτητα ϵ ρέει αέρας. Σε απόσταση 0.3 m από το τοίχωμα η ταχύτητα μετρήθηκε ίση με 5.8 m/s ενώ σε απόσταση 1.5 m από το τοίχωμα η ταχύτητα μετρήθηκε ίση με 6.1 m/s . Υπολογίστε το μέγιστο ύψος τραχύτητας ϵ για το οποίο ο σωλήνας χαρακτηρίζεται λείος και η ροή λεία, τυρβώδης. Υπολογίστε το πάχος της στρωτής υποστοιβάδας και την ταχύτητα σε απόσταση $y = 2.5 \text{ mm}$ από το τοίχωμα.

- 1.12** Νερό θερμοκρασίας 5°C ρέει σε έναν οριζόντιο σωλήνα διαμέτρου 120 mm .

- Αν η πτώση πίεσης στο σωλήνα είναι 2 kPa ανά 10 m σωλήνα ποια είναι η μέγιστη επιτρεπόμενη τραχύτητα του σωλήνα για να θεωρηθεί λείος;
- Υπολογίστε την ταχύτητα και την διατμητική τάση σε απόσταση 10 mm από το τοίχωμα στη περίπτωση που η ροή είναι λεία, τυρβώδης
- Υπολογίστε την ταχύτητα και την διατμητική τάση σε απόσταση 1 mm από το τοίχωμα στη περίπτωση που η τραχύτητα του σωλήνα είναι 0.2 mm .

1.13 Νερό ρέει σε έναν παλιό σωλήνα διαμέτρου 15 cm και σχετικής τραχύτητας 0.01 με ρυθμό $0.06 \text{ m}^3/\text{s}$. Προτείνεται η επικάλυψη του εσωτερικού του σωλήνα με λείο, πλαστικό που έχει σαν αποτέλεσμα την μείωση της διαμέτρου σε 12.5 cm.

Είναι δυνατόν ο νέος σωλήνας να έχει την ίδια παροχευτική ικανότητα ($0.06 \text{ m}^3/\text{s}$) με χαμηλότερη πτώση πίεσης από αυτή του παλαιού σωλήνα; Δικαιολογήστε την απάντησή σας με κατάλληλους υπολογισμούς.



1.14 Για τραχεία, τυρβώδη ροή νερού, θερμοκρασίας 20°C , σε οριζόντιο σωλήνα διαμέτρου 50 cm η ταχύτητα σε απόσταση 5 cm από το τοίχωμα είναι 4.4 m/s και η αντίστοιχη κλίση ταχύτητας $\partial \bar{u} / \partial y$ είναι ίση με $5.5 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$. Η κλίση της ταχύτητας δίνεται από την σχέση

$$\partial \bar{u} / \partial y = 2.5 u_* \varepsilon / y \quad (u_* = \text{ταχύτητα τριβής}, \varepsilon = \text{ύψος τραχύτητας}).$$

Προσδιορίστε:

- (α) την παροχή,
- (β) το ύψος της τραχύτητας,
- (γ) την ταχύτητα τριβής,
- (δ) την πτώση πίεσης και
- (ε) τον συντελεστή τριβής.

1.15 Ένας λείος κυλινδρικός αγωγός, διαμέτρου D , διαρρέεται από ένα ρευστό, κινηματικού ιξώδους ν , με μία μέση ταχύτητα U_m .

Εάν ο αριθμός Re της μέσης ροής είναι ίσος με 80000, βρείτε την αριθμητική τιμή του λόγου $\frac{\delta}{D}$, όπου δ είναι το πάχος της στρωτής υποστοιβάδας.

1.16 Ρευστό ειδικού βάρους 8900 N/m^3 και ιξώδους $0.1 \text{ N}\cdot\text{s/m}^2$ ρέει σε έναν οριζόντιο σωλήνα διαμέτρου 23 mm όπως φαίνεται στο σχήμα.

- (α) Προσδιορίστε το εύρος των τιμών για την ένδειξη του μανομέτρου h όταν η ροή είναι στρωτή.
- (β) Όταν η ροή είναι τυρβώδης και η διατμητική τάση στο τοίχωμα του σωλήνα είναι 500 N/m^2 υπολογίστε την ένδειξη του μανομέτρου.

