ΙΩΑΝΝΗΣ ΣΧΟΙΝΑΣ

Καθηγητής Δημοκρίτειου
Πανεπιστημίου Θράκης

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΚΑΙ ΕΙΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το όριο συνάρτησης, η θεμελιώδης αυτή έννοια που άρχισε να διαμορφώνεται από την εποχή του Αρχιμήδη, είναι η κεντρική έννοια γύρω από την οποία αναπτύσσεται ο κλάδος της Μαθηματικής Ανάλυσης. Είναι γνωστές, βέβαια, στους διδάσκοντες οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην αφομοίωσή της σε ικανοποιητικό βαθμό ώστε να κατανοήσουν τις βασικές έννοιες του Διαφορικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού και των Διαφορικών Εξισώσεων. Οι Εξισώσεις Διαφορών, με τις οποίες επιτυγχάνονται αποτελέσματα ανάλογα εκείνων των Διαφορικών Εξισώσεων, έχουν αυτό το μεγάλο πλεονέκτημα ότι η παρουσίασή τους δεν προϋποθέτει τη γνώση της δυσνόητης έννοιας του ορίου. Οι Εξισώσεις Διαφορών αναπτύσσονται με απλό και κατανοητό τρόπο και δεν προαπαιτούν γνώσεις ειδικών μαθηματικών εννοιών, εκτός, βέβαια των στοιχειωδών. Για το λόγο αυτό σήμερα πολλοί μαθηματικοί πιστεύουν ότι η διδασκαλία τους μπορεί να αρχίσει ακόμη και από τη Μέση Εκπαίδευση.

Επισημαίνεται ιδιαίτερα ότι η σπουδαιότητα των Εξισώσεων Διαφορών οφείλεται κυρίως στη ραγδαία εξέλιξη των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών, οι οποίοι χρησιμοποιούν μαθηματικά μοντέλα με διακριτές αποκλειστικά μεταβλητές και όχι συνεχείς.

Ας σημειωθεί, επίσης, ότι η ελληνική αλλά και η ξένη βιβλιογραφία υστερεί σε ολοκληρωμένη παρουσίαση θεμάτων των Εξισώσεων Διαφορών. Το παρόν βιβλίο αναμένεται να καλύψει σημαντικό μέρος του κενού αυτού.

Το βιβλίο χωρίζεται σε δύο μέρη. Το πρώτο και βασικότερο μέρος περιέχει τη θεωρία των Εξισώσεων Διαφορών και το δεύτερο τις Ειδικές Συναρτήσεις για την εξαγωγή των οποίων χρησιμοποιούνται Εξισώσεις Διαφορών. Στο τέλος κάθε αυτοτελούς ενότητας υπάρχει περίληψη της θεωρίας για επανάληψη και εμπέδωση των εννοιών που αναφέρθηκαν και σημαντικός αριθμός άλυτων ασκήσεων με τις απαντήσεις τους.

Κατά τη διάρθρωση της ύλης δόθηκε έμφαση όχι στις λεπτομερείς θεωρητικές αποδείξεις, αλλά στη λύση πολλών επιλεγμένων αντιπροσωπευτικών παραδειγμάτων και εφαρμογών, όπως, για παράδειγμα, στον Αυτόματο Έλεγχο και τη Χαοτική Θεωρία των Διακριτών Συστημάτων.

Θεσσαλονίκη, Μάϊος 1990 — Ι. ΣΧΟΙΝΑΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ
ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ
ΕΙΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Κεφάλαιο I. ΕΙΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ
ΕΙΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Κεφάλαιο I. ΕΙΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Κεφάλαιο I

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

1. Εισαγωγή

Τα τελευταία χρόνια με την τεράστια ανάπτυξη των ηλεκτρικών υπολογιστών όλο και περισσότερο γίνεται επιτακτική η ανάγκη μελέτης μαθηματικών μοντέλων με διακριτή μεταβλητή. Τέτοια μοντέλα χρησιμοποιούνται, κυρίως, στην Αριθμητική Ανάλυση όπου οι συνεχείς συναρτήσεις προσεγγίζονται με συναρτήσεις διακριτής μεταβλητής.

Είναι γνωστό, επίσης, ότι πολλά προβλήματα που προκύπτουν από τη Φυσική, τη Θεωρία Πιθανοτήτων, τη Γεωμετρία, τη Δυναμική, τη Θεωρία Αυτόματου Ελέγχου, τη Θεωρία Τηλεπικοινωνιακών Συστημάτων κ.λπ., διέπονται από Εξισώσεις Διαφορών.

Στην παρούσα εξέταση των **Εξισώσεων Διαφορών**, θα περιοριστούμε μόνο στις συνηθισμένες εξισώσεις διαφορών δηλαδή στις εξισώσεις διαφορών μιας ανεξάρτητης μεταβλητής. Η ανεξάρτητη μεταβλητή μπορεί να είναι διακριτή (γενικώς ακέραιων τιμών) ή συνεχής. Στην τελευταία περίπτωση οι εξισώσεις διαφορών θα καλούνται **συναρτησιακές εξισώσεις διαφορών**. Πιο χρήσιμη όπως φαίνεται να είναι η πρώτη περίπτωση όπου προκύπτουν διακριτές μεταβολές της άγνωστης συνάρτησης. Το γεγονός αυτό είναι σε αντίθεση με τις διαφορικές εξισώσεις στις οποίες υποθέτονται στιγμιαίες μεταβολές ή παράγωγοι των άγνωστων συναρτήσεων. Η βασική αυτή αντίθεση όμως δεν εμποδίζει ώστε η θεωρία των εξισώσεων διαφορών να αναπτύσσεται, κατά μεγάλο ποσοστό, ακριβώς παρόμοια όπως στις διαφορικές εξισώσεις.

Μια ακόμη παρατήρηση αξίζει να αναφερθεί. Τις δεκαετίες του εβδομήντα και ογδόντα αναπτύχθηκε αρκετά διεξοδικά η θεωρία των Διαφορίσιμων Δυναμικών Συστημάτων, δηλαδή αυτών που προέρχονται από διαφορικές εξισώσεις με σκοπό τη μελέτη της ευστάθειάς τους και της ταξινόμησής τους. Από τη μελέτη αυτή έγινε γνωστή η συμπεριφορά των προηγούμενων συστημάτων που σε μερικές περιπτώσεις είναι πολύ **πολύπλοκη** ή **χαοτική** όπως ονομάστηκε. Η επαλήθευση αυτής της ανακάλυψης έγινε με ηλεκτρονικούς υπολογιστές σε διακριτά συστήματα πράγμα που απέδειξε ότι επιβάλλεται να μελετηθούν πιο διεξοδικά οι εξισώσεις διαφορών.

2. Ορισμοί. Ύπαρξη

Έστω η αμφίπλευρη ακολουθία πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών

$$\ldots, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots, y_{n+1}, \ldots \tag{1}$$

και ας υποτεθεί ότι υπάρχει μια σχέση μεταξύ των όρων της

$$f(y_{n+r}, \ldots, y_{n+r-1}, \ldots, y_{n-1}, y_n) = 0 . \tag{2}$$

Κάθε εξίσωση της μορφής (2) λέγεται **εξίσωση διαφορών**, συντόμως ΕΔ, και η ακολουθία (1) λέγεται **λύση** της εξίσωσης διαφορών (2). **Τάξη** της εξίσωσης διαφορών (2) λέγεται η διαφορά μεταξύ του μεγαλύτερου και μικρότερου δείκτη των y. Π.χ. ο βαθμός της (2) είναι r.

Πρώτη διαφορά της ακολουθία (1) είναι η

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n , \tag{3}$$

όπου Δ λέγεται **τελεστής διαφοράς**. Ένας άλλος χρήσιμος τελεστής είναι ο **τελεστής της διαφοράς προς τα εμπρός**

$$Ey_n = y_{n+1} . \tag{4}$$

Από την (3) λαμβάνουμε

$$(1+\Delta)\, y_n = y_{n+1} ,$$

οπότε

$$E = 1+\Delta .$$

Με όμοιο τρόπο ορίζεται από την (3) η **δεύτερη διαφορά**

$$\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n) = \Delta(y_{n+1} - y_n) = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n$$

και επαγωγικά η m-**στή διαφορά**

$$\Delta^m y_n = \Delta(\Delta^{m-1} y_n) .$$

Ομοίως από την (4)

$$E^2 y_n = E(E_n) = Ey_{n+1} = y_{n+2}$$
$$E^m y_n = E(E^{m-1} y_n) = y_{n+m} .$$

Θέτοντας

$$\Delta z_n = y_n \tag{5}$$

μπορούμε να ορίσουμε τον **αντίστροφο τελεστή** Δ^{-1} ο οποίος είναι τέτοιος ώστε $\Delta\Delta^{-1} = 1$. Επομένως η σχέση (5) γράφεται

$$z_n = \Delta^{-1} y_n .$$

Επιπλέον,

$$z_{n+1}-z_n = y_n$$
$$z_n-z_{n-1} = y_{n-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$z_1-z_0 = y_0$$

και προσθέτοντας τις ισότητες αυτές κατά μέλη

$$z_{n+1}-z_0 = y_0+y_1+ \dots +y_n \, .$$

ή

$$z_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} y_i+z_0 \, . \tag{6}$$

Συνεπώς, αν $\Delta z_n=y_n$, τότε από την (6)

$$\boxed{z_n = \sum_{i=0}^{n-1} y_i+z_0} \tag{7}$$

Η τελευταία σχέση είναι η αντίστοιχη της γνωστής σχέσης του Διαφορικού Λογισμού

$$D^{-1}f(x) = \int f(x)\,dx+c \, .$$

Έστω, τώρα, οι όροι της ακολουθίας (1) συνδέονται ως εξής:

$$y_{n+2} = y_{n+1}+y_n \, , \quad n\geq 0 \, . \tag{8}$$

Η (8) είναι μια εξίσωση διαφορών 2ης τάξης. Χρησιμοποιώντας τους τελεστές Ε και Δ η (8) γράφεται

$$(E^2-E-1)\,y_n = 0 \quad ή \quad (\Delta^2+\Delta-1)\,y_n = 0, \quad n\geq 0 \, .$$

Συνήθως, όπως και στις διαφορικές εξισώσεις, ζητούμε μερικές λύσεις που αντιστοιχούν σε δοσμένες αρχικές τιμές της λύσης. Π.χ αν για $n=0$, $n=1$ δίνεται $y_0=1$ και $y_1=1$, τότε εύκολα επαγωγικά προκύπτει ότι η ΕΔ (8) έχει λύση την ακολουθία

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

Μια εξίσωση διαφορών λέγεται **γραμμική εξίσωσης διαφορών** r **τάξης** αν είναι της μορφής

$$\alpha_r(n)\,y_{n+r}+\alpha_{r-1}(n)\,y_{n+r-1}+ \dots +\alpha_1(n)\,y_{n+1}+\alpha_0(n)\,y_n = f(n) \, . \tag{9}$$

όπου το n παίρνει τιμές σε ορισμένο πεπερασμένο ή άπειρο διάστημα S ακέραιων αριθμών.

Παρατήρηση. Πολλές φορές θα γράφουμε στα επόμενα $y(n)$ αντί y_n.

Ισχύει η επόμενη βασική πρόταση ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1. **Αν στην γραμμική εξίσωση διαφορών (9), ισχύει** $\alpha_r(n) \neq 0$, **για κάθε** $n \in S$, **τότε για κάθε** r **δοθείσες τιμές της** y_n **σε** r **διαφορετικές τιμές του** n **υπάρχει μοναδική λύση της (9).**

Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή, αρκεί η ΕΔ (9) να γραφεί ως εξής

$$y_{n+r} = \frac{1}{\alpha_r(n)} \, [f_n - \alpha_{r-1}(n)\, y_{n+r-1} - \ldots - \alpha_0(n)\, y_n] \, .$$

Θα δώσουμε ένα παράδειγμα για να διευκρινίσουμε την προηγούμενη πρόταση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ **1**

Να δειχθεί ότι η ΕΔ

$$n y_{n+1} - y_n = 0, \quad n \geq 0 \, , \tag{10}$$

δεν έχει καμία λύση αν $y_0 \neq 0$. Έχει άπειρες λύσεις για $y_0=0$ και μοναδική λύση αν δοθεί η y_1 και ζητήσουμε τη λύση στο σύνολο $S = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Απόδειξη. Για να βρούμε λύση της ΕΔ (10) πρέπει να λύσουμε τη πρωτοβάθμια εξίσωση (10) ως προς y που ασφαλώς δεν έχει λύση ως προς y_1, για $y_0 \neq 0$. Έχει άπειρες λύσεις, για $y_0=0$. Για $n \in S$, παρατηρούμε ότι ΕΔ (10) έχει μοναδική λύση αφού, σύμφωνα με την Πρόταση 1, $\alpha_r(n)=n \neq 0$, $n \in S$.

3. Γραμμικές εξισώσεις διαφορών πρώτης τάξης

Οι γραμμικές εξισώσεις διαφορών πρώτης τάξης έχουν τη μορφή

$$y_{n+1} = p(n)\, y_n + q(n) \, . \tag{1}$$

Για την εύρεση της γενικής λύσης της (1), πολλαπλασιάζουμε αμφότερα τα μέλη της επί $\left[\prod_{j=1}^{n} p(j)\right]^{-1}$ και λαμβάνουμε

$$y_{n+1} \Big/ \prod_{j=1}^{n} p(j) - y_n \Big/ \prod_{j=1}^{n-1} p(j) = q(n) \Big/ \prod_{j=1}^{n} p(j)$$

ή

$$\Delta\left[y_n\Big/\prod_{j=1}^{n-1} p(j)\right] = q(n)\Big/\prod_{j=1}^{n} p(j)\,. \tag{2}$$

Θέτοντας στη σχέση (2) n=2, 3, ..., n−1 και προσθέτοντας κατά μέλη τις ισότητες που θα προκύψουν, έχουμε

$$y_n\Big/\prod_{j=1}^{n-1} p(j) = y_1 + \sum_{\kappa=1}^{n-1}\Big(1\Big/\prod_{j=1}^{\kappa} p(j)\Big)\,q(\kappa)$$

ή

$$\boxed{y_n = \Big(\prod_{j=1}^{n-1} p(s)\Big)\,y_1 + \sum_{\kappa=1}^{n-1}\Big(\prod_{j=\kappa+1}^{n-1} p(j)\Big)\,q(\kappa)} \tag{3}$$

Στην περίπτωση που αρχίζουμε από το $y(n_0)$, δηλαδή για $n=n_0$, ο προηγούμενος τύπος γίνεται

$$\boxed{y_n = \Big(\prod_{j=n_0}^{n-1} p(j)\Big)\,y(n_0) + \sum_{\kappa=n_0}^{n-1}\Big(\prod_{j=\kappa+1}^{n-1} p(j)\Big)\,q(\kappa),} \tag{4}$$

$$n=n_0,\ n_0+1,\ \ldots$$

Όταν $q(\kappa)=0$, $\kappa=0, 1, 2, \ldots$, η εξίσωση (1) λέγεται **ομογενής γραμμική εξίσωση διαφορών** 1ης τάξης και η γενική της λύση είναι

$$\boxed{y_n = \Big(\prod_{j=n_0}^{n-1} p(j)\Big)\,y(n_0)\,.} \tag{5}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να λυθεί η ΕΔ

$$y_{n+1} = \frac{n}{n+1}\,y_n + n\,, \quad n\geq 1 \tag{6}$$

Λύση. Είναι καταρχή γνωστό ότι

$$\sum_{\kappa=1}^{n} \kappa = \frac{n\,(n+1)}{2} \qquad \sum_{\kappa=1}^{n} \kappa^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}\,. \tag{7}$$

Αφού $p(j) = \dfrac{j}{j+1}$, έχουμε

$$\prod_{j=1}^{n-1} p(j) = \frac{1}{2}\;\frac{2}{3}\;\ldots\;\frac{n-1}{n} \equiv \frac{1}{n}\,. \tag{8}$$

$$\prod_{j=\kappa+1}^{n-1} p(j) = \frac{\kappa+1}{\kappa+2}\ \frac{\kappa+2}{\kappa+3} \ \cdots\ \frac{n-1}{n} = \frac{\kappa+1}{n}\ ,$$

κι' επειδή $q(\kappa)=\kappa$, έχουμε, από τις (7),

$$\sum_{\kappa=1}^{n-1} \Big(\prod_{j=\kappa+1}^{n-1} p(j)\Big)\, q(\kappa) = \sum_{\kappa=1}^{n-1} \frac{(\kappa+1)}{n}\kappa = \frac{1}{n}\sum_{\kappa=1}^{n-1} \kappa(\kappa+1) =$$

$$= \frac{1}{n}\Big(\sum_{\kappa=1}^{n-1}\kappa^2 + \sum_{\kappa=1}^{n-1}\kappa\Big) = \frac{1}{n}\left[\frac{(n-1)\,n(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2}\right] = \frac{1}{3}\,(n^2-1) \qquad (9)$$

Σύμφωνα λοιπόν με τον τύπο (3), από τις (8) και (9), βρίσκουμε τελικά

$$y_n = \frac{1}{n}\,y_1 + \frac{1}{3}\,(n^2-1), \qquad n \geq 1\ .$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Να λυθεί η ΕΔ

$$y_{n+1} = \alpha y_n + \beta\ , \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \qquad (10)$$

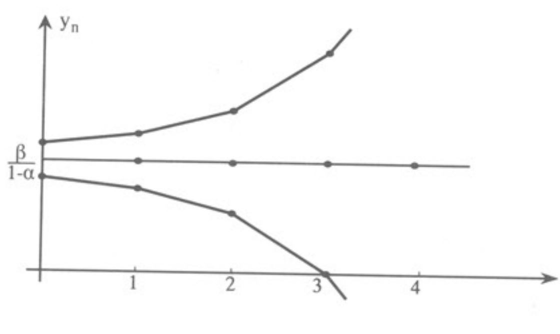
και να μελετηθεί η συμπεριφορά των λύσεων αυτής για $\alpha>1$, $0<\alpha<1$, $-1<\alpha<0$, $\alpha<-1$, $\alpha=-1$, $\alpha=1$.

Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο (4), για $n_0=0$, η ΕΔ (10) έχει λύση την

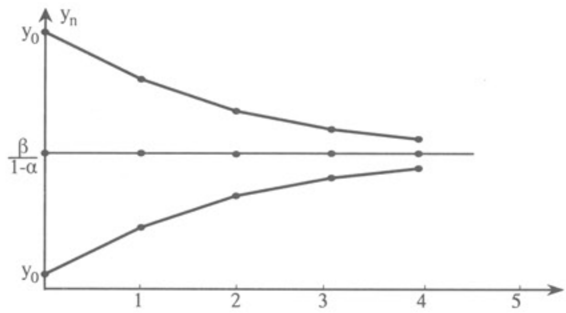
$$y_n = \begin{cases} \alpha^n y_0 + \beta\,\dfrac{1-\alpha^n}{1-\alpha}\ , & \alpha \neq 1 \\ y_0 + n\beta\ , & \alpha = -1\ . \end{cases}$$

Αν $y_0 = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$, τότε $y_0=y_1=\ldots=y_n=\ldots$

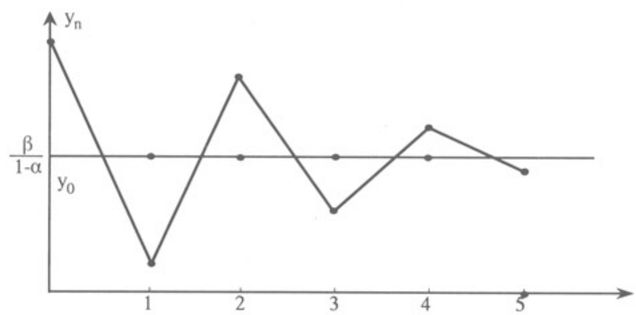
(i) $\alpha>1$, $y_0 \neq \dfrac{\beta}{1-\alpha}$. Οι λύσεις τείνουν στο $+\infty$ ή $-\infty$ όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



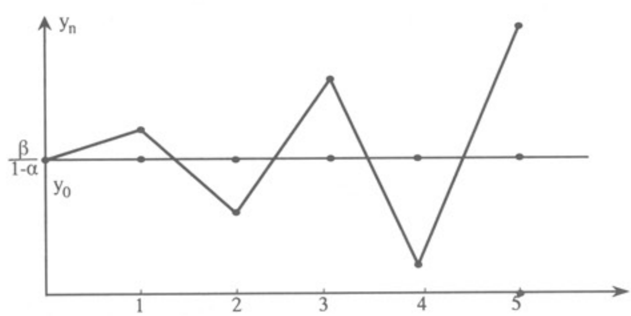
(ii) $0<\alpha<1$. Οι λύσεις $y_n \to \dfrac{\beta}{1-\alpha}$, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



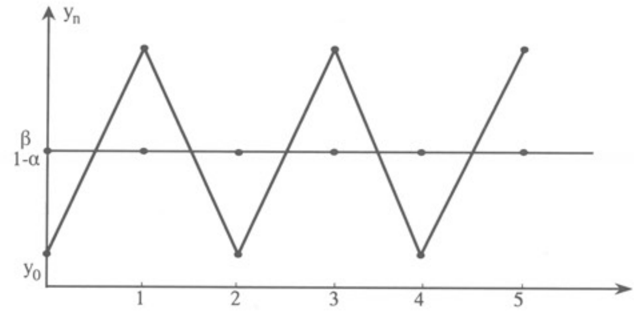
(iii) $-1<\alpha<0$. Οι λύσεις y_n παρουσιάζουν φθίνουσα ταλαντούμενη συμπεριφορά και $y_n \to \dfrac{\beta}{1-\alpha}$, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



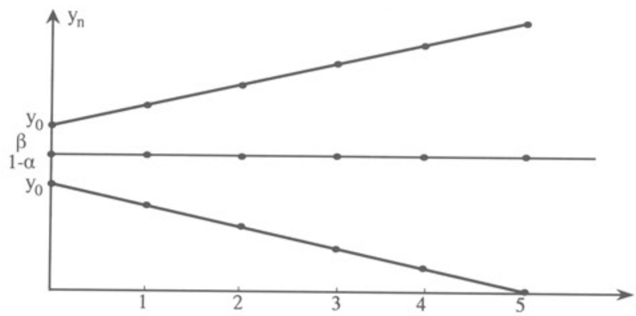
(iv) $\alpha<-1$. Οι λύσεις παρουσιάζουν αύξουσα ταλαντούμενη συμπεριφορά, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



(v) $\alpha=-1$. Οι λύσεις παρουσιάζουν περιοδική ταλαντούμενη συμπεριφορά όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



(vi) $\alpha=1$. Οι λύσεις παρουσιάζουν γραμμική συμπεριφορά, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



4. Εφαρμογές

Οι γραμμικές εξισώσεις διαφορών πρώτης τάξης έχουν εφαρμογές σε πολλούς κλάδους. Ενδεικτικά παρακάτω θα δώσουμε μερικές εφαρμογές στη Γεωμετρία, στον Ανατοκισμό και την Πληθυσμιακή Βιολογία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Άγουμε 10 ευθείες γραμμές πάνω σε ένα επίπεδο έτσι ώστε να μην υπάρχουν μεταξύ αυτών δύο παράλληλες και να μην υπάρχουν τρεις που να περνούν από το ίδιο σημείο. Σε πόσα τμήματα διαιρείται το επίπεδο από τις 10 ευθείες

Λύση. Έστω y_n ο αριθμός των τμημάτων του επιπέδου που σχηματί-

ζονται άγοντας τις n ευθείες, όπως ειπώθηκε στην εκφώνιση. Τότε, άγοντας την (n+1)-ευθεία αυτή θα τμήσει καθεμιά από τις n προηγούμενες ευθείες σε ένα μόνο σημείο και έτσι θα σχηματιστούν άλλα (n+1) τμήματα στο επίπεδο. Συνεπώς,

$$y_{n+1} = y_n+(n+1)\,,$$

ή, σύμφωνα με τον τύπο (4),

$$y_n = 1+\sum_{i=0}^{n-1}(i+1) = 1+\frac{1}{2}\,n(n+1) = \frac{1}{2}\,(n^2+n+2)\,.$$

Επομένως, οι 10 ευθείες θα διαιρέσουν σε

$$y_{10} = \frac{1}{2}\,(10^2+10+2) = 56$$

τμήματα το επίπεδο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Έστω αρχικό κεφάλαιο K_0 δρχ., ανατοκίζεται με σταθερό ετήσιο επιτόκιο ε. Να δειχθεί ότι το κεφάλαιο με τους τόκους ύστερα από n έτη δίνεται από τον τύπο

$$K_n = K_0(1+\varepsilon)^n \tag{1}$$

Απόδειξη. Αν K_n είναι το κεφάλαιο με τους τόκους στο n-στό έτος, τότε στο επόμενο (n+1)-στό έτος το κεφάλαιο με τους τόκους θα γίνει

$$K_{n+1} = K_n+\varepsilon K_n \quad \text{ή} \quad K_{n+1} = (1+\varepsilon)\,K_n\,. \tag{2}$$

Η εξίσωση διαφορών (2) είναι απλής μορφής και δίνει λύση την (1).

Αν π.χ. $K_0=1$ εκατομμύριο δρχ. και $\varepsilon=20\%$ τότε σε 20 έτη το κεφάλαιο με τους τόκους θα γίνει

$$K_{20} = 10^6\,(1+0\cdot2)^{20} = 10^6\,(1\cdot2)^{20} = 38\cdot337\cdot600 \text{ δρχ.}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Έστω ότι μελετούμε μια οικογένεια εντόμων η οποία εξαφανίζεται προτού η επόμενη να εκκολαφθεί. Επίσης υποθέτουμε ότι η αύξηση από τη μια γενιά στην άλλη είναι ανάλογη του προηγούμενου πληθυσμού. Να βρεθεί ο πληθυσμός στο n-στο έτος.

Λύση. Έστω N_n ο πληθυσμός στο n-στο έτος και N_{n+1} στο (n+1)-στο έτος. Τότε, σύμφωνα με την υπόθεση,

$$N_{n+1} - N_n = \alpha N_n \ , \tag{3}$$

όπου α είναι η σταθερή αναλογίας. Η (3), γράφεται

$$N_{n+1} = (1+\alpha)\, N_n \, . \tag{4}$$

Η ΕΔ (4) δίνει, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα,

$$N_n = (1+\alpha)^n\, N_0 \ ,$$

όπου N_0 είναι ο πληθυσμός της αρχικής γενιάς.

5. Γραμμικές εξισώσεις διαφορών ανώτερης τάξης

Για να βρούμε τη λύση γραμμικής εξίσωσης διαφορών ανώτερης της πρώτης τάξης, πρέπει πρώτα να ορίσουμε την έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας μεταξύ ακολουθιών. Ας σημειωθεί ότι ο ορισμός είναι ο ίδιος με τον αντίστοιχο για συναρτήσεις.

Στη συνέχεια θα εργαστούμε με εξισώσεις διαφορών δεύτερης τάξης μα ότι πούμε θα ισχύει και για εξισώσεις διαφορών ανώτερης της δεύτερης τάξης.

Ορισμός 1. Δύο ακολουθίες (x_n), (y_n) λέγονται **γραμμικώς εξαρτημένες** αν υπάρχουν σταθερές c_1 και c_2 όχι και οι δύο μηδέν, τέτοιες ώστε

$$c_1 x_n + c_2 y_n = 0 \ , \quad n = 0, 1, 2, \ldots \, . \tag{1}$$

Στην αντίθετη περίπτωση οι ακολουθίες x_n και y_n λέγονται **γραμμικώς ανεξάρτητες**.

Π.χ. οι ακολουθίες με γενικούς όρους

$$x_n = 3n + \frac{12}{5} \quad \text{και} \quad y_n = 5n+4, \ \ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

είναι γραμμικώς εξαρτημένες αφού η σχέση (1) πληρούται με $c_1=5$ και $c_2=-3$. Εξάλλου οι ακολουθίες με γενικούς όρους

$$x_n = 2^n \quad \text{και} \quad y_n = 3^n \ , \ \ n=0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Πράγματι, διότι αλλιώτικα θα ήταν γραμμικώς εξαρτημένες, που σημαίνει ότι θα υπάρχουν δύο σταθερές c_1 και c_2 όχι και οι δύο μηδέν, τέτοιες ώστε

$$c_1 2^n + c_2 3^n = 0 \ , \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Θέτοντας $n=0$ και $n=1$ στην (4) βρίσκουμε