

Τρύφων Ι. Δάρας  
Λέκτορας  
Πολυτεχνείο Κρήτης

Παναγιώτης Θ. Σύψας  
Καθηγητής  
Πανεπιστήμιο Πατρών

# ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ

ΘΕΩΡΙΑ & ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ



ΕΚΔΟΣΕΙΣ  
**ΖΗΤΗ**  
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

*Στην Ξένια και στην Μαίρη*

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

---

Πολλές φορές θέλουμε να μελετήσουμε φαινόμενα ή συστήματα τα οποία εξελίσσονται, κυρίως αναφορικά με τον χρόνο, και των οποίων η μελλοντική συμπεριφορά δεν είναι τελείως καθορισμένη (προβλέψιμη) αλλά χαρακτηρίζεται από ένα είδος «τυχειότητας». Τέτοιου είδους συστήματα συναντά κανείς γύρω του στην Φυσική, στην Βιολογία, στην Οικονομία, στις Κοινωνικές Επιστήμες, στην Αστρονομία κ.α. Με τον όρο «Στοχαστικές Μέθοδοι» εννοούμε όλες εκείνες τις Μαθηματικές μεθόδους, με την βοήθειά των οποίων μελετάμε συστήματα, που η λειτουργία τους επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό από τον παράγοντα τύχη. Τα συστήματα αυτά καλούνται Στοχαστικά και η Θεωρία των Πιθανοτήτων φαίνεται να είναι το κατάλληλο πλαίσιο για την μελέτη τους. Πράγματι, τα Μαθηματικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται τόσο για την περιγραφή όσο και για την μελέτη των Στοχαστικών αυτών συστημάτων κατασκευάζονται με την βοήθεια οικογενειών τυχαίων μεταβλητών, τις οποίες καλούμε Στοχαστικές Ανεξίξεις (σ.α). Μερικές από τις βασικές Στοχαστικές Ανεξίξεις εξετάζονται αναλυτικά στο εν λόγω σύγγραμμα.

Το βιβλίο αυτό ξεκίνησε σαν ιδέα κατά την διάρκεια του ακαδημαϊκού έτους 1986-87, στα πλαίσια της συνεργασίας των συγγραφέων στο Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Πατρών. Το υλικό που προέκυψε, χρησιμοποιήθηκε από τους φοιτητές του Τμήματος για τις ανάγκες του μαθήματος «Επιχειρησιακή Έρευνα» (Εαρινό εξάμηνο 1987). Η συνεργασία συνεχίστηκε το ακαδ. έτος 2000-01, με αποτέλεσμα τον εμπλουτισμό του τόσο σε ύλη όσο και εφαρμογές και πήρε τελικά την παρούσα μορφή. Αποτελείται από έντεκα κεφάλαια, για την δε μελέτη του είναι απαραίτητη η καλή γνώση της Θεωρίας Πιθανοτήτων.

Στο *Πρώτο* και στο *Δεύτερο Κεφάλαιο* γίνεται μιά σύντομη ανακεφαλαίωση της Θεωρίας Πιθανοτήτων. Για παραπέρα αναφορά στο αντικείμενο, μπορεί να χρησιμοποιήσει κανείς μέρος της βιβλιογραφίας που προτείνουμε.

Στο *Τρίτο Κεφάλαιο* δίνεται ο ορισμός μιάς Στοχαστικής Ανεξίξης, ταξινομούνται οι σ.α. και αναφέρονται χαρακτηριστικά παραδείγματα τους.

Στο *Τέταρτο* και *Πέμπτο Κεφάλαιο*, γίνεται αναφορά στις Αλυσίδες Markov, τόσο σε απλή διαισθητική όσο και αυστηρά μαθηματική μορφή και περιγράφονται βασικές ιδιότητές τους. Εξετάζονται οι καταστάσεις μιας Α.Μ. με σκοπό την απόδειξη της ύπαρξης οριακής κατανομής.

Στο *Έκτο Κεφάλαιο* δίνεται ο ορισμός και οι ιδιότητες μιάς από τις βασικές Ανελίξεις Απαρίθμησης, της λεγόμενης Ανελίξης Poisson.

Στο *Έβδομο Κεφάλαιο* περιγράφονται τα Συστήματα Ουράς, αναφέρονται τα κύρια χαρακτηριστικά, ο τρόπος συμβολισμού και ταξινόμησής τους.

Στα *Όγδοο και το Ένατο Κεφάλαιο* εξετάζονται οι Ουρές  $M/M/1$  και  $M/M/1/k$  αντίστοιχα και υπολογίζονται τα μέτρα λειτουργικότητας τους.

Στο *Δέκατο Κεφάλαιο* περιγράφονται οι Ανελίξεις Γέννησης-Θανάτου και αποδεικνύεται πως οι Ουρές που μελετώνται εδώ, μπορούν να προκύψουν σαν ειδικές περιπτώσεις τέτοιων Ανελίξεων. Με την βοήθεια των Ανελίξεων Γέννησης-Θανάτου μελετάμε ειδικότερες κατηγορίες Ουρών.

Τέλος στο *Ενδέκατο Κεφάλαιο* γίνεται αναφορά στην  $M/M/s$  Ουρά, στα μέτρα λειτουργικότητάς της όπως επίσης και σε γενικεύσεις της.

Σε κάθε Κεφάλαιο, μετά την εισαγωγή των περισσότερων Εννοιών καθώς και την απόδειξη βασικών Θεωρημάτων, υπάρχουν λυμένα παραδείγματα για την περαιτέρω κατανόησή και εμβάθυνσή τους. Στο τέλος επίσης κάθε Κεφαλαίου υπάρχουν λυμένες ασκήσεις και εφαρμογές, συνέχεια και αναπόσπαστο κομμάτι της αντίστοιχης Θεωρίας. Υπάρχουν ακόμα προτεινόμενα προβλήματα η επίλυση των οποίων είναι απαραίτητη, στο να αποκτήσει κανείς ευχέρεια στην εφαρμογή των όσων ήδη έχει μελετήσει, σε πραγματικές καταστάσεις.

Το βιβλίο κλείνει με δυό Παραρτήματα, Α και Β. Στο Παράρτημα Α υπάρχουν λυμένες επιλεγμένες ασκήσεις στις Αλυσίδες Markov, στην Ανελίξη Poisson και στα διάφορα είδη Ουρών. Η δυσκολία των ασκήσεων αυτών ποικίλει. Στο Παράρτημα Β υπάρχουν οι αναγκαίοι πίνακες, για την μελέτη διαφόρων χαρακτηριστικών των τ.μ.

Πιστεύουμε ότι το πόνημά μας συνεισφέρει στην Ελληνική βιβλιογραφία της αντίστοιχης θεματολογίας. Αναλαμβάνουμε την ευθύνη των όποιων παραλήψεων ή λαθών υπάρχουν και θεωρούμε τιμή μας την υπόδειξή τους από τα άτομα που θα το μελετήσουν.

Τελειώνοντας, θεωρούμε επίσης καθήκον μας να ευχαριστήσουμε τον καθηγητή κ. Ν. Τσερπέ για τις πολύτιμες υποδείξεις και εμπειρισταωμένες αναφορές που έκανε στο πρωτότυπο κείμενο και τον εκδοτικό οίκο Ζήτη χωρίς την βοήθεια του οποίου δεν θα ήταν δυνατή η παρούσα έκδοση. Ακόμα θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε τις συζύγους μας για την υπομονή και κατανόηση που έδειξαν κατά την διάρκεια της συγγραφής του παρόντος και στις οποίες το βιβλίο αυτό αφιερώνεται.

**ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ****1<sup>ο</sup> Κεφάλαιο****Πιθανότητες**

1.1	Εισαγωγή .....	9
1.2	Ανεξαρτησία .....	15
1.3	Δεσμευμένη πιθανότητα .....	17
1.4	Ασκήσεις .....	20

**2<sup>ο</sup> Κεφάλαιο****Τυχαίες Μεταβλητές και Κατανομές τους**

2.1	Τυχαίες μεταβλητές .....	29
2.2	Διακριτές και συνεχείς τυχαίες μεταβλητές-κατανομές .....	31
2.3	Αριθμητικά χαρακτηριστικά μιας τυχαίας μεταβλητής .....	34
2.4	Πολυδιάστατες τυχαίες μεταβλητές: κατανομές και ροπές .....	36
2.5	Στοχαστική ανεξαρτησία τ.μ. ....	41
2.6	Ασκήσεις .....	44

**3<sup>ο</sup> Κεφάλαιο****Στοχαστικές Ανελίζεις**

3.1	Στοχαστικές ανελίζεις .....	55
3.2	Ταξινόμηση των στοχαστικών ανελίζεων .....	56
3.3	Παραδείγματα στοχαστικών ανελίζεων .....	57
3.4	Κατανομή μιας στοχαστικής ανελίζης .....	59
3.5	Ασκήσεις .....	61

## 4<sup>ο</sup> Κεφάλαιο

### Αλυσίδες Markov

4.1	Αλυσίδες Markov. Ένα παράδειγμα.....	65
4.2	Αλυσίδες Markov .....	69
4.3	Πίνακας μετάβασης ενός βήματος .....	72
4.4	Παραδείγματα Αλυσίδων Markov .....	74
4.5	Υπολογισμός των χρονικά εξαρτημένων πιθανοτήτων .....	82
4.6	Οριακές πιθανότητες των καταστάσεων .....	88
4.7	Ασκήσεις .....	90
4.8	Προβλήματα .....	98

## 5<sup>ο</sup> Κεφάλαιο

### Ταξινόμηση καταστάσεων – Στάσιμες κατανομές Αλυσίδας Markov

5.1	Ταξινόμηση των καταστάσεων μιας Αλυσίδας Markov .....	101
5.2	Επάνοδος και Παροδικότητα.....	104
5.3	Θετικά και μηδενικά επανερχόμενες καταστάσεις.....	114
5.4	Περιοδικότητα .....	119
5.5	Στάσιμες κατανομές μιας Αλυσίδας Markov .....	122
5.6	Ασυμπτωτική συμπεριφορά των πιθανοτήτων μετάβασης .....	125
5.7	Ύπαρξη και μοναδικότητα στάσιμων κατανομών .....	129
5.8	Πιθανότητες απορρόφησης .....	135
5.9	Ασκήσεις .....	138
5.10	Προβλήματα .....	148

## 6<sup>ο</sup> Κεφάλαιο

### Ανέλιξη Poisson

6.1	Εισαγωγή .....	153
6.2	Ενδιάμεσοι χρόνοι και χρόνοι αναμονής.....	157
6.3	Γενικεύσεις της Ανέλιξης Poisson.....	161
6.4	Ασκήσεις .....	165
6.5	Προβλήματα .....	171

## 7<sup>ο</sup> Κεφάλαιο

### Θεωρία Ουρών

7.0	Το βασικό σύστημα ουράς .....	173
7.1	Εισαγωγή .....	173
7.2	Χαρακτηριστικά συστημάτων ουράς .....	176
7.3	Συμβολική παράσταση των ουρών.....	180
7.4	Μέτρα λειτουργικότητας μιας ουράς.....	181

## 8<sup>ο</sup> Κεφάλαιο

### Η Ουρά M/M/1

8.1	Εισαγωγή .....	183
8.2	Μέτρα λειτουργικότητας της ουράς .....	188
8.3	Χρόνοι αναμονής και κατανομές τους .....	192
8.4	Ασκήσεις .....	195
8.5	Προβλήματα .....	200

## 9<sup>ο</sup> Κεφάλαιο

### Η Ουρά M/M/1/k

9.1	Εισαγωγή .....	203
9.2	Μέτρα λειτουργικότητας της ουράς .....	206
9.3	Ασκήσεις .....	209
9.4	Προβλήματα .....	214

## 10<sup>ο</sup> Κεφάλαιο

### Ανέλιξη Γέννησης – Θανάτου

10.1	Εισαγωγή.....	215
10.2	Εφαρμογές της Ανέλιξης Γέννησης – Θανάτου.....	219
10.3	M/M/1 ουρά με μεταβλητές αφίξεις .....	220
10.4	M/M/1 ουρά με μεταβλητό ρυθμό εξυπηρέτησης .....	221
10.5	Ασκήσεις .....	223
10.6	Προβλήματα.....	227

## **11<sup>ο</sup> Κεφάλαιο**

### **Η Ουρά M/M/s**

11.1	Εισαγωγή.....	229
11.2	Μέτρα λειτουργικότητας της M/M/s ουράς.....	231
11.3	Ασκήσεις .....	236
11.4	Προβλήματα .....	242

## **Παράρτημα Α**

### **Επιλεγμένες Ασκήσεις**

A	Αλυσίδες Markov.....	247
B	Ταξινόμηση καταστάσεων.....	260
Γ	Στάσιμες κατανομές.....	269
Δ	Ανέλιξη Poisson.....	280
E	Θεωρία Ουρών.....	286

## **Παράρτημα Β**

### **Πίνακες**

1	Διωνυμικοί πίνακες.....	301
2	Πίνακες Poisson .....	306
3	Πίνακας κανονικής κατανομής .....	314
4	Πίνακας χαρακτηριστικών των τ.μ. ....	318
	Βιβλιογραφία .....	319
	Ευρετήριο όρων.....	321



1<sup>ο</sup>

## Κεφάλαιο

## Πιθανότητες

## 1.1 Εισαγωγή

Στην Θεωρία Πιθανοτήτων, ξεκινάμε από το λεγόμενο **πείραμα** δηλαδή μια διαδικασία η οποία μπορεί να επαναληφθεί θεωρητικά άπειρες φορές, κάτω από τις ίδιες ουσιαστικά συνθήκες, και στο τέλος της οποίας παρατηρούμε ορισμένα αποτελέσματα. Για παράδειγμα η ρίψη ενός νομίσματος με δυό όψεις, η ρίψη ενός συμμετρικού ζαριού, ο αριθμός των αεροπλάνων που φθάνουν σ' ένα αεροδρόμιο μέσα σ' ένα καθορισμένο χρονικό διάστημα, το ύψος των παιδιών ενός παιδικού σταθμού ή ο αριθμός των γεννήσεων σε μια περιοχή της χώρας για ένα δοσμένο χρονικό διάστημα μπορούν να θεωρηθούν πειράματα.

Τα πειράματα μπορούν να χωρισθούν σε δυό μεγάλες κατηγορίες, τα **καθοριστικά** (deterministic) και τα λεγόμενα πειράματα **τύχης** (random).

**Καθοριστικά** λέγονται τα πειράματα εκείνα τα οποία έχουν ένα δυνατό αποτέλεσμα, που είναι γνωστό πως θα συμβεί πριν ακόμα εκτελεστεί το πείραμα, και έτσι είναι φυσικό να μην παρουσιάζουν ενδιαφέρον. Παράδειγμα ενός τέτοιου πειράματος είναι το εξής: Εάν κάποιος τοποθετήσει ένα ποτήρι με νερό σε περιβάλλον θερμοκρασίας κάτω των  $0^0$  Κελσίου τότε το νερό θα γίνει πάγος (αποτέλεσμα μοναδικό και γνωστό εκ των προτέρων).

**Πειράματα τύχης** λέγονται εκείνα τα πειράματα τα οποία έχουν περισσότερα του ενός δυνατά αποτελέσματα και ως εκ τούτου δεν είναι δυνατόν να είναι γνωστό το αποτέλεσμα πριν από την εκτέλεση του πειράματος (είναι βέβαια γνωστό ότι το αποτέλεσμα θα ανήκει σε ένα σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων, σύνολο

το οποίο είναι γνωστό εκ των προτέρων) π.χ. όταν ρίχνουμε ένα νόμισμα με δύο όψεις (κεφαλή-γράμματα) ξέρουμε ότι το αποτέλεσμα θα είναι κεφαλή ή γράμματα το ποιο όμως θα είναι το συγκεκριμένο αποτέλεσμα, σε μια ρίψη, δεν είναι δυνατόν να είναι γνωστό πριν εκτελέσουμε το πείραμα. Με τέτοιου είδους πειράματα ασχολείται κανείς στην Θεωρία Πιθανοτήτων.

**Ορισμός 1.1.1** Το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης καλείται **δειγματοχώρος** του πειράματος (sample space) και συμβολίζεται συνήθως με  $\Omega$ , ενώ κάθε ένα από τα (δυνατά αυτά) αποτελέσματα καλείται **απλό γεγονός ή δειγματοσημείο**.

Υπάρχουν δύο είδη δειγματοχώρων, εκείνοι για τους οποίους το  $\Omega$  είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο σύνολο και οι οποίοι ονομάζονται **διακριτοί** και εκείνοι για τους οποίους το  $\Omega$  είναι μη-αριθμήσιμο σύνολο και οι οποίοι ονομάζονται **συνεχείς**.

### Παραδείγματα 1.1.2

(1) Εάν ρίξουμε ένα νόμισμα με δύο όψεις τότε:

$$\Omega = \{\text{Κεφαλή, Γράμματα}\} \quad \text{ή χάριν συντομίας} \quad \Omega = \{Κ, Γ\}$$

(2) Εάν υποθέσουμε ότι ρίχνουμε δύο συμμετρικά ζάρια και μας ενδιαφέρει η κατανομή των αποτελεσμάτων (τελειών) των δύο ζαριών, τότε ο δειγματοχώρος του πειράματος αποτελείται από τα παρακάτω 36 αποτελέσματα:

**Πίνακας 1.1.3**

		$2^0$ ζάρι					
		1	2	3	4	5	6
$1^0$ ζάρι	1	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
	2	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
	3	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6
	4	4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6
	5	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6
	6	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6

(3) Εάν πάλι στην ρίψη δύο συμμετρικών ζαριών, ενδιαφερόμαστε για το άθροισμα των αποτελεσμάτων των δύο ζαριών, ο δειγματοχώρος του πειράματος είναι ίσος με:

$$\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

**Παρατήρηση 1.1.4** Προσοχή στο πως ορίζεται ένα πείραμα τύχης. Τα δύο παραπάνω πειράματα (της ρίψης των ζαριών) φαίνεται ότι είναι ίδια αλλά στην πραγματικότητα δεν είναι. Έχουν διαφορετικούς δειγματοχώρους.

- (4) Εάν μας ενδιαφέρει ο αριθμός των αεροπλάνων που φθάνουν σ' ένα αεροδρόμιο μέσα σ' ένα καθορισμένο χρονικό διάστημα, τότε:

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots, k\}$$

όπου  $k$  είναι ο μέγιστος αριθμός αεροπλάνων που μπορούν να φθάσουν στο αεροδρόμιο μέσα στο καθορισμένο χρονικό διάστημα.

- (5) Στο πείραμα του ύψους των παιδιών ενός παιδικού σταθμού:

$$\Omega = [a, b]$$

δηλαδή το κλειστό διάστημα  $[a, b]$ , όπου  $a, b$  είναι το ελάχιστο και το μέγιστο ύψος των παιδιών του σταθμού, αντίστοιχα.

Στα παραπάνω παραδείγματα 1,2,3,4, οι δειγματοχώροι είναι διακριτοί ενώ στο 5 συνεχής.

Αφού λοιπόν σ' ένα πείραμα τύχης δεν είναι δυνατόν να προβλεφθεί εκ των προτέρων το ποιο ακριβώς αποτέλεσμα θα συμβεί (αλλά πάλι είναι γνωστό ότι θα συμβεί ένα αποτέλεσμα από ένα σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων), θα ήθελε κάποιος να ήταν σε θέση να αντιστοιχήσει σε κάθε ένα από αυτά τα (δυνατά) αποτελέσματα έναν αριθμό, τον οποίο θα καλούμε **πιθανότητα του απλού γεγονότος** και ο οποίος θα μας φανερώνει το πόσο δυνατόν είναι να συμβεί το εν λόγω γεγονός.

**Ορισμός 1.1.5** Εάν ο δειγματοχώρος ενός πειράματος τύχης είναι ίσος με:

$$\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

τότε αντιστοιχούμε σε κάθε ένα από αυτά τ' αποτελέσματα  $\alpha_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  έναν αριθμό, **μεταξύ 0 και 1**,  $p_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  ( και τέτοιον ώστε το  $\sum_{j=1}^n p_j = 1$ ) ο οποίος μας φανερώνει το πόσο δυνατόν είναι να συμβεί το γεγονός  $\{\alpha_j\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Συμβολικά:

$$P(\{\alpha_j\}) = p_j \quad j = 1, 2, \dots, n$$

και τον οποίο όπως είπαμε καλούμε **πιθανότητα του απλού γεγονότος**  $\{\alpha_j\}$  (probability of the simple event  $\{\alpha_j\}$ ).

Αν τώρα  $A \subseteq \Omega$ , το  $A$  καλείται **γεγονός**, ή **ενδεχόμενο** (event), και εάν

$$A = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\}$$

τότε είναι φανερό ότι η (κατάλληλη αντιστοίχιση) πιθανότητα του είναι ίση με:

$$P(A) = p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_k}$$

**Παρατηρήσεις 1.1.6** (i) Στην πράξη, αν  $A \subseteq \Omega$ , τότε το  $A$  καλείται **γεγονός** στην περίπτωση κατά την οποία το  $A$  ανήκει σε μία ιδιαίτερη κλάση  $\mathfrak{I}$  υποσυνόλων του δειγματοχώρου  $\Omega$  (την οποία κλάση  $\mathfrak{I}$  ορίζουμε με κάποιο συγκεκριμένο τρόπο και ονομάζουμε **σ-άλγεβρα** υποσυνόλων του δειγματοχώρου) δηλαδή όταν ικανοποιεί ορισμένες ιδιότητες οι οποίες δεν εξετάζονται στις εν λόγω σημειώσεις. Εάν ο δειγματοχώρος είναι διακριτός τότε σαν μια τέτοια κλάση μπορούμε να θεωρήσουμε το δυναμοσύνολο του  $\Omega$  (δηλαδή το σύνολο όλων των δυνατών υποσυνόλων του  $\Omega$ ) και έτσι σ'αυτή την περίπτωση κάθε υποσύνολο του  $\Omega$  θεωρείται γεγονός.

(ii) Οι παρακάτω ιδιότητες απορρέουν απευθείας από τον παραπάνω ορισμό της πιθανότητας ενός γεγονότος.

(1)  $P(\Omega) = 1$  (το σύνολο  $\Omega$  καλείται **βέβαιο** γεγονός)

(2)  $0 \leq P(A) \leq 1$

(3) Αν  $A, B \subseteq \Omega$  και  $A \cap B = \emptyset$  (δηλαδή τα γεγονότα  $A, B$  είναι **ξένα** μεταξύ τους) τότε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Εάν  $A \subseteq \Omega$  είναι ένα γεγονός, τότε λέμε ότι το  $A$  **πραγματοποιείται** σε μια εκτέλεση του πειράματος, εάν το αποτέλεσμα του πειράματος είναι στοιχείο του  $A$ .

### **Ορισμός 1.1.7** (Η σχετική συχνότητα σαν πιθανότητα)

Έστω ότι ένα πείραμα τύχης επαναλαμβάνεται  $n$  φορές, και έστω ότι κάθε μια από αυτές τις επαναλήψεις είναι ανεξάρτητη από όλες τις προηγούμενες της. Για ένα γεγονός  $A$ , έστω  $f(A)$  ο αριθμός των φορών που πραγματοποιείται το  $A$  στις  $n$  επαναλήψεις (**συχνότητα** του  $A$ ). Η ποσότητα:

$$f_A = \frac{f(A)}{n}$$

καλείται **σχετική συχνότητα** του γεγονότος  $A$ . Εάν θεωρήσουμε ότι το όριο αυτής της ποσότητας του  $n$  τείνοντας στο άπειρο *υπάρχει*, τότε ο αριθμός αυτός καλείται (στην πράξη) **πιθανότητα του  $A$** .

Η σχετική συχνότητα ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

$$(1) f_A \geq 0$$

$$(2) f_\Omega = 1$$

$$(3) \text{ Εάν } A \cap B = \emptyset \Rightarrow f_{A \cup B} = f_A + f_B$$

Εάν προσπαθήσει να θεμελιώσει κανείς αυστηρά την Θεωρία των Πιθανοτήτων με την βοήθεια του ορισμού (1.1.5) ή (1.1.7) τότε αντιμετωπίζει αρκετές δυσκολίες (π.χ. είναι δύσκολο να δει πως μπορούν να ορισθούν οι πιθανότητες γεγονότων στην περίπτωση συνεχούς δειγματοχώρου). Γι' αυτό τον λόγο δίνουμε έναν τρίτο ορισμό της πιθανότητας ενός γεγονότος.

### **Ορισμός 1.1.8** (Αξιοματικός ορισμός της πιθανότητας κατά Kolmogorov)

Γενικότερα, η πιθανότητα μπορεί να θεωρηθεί σαν μια συνολοσυνάρτηση:

$$P: \mathfrak{F} \rightarrow [0, 1]$$

όπου  $\mathfrak{F}$  η κλάση (σ-άλγεβρα) των γεγονότων του δειγματοχώρου  $\Omega$ , και η οποία συνολοσυνάρτηση ικανοποιεί τις τρεις ιδιότητες της παρατήρησης 1.1.6 (ii), με την (3) αναφερόμενη σε αριθμήσιμο πλήθος ανά δύο ξένων γεγονότων, δηλαδή:

– αν  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  γεγονότα τέτοια ώστε  $A_i \cap A_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$  τότε:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad (1.1.9)$$

Έτσι δεν έχει κανείς πρόβλημα στο να ορίσει πιθανότητες και στην περίπτωση των συνεχών δειγματοχώρων.

Στις εν λόγω σημειώσεις, ασχολούμαστε με πειράματα τύχης των οποίων ο δειγματοχώρος είναι συνήθως ένα πεπερασμένο σύνολο και τα δειγματοσημεία έχουν την ίδια δυνατότητα να συμβούν (είναι ισοπίθανα ή έχουν **ομοιόμορφη πιθανότητα**) και ως εκ τούτου, εάν πάλι:

$$\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

τότε:

$$P(\{a_j\}) = \frac{1}{n} = \frac{1}{\#(\Omega)} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (1.1.10)$$

όπου με  $\#(\Omega)$  συμβολίζουμε τον αριθμό των στοιχείων του συνόλου  $\Omega$  (πληθάριθμος του  $\Omega$ ).

**Παράδειγμα 1.1.11** Όταν ρίχνουμε ένα «δίκαιο» νόμισμα με δύο όψεις τότε:

$$\Omega = \{K, \Gamma\}$$

(K=κεφαλή, Γ=γράμματα) και έτσι

$$P(\{K\}) = P(\{\Gamma\}) = \frac{1}{2}$$

Τώρα, εάν:

$$A = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\}$$

τότε:

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)} \quad (1.1.12)$$

**Παράδειγμα 1.1.13** Εάν ρίξουμε ένα συμμετρικό ζάρι και A είναι το γεγονός: «το αποτέλεσμα είναι άρτιος αριθμός», τότε  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  και  $A = \{2, 4, 6\}$  άρα:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Οι παρακάτω τύποι είναι εύκολο να αποδειχθούν και ισχύουν γενικά σε όλα τα πειράματα τύχης.

$$(i) \quad P(A') = 1 - P(A)$$

όπου  $A'$  είναι το συμπλήρωμα του συνόλου  $A$ , ως προς το σύνολο  $\Omega$ .

$$(ii) \quad \text{Αν } A, B \subseteq \Omega \text{ τότε}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Για τρία γεγονότα  $A, B, \Gamma$  ο τύπος γίνεται:

$$P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(A \cap B) - P(A \cap \Gamma) - P(B \cap \Gamma) + P(A \cap B \cap \Gamma)$$

Γενικότερα, ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

**Θεώρημα 1.1.14 (Poincare).** Η πιθανότητα να συμβεί ένα τουλάχιστον από τα  $n$  γεγονότα  $A_1, A_2, \dots, A_n$  δίνεται από την σχέση:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

**Απόδειξη** Επαγωγικά ως προς  $n$ . □

**Παρατήρηση 1.1.14** Ο τύπος

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

(πολλές φορές αναφέρεται και σαν **προσθετικό θεώρημα**) ισχύει **μόνον** στην περίπτωση που τα γεγονότα  $A, B$  είναι **ξένα** μεταξύ τους.

(iii) Αν  $A \subseteq B$  τότε:

(α)  $P(A) \leq P(B)$  και

(β)  $P(B - A) = P(B) - P(A)$  όπου:  $B - A = \{x \in B, x \notin A\}$

(iv)  $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$

## 1.2 Ανεξαρτησία

Μια από τις βασικές έννοιες που συναντά κανείς στη Θεωρία των Πιθανοτήτων είναι εκείνη της **ανεξαρτησίας** δύο γεγονότων. Έτσι:

**Ορισμός 1.2.1** Δυό γεγονότα  $A, B$ , του ίδιου πειράματος τύχης, ονομάζονται (**στοχαστικά**) **ανεξάρτητα** αν η πραγματοποίηση του ενός δεν μας δίνει πληροφορίες για την πραγματοποίηση του άλλου.

Π.χ. εάν ρίξουμε ένα νόμισμα δυό φορές, το αποτέλεσμα της δεύτερης ρίψης είναι ανεξάρτητο από το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης.

Ένας δεύτερος, ισοδύναμος, ορισμός της ανεξαρτησίας δύο γεγονότων είναι ο εξής:

**Ορισμός 1.2.2** Δυο γεγονότα  $A, B$  ονομάζονται **(στοχαστικά) ανεξάρτητα** αν ικανοποιείται η παρακάτω σχέση:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (1.2.3)$$

Ο παραπάνω ορισμός γενικεύεται και σε περισσότερα από δυο γεγονότα. Έτσι π.χ. τρία γεγονότα  $A, B, \Gamma$  ονομάζονται ανεξάρτητα αν ισχύουν *ταυτόχρονα* οι παρακάτω σχέσεις:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B), \quad P(A \cap \Gamma) = P(A) \cdot P(\Gamma), \quad P(B \cap \Gamma) = P(B) \cdot P(\Gamma)$$

και

$$P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma)$$

**Παρατήρηση 1.2.4** (ι) Πολλές φορές γίνεται σύγχυση μεταξύ ξένων και ανεξάρτητων γεγονότων. Επαναλαμβάνοντας τους ορισμούς, δυό γεγονότα  $A, B$  λέγονται ξένα εάν δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο, ενώ ανεξάρτητα αν η πραγματοποίηση του ενός δεν μας δίνει πληροφορίες για την πραγματοποίηση του άλλου.

(ιι) Για να είναι δυό γεγονότα ανεξάρτητα θα πρέπει να ορίζονται στον *ίδιο* δειγματοχώρο.

Στην πραγματικότητα, και για πειράματα τύχης των οποίων τα δειγματοσημεία έχουν την ίδια πιθανότητα να συμβούν (άρα θετική πιθανότητα), εάν δυό γεγονότα (μη κενά) είναι ξένα δεν μπορεί να είναι και ανεξάρτητα γιατί εάν είναι ξένα τότε η πραγματοποίηση του ενός από αυτά συνεπάγεται την μη πραγματοποίηση του άλλου (δηλαδή η πραγματοποίηση του ενός μας δίνει πληροφορίες για την πραγματοποίηση του άλλου). Μαθηματικά μιλώντας:

$$A, B \text{ ξένα (και διάφορα του κενού το καθένα)} \Rightarrow A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$$

Αν τα  $A, B$  ήταν και ανεξάρτητα τότε:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0 \Rightarrow P(A) = 0 \quad \text{ή} \quad P(B) = 0 \Rightarrow A = \emptyset \quad \text{ή} \quad B = \emptyset$$

πράγμα που δεν συμβαίνει, από την υπόθεση.



### 1.3 Δεσμευμένη Πιθανότητα

Ας υποθέσουμε ότι  $A, B$  είναι δυό γεγονότα ενός πειράματος τύχης. Μερικές φορές, όταν εκτελούμε το εν λόγω πείραμα, η πληροφορία που παίρνουμε από την πραγματοποίηση του γεγονότος  $A$  μας δίνει την δυνατότητα να επαναπροσδιορίσουμε την πιθανότητα του γεγονότος  $B$ . Η «νέα» αυτή πιθανότητα του  $B$  καλείται **δεσμευμένη πιθανότητα του γεγονότος  $B$  δοθέντος του γεγονότος  $A$** , συμβολικά:

$$P(B | A)$$

Έτσι:

**Ορισμός 1.3.1** Η **δεσμευμένη πιθανότητα** (conditional probability) του γεγονότος  $B$  **δοθέντος** του γεγονότος  $A$  ορίζεται σαν:

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

υπό την προϋπόθεση βέβαια ότι η ποσότητα του δεύτερου μέλους έχει νόημα, δηλαδή  $P(A) > 0$ .

**Παρατήρηση 1.3.2** Η δεσμευμένη πιθανότητα συνδέεται στενά και με την ανεξαρτησία. Έτσι εάν:

$$P(B | A) = P(B) \tag{1.3.3}$$

δηλαδή η πληροφορία ότι συνέβη το  $A$  δεν αλλάζει την πιθανότητα του  $B$ , τότε τα γεγονότα  $A$  και  $B$  θα πρέπει να είναι ανεξάρτητα. Πράγματι:

$$P(B) = P(B | A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Rightarrow P(B \cap A) = P(B) \cdot P(A)$$

δηλαδή τα  $A, B$  είναι ανεξάρτητα.

Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή εάν τα  $A, B$  είναι ανεξάρτητα τότε

$$P(B) = P(B | A)$$

(ισοδύναμα  $P(A) = P(A | B)$ ). Πράγματι: αφού τα  $A, B$  είναι ανεξάρτητα

$$P(B \cap A) = P(B) \cdot P(A) \Rightarrow P(B | A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B) \cdot P(A)}{P(A)} = P(B)$$

Έτσι ένας ισοδύναμος ορισμός της ανεξαρτησίας δύο γεγονότων είναι ο εξής:

**Ορισμός 1.3.4** Δυο γεγονότα  $A, B$  ονομάζονται **(στοχαστικά) ανεξάρτητα** αν ικανοποιείται η παρακάτω σχέση:

$$P(B) = P(B | A)$$

(ισοδύναμα  $P(A) = P(A | B)$ ).

Αν τώρα  $A, B$  είναι δυο γεγονότα τότε είναι εύκολο να αποδειχθεί το παρακάτω θεώρημα:

**Θεώρημα 1.3.5 (Πολλαπλασιαστικό)** Για τα γεγονότα  $A, B$  ισχύει:

$$P(A \cap B) = P(B | A) \cdot P(A)$$

(ισοδύναμα  $P(A \cap B) = P(A | B) \cdot P(B)$ ).

**Απόδειξη** Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας έχουμε:

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B | A) \cdot P(A)$$

που είναι το ζητούμενο. □

Στις δεσμευμένες πιθανότητες ισχύει επίσης το παρακάτω βασικό θεώρημα.

**Θεώρημα 1.3.6** Εάν  $A, B$  είναι δύο γεγονότα, του ίδιου δειγματοχώρου, και  $P(B) > 0$  τότε:

$$P(A | B) = \frac{P(B | A) \cdot P(A)}{P(B)} \quad (1.3.7)$$

**Απόδειξη** Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας και το πολλαπλασιαστικό θεώρημα έχουμε:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B | A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

□

Το παραπάνω θεώρημα γενικεύεται και σε περισσότερα από δύο γεγονότα, ως εξής:

Αν  $A_1, A_2, \dots, A_n, B$  είναι γεγονότα ενός δειγματοχώρου  $\Omega$ , τέτοια ώστε:

$$(α) \quad \Omega = A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n$$

$$(β) \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

(γεγονότα που ικανοποιούν τις συνθήκες (α) και (β) λέμε ότι αποτελούν **διαμέριση του δειγματοχώρου  $\Omega$** )

τότε:

**Θεώρημα 1.3.8 (Ολικής Πιθανότητας)** Αν  $A_1, A_2, \dots, A_n, B$  είναι γεγονότα ενός δειγματοχώρου  $\Omega$ , τα δε  $A_1, A_2, \dots, A_n$  αποτελούν διαμέριση του δειγματοχώρου  $\Omega$ , τότε:

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^n P(B | A_k) P(A_k) \quad (1.3.9)$$

**Απόδειξη** Είναι φανερό ότι:  $B = B \cap \Omega = B \cap \left( \bigcup_{k=1}^n A_k \right) = \bigcup_{k=1}^n (B \cap A_k)$  και τα γεγονότα  $B \cap A_k, k = 1, 2, \dots, n$  είναι ανά δυο ξένα μεταξύ τους (γιατί τα γεγονότα  $A_1, A_2, \dots, A_n$  αποτελούν διαμέριση), οπότε:

$$P(B) = P\left(\bigcup_{k=1}^n (B \cap A_k)\right) = \sum_{k=1}^n P(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^n P(B | A_k) P(A_k)$$

□

**Θεώρημα 1.3.10 (Bayes)** Αν  $A_1, A_2, \dots, A_n, B$  είναι γεγονότα ενός δειγματοχώρου  $\Omega$ , τα δε  $A_1, A_2, \dots, A_n$  αποτελούν διαμέριση του δειγματοχώρου  $\Omega$ , τότε ισχύει η σχέση:

$$P(A_j | B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B | A_j) \cdot P(A_j)}{P(B | A_1)P(A_1) + P(B | A_2)P(A_2) + \dots + P(B | A_n)P(A_n)}$$

**Απόδειξη** Εύκολη και αφήνεται σαν άσκηση.

□

## 1.4 Ασκήσεις

**1.4.1** Ρίχνουμε δύο ζάρια. Ποιός ο δειγματοχώρος του πειράματος τύχης; Να υπολογισθούν οι παρακάτω πιθανότητες:

- (α) το άθροισμα να είναι διαιρετό διά 4.
- (β) και οι δύο αριθμοί να είναι άρτιοι
- (γ) οι αριθμοί να διαφέρουν κατά 4
- (δ) να έχουμε δύο διαδοχικούς αριθμούς.

### Λύση

Ο δειγματοχώρος του πειράματος αποτελείται από τα παρακάτω 36 αποτελέσματα:

		2 <sup>ο</sup> ζάρι						δειγματοχώρος
1 <sup>ο</sup> ζάρι		1	2	3	4	5	6	
	1	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6	
	2	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6	
	3	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6	
	4	4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6	
	5	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6	
	6	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6	

Αν ορίσουμε τα γεγονότα:

$A = \text{«το άθροισμα να είναι διαιρετό διά 4»}$ ,

$B = \text{«και οι δύο αριθμοί είναι άρτιοι»}$

$\Gamma = \text{«οι αριθμοί διαφέρουν κατά 4»}$  και

$\Delta = \text{«έχουμε δύο διαδοχικούς αριθμούς»}$

τότε:  $A = \{1-3, 2-2, 3-1, 2-6, 3-5, 4-4, 5-3, 6-2, 6-6\}$  (τότε  $\#(A)=9$ )

όπου  $\#(A) = \text{αριθμός των στοιχείων του συνόλου } A$ .

$B = \{2-2, 2-4, 2-6, 4-2, 4-4, 4-6, 6-2, 6-4, 6-6\}$  (άρα  $\#(B)=9$ )

$\Gamma = \{1-5, 2-6, 5-1, 6-2\}$  (άρα  $\#(\Gamma)=4$ )

$\Delta = \{1-2, 2-1, 2-3, 3-2, 3-4, 4-3, 4-5, 5-4, 5-6, 6-5\}$  (άρα  $\#(\Delta)=10$ )

Άρα:  $P(A) = \frac{9}{36}$ ,  $P(B) = \frac{9}{36}$ ,  $P(\Gamma) = \frac{4}{36}$ ,  $P(\Delta) = \frac{10}{36}$ .

**1.4.2** Ένας αριθμός επιλέγεται τυχαια από τους αριθμούς  $1, 2, 3, 4, \dots, 50$ . Ποιά η πιθανότητα για τον αριθμό αυτό να διαιρείται με το 6 ή με το 8;

### Λύση

Ο δειγματοχώρος του πειράματος είναι ίσος με  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, \dots, 50\}$  δηλαδή  $\#(\Omega) = 50$  και εάν ορίσουμε το γεγονός:

$$\begin{aligned} A &= \text{«ο αριθμός διαιρείται με το 6 ή με το 8»} = \\ &= \{6, 8, 12, 16, 18, 24, 30, 32, 36, 40, 42, 48\} \quad \text{δηλαδή } \#(A) = 12 \end{aligned}$$

άρα:  $P(A) = \frac{12}{50}.$

---

**1.4.3** Από τους υποψήφιους των ανωτάτων σχολών ενός νομού που εξετάστηκαν στα μαθήματα της 1ης δέσμης, το 25% απέτυχε στα Μαθηματικά, το 15% στη Φυσική και το 10% και στα δύο μαθήματα. Επιλέγουμε τυχαία έναν από τους υποψήφιους του νομού:

- (α) ποιά η πιθανότητα να έχει αποτύχει σ'ένα τουλάχιστον μάθημα από τα δύο;
- (β) ποιά η πιθανότητα να έχει αποτύχει στα Μαθηματικά, αλλά όχι στη Φυσική;
- (γ) Αν έχει αποτύχει στη Φυσική, ποιά η πιθανότητα να έχει αποτύχει και στα Μαθηματικά;
- (δ) Αν έχει αποτύχει στα Μαθηματικά, ποιά η πιθανότητα να έχει αποτύχει και στη Φυσική;

### Λύση

Ορίζουμε τα γεγονότα

$M = \text{«ο υποψήφιος έχει αποτύχει στα Μαθηματικά»}$

$\Phi = \text{«ο υποψήφιος έχει αποτύχει στη Φυσική»}$

Τότε:

(α)  $P(M \cup \Phi) = P(M) + P(\Phi) - P(M \cap \Phi) = 0,25 + 0,15 - 0,10 = 0,3$

(β)  $P(M \cap \Phi') = P(M) - P(M \cap \Phi) = 0,25 - 0,10 = 0,15$

(γ)  $P(M|\Phi) = \frac{P(M \cap \Phi)}{P(\Phi)} = \frac{0,1}{0,15} = \frac{2}{3}$

(δ)  $P(\Phi|M) = \frac{P(M \cap \Phi)}{P(M)} = \frac{0,1}{0,25} = \frac{2}{5}$

---

**1.4.4** Σε έναν αγώνα παίρνουν μέρος 3 αυτοκίνητα. Το πρώτο έχει τριπλάσια πιθανότητα να κερδίσει από το δεύτερο και το δεύτερο έχει διπλάσια πιθανότητα να κερδίσει από το τρίτο. Ποιά η πιθανότητα κάθε αυτοκινήτου να κερδίσει τον αγώνα;

### Λύση

Εάν  $\chi$  = πιθανότητα του 3<sup>ου</sup> αυτοκινήτου να κερδίσει ,  
 Τότε  $2\chi$  = πιθανότητα του 2<sup>ου</sup> αυτοκινήτου να κερδίσει  
 Και  $3(2\chi)$  = πιθανότητα του 1<sup>ου</sup> αυτοκινήτου να κερδίσει

και επειδή:  $\chi + 2\chi + 3(2\chi) = 1 \Rightarrow 9\chi = 1 \Rightarrow \chi = \frac{1}{9}$ .

**1.4.5** Εάν  $P(A)=0,6$  ,  $P(B)=0,5$  και  $P(A \cap B)=0,3$

(α) να βρεθούν οι πιθανότητες:

- |                      |                    |                       |
|----------------------|--------------------|-----------------------|
| (i) $P(A \cup B)$    | (ii) $P(A')$       | (iii) $P(A' \cup B')$ |
| (iv) $P(A' \cap B')$ | (v) $P(A' \cap B)$ | (vi) $P(A B)$         |

(β) είναι τα A, B ξένα; Ανεξάρτητα;

### Λύση

(α) Έχουμε:

$$(i) \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,5 - 0,3 = 0,8$$

$$(ii) \quad P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0,6 = 0,4$$

(iii) Από την θεωρία συνόλων ξέρουμε ότι:

$$\begin{aligned} (A' \cup B') &= (A \cap B)' \\ (A' \cap B') &= (A \cup B)' \end{aligned} \quad \text{(κανόνες του de Morgan)}$$

$$P(A' \cup B') = P((A \cap B)') = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,3 = 0,7$$

$$(iv) \quad P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,8 = 0,2$$

$$(v) \quad P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,5 - 0,3 = 0,2$$

$$(vi) \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,3}{0,5} = 0,6$$

(β) εάν τα A, B ξένα  $\Rightarrow A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$

αλλά  $P(A \cap B) = 0,3$  άρα A,B όχι ξένα.

$P(A \cap B) = 0,3 = 0,6 \cdot 0,5 = P(A) P(B)$  δηλαδή A,B ανεξάρτητα.

**1.4.6** Εάν  $P(A) = \frac{8}{15}$ ,  $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$  και  $P(A|B) = \frac{4}{7}$

(α) να βρεθούν οι πιθανότητες:

- (i)  $P(B)$  (ii)  $P(A \cup B)$  (iii)  $P(B|A')$   
 (iv)  $P(A' \cup B')$  (v)  $P(A' \cap B')$  (vi)  $P(A' \cap B)$   
 (vii)  $P(B|A)$

(β) είναι τα A, B ανεξάρτητα;

**Λύση**

(α) Έχουμε:

$$(i) \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A|B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{7}} = \frac{7}{12}$$

$$(ii) \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{8}{15} + \frac{7}{12} - \frac{1}{3} = \frac{47}{60}$$

$$(iii) \quad P(B|A') = \frac{P(A' \cap B)}{P(A')} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{\frac{7}{12} - \frac{1}{3}}{\frac{7}{15}} = \frac{15}{28}$$

$$(iv) \quad P(A' \cup B') = P((A \cap B)') = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$(v) \quad P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{47}{60} = \frac{13}{60}$$

$$(vi) \quad P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{12} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$(vii) \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{8}{15}} = \frac{5}{8}$$

(β) Αφού έχουμε:

$$P(B|A) = \frac{5}{8} \neq P(B) \quad \text{άρα τα A, B δεν είναι ανεξάρτητα.}$$

**1.4.7** (Ανεξαρτησία) Για την ασφαλή πτήση ενός αεροπλάνου με δύο κινητήρες, πρέπει να δουλεύει ο ένας τουλάχιστον κινητήρας. Οι κινητήρες λειτουργούν *ανεξάρτητα* ο ένας από τον άλλο και έστω ότι η πιθανότητα να πάθει κάποιος βλάβη είναι 0,003. Να βρεθεί η πιθανότητα μιας ασφαλούς πτήσης.

### Λύση

Εάν ορίσουμε τα γεγονότα:

$A_1$  = «δουλεύει ο 1<sup>ος</sup> κινητήρας» και  $A_2$  = «δουλεύει ο 2<sup>ος</sup> κινητήρας»,

τότε δίνεται ότι :  $P(A_1) = 0,997 = P(A_2)$ , άρα

$$\begin{aligned} P(\text{ασφαλούς πτήσης}) &= P(\text{δουλεύει ένας τουλάχιστον κινητήρας}) = \\ &= P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = \\ &\quad (\text{λόγω ανεξαρτησίας}) \\ &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2) = \\ &= 0,997 + 0,997 - 0,997 \cdot 0,997 = 0,999991 \text{ δηλαδή } 99,99\%. \end{aligned}$$

**1.4.8** Ο παρακάτω πίνακας αναφέρεται στο βάρος και την υπέρταση 200 ατόμων:

	Υπέρβαρο	Μη Υπέρβαρο	Σύνολο
Υπερτασικά	20	20	40
Μη Υπερτασικά	30	130	160
Σύνολο	50	150	200

Ένα άτομο επιλέγεται τυχαία, να βρεθούν οι παρακάτω πιθανότητες:

- (α) το άτομο είναι υπέρβαρο.
- (β) το άτομο είναι υπερτασικό.
- (γ) δεδομένου ότι το άτομο είναι υπερτασικό, ποιά η πιθανότητα να μην είναι υπέρβαρο;
- (δ) το άτομο είναι υπέρβαρο ή υπερτασικό.
- (ε) είναι τα γεγονότα «το άτομο είναι υπερτασικό» και το «το άτομο είναι υπέρβαρο» ανεξάρτητα;

### Λύση

Εάν ορίσουμε τα γεγονότα:

$A$  = «το άτομο είναι υπέρβαρο»,  $B$  = «το άτομο είναι υπερτασικό»,



τότε με την βοήθεια του πίνακα των δεδομένων :

	Υπέρβαρα (A)	Μη Υπέρβαρα (A')	Σύνολο
Υπερτασικά (B)	20	20	40
Μη Υπερτασικά (B')	30	130	160
Σύνολο	50	150	200

έχουμε:

$$(α) \quad P(A) = \frac{50}{200} = 0,25$$

$$(β) \quad P(B) = \frac{40}{200} = 0,2$$

$$(γ) \quad P(A'|B) = \frac{P(A' \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{20}{200}}{\frac{40}{200}} = \frac{20}{40} = 0,5$$

$$(δ) \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{50}{200} + \frac{40}{200} - \frac{20}{200} = \frac{70}{200}$$

$$(ε) \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{20}{200}}{\frac{40}{200}} = \frac{20}{40} = 0,5 \neq 0,25 = P(A)$$

άρα τα γεγονότα **δεν** είναι ανεξάρτητα.

**1.4.9 (Ανεξαρτησία)** Έστω ότι δίνεται ο παρακάτω πίνακας:

	A	A'	Σύνολο
B	$\chi$	$\psi$	20
B'	$\zeta$	$\omega$	80
Σύνολο	40	60	100

και έστω ότι τα γεγονότα A,B είναι ανεξάρτητα. Να βρεθούν τα  $\chi, \psi, \zeta, \omega$ .

**Λύση**

Αφού τα γεγονότα A,B είναι ανεξάρτητα, έχουμε:

$$P(A \cap B) = \frac{\chi}{100} = P(A) \cdot P(B) = \frac{20}{100} \cdot \frac{40}{100} \Rightarrow \frac{\chi}{100} = \frac{8}{100} \Rightarrow \chi = 8$$

Ακόμα:

$$\begin{aligned}\chi + \zeta &= 40 \Rightarrow \zeta = 32 \\ \chi + \psi &= 20 \Rightarrow \psi = 12 \\ \zeta + \omega &= 80 \Rightarrow \omega = 48.\end{aligned}$$

---

**1.4.10** (Ανεξαρτησία) Αποδείξτε ότι: εάν τα γεγονότα  $A, B$  είναι ανεξάρτητα τότε είναι ανεξάρτητα και τα  $A'$  και  $B'$ .

*Λύση*

$$\begin{aligned}P(A' \cap B') &= P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = \text{(λόγω ανεξαρτησίας)} \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A) P(B) = P(A') - P(B) + P(A) P(B) = \\ &= P(A') - P(B) \{1 - P(A)\} = P(A') - P(B) P(A') = \\ &= P(A') - \{1 - P(B)\} = \\ &= P(A') P(B')\end{aligned}$$

δηλαδή τα  $A', B'$  είναι ανεξάρτητα.

---

**1.4.11** (Ανεξαρτησία) Αν τα γεγονότα  $A, B, \Gamma$  είναι ανεξάρτητα να εξεταστεί αν είναι επίσης ανεξάρτητα τα γεγονότα:

(i)  $A \cup B, \Gamma$       (ii)  $A, B \cap \Gamma$       (iii)  $A \cap B, A \cap \Gamma$

*Λύση*

$$\begin{aligned}\text{(i)} \quad P((A \cup B) \cap \Gamma) &= P((A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)) = \\ &= P(A \cap \Gamma) + P(B \cap \Gamma) - P(A \cap B \cap \Gamma) = \\ &= P(A)P(\Gamma) + P(B)P(\Gamma) - P(A)P(B)P(\Gamma) = \\ &= P(\Gamma) \{P(A) + P(B) - P(A)P(B)\} = P(\Gamma) P(A \cup B)\end{aligned}$$

δηλαδή τα  $A \cup B, \Gamma$  είναι ανεξάρτητα

(ii)  $P(A \cap (B \cap \Gamma)) = P(A)P(B)P(\Gamma) = P(A) P(B \cap \Gamma)$  δηλαδή τα  $A, B \cap \Gamma$  είναι ανεξάρτητα.

(iii) για νάναι τα γεγονότα  $A \cap B$ ,  $A \cap \Gamma$  ανεξάρτητα θα πρέπει:

$$P((A \cap B) \cap (A \cap \Gamma)) = P(A \cap B) P(A \cap \Gamma)$$

Αλλά:

$$P((A \cap B) \cap (A \cap \Gamma)) = P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A) P(B) P(\Gamma)$$

και

$$P(A \cap B) P(A \cap \Gamma) = P(A) P(B) P(A) P(\Gamma) = P(A)^2 P(B) P(\Gamma)$$

δηλαδή θα πρέπει:  $P(A)^2 P(B) P(\Gamma) = P(A) P(B) P(\Gamma)$  και υποθέτοντας ότι  $P(B) > 0$ ,  $P(\Gamma) > 0$  θα πρέπει:

$$P(A)^2 = P(A) \Rightarrow P(A) = 0 \quad \text{ή} \quad P(A) = 1$$


---

**1.4.12.** (Πολλαπλασιαστικό θεώρημα) Ένα δοχείο περιέχει 5 κόκκινες μπάλες και 3 πράσινες. Παίρνουμε δυό μπάλες από το δοχείο χωρίς επανατοποθέτηση. Ποιά η πιθανότητα και οι δυό μπάλες νάναι κόκκινες;

**Λύση**

Εάν ορίσουμε τα γεγονότα:

$A_1$  = «η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη»,  $A_2$  = «η δεύτερη μπάλα είναι κόκκινη»,

τότε:

$$\begin{aligned} P(\text{και οι δυό μπάλες είναι κόκκινες}) &= \\ &= P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 | A_1) \cdot P(A_1) = \frac{4}{7} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{14}. \end{aligned}$$


---

**1.4.13.** (Θεώρημα ολικής πιθανότητας) Σ' ένα μεταλλείο το 5% των εργατών πάσχουν από ρευματισμούς. Το 70% των εργατών που πάσχουν από ρευματισμούς δεν πηγαίνουν στην δουλειά μια μέρα και το 90% αυτών που δεν πάσχουν από ρευματισμούς πηγαίνουν στην δουλειά.

- (α) Ποιά η πιθανότητα να πάει ένας εργάτης στην δουλειά μια μέρα;
- (β) Αν ένας εργάτης δεν πήγε στην δουλειά μια μέρα, ποιά η πιθανότητα να είχε ρευματισμούς;
- (γ) Ποιά η πιθανότητα να πάει ένας εργάτης στην δουλειά μια μέρα ή να έχει ρευματισμούς;
- (δ) είναι τα γεγονότα «ένας εργάτης δεν πάει στην δουλειά μια μέρα» και το «ένας εργάτης πάσχει από ρευματισμούς» ανεξάρτητα;

**Λύση**

Ορίζουμε τα γεγονότα:

$\Pi$ =«ο εργάτης πάσχει από ρευματισμούς»,  
 $A$ =«ο εργάτης δεν πάει στην δουλειά μια μέρα»

Τότε:  $P(\Pi)=0,05$ ,  $P(\Pi')=0,95$  και  $P(A|\Pi)=0,7$ ,  $P(A'|\Pi)=0,3$  και  $P(A'|\Pi')=0,9$

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad P(A') &= P(A' \cap \Pi) + P(A' \cap \Pi') = P(A'|\Pi) \cdot P(\Pi) + P(A'|\Pi') \cdot P(\Pi') = \\ &= 0,3 \cdot 0,05 + 0,9 \cdot 0,95 = 0,87 \end{aligned}$$

$$(\beta) \quad P(\Pi|A) = \frac{P(A \cap \Pi)}{P(A)} = \frac{P(A|\Pi) \cdot P(\Pi)}{P(A)} = \frac{0,7 \cdot 0,05}{0,13} = 0,27$$

$$\begin{aligned} (\gamma) \quad P(A' \cup \Pi) &= P(A') + P(\Pi) - P(A' \cap \Pi) = P(A') + P(\Pi) - P(A'|\Pi) P(\Pi) = \\ &= 0,87 + 0,05 - 0,3 \cdot 0,05 = 0,905 \end{aligned}$$

$$(\delta) \quad P(A|\Pi) = 0,7 \neq 0,13 = P(A) = 1 - P(A') \quad \text{άρα τα γεγονότα δεν είναι ανεξάρτητα.}$$

Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί με την βοήθεια του παρακάτω πίνακα:

	A	A'	Σύνολο
Π	0,035	0,015	0,05
Π'	0,095	0,855	0,95
Σύνολο	0,13	0,87	1

πίνακας που σχηματίζεται με την βοήθεια των δεδομένων (πως;).

(Υπόδειξη: δείτε την άσκηση 1.4.8).