

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗ

Γεωργίου Α. Τερζίδη

M. Sc., Ph.D.

ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗΣ

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ



ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο υπογράφεται από το συγγραφέα

*ΣΤΗΝ ΙΕΡΗΝΗ
ΚΑΙ 6ΤΗ ΜΥΡΤΩ*

ISBN 960-431-405-X

© Copyright: Γ.Α. Τερζίδης, Εκδόσεις Ζήτη, Απρίλιος 1997, Θεσσαλονίκη

Η κατά οποιονδήποτε τρόπο και μέσο αναπαραγωγή, δημοσίευση ή χρησιμοποίηση όλου ή μερών του βιβλίου αυτού απαγορεύεται χωρίς την έγγραφη άδεια του συγγραφέα και εκδότη.



**Φωτοστοιχειοθεσία
- Εκτύπωση**

Βιβλιοπωλείο

Π. ΖΗΤΗ & ΣΙΑ ΟΕ

Σόλωνος 79-81

Θεσσαλονίκη 542 48

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Αρμενοπούλου 27

Θεσσαλονίκη 546 35

● ☎ (031) 825 453, 849 178
● ☎ Fax (031) 825 453, 849 178

● ☎ (031) 203 720
● ☎ Fax (031) 211 305

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό αποτελεί το δεύτερο τόμο μιας σειράς από τρεις τόμους που καλύπτουν σε μεγάλο ποσοστό τις διδακτικές και ερευνητικές ανάγκες των μαθημάτων Υδραυλικής που διδάσκονται στους προπτυχιακούς και μεταπτυχιακούς φοιτητές της Ειδικότητας των Εγγείων Βελτιώσεων των τμημάτων Γεωπονίας, Αγρονόμων - Τοπογράφων και Πολιτικών Μηχανικών.

Η σειρά διάταξης της ύλης, η περιγραφή των φυσικών φαινομένων και η μαθηματική ανάλυσή τους γίνονται έτσι ώστε να είναι εύκολη η κατανόηση, αυστηρή η εμπέδωση και απλή η χρήση των απαραίτητων γνώσεων της σύγχρονης Υδραυλικής τόσο από φοιτητές των Γεωπονικών και Πολυτεχνικών Σχολών όσο και από τους επιστήμονες Γεωπόνους και Μηχανικούς που ασχολούνται με την έρευνα και εφαρμογή της Υδραυλικής Επιστήμης.

Ο τόμος αυτός αποσκοπεί στο να δώσει στον αναγνώστη τις απαραίτητες γνώσεις της Ρευστομηχανικής και Υδραυλικής για τη σωστή επίλυση πρακτικών προβλημάτων της ροής του νερού μέσα στους κλειστούς υπό πίεση αγωγούς και στους ανοικτούς αγωγούς σταθερών τοιχωμάτων.

Οι κλειστοί και ανοικτοί αγωγοί χρησιμοποιούνται για τη μεταφορά του νερού για την άρδευση αγροτικών περιοχών, για την ύδρευση κατοικημένων ή βιομηχανικών περιοχών αλλά και την παραγωγή υδροηλεκτρικής ενέργειας.

Η ροή του νερού μέσα στους αγωγούς είναι κατά κανόνα ασταθής και ανομοιόμορφη. Λόγω όμως της πολυπλοκότητας της ασταθούς και ανομοιόμορφης ροής και της έλλειψης πειραματικών δεδομένων επεκράτησε ακόμη και σήμερα τα προβλήματα των κλειστών και ανοικτών αγωγών να αντιμετωπίζονται με την παραδοχή της σταθερής ομοιόμορφης ροής. Έτσι στην πράξη γίνεται δεκτό ότι η ροή είναι σταθερή και ομοιόμορφη στα ευθύγραμμα τμήματα των αγωγών σταθερής διατομής και σταθερή και ανομοιόμορφη στα τμήματα που μεταβάλλεται η διεύθυνση ή το εμβαδόν της διατομής ή παρεμβάλλονται εμπόδια (γωνίες, διαπλατύνσεις, στενώσεις, θυρίδες κ.λπ.).

Στο βιβλίο αυτό, που αποτελεί συνέχεια της Γενικής Υδραυλικής, καλύπτεται πλήρως η σταθερή και ασταθής ροή στους κλειστούς υπό πίεση αγωγούς και μόνο η σταθερή ομοιόμορφη και ανομοιόμορφη ροή στους ανοικτούς αγωγούς, για να καλύψει και διδακτικές ανάγκες προπτυχιακών μαθημάτων εφαρμοσμένης υδραυλικής. Η ασταθής ροή στους ανοικτούς αγωγούς θα δημοσιευθεί προσεχώς σε ξεχωριστό τόμο, σε επίπεδο μεταπτυχιακού μαθήματος, λόγω του μεγάλου όγκου της ύλης των σχετικών προβλημάτων.

Ευελπιστούμε ότι και το νέο αυτό βιβλίο θα έχει την ίδια ή και καλύτερη αποδοχή από τους συναδέλφους καθηγητές Γεωπονικών και Πολυτεχνικών Σχολών, καθώς και από τους συναδέλφους ερευνητές και μελετητές Γεωπόνους και Μηχανικούς, όπως και τα προηγούμενα συγγράμματά μου.

Όλους όσους βοήθησαν στην τελική εμφάνιση αυτού του τόμου της εφαρμοσμένης υδραυλικής, ευχαριστώ θερμά.

Θεσσαλονίκη, Απρίλιος 1997

Γ. Τερζίδης

Γεωπόνος και Πολιτ.-Υδραυλικός Μηχανικός

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

	Σελίδα
5.1. Γενικότητες	9
5.2. Σταθερή στρωτή ροή μεταξύ δυο παράλληλων πλακών	12
5.3. Σταθερή στρωτή ροή μέσα σε σωλήνα	15
5.4. Θεωρία των οριακών στιβάδων	19
5.4.1. Στρωτές οριακές στιβάδες σε κλειστούς αγωγούς	21
5.4.2. Турβώδης ροή-Γενικότητες	21
5.4.3. Турβώδεις οριακές στιβάδες σε κλειστούς αγωγούς	22
5.4.3α Κατανομή ταχύτητας στη στρωτή υποστιβάδα	24
5.4.3β Ημιεμπειρική θεωρία του μήκους αναμίξεως του <i>Prandtl</i>	25
5.4.4. Λογαριθμικές εξισώσεις ταχύτητας των <i>Karman-Prandtl</i>	28
5.4.5. Λογαριθμικές εξισώσεις ταχύτητας της τουρβώδους ροής μέσα σε σωλήνες .	30
5.4.6. Συντελεστής τριβής <i>f</i> των <i>Darcy-Weisbach</i>	32
5.4.7. Ημιεμπειρική εξίσωση των <i>Darcy-Weisbach</i>	36
5.5. Επίλυση προβλημάτων σε σωληνωτούς αγωγούς υπό πίεση	38
5.5.1. Υπολογισμός της απώλειας φορτίου	39
5.5.2. Υπολογισμός της παροχής	39
5.5.3. Υπολογισμός της διαμέτρου	41
5.5.4. Αριθμητικά παραδείγματα	43
5.6. Επίλυση προβλημάτων σε ανοικτούς αγωγούς με τα διαγράμματα <i>Moody</i>	49
5.6.1. Γήρανση αγωγών	56
5.6.2. Εμπειρική εξίσωση των <i>Hazen-Williams</i>	58
5.6.3. Νέα Διαγράμματα και εξισώσεις κλειστών αγωγών	70
5.6.3.1. Τροποποιημένα Διαγράμματα <i>Moody</i>	70
5.6.3.2. Τροποποιημένο Διάγραμμα <i>Moody</i> -Τερζίδη (1981)	75
5.6.3.3. Γενικό διάγραμμα συντελεστή τριβής (Τερζίδης 1982)	77
5.6.3.4. Ακριβείς, ρητές προσεγγιστικές εξισώσεις για τη λύση προβλημάτων των κλειστών αγωγών	80
5.7. Συστήματα σωληνωτών αγωγών	90
5.7.1. Γενικότητες	90
5.7.2. Τοπικές ή «ελάσσονες» απώλειες ενέργειας	93
5.7.3. Συστήματα σωληνωτών αγωγών σε σειρά	96
5.7.4. Μετάδοση της υδροδυναμικής ισχύος δια μέσου ακροφυσίου	99
5.7.5. Συστήματα διακλαδιζόμενων σωληνωτών αγωγών προς δεξαμενές	102
5.7.6. Σωληνωτοί αγωγοί με αντλία ή υδροστρόβιλο	105
5.7.7. Συστήματα παράλληλων σωληνωτών αγωγών	106
5.8. Δίκτυα διανομής νερού με σωληνωτούς αγωγούς	109
5.8.1. Γενικότητες	109
5.8.2. Ανάλυση των δικτύων διανομής του νερού	111
5.8.3. Μέθοδος <i>Hardy Cross</i>	115
5.8.4. Υπολογισμός δενδρώδους δικτύου	126
5.8.5. Ισοδύναμοι σωλήνες	131
5.9. Λυμένα προβλήματα σωληνωτών αγωγών	136
5.10. Ασταθής ροή σε κλειστούς αγωγούς	186
5.10.1. Γενικότητες	186
5.10.2. Εξίσωση Συνέχειας	187
5.10.3. Εξισώσεις κινήσεως και ποσότητας κινήσεως	194
5.10.4. Συστήματα διαφορικών εξισώσεων ασταθούς ροής	199
5.11. Μέθοδος των χαρακτηριστικών	204

5.11.1.	Μέθοδος των χαρακτηριστικών στις απλές εξισώσεις υδραυλικού πλήγματος, χωρίς παρεμβολή	205
5.11.2.	Ρητή μέθοδος χαρακτηριστικών με γραμμική προσέγγιση	209
5.11.3.	Μέθοδος προβλέψεως-διορθώσεως των χαρακτηριστικών με προσέγγιση δευτέρας τάξεως	213
5.11.4.	Οριακές συνθήκες	215
5.11.5.	Χρονικό βήμα για σύνθετα συστήματα αγωγών	224
5.11.6.	Κεντρωμένη άρρητη μέθοδος	226
5.12.	Μέθοδος των χαρακτηριστικών σε ορθογώνιο δίκτυο με καθορισμένα χρονικά διαστήματα και παρεμβολή	231
5.12.1.	Μέθοδος των χαρακτηριστικών σε ορθογώνιο δίκτυο με παρεμβολή	234
5.12.2.	Απλοποιημένη μέθοδος των χαρακτηριστικών	238
5.12.3.	Πειραματική επαλήθευση	240
5.13.	Ρητά υπολογιστικά σχήματα πεπερασμένων διαφορών	243
5.13.1.	Υπολογιστικό σχήμα των <i>Courant-Isaacson-Rees</i>	243
5.13.2.	Υπολογιστικό σχήμα των <i>Keller-Lax</i>	248
5.13.3.	Ανάλυση ευστάθειας	251
5.13.4.	Ανάλυση ευστάθειας του υπολογιστικού σχήματος των <i>Courant-Isaacson-Rees</i>	252
5.13.5.	Ανάλυση ευστάθειας του υπολογιστικού σχήματος των <i>Keller-Lax</i>	259
5.14.	Πλήρης μέθοδος των χαρακτηριστικών για την ασταθή ροή σε σωληνωτούς κλειστούς αγωγούς	261
5.15.	Αριθμητικές εφαρμογές	270
5.15.1.	Απλό παράδειγμα 3.1 των <i>Streeter-Wylie</i>	270
5.15.2.	Εφαρμογή της ρητής απλής μεθόδου των χαρακτηριστικών σε σύστημα σωληνώσεων	284
5.16.	Συμβατότητα των εξισώσεων πλήγματος κριού για σταθερή και ασταθή ροή	288
5.16.1.	Μέθοδος των χαρακτηριστικών με εξαρτημένες μεταβλητές ρ και V	290

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι	Πρόγραμμα σε <i>Fortran IV</i> για εφαρμογή 5.12.2.	297
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ	Διαστατική ανάλυση	302
1.	Γενικότητες	302
2.	Διαστάσεις και διαστατική ανάλυση	303
2.1.	Η μέθοδος του <i>Rayleigh</i>	304
2.2.	Η μέθοδος των Π-παραμέτρων	306
2.3.	Η χρήση της διαστατικής ανάλυσης στην παρουσίαση πειραματικών δεδομένων	310
2.4.	Νταρσιανή και μη νταρσιανή ροή	313
2.5.	Συντελεστής τριβής σε σωληνωτούς αγωγούς	317

Κεφάλαιο 6

ΣΤΑΘΕΡΗ ΡΟΗ ΤΟΥ ΝΕΡΟΥ ΣΕ ΑΝΟΙΚΤΟΥΣ ΑΓΩΓΟΥΣ

6.1.	Γενικότητες.....	321
6.2	Στρωτή ροή σε ανοικτούς αγωγούς.....	324
6.3.	Η κατανομή της ταχύτητας.....	326
6.3.1.	Λογαριθμική κατανομή της ταχύτητας.....	328
6.4.	Διαφορικές εξισώσεις ασταθούς ροής σε ανοικτούς αγωγούς.....	332
6.4.1.	Σταθερή ανομοιόμορφη ροή.....	335
6.4.2.	Σταθερή ομοιόμορφη ροή.....	336
6.4.3.	Ειδική ενέργεια ή ειδικό φορτίο E.....	337
6.4.4.	Κρίσιμη ροή.....	341
6.4.5.	Κρίσιμη ταχύτητα και ταχύτητα μεταδόσεως κυμάτων.....	343
6.4.6.	Αριθμός του Froude (Fr).....	346
6.4.7.	Κατασκευές ελέγχου όπου δημιουργείται κρίσιμη ροή.....	347
6.5.	Ανομοιόμορφη ροή σε ανοικτούς αγωγούς οποιασδήποτε διατομής.....	353
6.5.1.	Γενικότητες.....	353
6.5.2.	Διαφορικές εξισώσεις ενέργειας.....	361
6.5.3.	Κατά μήκος τομές ή προφίλ της ελεύθερης επιφάνειας του νερού.....	367
	α) Κρίσιμη, ήπια, απότομη κλίση πυθμένα.....	367
	β) Κρίσιμη ροή σε αλλαγή κλίσεως από ήπια σε απότομη.....	369
	γ) Ποιοτική ανάλυση της εξισώσεως ανομοιόμορφης ροής.....	371
6.6.	Μέθοδοι υπολογισμού ανομοιόμορφης ροής.....	382
6.6.1.	Γενικότητες.....	382
6.6.2.	Μέθοδοι κατ' ευθείαν ολοκληρώσεως.....	383
	α) Ανομοιόμορφη ροή μέσα σε πρισματικούς αγωγούς με οριζόντιο πυθμένα και εκθετική διατομή.....	384
	β) Ανομοιόμορφη ροή σε κεκλιμένους πρισματικούς αγωγούς.....	388
6.6.3.	Μέθοδοι κατά βήματα.....	401
	α) Μέθοδος κατά βήματα. Η απόσταση υπολογίζεται από το βάθος.....	402
	β) Βελτιωμένη μέθοδος κατά βήματα.....	405
	γ) Μέθοδος κατά βήματα. Το βάθος υπολογίζεται από την απόσταση.....	411
6.7.	Νόμος διατήρησης της ποσότητας κινήσεως στη ροή νερού σε ανοικτούς αγωγούς.....	416
6.7.1.	Γενικές εξισώσεις ποσότητας κινήσεως.....	416
6.7.2.	Συνάρτηση ποσότητας κινήσεως.....	420
6.7.3.	Υδραυλικά άλματα σε οριζόντιους αγωγούς.....	423
	α) Οριζόντιοι αγωγοί ορθογωνικής διατομής.....	423
	β) Οριζόντιοι αγωγοί εκθετικής διατομής.....	427
	γ) Υδραυλικά άλματα σε οριζόντιους τραπεζοειδείς αγωγούς.....	430
6.7.4.	Υδραυλικά άλματα σε κεκλιμένους αγωγούς.....	436
	α) Κεκλιμένοι αγωγοί εκθετικής διατομής.....	439

β) Κεκλιμένοι αγωγοί ορθογωνικής διατομής.....	440
γ) Κεκλιμένος αγωγός τριγωνικής διατομής.....	445
6.7.5. Υδραυλικά άλματα σε οριζόντιους αγωγούς με απότομη μεταβολή της διατομής.....	446
α) Απότομος μικρός καταβαθμός.....	446
β) Απότομος μικρός αναβαθμός.....	448
γ) Απότομη διεύρυνση διατομής.....	449
6.8. Καταβαθμοί ελεύθερης υδατόπτωσης.....	450
6.8.1. Γενικότητες.....	450
6.8.2. Ορθογωνικός καταβαθμός ελεύθερης υδατόπτωσης.....	455
6.8.2.1. Θεωρητική ανάλυση του Rouse.....	456
6.8.2.2. Θεωρητική ανάλυση με την εξίσωση ποσότητας κίνησης	460
6.8.2.3. Μέθοδος Τερζίδη για ορθογωνικούς καταβαθμούς με κρίσιμη και υπερκρίσιμη ροή.....	473
Πίνακας της συναρτήσεως ανομοιομορφης ροής.....	490
6.8. Λυμένα προβλήματα ανοικτών αγωγών.....	494
Παράρτημα	
6.8.3. Μέθοδοι υδραυλικών υπολογισμών στη βάση ελεύθερου καταβαθμού.....	573
Βιβλιογραφία	581

ΚΛΕΙΣΤΟΙ ΑΓΩΓΟΙ

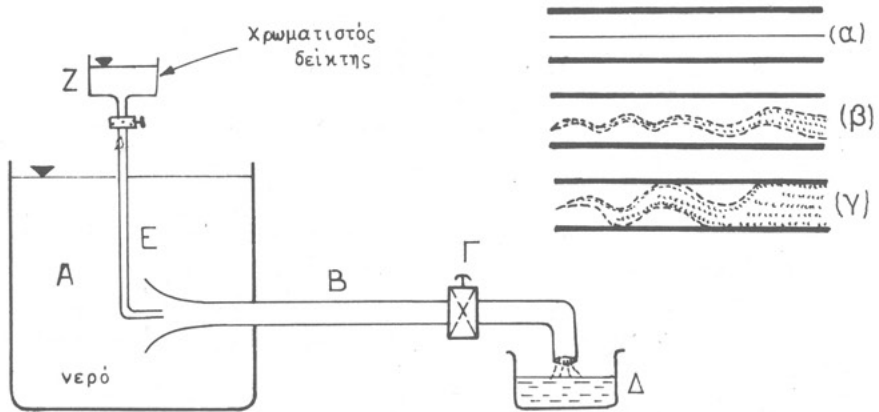
5.1. Γενικότητες

Η ροή των πραγματικών ρευστών είναι πιο πολύπλοκη από τη ροή των ιδανικών ή τέλειων ρευστών, εξαιτίας των φαινομένων, που προκαλούνται από την ύπαρξη του ιξώδους. Το ιξώδες προκαλεί διατμητικές τάσεις ή δυνάμεις τριβής μεταξύ των μορίων ενός ρευστού και μεταξύ των μορίων του ρευστού και των τοιχωμάτων των αγωγών, μέσα στους οποίους κινείται το ρευστό, με τελικό αποτέλεσμα να δημιουργείται αντίσταση προς την κίνηση. Για να υπάρξει ροή ενός πραγματικού ρευστού, πρέπει να εκτελεσθεί έργο για την υπερνίκηση αυτών των δυνάμεων αντιστάσεως και κατά τη διαδικασία αυτή η μηχανική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμότητα. Επίσης εξαιτίας του ιξώδους προκαλούνται τα φαινόμενα της οριακής στιβάδας, της αποκολλήσεώς της, των δευτερευουσών κινήσεων και της ανομοιόμορφης κατανομής των ταχυτήτων.

Οι επιδράσεις του ιξώδους αναγκάζουν ένα πραγματικό ρευστό να ρέει κάτω από δύο διαφορετικές καταστάσεις : την κατάσταση της *στρωτής ροής* και την κατάσταση της *τυρβώδους ροής*. Τα φυσικά χαρακτηριστικά των δυο αυτών καταστάσεων ροής μελετήθηκαν αρχικά το έτος 1883 από τον *O. Reynolds* με μια συσκευή ίδια με αυτήν του Σχ. 5.1.1.

Νερό από τη γυάλινη δεξαμενή *A* μπαίνει στο γυάλινο σωλήνα *B* μέσα από το κωδωνοειδές στόμιό του. Η παροχή του νερού μέσα στο σωλήνα *B* ρυθμίζεται με μια στρόφιγγα *Γ* και μετριέται με το ογκομετρικό δοχείο *Δ*. Ένας λεπτός σωλήνας *Ε* επιτρέπει μικρή παροχή με χρωματισμένο νερό από το δοχείο *Ζ* να εκρέει στο κέντρο του κωδωνοειδούς στομίου και να μπαίνει στο σωλήνα *B* με την κίνηση του νερού της δεξαμενής *A*.

Όταν η μέση ταχύτητα του νερού μέσα στο σωλήνα Β είναι μικρή, το χρωματισμένο νερό ρέει σαν ένα λεπτό ευθύγραμμο νήμα παράλληλο προς τον άξονα του σωλήνα (Σχ. 5.1.1 α). Με την αύξηση της ταχύτητας πάνω από μια ορισμένη τιμή, το χρωματισμένο νήμα γίνεται κυματοειδές, ταλαντεύεται και διευρύνεται (Σχ. 5.1.1 β). Με παραπέρα αύξηση της ταχύτητας, το χρωματισμένο νήμα σπάζει γρήγορα και διασκορπίζεται ακανόνιστα προς όλες τις κατευθύνσεις χρωματίζοντας όλη τη μάζα του νερού που είναι μέσα στο σωλήνα (Σχ. 5.1.1 γ).



Σχ. 5.1.1. Συσκευή Reynolds.

Ο *Reynolds* επανέλαβε πολλές φορές το παραπάνω πείραμα, μεταβάλλοντας όχι μόνο τη μέση ταχύτητα, αλλά και τη διάμετρο του σωλήνα καθώς και το συντελεστή ιξώδους του ρευστού. Τελικά απέδειξε ότι οι παραπάνω καταστάσεις ροής των Σχ. 5.1.1α, β, γ επαναλήφθηκαν για ορισμένες τιμές του αδιάστατου αριθμού $\frac{U \cdot D}{\nu}$. Ο αριθμός αυτός αργότερα ονομάστηκε *αριθμός του Reynolds* και συμβολίζεται :

$$Re = \frac{U \cdot D}{\nu} \quad (5.1.1)$$

όπου U = μέση ταχύτητα ροής,
 D = διάμετρος και
 ν = συντελεστής του κινηματικού ιξώδους.

Η κατάσταση ροής του Σχ. 5.1.1 α ονομάζεται *στρωτή ή παράλληλη ροή* και εμφανίζεται όταν οι τιμές του Re είναι μικρότερες του 2.000.

Η κατάσταση ροής του Σχ. 5.1.1 γ ονομάζεται *τυρβώδης ροή* και εμφανίζεται όταν οι τιμές του Re είναι μεγαλύτερες από 40.000 μέχρι 100.000.

Η κατάσταση του Σχ. 5.1.1. β, που είναι μια ασταθής ενδιάμεση κατάσταση μεταξύ στρωτής και τυρβώδους ροής, ονομάζεται *μεταβατική κατάσταση* και είναι δυνατό να εμφανισθεί για αριθμούς *Reynolds* μεταξύ των τιμών 2.000 ως 100.000, και εξαρτιέται από τους παρακάτω παράγοντες :

- α) από την αρχική ηρεμία του ρευστού,
- β) από το σχήμα εισόδου του σωλήνα Β,
- γ) από την τραχύτητα των τοιχωμάτων και
- δ) από τυχόν δονήσεις κατά την εκτέλεση του πειράματος.

Στη στρωτή ή παράλληλη ροή τα ρευστά μόρια κινούνται σε γραμμές ή στρώσεις παράλληλες μεταξύ τους και δεν υπάρχει μηχανική ανάμιξη των μορίων. Η διατμητική τάση τ ορίζεται από την εξίσωση:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (5.1.2)$$

όπου μ = συντελεστής δυναμικού ιξώδους και

$$\frac{du}{dy} = \text{η βαθμίδα ταχύτητας.}$$

Στην τυρβώδη ροή τα ρευστά μόρια κινούνται προς όλες τις κατευθύνσεις κατά έντελώς τυχαίο και απρόβλεπτο τρόπο, προκαλώντας την πλήρη ανάμιξη του ρευστού. Οι νόμοι της τυρβώδους ροής δεν είναι ακόμη γνωστοί. Η διατμητική τάση ανάμεσα σε δυο στρώσεις πλήρους τυρβώδους ροής δεν οφείλεται στο ιξώδες, αλλά μάλλον στην ανταλλαγή της ποσότητας κινήσεως μεταξύ των στρώσεων, καθώς τα μόρια της μιας στρώσεως αναμειγνύονται με τα μόρια της άλλης στρώσεως. Η μέση τιμή της διατμητικής τάσεως $\bar{\tau}$ στην πλήρως τυρβώδη ροή μπορεί να οριστεί σύμφωνα με τη θεωρία που αναπτύχθηκε από τον *J. Boussinesq*, από την εξίσωση (Βλέπε παρ. 5.4.2) :

$$\bar{\tau} = \eta \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (5.1.3)$$

όπου η = ο δυναμικός συντελεστής τυρβώδους και

$$\frac{d\bar{u}}{dy} = \text{η βαθμίδα της μέσης σημειακής ταχύτητας.}$$

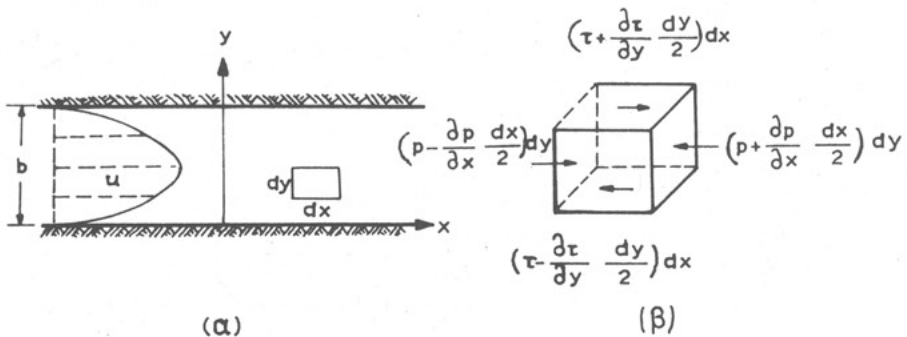
Στη μεταβατική κατάσταση εμφανίζονται και οι δύο προηγούμενες καταστάσεις ροής και κατά συνέπεια η διατμητική τάση, κατά τον J. Boussinesq, μπορεί να ορισθεί από την εξίσωση :

$$\bar{\tau} = (\mu + \eta) \frac{d\bar{u}}{dy} . \quad (5.1.4)$$

5.2. Σταθερή στρωτή ροή μεταξύ δύο παράλληλων πλακών

Ας θεωρήσουμε τη σταθερή στρωτή ροή μεταξύ δυο παράλληλων στερεών επίπεδων πλακών με άπειρες διαστάσεις που απέχουν μεταξύ τους απόσταση b . Το νερό ρέει κατά την οριζόντια x - διεύθυνση με σημειακή ταχύτητα u , που εξαρτιέται μόνο απ' την ανεξάρτητη μεταβλητή y , δηλαδή $u = f(y)$, (Σχ. 5.2.1).

Η ένταση της πίεσεως p δεν εξαρτιέται απ' το y γιατί οι γραμμές ροής είναι ευθείες και παράλληλες μεταξύ τους.



Σχ. 5.2.1. Στρωτή ροή μεταξύ παράλληλων πλακών.

Ας θεωρήσουμε ένα απειροστό όγκο, με διαστάσεις $(dx) \cdot (dy) \cdot (l)$, μέσα στη ροή και ας εφαρμόσουμε σ' αυτό το νόμο της διατήρησης της ποσότητας κινήσεως. Για μηδενική επιτάχυνση παίρνουμε (Σχ. 5.2.1. β) :

$$\begin{aligned} & \left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy + \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx - \\ & - \left(\tau - \frac{\partial \tau}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx = 0. \end{aligned}$$

Εκτελώντας τις αλγεβρικές πράξεις, τελικά παίρνουμε :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (5.2.1)$$

Απ' τις εξισώσεις (5.2.1) και (5.1.2) παίρνουμε :

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{l}{\mu} \frac{dp}{dx}, \quad (5.2.2)$$

όπου οι μερικές και ολικές παράγωγοι τών παραπάνω εξισώσεων είναι ισοδύναμες εξαιτίας της εξαρτήσεως κάθε όρου από μία μόνο μεταβλητή.

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (5.2.2) δυο φορές ως προς y και έχοντας υπόψη ότι το $\frac{dp}{dx}$ δεν εξαρτιέται απ' το y , παίρνουμε τη γενική λύση της εξισώσεως (5.2.2), δηλαδή

$$u = \frac{l}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 + C_1 y + C_2 \quad (5.2.3)$$

όπου C_1 και C_2 είναι οι σταθερές ολοκληρώσεως.

Οι τιμές τών C_1 και C_2 μπορούν να υπολογισθούν από τις οριακές συνθήκες της μηδενικής ταχύτητας στα στερεά τοιχώματα, δηλαδή :

$$u = 0 \quad \text{όταν} \quad y = 0 \quad \text{και} \quad y = b \quad (5.2.3 \alpha)$$

Πραγματικά αντικαθιστώντας τις παραπάνω συνθήκες στην εξίσωση (5.2.3), παίρνουμε :

$$C_2 = 0 \quad \text{και} \quad C_1 = - \frac{l}{2\mu} \frac{dp}{dx} b \quad (5.2.3 \beta)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές τών C_1 και C_2 απ' την εξίσωση (5.2.3 β) στην εξίσωση (5.2.3), παίρνουμε :

$$u = - \frac{l}{2\mu} \frac{dp}{dx} (by - y^2) \quad (5.2.4)$$

Η εξίσωση (5.2.4) δείχνει ότι η κατανομή της σημειακής ταχύτητας στη σταθερή ροή μεταξύ παράλληλων πλακών είναι *παραβολική*. Η κλίση η βαθμίδα της πίεσεως είναι αρνητική γιατί η πίεση ελαττώνεται κατά τη διεύθυνση της ροής.

Απ' την εξίσωση (5.2.4) αποδείχεται ότι η ταχύτητα παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή στο μεσοδιάστημα μεταξύ των πλακών, δηλαδή όταν $y = \frac{b}{2}$. Αντικαθιστώντας την τιμή $y = \frac{b}{2}$ στην εξίσωση (5.2.4), παίρνουμε :

$$u_{max} = - \frac{b^2}{8\mu} \frac{dp}{dx} \quad (5.2.5.)$$

Η ανά μονάδα πλάτους παροχή q είναι :

$$q = \int u \, dy = \int_0^b - \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (by - y^2) \, dy = - \frac{b^3}{12\mu} \frac{dp}{dx} \quad (5.2.6)$$

Άρα η μέση ταχύτητα ροής είναι :

$$V = \frac{q}{b} = - \frac{b^2}{12\mu} \frac{dp}{dx} = \frac{2}{3} u_{max} \quad (5.2.7)$$

Απ' την εξίσωση (5.2.7) μπορούμε να υπολογίσουμε την πτώση της πίεσεως μεταξύ δυο σημείων 1 και 2, που βρίσκονται σε απόσταση $L = x_2 - x_1$ μεταξύ τους κατά τη διεύθυνση της ροής, όπως φαίνεται παρακάτω :

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = - \frac{12\mu V}{b^2} \int_{x_1}^{x_2} dx$$

ή

$$p_2 - p_1 = - \frac{12\mu V}{b^2} (x_2 - x_1)$$

ή

$$p_1 - p_2 = \frac{12\mu VL}{b^2} \quad (5.2.8)$$

Απ' τις εξισώσεις (5.1.2) και (5.2.4) μπορούμε να υπολογίσουμε τη μεταβολή της διατμητικής τάσεως. Έτσι έχουμε :

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{d}{dy} \left[- \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (by - y^2) \right]$$

ή

$$\tau = - \frac{dp}{dx} \left(\frac{b}{2} - y \right) \quad (5.2.9)$$

Η εξίσωση (5.2.9) δείχνει ότι η διατμητική τάση είναι μηδενική

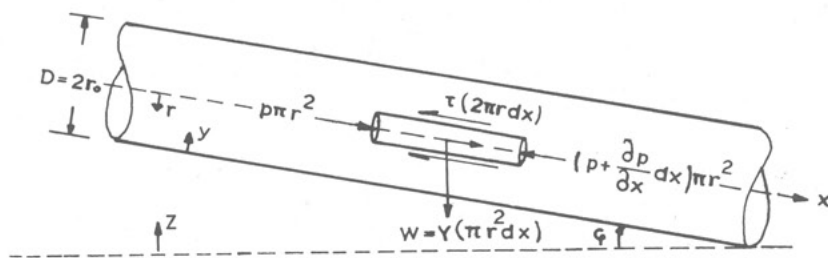
στο κέντρο ($\tau = 0$ όταν $y = \frac{b}{2}$) και αυξάνει γραμμικά απ' το κέντρο προς τα τοιχώματα, παίρνοντας μεγαλύτερη τιμή $\tau = -\frac{dp}{dx} \frac{b}{2}$ στο τοίχωμα $y = 0$.

5.3. Σταθερή στρωτή ροή μέσα σε σωλήνα

Ας θεωρήσουμε τη σταθερή στρωτή ροή μέσα σε σωλήνα με σταθερή διάμετρο, που σχηματίζει γωνία φ με το οριζόντιο επίπεδο (βλέπε Σχ. 5.3.1). Το νερό ρέει κατά τη x - διεύθυνση με σημειακή ταχύτητα u , που εξαρτιέται μόνο απ' την ανεξάρτητη μεταβλητή r , δηλαδή $u = f(r)$.

Η ένταση της πίεσεως p δεν εξαρτιέται απ' το r γιατί οι γραμμές ροής είναι ευθείες και παράλληλες μεταξύ τους.

Ας θεωρήσουμε έναν απειροστό κυλινδρικό όγκο ρευστού, με μήκος dx και ακτίνα r , όπως φαίνεται στο Σχ. 5.3.1. Σ' αυτόν ενεργούν οι δυνάμεις πίεσεως, τριβής και βάρους. Εφαρμόζοντας τον νόμο της δια-



Σχ. 5.3.1. Σταθερή στρωτή ροή μέσα σε σωλήνα.

τηρήσεως της ποσότητας κινήσεως κατά την x - διεύθυνση, παίρνουμε για μηδενική επιτάχυνση :

$$p \pi r^2 - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \pi r^2 - \tau (2\pi r dx) + \gamma (\pi r^2 dx) \eta \mu \varphi = 0$$

Εκτελώντας τις αλγεβρικές πράξεις, παίρνουμε :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} \frac{r}{2} - \tau + \gamma \frac{r}{2} \eta \mu \varphi = 0$$

Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς τ και έχοντας υπόψη ότι $\eta \mu \varphi = -\frac{dz}{dx}$, παίρνουμε :

$$\tau = -\frac{\gamma}{2} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dx} + \frac{dz}{dx} \right) r$$

Για τα ασυμπίεστα ρευστά το $\gamma = \rho g = \text{σταθερό}$ και άρα η παραπάνω εξίσωση γράφεται :

$$\tau = -\frac{\gamma}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{p}{\gamma} + z \right) r$$

ή

$$\tau = -\frac{\gamma}{2} \frac{dh}{dx} r \quad (5.3.1)$$

όπου $h = \frac{p}{\gamma} + z = \text{το πιεζομετρικό ύψος ή φορτίο.}$

Η εξίσωση (5.1.2) μπορεί να γραφεί με ανεξάρτητη μεταβλητή την ακτίνα r , όπως παρακάτω :

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{du}{dr} \frac{dr}{dy} = -\mu \frac{du}{dr} \quad (5.3.2)$$

γιατί έχουμε :

$$r = r_0 - y$$

και άρα

$$\frac{dr}{dy} = -1 .$$

Απ' τής εξισώσεις (5.3.1) και (5.3.2), παίρνουμε :

$$\mu \frac{du}{dr} = \frac{\gamma}{2} \frac{dh}{dx} r$$

ή

$$du = \frac{\gamma}{2\mu} \frac{dh}{dx} r dr \quad (5.3.3)$$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (5.3.3) ως προς r , παίρνουμε :

$$u = \frac{\gamma}{4\mu} \frac{dh}{dx} r^2 + C \quad (5.3.4)$$

όπου C = σταθερή ολοκληρώσεως, που μπορεί να προσδιοριστεί από την οριακή συνθήκη $u = 0$ όταν $r = r_0$.

Πραγματικά αντικαθιστώντας τις τιμές $u = 0$ και $r = r_0$ στην εξίσωση (5.3.4), παίρνουμε :

$$C = - \frac{\gamma}{4\mu} \frac{dh}{dx} r_0^2 \quad (5.3.5)$$

Από τις εξισώσεις (5.3.4) και (5.3.5) παίρνουμε :

$$u = - \frac{\gamma}{4\mu} \frac{dh}{dx} (r_0^2 - r^2) \quad (5.3.6)$$

Η εξίσωση (5.3.6) δείχνει ότι η κατανομή της ταχύτητας στη σταθερή στρωτή ροή μέσα σε σωλήνα είναι *παραβολική* (παραβολοειδής εκ περιστροφής). Η κλίση ή βαθμίδα του πιεζομετρικού φορτίου είναι αρνητική γιατί το πιεζομετρικό φορτίο ελαττώνεται κατά τη διεύθυνση της ροής.

Απ' την εξίσωση (5.3.6) αποδείχνεται ότι η ταχύτητα παίρνει τη μέγιστη τιμή στο κέντρο του σωλήνα, δηλαδή όταν $r = 0$. Αντικαθιστώντας την τιμή $r = 0$ στην εξίσωση (5.3.6) παίρνουμε :

$$u_{max} = - \frac{\gamma}{4\mu} \frac{dh}{dx} r_0^2 \quad (5.3.7)$$

Απ' τις εξισώσεις (5.3.6) και (5.3.7) παίρνουμε επίσης :

$$u = u_{max} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right] \quad (5.3.8)$$

Η μέση ταχύτητα ροής $V = \frac{Q}{E} = \frac{Q}{\pi r_0^2}$, παίρνεται ως εξής :

$$V = \frac{Q}{\pi r_0^2} = \frac{I}{\pi r_0^2} \int u \, dE = \frac{I}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} \left[- \frac{\gamma}{4\mu} \frac{dh}{dx} (r_0^2 - r^2) \right] 2\pi r \, dr$$

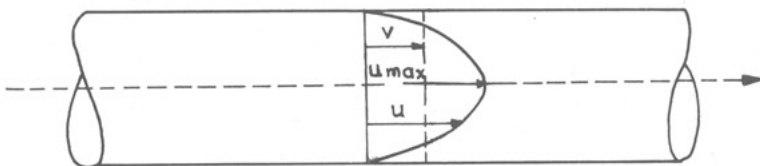
και μετά την ολοκλήρωση

$$V = - \frac{\gamma}{8\mu} \frac{dh}{dx} r_0^2 \quad (5.3.9)$$

Απ' τις εξισώσεις (5.3.7) και (5.3.9) παίρνουμε :

$$V = \frac{1}{2} u_{max}, \quad (5.3.10)$$

δηλαδή η μέση ταχύτητα της στρωτής ροής μέσα σε σωλήνα είναι ίση με το μισό της σημειακής ταχύτητας στο κέντρο του.



Σχ. 5.3.2. Κατανομή ταχύτητας στρωτής ροής μέσα σε σωλήνα.

Λύνοντας την εξίσωση (5.3.9) ως προς dh , παίρνουμε :

$$-dh = \frac{8\mu V}{\gamma r_0^2} dx$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω εξίσωση μεταξύ των ορίων x_1 και x_2 παίρνουμε :

$$-(h_2 - h_1) = \frac{8\mu V}{\gamma r_0^2} (x_2 - x_1) \quad (5.3.11)$$

Αλλά $x_2 - x_1 = L =$ το μήκος του σωλήνα μεταξύ x_1 και x_2 και $r_0 = D/2$. Άρα η εξίσωση (5.3.11) γράφεται :

$$h_1 - h_2 = \frac{32 \rho \nu V}{\rho g D^2} L = \frac{64 \nu L}{VD} \frac{V^2}{2g}$$

ή

$$h_1 - h_2 = \frac{64}{Re} \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (5.3.12)$$

όπου $Re = \frac{VD}{\nu} =$ ο αριθμός *Reynolds*.

Η εξίσωση (5.3.12) δίνει την απώλεια του πιεζομετρικού ύψους ή φορτίου της σταθερής στρωτής ροής μέσα σε σωλήνα. Η εξίσωση (5.3.12) αποτελεί μερική περίπτωση μιας γενικότερης εξισώσεως απωλειών φορτίου ή ενέργειας, που είναι γνωστή σαν εξίσωση των *Darcy-Weisbach* και που έχει τη μορφή :

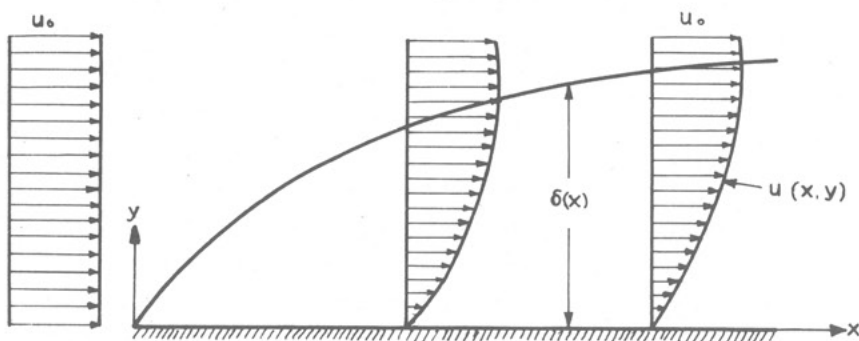
$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (5.3.13)$$

όπου h_f = το ύψος απωλειών ενέργειας εξαιτίας της τριβής, και f = συντελεστής τριβής.

Στην περίπτωση της σταθερής στρωτής ροής (βλέπε εξίσωση (5.3.12), ο συντελεστής τριβής $f = \frac{64}{Re}$ εξαρτιέται μόνο απ' τον αριθμό *Reynolds*.

5.4. Θεωρία των οριακών στιβάδων

Όταν ένα πραγματικό ρευστό κινείται επάνω σε μια στερεή επιφάνεια με ταχύτητα u_0 τα μόριά του που βρίσκονται σε άμεση επαφή μ' αυτήν «προσκολλιούνται» επάνω της με αποτέλεσμα η ταχύτητά τους να μηδενίζεται. Αυτό έχει σαν συνέπεια να δημιουργείται μια μεταβατική περιοχή επάνω στην επιφάνεια όπου η ταχύτητα του ρευστού μεταβάλλεται από μηδέν σε u_0 . Η περιοχή αυτή αποτελεί τη λεγόμενη οριακή στιβάδα. Μέσα στην οριακή στιβάδα η κλίση της ταχύτητας du/dy είναι πολύ μεγάλη. Έτσι η διατμητική τάση $\tau = \mu \frac{du}{dy}$ παίρνει μεγάλες τιμές και οι δυνάμεις τριβής είναι μεγαλύτερες απ' τις δυνάμεις αδράνειας και πίεσης. Αντίθετα στο εξωτερικό πεδίο ροής οι δυνάμεις τριβής έχουν μία πολύ μικρή επίδραση και η ροή ελέγχεται απ' τις δυνάμεις αδράνειας και πίεσης σε συνάρτηση με τη γεωμετρία των στερεών όριων. Το πάχος της οριακής στιβάδας αυξάνεται κατά τη διεύθυνση της ροής και έχει τη μορφή, που παρουσιάζεται στο σχήμα 5.4.1, όπου οι διαστάσεις έχουν υπερμεγεθυνθεί.

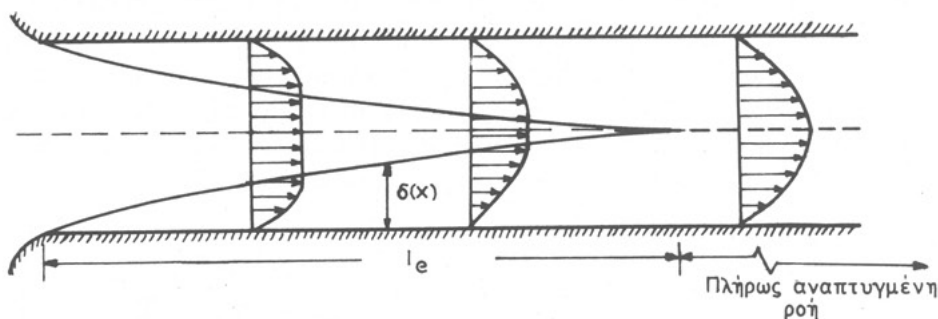


Σχήμα 5.4.1. Οριακή στιβάδα πάνω σε στερεή επιφάνεια.

Η ταχύτητα του ρευστού πριν απ' τη στερεή επιφάνεια είναι ομοιόμορφη. Πάνω απ' αυτήν όμως μεταβάλλεται από μηδέν μέχρι u_0 . Το πάχος της οριακής στιβάδας δ αυξάνεται κατάντη της ροής καθώς μεγαλύτερες ποσότητες ρευστού επηρεάζονται απ' τη στερεή επιφάνεια. Προφανώς το πάχος δ μειώνεται με μείωση του ιξώδους του ρευστού. Ακόμη όμως και σε πολύ μικρό ιξώδες (π.χ. αέρας), η οριακή στιβάδα δεν εξαφανίζεται. Πάντοτε υπάρχει μιὰ έστω και πολύ λεπτή περιοχή όπου η ροή επηρεάζεται απ' τη μηδενική ταχύτητα του ρευστού πάνω στη στερεή επιφάνεια.

Οριακές στιβάδες σχηματίζονται κατά τη ροή ρευστών πάνω σε κάθε στερεή επιφάνεια και φυσικά και μέσα σε κλειστούς αγωγούς. Το σχήμα 5.4.1α δείχνει το σχηματισμό της οριακής στιβάδας μέσα σ' ένα κλειστό αγωγό. Στην είσοδο του αγωγού σχηματίζονται δυο ανεξάρτητες οριακές στιβάδες, οι οποίες μετά από ένα μήκος εισροής l_e συγκλίνουν για να δώσουν την πλήρως αναπτυγμένη ροή.

Η θεωρία των οριακών στιβάδων άρχισε να αναπτύσσεται το 1904 από το γερμανό μηχανικό και μαθηματικό *L. Prandtl* και αποτελεί σήμερα ένα απ' τα θεμελιώδη κεφάλαια της μηχανικής και της δυναμικής των ρευστών. Με τη χρήση των οριακών στιβάδων βρήκαν εξήγηση πολλά δύσκολα ή και ανεξήγητα φαινόμενα της ροής των ρευστών. Η αντίσταση, πού συναντά ένα σώμα κατά την κίνησή του μέσα σ' ένα ρευστό, το



Σχήμα 5.4.1α. Οριακές στιβάδες σε κλειστό αγωγό.

σχήμα που πρέπει να έχει το σώμα για να μειωθεί αυτή η αντίσταση στο ελάχιστο, η ανταλλαγή θερμότητας μεταξύ ενός σώματος και ενός ρευστού, πού ρέει γύρω απ' αυτό είναι μερικά απ' τα φαινόμενα όπου ο ρόλος των οριακών στιβάδων είναι αποφασιστικός.

Οι οριακές στιβάδες διακρίνονται σε στρωτές και τυρβώδεις. Ο σχηματισμός τους μέσα σε κλειστούς αγωγούς περιγράφεται σε γενικές

γραμμές στη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου. Η λεπτομερής περιγραφή των οριακών στιβάδων ξεφεύγει απ' τα όρια αυτού του μαθήματος.

5.4.1. Στρωτές οριακές στιβάδες σε κλειστούς αγωγούς

Το σχήμα 5.4.1α δείχνει τη μορφή της στρωτής οριακής στιβάδας μέσα σ' ένα κλειστό αγωγό. Το πάχος δ της οριακής στιβάδας αυξάνεται μέχρι το σημείο που η ροή αναπτύσσεται πλήρως, αποκτά δηλαδή την τελική σταθερή κατανομή ταχύτητας. Το μήκος εισροής le για στρωτή ροή έχει υπολογισθεί πειραματικά απ' τον *Boussinesq* και είναι :

$$le = 0,065 Re D \quad (5.4.1)$$

όπου D είναι η διάμετρος του αγωγού και $Re = \frac{VD}{\nu}$ είναι ο αριθμός Re με V τη μέση ταχύτητα ροής στον κλειστό αγωγό.

Οι εξισώσεις που διέπουν τη σταθερή στρωτή ροή σε κλειστούς αγωγούς περιγράφονται στην παράγραφο 5.3.

5.4.2. Τυρβώδης ροή - Γενικότητες

Η μεγάλη πλειονότητα των ροών που συναντιούνται στη φύση είναι τυρβώδεις ενώ οι στρωτές ροές που μελετιούνται κυρίως στη μηχανική των ρευστών είναι μάλλον σπάνιες εξαιρέσεις. Ο βασικός λόγος που προτιμούνται οι στρωτές ροές για μελέτη είναι ότι είναι απλούστερη η κατανόησή τους. Αντίθετα οι τυρβώδεις ροές είναι πολύπλοκες και μέχρι σήμερα δεν έχει επιτευχθεί μια ολοκληρωμένη και γενικά παραδεκτή μελέτη τους.

Κατά την τυρβώδη ροή τα μόρια του ρευστού παράλληλα με την κίνησή τους προς την κύρια διεύθυνση της ροής κινούνται τυχαία και προς όλες τις διευθύνσεις. Η μπλεγμένη αυτή μορφή του τυρβώδους επηρεάζει πολλές ιδιότητες του ρευστού που διαφέρουν σημαντικά μεταξύ των στρωτών και τυρβωδών ροών. Έτσι οι τυρβώδεις ροές μεταφέρουν πολύ μεγαλύτερη ποσότητα κινήσεως και επομένως σε πολλές περιπτώσεις ασκούν πολύ μεγαλύτερες δυνάμεις στα στερεά σώματα, που είναι σ' επαφή με το ρευστό. Επίσης οι τυρβώδεις ροές έχουν πολύ μεγαλύτερη ικανότητα να μεταφέρουν θερμότητα και ευδιάλυτα και αδιάλυτα στο ρευστό συστατικά. Οι ιδιότητες αυτές των τυρβωδών ροών μαζί με το γεγονός ότι παρουσιάζουν και μεγάλο ενδιαφέρον από καθα-

ρά θεωρητική πλευρά είχαν σαν συνέπεια να απασχολήσουν ένα μεγάλο αριθμό επιστημόνων απ' τις αρχές του αιώνα αυτού. Το κοινό σημείο στην αντιμετώπιση του τυρβώδους απ' την πλειονότητα των επιστημόνων αυτών είναι η στατιστική. Η ίδια η φύση του τυρβώδους απαιτεί μόνο στατιστικές μεθόδους αντιμετώπισεως. Η περιγραφή δηλαδή των χαρακτηριστικών της ροής (ταχύτητας, πίεσεως, θερμοκρασίας κ.λπ.) με μια ορισμένη σταθερή τιμή είναι στην πραγματικότητα αδύνατη. Επιπλέον είναι και χωρίς ενδιαφέρον δεδομένου ότι η μπλεγμένη μορφή του τυρβώδους αποκλείει την δυνατότητα χρησιμοποιήσεως σταθερών τιμών για τα χαρακτηριστικά της ροής σε οποιοδήποτε πρακτικό πρόβλημα. Ο επιστήμονας που έβαλε τις βάσεις της στατιστικής περιγραφής του τυρβώδους είναι ο *O. Reynolds* (1894), που πρότεινε την παράσταση όλων των χαρακτηριστικών της ροής σαν το άθροισμα μιας μέσης τιμής και μίας διακυμάνσεως γύρω απ' αυτήν την τιμή. Έτσι αν u, v, w είναι οι συνιστώσες της σημειακής ταχύτητας κατά τις τρεις διευθύνσεις x, y και z τότε έχουμε: $u = \bar{u} + u', v = \bar{v} + v', w = \bar{w} + w'$ όπου $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ είναι οι μέσες τιμές και u', v', w' είναι οι διακυμάνσεις γύρω απ' τις μέσες τιμές. Κατά τον ίδιο τρόπο η ένταση πίεσης, η θερμοκρασία κ.λπ. παριστάνονται σαν $p = \bar{p} + p'$ και $T = \bar{T} + T'$. Για τον προσδιορισμό των τιμών $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p}, \bar{T}$ κ.λπ. ο *Reynolds* πρότεινε τη χρήση μέσων τιμών ως προς τον χρόνο ή τον χώρο.

Χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες σχέσεις για τα χαρακτηριστικά της ροής στις εξισώσεις *Navier - Stokes* ο *Reynolds* πήρε ένα καινούργιο σύστημα εξισώσεων της τυρβώδους ροής που ονομάζονται *εξισώσεις Reynolds*. Το σύστημα αυτό των εξισώσεων έχει το χαρακτηριστικό ότι έχει περισσότερους άγνωστους από εξισώσεις. Η εξάλειψη της άπροσδιοριστίας του συστήματος αυτού αποτελεί ένα από τα μεγαλύτερα προβλήματα στη θεωρία του τυρβώδους. Λόγω της φύσεως του τυρβώδους πλήρης αναλυτική λύση του προβλήματος αυτού είναι για την ώρα τουλάχιστον αδύνατη. Έτσι οι επιστήμονες έχουν αναγκαστεί να κάνουν ορισμένες υποθέσεις, όπως του ισότροπου και ομογενούς τυρβώδους (*Taylor* 1915, 1932) και να χρησιμοποιήσουν ημιεμπειρικές θεωρίες, που βασίζονται σε πειραματικά δεδομένα και παρατηρήσεις. (*Von Karman* 1930, *Prandtl* 1925, *Kolmogoroff* 1931, 1933, 1941, κ.λπ.) Μερικές από τις ημιεμπειρικές αυτές μεθόδους αντιμετώπισεως του τυρβώδους περιγράφονται στη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου.

5.4.3. Τυρβώδεις οριακές στιβάδες σε κλειστούς αγωγούς

Στην περίπτωση τυρβώδους ροής η οριακή στιβάδα σχηματίζεται

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ*

6.8.3. Μέθοδοι υδραυλικών υπολογισμών στη βάση ελεύθερου καταβαθμού

Στις προηγούμενες παραγράφους 6.8.2.1, 2 και 3, αναλύθηκαν λεπτομερώς τα υδραυλικά χαρακτηριστικά της ροής του νερού στην κεφαλή του ελεύθερου ορθογωνικού καταβαθμού. Στο Σχ. 6.8.1(α) φαίνεται επίσης και η "βάση της ελεύθερης υδατόπτωσης" που περιλαμβάνει το κατώτερο τμήμα του κρουνού του νερού και τη "λεκάνη καταστροφής της ενέργειας". Οι "απώλειες ενέργειας" οφείλονται στους έντονους στροβιλισμούς και τις άλλες τριβές στην περιοχή πρόσκρουσης της υδάτινης φλέβας, στη λιμνούλα που σχηματίζεται μεταξύ καταβαθμού και υδάτινης φλέβας, καθώς και στο υδραυλικό άλμα που δημιουργείται στη συνέχεια και εγκλωβίζεται μέσα στη λεκάνη υδατόπτωσης με τη βοήθεια μικρού αναβαθμού.

Είναι προφανές ότι το τμήμα αυτό του καταβαθμού είναι πιο εντυπωσιακό σαν υδραυλικό φαινόμενο αλλά και πολύ πιο δύσκολο να αναλυθεί, υδραυλικά και μαθηματικά, με την εφαρμογή των βασικών νόμων της υδραυλικής και μάλιστα της μονοδιάστατης σταθερής ροής.

Παρά τις δυσκολίες που παρουσιάζει αυτό το υδραυλικό φαινόμενο, έγιναν πολλές προσπάθειες επίλυσής του από διαπρεπείς ερευνητές με υδραυλικά μοντέλα υπό κλίμακα που ειδικά κατασκευάσθηκαν σχεδόν σε όλα τα καλά εργαστήρια υδραυλικής. Από τις ερευνητικές εργασίες που κατά καιρούς πραγματοποιήθηκαν, σχετικά πολύ λίγες είδαν το φως της δημοσιότητας σε έγκυρα επιστημονικά περιοδικά.

Σημαντική συμβολή στην περιγραφή και κατανόηση του υδραυλικού φαινομένου της βάσης του ελεύθερου καταβαθμού υπήρξε η ερευνητική εργασία του *Moore* (1943), η οποία μαζί με τις εποικοδομητικές κριτικές που δέχτηκε από τους πιο διαπρεπείς ερευνητές (*White, M.P., Bakhmeteff, B.A., Feodoroff, N.V., Kindsvater, C.E., Christiansen, J.E.* και *Hunder Rouse*) αποτέλεσε τη βάση κάθε άλλης σχετικής ερευνητικής εργασίας που ακολούθησε αργότερα.

Οπωσδήποτε όμως, η θεωρητική ανάλυση του *White* (1943) και οι σχετικές εμπειρικές εξισώσεις του *Rand* (1954), οι οποίες βασίσθηκαν

* Συμπλήρωμα της §6.8. της σελ. 493

λιμνούλας.

4) Η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας στη διατομή (Α) είναι $V_x = V \cos \varphi$ όπου φ είναι η γωνία που σχηματίζει η υδάτινη φλέβα με την οριζόντια x -διεύθυνση.

Με βάση τις παραπάνω παραδοχές οι εξισώσεις συνέχειας, ποσότητας κίνησης και ενέργειας χωρίς απώλειες, μεταξύ των διατομών (C) και (Α) είναι:

$$q = y_c V_c = y_c \div g y_c \quad (6.8.136)$$

$$\frac{1}{2} \gamma y_c^2 - 0 = \rho q (V \cos \varphi - V_c) \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} \gamma y_c^2 + \frac{\gamma}{g} q V_c = \rho q V \cos \varphi \quad (6.8.137)$$

$$\Delta z_0 + \frac{3}{2} y_c = \frac{V^2}{2g} + z_A \quad \text{ή} \quad \Delta z_0 + \frac{3}{2} y_c = \frac{V^2}{2g} + y_p \quad (6.8.138)$$

5) Στον ελεγχόμενο όγκο $AZ\Gamma\Delta$ η σταθερή παροχή $Q=Bq$ εισέρχεται με ταχύτητα V , που είναι μεταβαλλόμενη μέχρι την πρόσκρουση στο στερεό πυθμένα της βάσης, όπου αλλάζει κατεύθυνση με ένα ποσοστό παροχής το οποίο κινείται προς τα πίσω (αριστερά) ανακυκλούμενο και ένα μεγαλύτερο ποσοστό το οποίο κινείται προς τα δεξιά. Σε κατάσταση ισορροπίας που επέρχεται όταν σταθεροποιηθεί η ελεύθερη επιφάνεια της λιμνούλας με μικρές κυματοειδείς διακυμάνσεις και ελαφρά κλίση προς τα δεξιά, καθώς και με ελαφρά μετατόπιση της υδάτινης φλέβας προς τα δεξιά, η τελική παροχή Q που εξέρχεται από τον ελεγχόμενο όγκο στη διατομή Δ είναι ίδια με την αρχική, δηλαδή $Q = qB$. Όλες οι απώλειες από τριβές στα στερεά τοιχώματα και τριβές στη διεπιφάνεια μεταξύ "ενεργού" φλέβας νερού και ανακυκλώμενου νερού στη λιμνούλα και λόγω των δινών του τυρβώδους, μπορούν να εκφραστούν με μια συνισταμένη δύναμη F_x με κατεύθυνση προς τα αριστερά.

Οποιαδήποτε σταγονίδια που αποκόπτονται από την υδάτινη φλέβα και την πρόσκρουσή της στην επιφάνεια της λιμνούλας επανέρχονται στον ελεγχόμενο όγκο και τυχόν εισροή αέρα θεωρείται αμελητέα.

6) Η κατανομή πίεσης στο αριστερό όριο του $Z\Gamma$ και στο δεξιό όριο Δ είναι υδροστατική, ενώ η πίεση στο επίπεδο της λιμνούλας συμπεριλαμβανομένης και της περιοχής πρόσκρουσης, είναι ατμοσφαιρική (μη-δενική).

Με βάση τις παραδοχές (5) και (6) η εξίσωση ποσότητας κίνησης στον ελεγχόμενο όγκο $AZ\Gamma\Delta$ είναι:

$$\frac{1}{2} \gamma y_p^2 - \frac{1}{2} \gamma y_1^2 - \frac{F_x}{B} = \rho q (V_1 - V \cos \theta) \quad (6.8.139)$$

όπου V_1 και y_1 είναι η ταχύτητα και το βάθος ροής στη διατομή (1) η οποία για ευκολία θεωρήθηκε ότι συμπίπτει με τη διατομή (Δ).

Οι *Rajaratnam* και *Chamani* (1995) έκαναν τις επιπλέον παραδοχές:

7) Ότι η γωνία θ που σχηματίζει η υδάτινη φλέβα στον πυθμένα της βάσης για να αλλάξει προς τη x διεύθυνση είναι ίση με τη γωνία φ και

8) Ότι η συνισταμένη δύναμη τριβών και τυρβώδους F_x είναι αμελητέα και μπορεί να παραλειφθεί.

Με τις επιπλέον αυτές παραδοχές και με τη χρησιμοποίηση της εξίσωσης συνέχειας $q = V_c y_c = V_1 y_1$ η εξίσωση (6.8.139) γίνεται:

$$\frac{1}{2} \gamma y_p^2 - \frac{1}{2} \gamma y_1^2 = \frac{\gamma}{g} \frac{q^2}{y_1} - \rho q V \cos \varphi \quad (6.8.140)$$

Διαιρώντας τις εξισώσεις (6.8.137) και (6.8.140) δια $\frac{1}{2} \gamma H^2$ και την εξίσωση (6.8.138) δια H , όπου χάρη ευκολίας θέσαμε $H/\Delta z_0$, και εκτελώντας τις σχετικές πράξεις και απλοποιήσεις, παίρνουμε:

$$V \cos \varphi = 1,5 \div g H \frac{y_c}{H}^{1/2} \quad (6.8.141)$$

$$V = \div 2 g H \frac{1 + 1,5 \frac{y_c}{H} - \frac{y_p}{H}}{H}^{1/2} \quad (6.8.142)$$

$$\frac{y_p^2}{H} - \frac{y_1^2}{H} = 2 \frac{y_c^3}{H} \frac{H}{y_1} - \frac{2}{\div g H} \frac{y_c^{3/2}}{H} V \cos \varphi \quad (6.8.143)$$

Από τις εξισώσεις (6.8.141) και (6.8.142) παίρνουμε:

$$\cos \varphi = \frac{1,5}{\div 2} \frac{(y_c/H)}{1 + 1,5(y_c/H) - (y_p/H)}^{1/2} \quad (6.8.144)$$

Από τις εξισώσεις (6.8.141) και (6.8.143) παίρνουμε:

$$\frac{y_p^2}{H} - \frac{y_1^2}{H} = 2 \frac{y_c^3}{H} \frac{H}{y_1} - 3 \frac{y_c^2}{H} \quad (6.8.145)$$

Με γνωστά το κρίσιμο βάθος (ή την παροχή) και το ύψος του καταβαθμού, έχουμε δύο εξισώσεις (6.8.144) και (6.8.145) και τρεις άγνωστους φ , $\frac{y_p}{H}$ και $\frac{y_1}{H}$, καθώς επίσης και τη δυσκολία ότι η εξίσωση (6.8.145) είναι τρίτου βαθμού ως προς y_1/H . Συνεπώς χρειάζεται να δίνεται από μετρήσεις ένας από τους τρεις αγνώστους φ ή y_p ή y_1 .

Οι *Rajaratnam* και *Chamani* παρόλο ότι στα πειράματά τους μετρήσανε όλες τις παραμέτρους (παροχή q , ταχύτητες V_c και V_1 , βάθη y_p , y_c και y_1) βρήκαν ότι είχαν καλύτερα αποτελέσματα από τις μετρήσεις του y_p το οποίο μπορεί να εκφρασθεί με την εμπειρική εξίσωση:

$$\frac{y_p}{H} = 1,107 \frac{y_c}{H}^{0,719} \quad (6.8.146)$$

Έτσι από τις τρεις εξισώσεις (6.8.144, 145, 146) μπορούν να υπολογισθούν αμέσως τα y_p και φ και στη συνέχεια με δοκιμές ή με αριθμητική μέθοδο να υπολογισθεί το y_1 από την τριτοβάθμια εξίσωση (6.8.145).

Οι απώλειες ενέργειας στον καταβαθμό μεταξύ των διατομών (C) και (1) υπολογίζονται από την εξίσωση:

$$\frac{\Delta E_L}{E_0} = \frac{E_0 - E_1}{E_0} = 1 - \frac{E_1}{E_0} = 1 - \frac{\frac{y_1}{H} + 0,5 \frac{y_c}{H}^3 / \frac{y_1}{H}^2}{1 + 1,5 \frac{y_c}{H}} \quad (6.8.147)$$

Η πορεία των υπολογισμών της μεθόδου των *Rajaratnam-Chamani* είναι η ακόλουθη:

- 1) Από τα δεδομένα q και $\Delta z_0 \int H$ του προβλήματος υπολογίζουμε το κρίσιμο βάθος y_c από την εξίσωση (6.8.136) και στη συνέχεια το πηλίκο (y_c/H).
- 2) Από την εξίσωση (6.8.146) υπολογίζουμε το πηλίκο (y_p/H).
- 3) Από την εξίσωση (6.8.144) υπολογίζουμε τη γωνία φ (αν ζητείται).
- 4) Από την εξίσωση (6.8.145) υπολογίζουμε το πηλίκο y_1/H με δοκιμές ή με αριθμητική μέθοδο π.χ. με τη μέθοδο *Newton*.
- 5) Από την εξίσωση (6.8.147) υπολογίζουμε τις απώλειες ενέργειας.

Ο *M.P. White* (1943) σε εποικοδομητική κριτική πάνω στην πειραματική εργασία του *Moore* (1943) παρουσίασε μια αναλυτική μέθοδο, που βασίστηκε σε ορισμένες αμφισβητήσιμες παραδοχές (*Gill* (1979), *Rajaratnam-Chamani* (1995)).

Παρόλα αυτά τα αποτελέσματα της μεθόδου *White* κρίθηκαν ικανο-

ποιητικά και υιοθετήθηκαν από την διεθνή βιβλιογραφία. Μάλιστα ο *F.M. Henderson* (1966) στη σελίδα 200 του συγγράμματός του "*Open Channel Flow*" λέει ... "Αυτή η ανάλυση του *White* συν ιστάται στον αναγνώστη σαν ένα καλό παράδειγμα ότι μια επιδέξια διατύπωση και σύλληψη των θεμελιωδών αρχών μπορεί να δώσει εκπληκτικά ακριβείς λύσεις σε προβλήματα τα οποία με την πρώτη ματιά φαίνονται να μην επιδέχονται θεωρητικές μεθόδους".

Οι αντίστοιχες εξισώσεις της μεθόδου *White* είναι (Τερζίδης 1982):

$$\cos\theta = \frac{1,06}{\frac{\frac{y_1}{y_c}}{1+1,5}} \quad \eta \quad \cos\theta = \frac{1,5 \div y_c/H}{\div 2 \frac{\frac{y_c}{H}}{1+1,5}} \quad (6.8.148)$$

$$\frac{y_1}{y_c} = \frac{\div 2}{1,06 + \frac{\frac{H}{y_c}}{1+1,5}}^{1/2} \quad \eta \quad \frac{y_1}{H} = \frac{\div 2 (y_c/H)}{1,06 + \frac{\frac{H}{y_c}}{1+1,5}}^{1/2} \quad (6.8.149)$$

$$\frac{\Delta E_L}{y_c} = \frac{E_0}{y_c} - \frac{E_1}{y_c} = \frac{H}{y_c} + 1,5 - \frac{E_1}{y_c} \quad (6.8.150)$$

$$\text{όπου } E_1 = y_1 + \frac{q^2}{2gy_1^2} = y_1 + \frac{y_c^3}{2y_1^2} \quad \text{και } E_0 = H + 1,5y_c \quad (6.8.151\alpha, \beta)$$

Η εξίσωση (6.8.150) μπορεί επίσης να γραφεί:

$$\frac{\Delta E_L}{E_0} = 1 - \frac{E_1}{E_0} = 1 - \frac{\frac{\frac{y_1}{H} + \frac{1}{2} \frac{y_c}{H}}{1+1,5} \frac{y_1^2}{H}}{\frac{y_c}{H}} \quad (6.8.152)$$

Η εξίσωση (6.8.152) έχει βέβαια φαινομενικά την ίδια μορφή με την εξίσωση (6.8.147) αλλά διαφέρουν στις τιμές του (y_1/H) . Προφανώς η μέθοδος *White* είναι πιο εύκολη στους υπολογισμούς των θ , y_1/H και $\Delta E_L/E_0$.

Στο Σχ. 6.8.14 φαίνονται οι καμπύλες υπολογισμού της αδιάστατης απώλειας ενέργειας με τις δύο προηγούμενες μεθόδους για y_c/H από 0,06 έως 0,40 καθώς και τα πειραματικά δεδομένα *Moore*, *Rand* και *Rajaratnam-Chamani*. Η μέθοδος *White* υπερεκτιμά τις απώλειες, ενώ η μέθοδος *R-C* τις υποεκτιμά με μικρότερα σφάλματα για μικρές τιμές

του y_d/H η πρώτη και για μεγαλύτερες τιμές η δεύτερη. Οποσδήποτε, όλα τα πειραματικά περικλείονται μεταξύ των καμπυλών των δύο μεθόδων. Γενικά η μέθοδος των *Rajaratnam* και *Chamani* είναι αρκετά καλύτερη της μεθόδου *White* και της μεθόδου του *Gill*.

Ο Τερζίδης το 1996 μελετώντας όλες τις προαναφερθείσες μεθόδους και πειραματικά (Βλέπε *M. Ρίζου* (1996) καθώς και τις σχετικές εργασίες του *Robinson* (1989, 1992)) διαπίστωσε ότι η δύναμη τριβών και τυρβώδου $F(x)$ μπορεί να εκφρασθεί ως εκθετική συνάρτηση του $(y_d/H)^N$.

Με βάση τις παραπάνω παραδοχές η εξίσωση (6.8.145) μπορεί να συμπεριλάβει και τις δυνάμεις τριβών με την μορφή:

$$\frac{y_p}{H}^2 - \frac{y_l}{H}^2 - 0,0422 \frac{y_c}{H}^{0,8} = 2 \frac{y_c}{H}^3 \frac{H}{y_l} - 3 \frac{y_c}{H}^2 \quad (6.8.153)$$

Επίσης ο Τερζίδης το 1996 από τα πειραματικά δεδομένα των παραπάνω ερευνητών και με τη μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων βρήκε τις παρακάτω εμπειρικές εξισώσεις:

$$\frac{y_p}{H} = 1,142 \frac{y_c}{H}^{0,737}, \quad \text{για } 0,06 \leq \frac{y_c}{H} \leq 0,522 \quad (6.8.154)$$

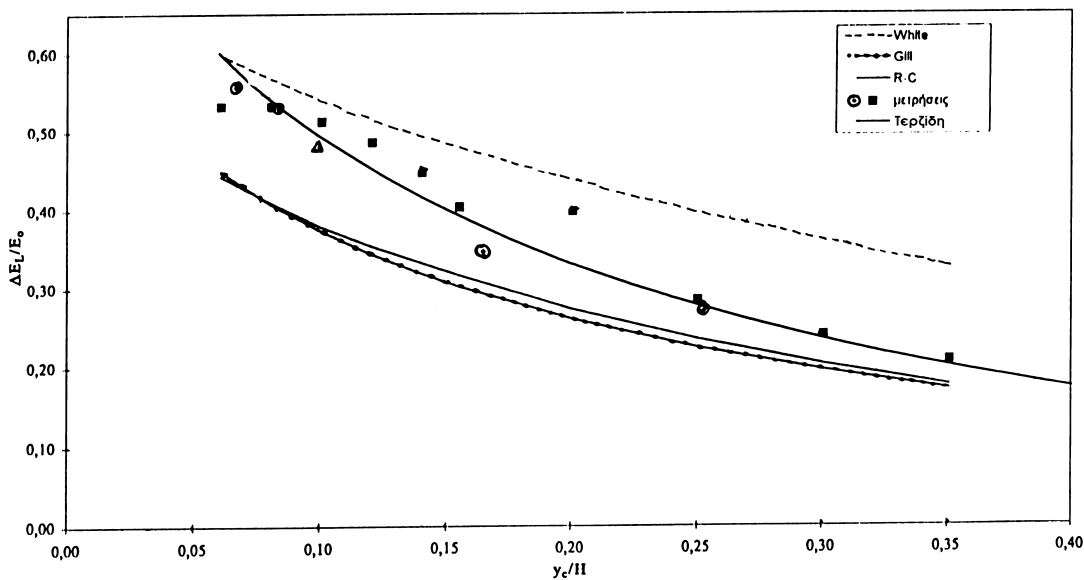
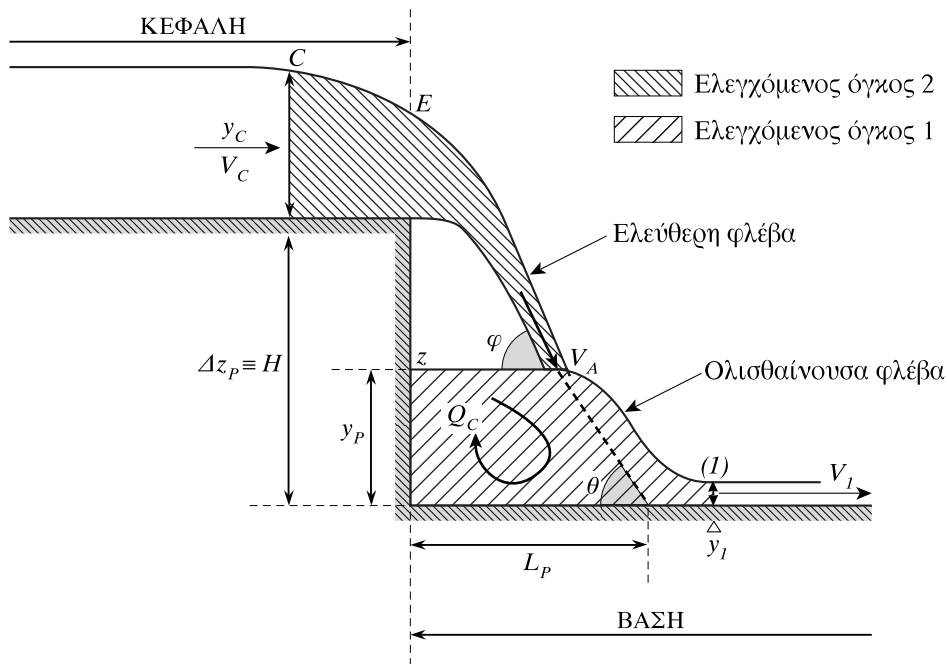
και

$$\frac{y_l}{H} = 0,514 \frac{y_c}{H}^{1,232}, \quad \text{για } 0,06 \leq \frac{y_c}{H} \leq 0,522 \quad (6.8.155)$$

Η διαφορά στους αριθμητικούς συντελεστές μεταξύ των εξισώσεων (6.8.154) και (6.8.146) οφείλεται στο γεγονός ότι στην (6.8.154) χρησιμοποιήθηκαν περισσότερα πειραματικά δεδομένα από διάφορους ερευνητές και καλύπτουν μεγαλύτερο εύρος τιμών του y_d/H . Το ίδιο ισχύει και για την εξίσωση (6.8.155).

Συνεπώς στη μέθοδο Τερζίδη έχουμε τρεις εξισώσεις (6.8.144), (6.8.153) και (6.8.154) ή (6.8.155) και τρεις άγνωστους θ , $\frac{y_p}{H}$ και $\frac{y_l}{H}$.

Όμως, η εξίσωση (6.8.153) είναι 3ου βαθμού ως προς (y_l/H) και 2ου βαθμού ως προς (y_p/H) . Έτσι αν χρησιμοποιηθούν οι τρεις πρώτες εξισώσεις με τη σειρά (6.8.154), (6.8.144) και τελευταία η (6.8.153) θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος δοκιμών ή η μέθοδος *Newton* για τον υπολογισμό του y_l/H από την εξίσωση (6.8.153). Ενώ αν χρησιμοποιηθούν οι εξισώσεις (6.8.155), (6.8.153) και τελευταία η (6.8.144) υπολογίζονται και οι τρεις άγνωστοι πιο εύκολα, γιατί δεν έχουμε τριτοβάθμια εξίσωση.



Σχ. 6.8.14 Απώλειες ενέργειας στη βάση ελεύθερου καταβαθμού με τις μεθόδους *White*, *Gill*, *Rajaratnam-Chamani* και *Τερζίδης*.

Βέβαια υπάρχει ο προβληματισμός της ακρίβειας της μέτρησης του y_p ή του y_l και η σχετική ευαισθησία σε τυχόν σφάλματα μετρήσεων. Από την εμπειρία που έχουμε τα τελικά σφάλματα μετρήσεων και υπολογισμών, ακόμη και με μετρήσεις του y_l ή του y_p με ακίδα, είναι της ίδιας τάξης και μέσα στα ανεκτά όρια.

Στο ίδιο σχ. 6.8.14 φαίνεται και η καμπύλη υπολογισμών της μεθόδου Τερζίδη με τη χρησιμοποίηση των τιμών του y_l/H από την εξίσωση (6.8.155) και αντικατάστασή της στην εξίσωση (6.8.147) και η υπεροχή της έναντι των άλλων μεθόδων είναι εμφανέστατη. Και οι τρεις μέθοδοι μπορούν εύκολα να προγραμματιστούν σε H/Y PC και να παίρνονται τα αριθμητικά ή γραφικά αποτελέσματα ταχύτατα.

Σε περίπτωση σχηματισμού υδραυλικού άλματος στη βάση του καταβαθμού έχουμε πρόσθετες απώλειες ενέργειας το ύψος του οποίου μπορεί να υπολογιστεί από το γνωστό τύπο απωλειών του υδραυλικού άλματος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Rajaratnam, N. και Chamani, M. R., "Energy loss at drops" Journal of Hydraulic Research, Vol. 33, 1995, No. 3, p. 373-384.
2. Ρίζου Μαρία, "Υπολογισμός των Ενεργειακών απωλειών στη λεκάνη ελεύθερου ορθογωνικού καταβαθμού "Πτυχιακή διατριβή, Τομέας Εγγείων Βελτιώσεων, Εργαστήριο Γενικής και Γεωργικής Υδραυλικής και Βελτιώσεων, Τμήμα Γεωπονίας Α.Π.Θ. 1996, σελίδες 120.