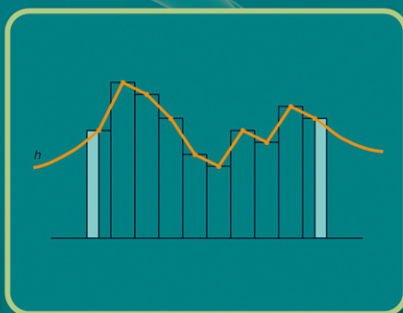
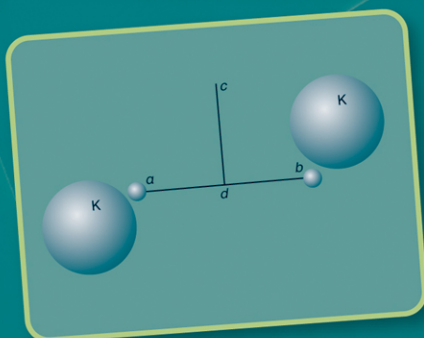
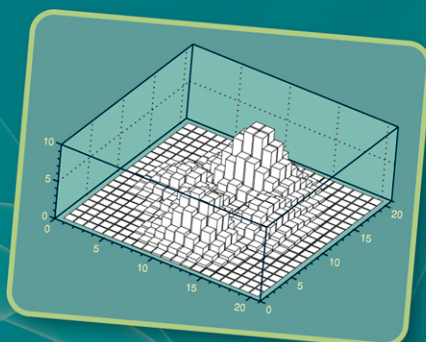
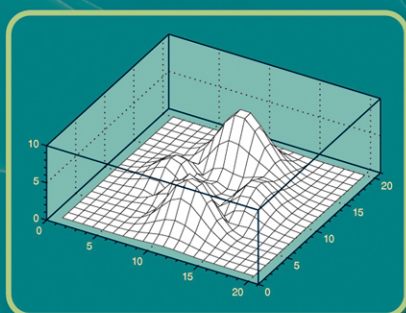


Δημήτριος Τσούλης

Εφαρμογές Θεωρίας Δυναμικού

Αναλυτικές, αριθμητικές και υβριδικές μέθοδοι
στη μοντελοποίηση του βαρυτικού σήματος
γνωστών κατανομών μάζας



Δημήτριος Τσούλης

Καθηγητής Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης

ISBN 978-960-456-390-6

© Copyright: Τσούλης Δημήτριος, Εκδόσεις Ζήτη, Νοέμβριος 2013

Applications of Potential Theory

Analytical, numerical and hybrid methods for the modelling of known mass distributions

D. Tsoulis, 2013

The Aristotle University of Thessaloniki

Το παρόν έργο πνευματικής ιδιοκτησίας προστατεύεται κατά τις διατάξεις του ελληνικού νόμου (Ν.2121/1993 όπως έχει τροποποιηθεί και ισχύει σήμερα) και τις διεθνείς συμβάσεις περί πνευματικής ιδιοκτησίας. Απαγορεύεται απολύτως η άνευ γραπτής άδειας του εκδότη κατά οποιοδήποτε τρόπο ή μέσο αντιγραφή, φωτοανατύπωση και εν γένει αναπαραγωγή, εκμίσθωση ή δανεισμός, μετάφραση, διασκευή, αναμετάδοση στο κοινό σε οποιαδήποτε μορφή (ηλεκτρονική, μηχανική ή άλλη) και η εν γένει εκμετάλλευση του συνόλου ή μέρους του έργου.

Φωτοστοιχειοθεσία

Εκτύπωση

Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ

18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας

Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19

Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr



www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ:

Αρμενοπούλου 27, 546 35 Θεσσαλονίκη

Τηλ.: 2310.203.720, Fax: 2310.211.305 • e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΠΩΛΗΣΗ ΛΙΑΝΙΚΗ-ΧΟΝΔΡΙΚΗ:

Χαριλάου Τρικούπη 22, 106 79 Αθήνα

Τηλ.-Fax: 210.3816.650 • e-mail: athina@ziti.gr

ΣΤΟΑ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ - ΕΝΩΣΗ ΕΚΔΟΤΩΝ ΒΙΒΛΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ:

Πεσμαζόγλου 5, 105 64 Αθήνα • Τηλ.-Fax: 210.3211.097

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

στους γονείς μου

Πρόλογος

Η διατύπωση από τον Νεύτωνα του νόμου της παγκόσμιας έλξης αποτελεί χωρίς αμφιβολία μία από τις κορυφαίες στιγμές του ανθρώπινου πνεύματος. Ο Νεύτωνας κατάφερε στο έργο του *Principia* να αποδείξει με αυστηρό τρόπο ότι η δύναμη έλξης που ασκείται από μία πεπερασμένη κατανομή μάζας σε τυχαία σημεία του χώρου έχει μέτρο που είναι αντιστρόφως ανάλογο της απόστασης των σημείων από τη μάζα, προσφέροντας με αυτόν τον τρόπο το μαθηματικό υπόβαθρο κατανόησης μιας από τις καθοριστικότερες δυνάμεις της φύσης. Ταυτόχρονα όμως ώθησε τις επόμενες γενιές μαθηματικών και φυσικών να ασχοληθούν με συστηματικό πλέον τρόπο με τη δύναμη της βαρύτητας, για την οποία η κατανόηση της προέλευσης και κυρίως του τρόπου μετάδοσής της στο χώρο αποτελεί ένα ανοιχτο πεδίο έρευνας μέχρι τις μέρες μας.

Η ανάπτυξη του διανυσματικού λογισμού, της ανάλυσης με άλλα λόγια όχι συναρτήσεων και μεταβλητών αλλά διανυσμάτων, υπήρξε μία από τις συνέπειες του έργου του Νεύτωνα. Μεγάλοι μαθηματικοί εργάστηκαν στις αρχές και τα εργαλεία του νέου αυτού κλάδου των μαθηματικών. Gauss, Green, Stokes, Laplace, Poisson, είναι τα ονόματα μερικών από αυτούς που εμφανίζονται σήμερα σε πολλά θεωρήματα και ολοκληρωματικούς τύπους. Η μελέτη του πεδίου βαρύτητας αλλά και του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι άρρηκτα συνδεδεμένες με τα μέσα και τους τελεστές του διανυσματικού λογισμού. Από την παρακολούθηση της τροχιάς και την ανάλυση των δεδομένων ενός δορυφόρου μέχρι τη μελέτη της κίνησης ενός ρευστού ο διανυσματικός λογισμός αποτελεί το απαραίτητο εργαλείο για να διατυπωθούν αλλά κυρίως να μελετηθούν αριθμητικά τα διάφορα διανυσματικά και βαθμωτά πεδία καθώς και φυσικά μεγέθη που περιγράφονται με τη βοήθεια διανυσμάτων.

Το παρόν σύγγραμμα απευθύνεται σε προπτυχιακούς και μεταπτυχιακούς φοιτητές αλλά και ερευνητές Πολυτεχνικών Σχολών και Σχολών Θετικών Επιστημών που πρόκειται να διδαχθούν διανυσματική ανάλυση ή επιθυμούν να χρησιμοποιήσουν οι ίδιοι κάποια από τα εργαλεία της. Έχει γραφεί με ιδιαίτερη έμφαση στις εφαρμογές τόσο σε επίπεδο απλών ιδεατών παραδειγμάτων όσο και χρησιμοποιώντας σύγχρονα δεδομένα παγκόσμιας κάλυψης, όπως για παράδειγμα τα δεδομένα υψομετρίας ενός παγκόσμιου ψηφιακού μοντέλου εδάφους.

Το δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζει τους βασικούς τελεστές και τα σημαντικότερα θεωρήματα του διανυσματικού λογισμού. Τους θεωρητικούς ορισμούς συνοδεύουν περιγραφικές ερμηνείες καθώς και 28 λυμένα παραδείγματα που φιλοδοξούν να προ-

σφέρουν έναν οδηγό κατανόησης των βασικών εργαλείων της διανυσματικής ανάλυσης.

Οι αναλυτικές, αριθμητικές και υβριδικές τεχνικές για τον υπολογισμό της συναρτήσεως του δυναμικού, της δύναμης έλξης και των δευτέρων παραγώγων του δυναμικού που ορίζονται από μία πεπερασμένη κατανομή μάζας παρουσιάζονται στα επόμενα τρία κεφάλαια. Πέρα από τα ιδεατά γεωμετρικά σώματα (σφαίρα, σφαιρικό κέλυφος, ορθογώνιο πρίσμα, κύλινδρος, πολύεδρο κ.λπ.) που παρουσιάζονται σε αυτές τις ενότητες το 6ο κεφάλαιο πραγματεύεται τον τρόπο υπολογισμού των ίδιων συναρτήσεων στην περίπτωση των διατεταγμένων δεδομένων ενός ψηφιακού μοντέλου εδάφους. Το 7ο κεφάλαιο παρουσιάζει δύο παραδείγματα προσομοίωσης που αναδεικνύουν τον τρόπο εφαρμογής του τυπολογίου των προηγούμενων κεφαλαίων στην περίπτωση εργαστηριακών πειραμάτων μεγάλης ακρίβειας, όπου μία λεπτομερής μοντελοποίηση της βαρυτικής επίδρασης όλων των μαζών είναι απαραίτητη.

Τα τρία τελευταία κεφάλαια είναι αφιερωμένα στις φασματικές τεχνικές. Σφαιρική αρμονική ανάλυση και σύνθεση, τοπογραφικά/ισοστατικά μοντέλα του πεδίου βαρύτητας και συναρτήσεις wavelet είναι οι μεθοδολογίες που παρουσιάζονται εδώ. Η ευελιξία και η αποτελεσματικότητα των φασματικών μεθόδων και ιδιαίτερα η ικανότητά τους να χειριστούν αριθμητικά μεγάλους όγκους δεδομένων παγκόσμιας κάλυψης (είτε επίγειων ψηφιακών βάσεων δεδομένων είτε δορυφορικών παρατηρήσεων) τις κάνουν ένα αναπόσπαστο εργαλείο μοντελοποίησης και ερμηνείας για τις σύγχρονες εφαρμογές.

Θεσσαλονίκη, Οκτώβριος 2013

Δημήτριος Τσούλης

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
2	Στοιχεία διανυσματικού λογισμού	13
2.1	Βασικοί τελεστές	14
2.2	Ο τελεστής ανάδελτα	35
2.3	Ο τελεστής της απόκλισης	45
2.4	Ο τελεστής της περιστροφής	53
2.5	Παραγωγή και ολοκλήρωση διανυσμάτων	61
2.6	Τα θεωρήματα των Gauss, Stokes και Green	72
3	Αναλυτικές μέθοδοι	77
3.1	Εισαγωγή	77
3.2	Απλό σφαιρικό στρώμα	85
3.3	Συμπαγής σφαίρα	93
3.3.1	Το σημείο υπολογισμού εκτός της σφαίρας	93
3.3.2	Το σημείο υπολογισμού εντός της σφαίρας	95
3.4	Σφαιρικό κέλυφος πεπερασμένου πάχους	98
3.4.1	Το σημείο υπολογισμού στο εσωτερικό των μαζών	99
3.5	Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο	100
3.5.1	Αριθμητικές απροσδιοριστίες	106
3.6	Απλό στρώμα κυκλικής διατομής	121
3.6.1	Το σημείο υπολογισμού έξω από τον άξονα συμμετρίας	124

3.7	Ορθός κυκλικός κύλινδρος	128
3.7.1	Το σημείο υπολογισμού στην επάνω βάση του κυλίνδρου	131
3.7.2	Το σημείο υπολογισμού έξω από τον άξονα συμμετρίας	132
3.8	Ορθός κυκλικός κώνος	140
3.8.1	Η ακτίνα του κώνου ισούται με το ύψος του ($h = R$)	142
3.8.2	Η ακτίνα του κώνου δεν ισούται με το ύψος του ($h \neq R$)	145
3.9	Γενικευμένο πολύεδρο	148
3.9.1	Η μέθοδος των γραμμικών ολοκληρωμάτων	152
3.9.2	Παρακολουθώντας τις θέσεις των P και P'	182
3.9.3	Υπολογισμός των συντεταγμένων των προβολών P''	186
3.9.4	Υπολογισμός των τελικών εκφράσεων	188
4	Αριθμητικές μέθοδοι	191
4.1	Εισαγωγή	191
4.2	Σφαιρικές συντεταγμένες	192
4.2.1	Σφαιρικό κέλυφος πεπερασμένου πάχους	198
4.3	Κυλινδρικές συντεταγμένες	201
4.3.1	Ορθός κυκλικός κύλινδρος	205
4.4	Καρτεσιανές συντεταγμένες	217
4.4.1	Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο	217
4.4.2	Γενικευμένο πολύεδρο	227
5	Υβριδικές μέθοδοι	283
5.1	Εισαγωγή	283
5.2	Ο ταχύς μετασχηματισμός Fourier	286
5.2.1	Το πρόβλημα απροσδιοριστίας της μεθόδου Fourier	304
5.3	Υβριδικές μέθοδοι Fourier	308
5.3.1	Οι μέθοδοι γραμμικών και πρισματικών μαζών	321
5.4	Η μέθοδος των διγραμμικών επιφανειών	329

5.5	Η μέθοδος των τεσσεροειδών	343
6	Εφαρμογές σε ψηφιακά μοντέλα εδάφους	385
6.1	Ο ρόλος της τοπογραφίας στον υπολογισμό του γεωειδούς	386
6.2	Πρακτικοί υπολογισμοί τοπογραφικών διορθώσεων	397
6.3	Αποτελέσματα υβριδικών μεθόδων	408
6.4	Παγκόσμια ψηφιακά μοντέλα τοπογραφίας και φλοιού	438
7	Εφαρμογές στο εργαστήριο	465
7.1	Εισαγωγή	465
7.2	Βαθμονόμηση ενός ζυγού στρέψης	467
7.3	Χρονικά μεταβαλλόμενη βαρύτητα στο δορυφόρο STEP	473
8	Σφαιρική αρμονική ανάλυση και σύνθεση	483
8.1	Σημειακές τιμές δεδομένων	486
8.2	Μέσες τιμές γεωγραφικών διαμερισμάτων	495
8.3	Το φασματικό σχήμα του Meissl	502
9	Ισοστασία και πεδίο βαρύτητας	507
9.1	Το μοντέλο Airy/Heiskanen	511
9.2	Το μοντέλο Pratt/Hayford	519
9.3	Θεωρητική διερεύνηση στον υπολογισμό τοπογραφικών/ισοστατικών μοντέλων	529
9.4	Το μοντέλο των απλών στρωμάτων	536
9.5	Εφαρμογή στα δεδομένα του CRUST 2.0	553
10	Πολυφασματικές εφαρμογές	575
10.1	Βασικές έννοιες των συναρτήσεων wavelet	576
10.2	Υπολογισμός του βαρυτικού σήματος πεπερασμένων κατανομών	581
10.3	Σφαιρικά wavelets	589

Βιβλιογραφία	597
Ευρετήριο	617

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Τον Ιούλιο του 1687 η Βασιλική Εταιρεία επιστημών στο Λονδίνο δημοσίευσε το τρίτομο έργο του Ισαάκ Νεύτωνα *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Το συγκεκριμένο έργο που έχει γίνει περισσότερο γνωστό ως *Principia* αντιμετωπίζεται από τότε από την πλειοψηφία των φυσικών επιστημόνων και όχι μόνο, ως μία από τις κορυφαίες κατακτήσεις του ανθρώπινου πνεύματος. Με τα υπολογιστικά εργαλεία που είχε στη διάθεσή του ο Νεύτωνας απέδειξε μαθηματικά ότι οι κινήσεις των πλανητών του ηλιακού μας συστήματος καθορίζονται από μία δύναμη η οποία ορίζεται επάνω στη διεύθυνση που συνδέει τον κάθε πλανήτη με τον ήλιο και το μέτρο της είναι αντιστρόφως ανάλογο της απόστασης του πλανήτη από τον ήλιο. Η ύπαρξη αυτής της δύναμης ήταν γνωστή ως βαρύτης ήδη από τον 4ο αιώνα π.Χ. από τον Αριστοτέλη, ενώ το ερώτημα για την παγκοσμιότητά της απασχόλησε ιδιαίτερα τον Γαλιλαίο (1564-1642) ο οποίος επιχείρησε να διερευνήσει πειραματικά εάν σώματα διαφορετικής σύστασης έλκονται με τον ίδιο τρόπο από τη βαρύτητα της γης.

Ωστόσο ο Νεύτωνας ήταν αυτός που πραγματικά κατανόησε τόσο την παγκοσμιότητα όσο και τα ειδικότερα μαθηματικά χαρακτηριστικά του πεδίου της δύναμης της βαρύτητας. Είναι τέτοια η συνεισφορά του στη μελέτη της βαρύτητας που οι νόμοι του εξακολουθούν να περιγράφουν τις κινήσεις σωμάτων, τεχνητών δορυφόρων και πλανητών με μαθηματική ακρίβεια που ικανοποιεί τη συντριπτική πλειοψηφία των εφαρμογών. Η αδιαμφισβήτητη σημασία του έργου του Albert Einstein (1879-1955) ιδιαίτερα στα πλαίσια της γενικής θεωρίας της σχετικότητας συμπλήρωσε την γνώση μας βοηθώντας μας να κατανοήσουμε και να περιγράψουμε μαθηματικά τη βαρύτητα για τις τεράστιες διαστρικές και διαγαλαξιακές αποστάσεις. Όμως, αντί να ακυρώσει, η συνεισφορά του Einstein ισχυροποίησε ακόμη περισσότερο τα θεμέλια των νόμων του Νεύτωνα ανυψώνοντας την αξία του έργου του σε ένα επίπεδο που εξακολουθεί να προκαλεί το θαυμασμό ακόμα και στις μέρες μας.

Ο παγκόσμιος νόμος της βαρύτητας ή νόμος της παγκόσμιας έλξης όπως έχει καθιερωθεί να ονομάζεται εμφανίζεται σε μία συνεκτική διατύπωση για πρώτη φορά στην πρόταση VII, θεώρημα VII του βιβλίου III του Principia ως εξής

‘Ότι υπάρχει μία δύναμη βαρύτητας η οποία χαρακτηρίζει όλα τα σώματα και είναι ανάλογη των διαφορετικών ποσοτήτων μάζας που αυτά περιέχουν.’

Νωρίτερα, στην πρόταση V, θεώρημα V, πόρισμα II, ο Νεύτωνας έχει οδηγηθεί σε ένα άλλο σημαντικό συμπέρασμα

‘Η δύναμη της βαρύτητας η οποία ασκείται σε κάποιο σημείο έλκοντάς το προς κάθε έναν πλανήτη είναι αντίστροφη του τετραγώνου της απόστασης του συγκεκριμένου σημείου από το κέντρο του κάθε ένα πλανήτη.’

Μια σημαντική παρατήρηση που πρέπει να γίνει σε αυτό το σημείο αφορά τις γεωμετρικές διαστάσεις των σωμάτων που εμπλέκονται στις σχετικές διερευνήσεις και τις συγκεκριμένες διατυπώσεις που εμφανίζονται στο έργο του Νεύτωνα. Έτσι, οι μαθηματικές αποδείξεις που οδηγούν στα προαναφερθέντα θεωρήματα βασίζονται στην υπόθεση ότι τα σώματα που προκαλούν τη βαρυτική δύναμη αποτελούν στοιχειώδεις σημειακές κατανομές μάζας. Ο Νεύτωνας προσέγγισε τις πραγματικές διαστάσεις των πλανητών του ηλιακού μας συστήματος θεωρώντας ότι αποτελούνται από έναν πεπερασμένο αριθμό μικρότερων κομματιών. Πιο συγκεκριμένα στην πρόταση VII, θεώρημα VII, πορίσματα I & II διαβάζουμε

‘Έτσι η δύναμη της βαρύτητας η οποία ασκείται σε κάποιο σημείο προς το σύνολο καθενός πλανήτη προκύπτει και συνθέτεται από τις δυνάμεις της βαρύτητας προς το σύνολο των μικρότερων μερών του ... Η δύναμη της βαρύτητας η οποία ασκείται σε κάποιο σημείο προς τα διαφορετικά στοιχειώδη μέρη ενός σώματος είναι αντίστροφη του τετραγώνου της απόστασης του συγκεκριμένου σημείου από τη θέση αυτών των στοιχειωδών σωμάτων.’

Με τον τρόπο αυτό ο Νεύτωνας διαλεύκανε τη βασική ιδιότητα του πεδίου βαρύτητας. Οι βασικοί νόμοι που διατυπώνονται για τις σημειακές μάζες ισχύουν αθροιστικά και για τα σώματα πεπερασμένου όγκου. Επιπλέον, περισσότερα του ενός σώματα ασκούν ξεχωριστές ελκτικές δυνάμεις στο ίδιο σημείο, οι οποίες δρουν αθροιστικά ως συνισταμένες μιας συνολικής δύναμης έλξης η οποία και καθορίζει την

κίνηση του σημείου στο χώρο. Το συγκεκριμένο χαρακτηριστικό της δύναμης της βαρύτητας περιγράφεται σήμερα στη θεωρία του δυναμικού ως αρχή της υπέρθεσης (*superposition principle*) σύμφωνα με την οποία η βαρυτική έλξη ενός συνόλου μαζών σε ένα σημείο υπολογίζεται ως το άθροισμα των επί μέρους βαρυτικών έλξεων των μαζών αυτών στο ίδιο σημείο. Η μαθηματική επέκταση των διατυπώσεων του Νεύτωνα σε σώματα με πεπερασμένες διαστάσεις αποτελεί μία τεχνική λεπτομέρεια συμβολισμού και πραγματοποιείται πλέον με τα εργαλεία του ολοκληρωματικού λογισμού.

Ο ακριβής υπολογισμός των βαρυτικών επιδράσεων των γήινων μαζών αποτελεί σήμερα ένα κομβικό σημείο στη μοντελοποίηση και μελέτη του γήινου πεδίου βαρύτητας. Σε παγκόσμια κλίμακα οι πραγματικές κατανομές μαζών στο εσωτερικό της γης είναι αυτές που καθορίζουν το τελικό παρατηρούμενο βαρυτικό σήμα. Είναι η παρατήρηση αυτού του σήματος είτε με επίγειες είτε με δορυφορικές τεχνικές που μας δίνει με τη μορφή μιας διακριτής πληροφορίας τη δυνατότητα να αναζητήσουμε τη γεωμετρική δομή και τη σύσταση των κρυμμένων κατανομών που το προκαλούν. Στις εφαρμογές παγκόσμιας κλίμακας, όπου οι βασικές άγνωστες παράμετροι είναι οι σφαιρικοί αρμονικοί συντελεστές ενός αναπτύγματος της συνάρτησης του βαρυτικού δυναμικού, οι γήινες μάζες μοντελοποιούνται με τη βοήθεια παγκόσμιων ψηφιακών μοντέλων τοπογραφίας, βαθυμετρίας και δομής και σύστασης του γήινου φλοιού. Τα ίδια δεδομένα χρησιμοποιούνται και για τοπικές εφαρμογές μοντελοποίησης και ερμηνείας του πεδίου βαρύτητας. Όμως, εάν στις παγκόσμιας κλίμακας εφαρμογές οι γήινες μάζες εκφράζουν μια συνεισφορά η οποία διατρέχει το φάσμα του παρατηρούμενου πεδίου στο σύνολό του, οι τοπογραφικές μάζες σε μία τοπική εφαρμογή, ιδιαίτερα αυτές που βρίσκονται κοντά στο σημείο υπολογισμού, καθορίζουν τις υψηλές συχνότητες του βαρυτικού σήματος. Υποδηλώνουν έτσι μία διαταρακτική επίδραση τοπικού χαρακτήρα, η οποία εξαιτίας της κοντινής απόστασης επηρεάζει μεν σημαντικά τις πρωτογενείς παρατηρήσεις βαρύτητας, εκφράζει όμως μία συνεισφορά που αλλοιώνει το πραγματικό βαρυτικό σήμα. Ενώ δηλαδή στις παγκόσμιες εφαρμογές οι βαρυτικές επιδράσεις των γήινων μαζών συγκροτούν το ζητούμενο συνολικό βαρυτικό σήμα, στις τοπικής κλίμακας εφαρμογές οι επιδράσεις των τοπογραφικών μαζών είναι εξίσου σημαντικές όμως ως διαταρακτικές επιδράσεις οι οποίες πρέπει να υπολογιστούν σωστά και να απομακρυνθούν από τις πρωτογενείς παρατηρήσεις.

Η τελευταία διαδικασία περιγράφεται ως υπολογισμός *τοπογραφικών αναγκών* ή *τοπογραφικών διορθώσεων* και αποτελεί ένα βασικό εργαλείο της σύγχρονης γεωδαιτικής και γεωφυσικής έρευνας. Καθώς οι απαιτήσεις για ακρίβεια των τελικά παραγόμενων προϊόντων συνεχώς αυξάνονται, αυξάνεται και η απαίτηση για ακρίβεια των συγκεκριμένων διορθώσεων. Για παράδειγμα, τα σύγχρονα κριτήρια για τον υπο-

λογισμό ενός τοπικού ή περιφερειακού γεωειδούς, της βασικής επιφάνειας αναφοράς στον ορισμό υψομέτρων και κατακόρυφων συστημάτων αναφοράς, απαιτούν η επιφάνεια του γεωειδούς να είναι προσδιορισμένη με μία ακρίβεια της τάξης του ενός εκατοστού. Αναλογιζόμενοι το δυναμικό χαρακτήρα του γεωειδούς που αποτελεί μια ισοδυναμική επιφάνεια του γήινου πεδίου βαρύτητας καθώς και το βασικό ρόλο που παίζουν οι τοπογραφικές μάζες που μεσολαβούν μεταξύ της γήινης επιφάνειας και της επιφάνειας του γεωειδούς και εμφανίζονται στην αλγοριθμική διαδικασία υπολογισμού του γεωειδούς μέσω των αναγωγών βαρύτητας που θα υπολογιστούν, κατανοούμε την ανάγκη για υπολογισμό σε μια τέτοια εφαρμογή της βαρυτικής επίδρασης των τοπογραφικών μαζών με την μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια.

Ο υπολογισμός της βαρυτικής επίδρασης των τοπογραφικών μαζών αποτελεί ένα κλασικό παράδειγμα εφαρμογής της θεωρίας δυναμικού. Με δεδομένη τη γεωμετρία και τη σύσταση μιας κατανομής μάζας η εφαρμογή της ολοκληρωματικής έκφρασης που περιγράφει είτε τη Νευτώνεια δύναμη έλξης είτε τη βαθμωτή συνάρτηση του δυναμικού μπορεί να οδηγήσει σε έναν ακριβή υπολογισμό των ζητούμενων επιδράσεων. Ένα ψηφιακό μοντέλο εδάφους προσφέρει σήμερα σε ηλεκτρονική μορφή τη γεωμετρία της ορατής τοπογραφίας, επιτρέπει επομένως μία αρκετά πιστή γεωμετρική αναπαράσταση των τοπογραφικών μαζών. Όσο αυξάνεται η διακριτική ικανότητα του μοντέλου τόσο περισσότερο αυξάνεται η πιστότητα αυτής της γεωμετρικής αναπαράστασης και συνεπώς η ακρίβεια των αντίστοιχων βαρυτικών επιδράσεων. Η ακρίβεια υπολογισμού του βαρυτικού σήματος των τοπογραφικών μαζών συνδέεται πρωτίστως με το μαθηματικό μοντέλο που έχει επιλεγεί για να προσεγγίσει τις συγκεκριμένες κατανομές. Μπορεί το ψηφιακό μοντέλο να προσφέρει μια συγκεκριμένη γεωμετρική περιγραφή των διακυμάνσεων της ορατής τοπογραφίας ωστόσο για να υπολογίσει κανείς το παραγόμενο βαρυτικό σήμα πρέπει να παρει κάποιες αποφάσεις σε σχέση (α) με το γεωμετρικό σχήμα των μαζών και (β) με τον τρόπο υπολογισμού των αντίστοιχων ολοκληρωματικών σχέσεων που ορίζουν το δυναμικό ή τη δύναμη έλξης.

Η ύπαρξη υπολογιστικών συστημάτων με μεγάλες δυνατότητες στη διαχείριση αρχείων δεδομένων τοπογραφίας με υψηλή ανάλυση και στην αντιμετώπιση υψηλού υπολογιστικού φόρτου επιτρέπουν τον υπολογισμό τοπογραφικών διορθώσεων με μία σειρά από διαφορετικές μεθόδους οι οποίες προσαρμόζονται στα διαθέσιμα δεδομένα και τα τοπικά χαρακτηριστικά του αναγλύφου. Η διαδικασία που ακολουθείται περιλαμβάνει τη διακριτοποίηση των τοπογραφικών μαζών ενός ψηφιακού μοντέλου εδάφους σε έναν πεπερασμένο αριθμό στοιχειωδών μαζών γνωστής γεωμετρίας. Η βαρυτική επίδραση του συνόλου των τοπογραφικών μαζών υπολογίζεται στη συνέχεια από το άθροισμα των επί μέρους επιδράσεων αυτών των στοιχειωδών μαζών. Το

ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο είναι ένα από τα γεωμετρικά σχήματα που χρησιμοποιείται ευρέως σε αυτή τη διαδικασία, καθώς η γεωμετρία του συμβαδίζει με τον ορισμό ενός ψηφιακού μοντέλου εδάφους. Κάθε ψηφίδα ενός ψηφιακού μοντέλου εδάφους αντιστοιχεί σε ένα κομμάτι γήινης επιφάνειας ορθογώνιας διατομής και με διαστάσεις που προκύπτουν από την ανάλυση του μοντέλου στις δύο οριζόντιες διαστάσεις.

Η επιλογή της γεωμετρίας των στοιχειωδών σωμάτων στα οποία θα διαχωριστεί το σύνολο των τοπογραφικών μαζών επηρεάζει τόσο τη μαθηματική διαδικασία υπολογισμού του βαρυτικού σήματος όσο και την ακρίβεια των τελικών αποτελεσμάτων. Το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο αποτελεί για παράδειγμα μία αρκετά ικανοποιητική προσέγγιση για τη γεωμετρική διακύμανση της πραγματικής τοπογραφίας. Ωστόσο, όσο αυξάνουμε τις απαιτήσεις μας για ακρίβεια, ή όσο πλησιάζουμε στο σημείο υπολογισμού και αναζητούμε μία πιο πιστή αναπαράσταση της πραγματικότητας, η βαθμωτή προσέγγιση του εδάφους που προσφέρουν τα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα παύει να αποτελεί τη βέλτιστη γεωμετρική επιλογή. Επιφάνειες δευτέρου βαθμού, γενικευμένα πολύεδρα και άλλες πιο περίτεχνες επιφάνειες επιτρέπουν μια περισσότερο λεπτομερή προσέγγιση της πραγματικότητας. Αναζητώντας τη μέγιστη δυνατή ακρίβεια σε αυτούς τους υπολογισμούς, για παράδειγμα στα πλαίσια ενός υπολογισμού γεωειδούς με ακρίβεια ενός εκατοστού, οι γεωμετρικές επιλογές των στοιχειωδών κατανομών ενός ψηφιακού μοντέλου εδάφους επηρεάζουν σημαντικά την ακρίβεια των τελικών υπολογισμένων βαρυτικών σημάτων. Όμως διαφορετικές γεωμετρίες των κατανομών συνεπάγονται διαφορετικές μαθηματικές εκφράσεις που πρέπει να υπολογιστούν στα πλαίσια των σχετικών ολοκληρωματικών τύπων. Με τον τρόπο αυτό η επιλογή της γεωμετρίας των στοιχειωδών κατανομών, ο βαθμός προσέγγισης της κατ' ουσίαν άγνωστης διακύμανσης της πραγματικής τοπογραφίας, ο μαθηματικός τρόπος υπολογισμού των σχετικών ολοκληρωματικών εκφράσεων και το ζητούμενο επίπεδο ακρίβειας των τελικών αποτελεσμάτων υπεισέρχονται σε μια πλεγμένη μορφή αλληλεξαρτήσεων που όλες μαζί πρέπει να συνεκτιμηθούν από τον ερευνητή μαζί με τα τεχνικά χαρακτηριστικά του υπολογιστικού συστήματος που διαθέτει.

Για τον υπολογισμό του βαρυτικού σήματος μιας γνωστής κατανομής μάζας υπάρχουν διαφορετικές μέθοδοι. Αφού έχει οριστεί επακριβώς η γεωμετρία της κατανομής οι σχετικές ολοκληρωματικές εκφράσεις μπορούν να γραφούν με τη μορφή ορισμένων ολοκληρωμάτων σε εκείνο το σύστημα καμπυλόγραμμων συντεταγμένων που περιγράφει καλύτερα τη συγκεκριμένη κατανομή. Στη συνέχεια τα ολοκληρώματα που προκύπτουν μπορούν να υπολογιστούν με διαφορετικούς τρόπους. Οι αναλυτικές μέθοδοι, στις οποίες το παρόν σύγγραμμα αφιερώνει ένα από τα πρώτα του κεφάλαια, αποτελούν σίγουρα μια βασική επιλογή υπολογισμού. Η αναλυτική επίλυση

ενός ολοκληρώματος προσφέρει, σε αντιδιαστολή με τον αριθμητικό του υπολογισμό μέσω κάποιας τεχνικής αριθμητικής ολοκλήρωσης, την ακριβή λύση της ζητούμενης ολοκληρωματικής έκφρασης μέσω συγκεκριμένων κλειστών μαθηματικών συναρτήσεων. Εκπροσωπεί με άλλα λόγια τη μαθηματικά αυστηρή απάντηση στο ερώτημα του αριθμητικού υπολογισμού του ολοκληρώματος και όχι κάποια αριθμητική προσέγγιση σε αυτό. Το σφαιρικό κέλυφος πεπερασμένου ή απειροστού πάχους, ο κύλινδρος, το γενικευμένο πολυέδρο είναι μερικά από τα ιδεατά γεωμετρικά σώματα τα οποία μαζί με το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο συγκροτούν τις γεωμετρικές επιλογές για τη μοντελοποίηση των διάφορων κατανομών.

Για την υλοποίηση των αναλυτικών μεθόδων χρειάζεται κατ' αρχήν η κατάλληλη μαθηματική διατύπωση, δηλαδή η ολοκλήρωση της αντίστοιχης συνάρτησης πυρήνα για όλο τον όγκο της κατανομής, που είναι η συνάρτηση του αντιστρόφου της απόστασης για την περίπτωση του δυναμικού και οι πρώτες ή δεύτερες παράγωγοι της συνάρτησης του αντιστρόφου της απόστασης για τις παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης της συνάρτησης του δυναμικού αντίστοιχα. Σε γενικές γραμμές η διαδικασία απαιτεί την αναζήτηση στους πίνακες ολοκληρωμάτων των σχετικών λύσεων και την αντικατάσταση των ορίων ολοκλήρωσης που οριοθετούν την κατανομή στο χώρο για να υπολογιστεί αριθμητικά η αναλυτική λύση των ολοκληρωμάτων. Ωστόσο η θέση του σημείου υπολογισμού σε σχέση με τη διαταρακτική κατανομή παίζει σημαντικό ρόλο σε αυτήν τη διαδικασία και μπορεί να περιπλέξει σημαντικά αυτά τα βήματα. Όταν για παράδειγμα προσπαθούμε να υπολογίσουμε τη βαρυτική επίδραση μιας κυλινδρικής κατανομής σε ένα σημείο που βρίσκεται επάνω στον άξονα συμμετρίας της κατανομής, τότε λόγω συμμετρίας ο ολοκληρωματικός τύπος γρήγορα απλοποιείται και η αναλυτική έκφραση προκύπτει σχετικά εύκολα. Μόλις όμως το σημείο υπολογισμού απομακρυνθεί από αυτόν τον άξονα η εξαγωγή των αναλυτικών σχέσεων γίνεται πολύπλοκη και απαιτητική. Ένα άλλο υπολογιστικό πρόβλημα ανακύπτει από αριθμητικές απροσδιοριστίες που εμφανίζονται στις αναλυτικές επιλύσεις και συνδέονται με τη σχετική θέση του σημείου υπολογισμού ως προς την έλκουσα κατανομή. Έτσι, στον αναλυτικό υπολογισμό του βαρυτικού σήματος μιας πολυεδρικής κατανομής εμφανίζονται συγκεκριμένοι διορθωτικοί όροι στο τελικό τυπολόγιο οι οποίοι πρέπει να υπολογιστούν αριθμητικά εάν το σημείο υπολογισμού ή κάποια από τις προβολές του επάνω στις όψεις της πολυεδρικής κατανομής βρίσκονται επάνω στις κορυφές ή τις ακμές της πολυεδρικής επιφάνειας.

Η πολυεδρική μοντελοποίηση αποτελεί μία ιδιαίτερη περίπτωση γεωμετρικής επιλογής για την αναπαράσταση μιας κατανομής μάζας. Ο ορισμός του γενικευμένου πολυέδρου που επιτρέπει τον αριθμό των κορυφών που απαρτίζουν τις επί μέρους όψεις

του πολυέδρου να μεταβάλλεται από όψη σε όψη, δημιουργεί ένα δυνατό και ευέλικτο εργαλείο μοντελοποίησης που μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε πληθώρα εφαρμογών. Έτσι, εκτός από τις τοπογραφικές μάζες ενός ψηφιακού μοντέλου εδάφους το γενικευμένο πολυέδρο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του βαρυτικού σήματος μιας κατανομής μάζας στο εσωτερικό ενός εργαστηρίου στα πλαίσια μετρήσεων βαθμονόμησης υψηλής ακρίβειας, ή ακόμα και στην περίπτωση ενός δορυφόρου η βαρυτική επίδραση του οποίου χρειάζεται να υπολογιστεί και να αφαιρεθεί από τις ενδείξεις των οργάνων που είναι τοποθετημένα στο εσωτερικό του. Η πολυεδρική μοντελοποίηση συναντάται τέλος στο σύνολο των επί μέρους εφαρμογών του λεγόμενου ευθέως και αντιστρόφου προβλήματος της γεωφυσικής, όπου το ζητούμενο είναι η ακριβής μοντελοποίηση μιας υποθετικής ή μιας πραγματικής κατανομής μάζας και ο υπολογισμός του βαρυτικού της σήματος.

Μία εναλλακτική διαδικασία στην αναλυτική μέθοδο προσδιορισμού του βαρυτικού πεδίου ιδεατών σωμάτων αποτελούν οι λεγόμενες αριθμητικές μέθοδοι. Σε αυτές συμπεριλαμβάνονται όλες οι επί μέρους τεχνικές οι οποίες παρέχουν μία προσεγγιστική λύση στις κλειστές σχέσεις των αναλυτικών μεθόδων. Η αριθμητική ολοκλήρωση των σχετικών ολοκληρωματικών εκφράσεων, ή η ανάπτυξη της συνάρτησης του αντιστρόφου της απόστασης μεταξύ ελκόμενου σημείου και έλκουσας μάζας αποτελούν δύο χαρακτηριστικά παραδείγματα αριθμητικών μεθόδων. Η συνάρτηση πυρήνας του αντιστρόφου της απόστασης μπορεί να αναπτυχθεί σε μία διωνυμική σειρά στο κατάλληλο σύστημα καμπυλόγραμμων συντεταγμένων. Οι παράμετροι που σχετίζονται με το σημείο υπολογισμού διαχωρίζονται από αυτές που χαρακτηρίζουν την έλκουσα κατανομή και η ολοκλήρωση των τελευταίων για το σύνολο του όγκου της έλκουσας κατανομής οδηγεί στα εν λόγω αναπτύγματα σε σειρά. Με αυτόν τον τρόπο προκύπτουν αναπτύγματα σε σειρά για τις συναρτήσεις του δυναμικού και τις παραγώγους του δυναμικού πρώτης και δεύτερης τάξης για διάφορες ιδεατές κατανομές. Το σφαιρικό κέλυφος πεπερασμένου πάχους, ο ορθός κυκλικός κύλινδρος και το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο αποτελούν τρία χαρακτηριστικά παραδείγματα στις σφαιρικές, τις κυλινδρικές και τις καρτεσιανές συντεταγμένες αντίστοιχα. Ο βαθμός σύγκλισης αυτών των σειρών και η γενικότερη αριθμητική τους συμπεριφορά σε σύγκριση πάντοτε με τις κλειστές αναλυτικές εκφράσεις επιτρέπουν μία εμβάθυνση και μία κατανόηση του βαρυτικού σήματος ιδεατών πεπερασμένων μαζών, που βοηθούν στην επιλογή των κατάλληλων μαθηματικών εργαλείων στις επί μέρους πρακτικές εφαρμογές.

Ο πρακτικός υπολογισμός τοπογραφικών διορθώσεων για τα σημεία ενός ψηφιακού μοντέλου εδάφους αποτελεί ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα. Με δεδομένη τη βαρύτη-

τα των κοντινών μαζών στην τιμή της βαρυτικής επίδρασης που προκύπτει για κάθε σημείο υπολογισμού, αναπτύσσονται οι λεγόμενες υβριδικές μέθοδοι οι οποίες συνδυάζουν (α) την ακρίβεια στον υπολογισμό του βαρυτικού σήματος των κοντινότερων μαζών με (β) την ταχύτητα στον υπολογισμό της επίδρασης των πιο απομακρυσμένων μαζών. Για τις κοντινές μάζες επιλέγεται μία όσο το δυνατόν πιο ακριβής γεωμετρική μοντελοποίηση και συνήθως μία αναλυτική διαδικασία υπολογισμού του βαρυτικού τους σήματος. Αντίθετα στις πιο απομακρυσμένες μάζες η επιλογή γεωμετρίας παραπέμπει σε μία προσέγγιση της πραγματικότητας, η οποία όμως πραγματοποιείται στο πλαίσιο του χαμηλότερου βάρους που έχει η συνεισφορά αυτών των μαζών στο τελικό αποτέλεσμα και του επιπέδου ακρίβειας που είναι αρκετό για τον υπολογισμό της βαρυτικής τους επίδρασης.

Με τη δυνατότητα επιλογής ανάμεσα σε διαφορετικούς τρόπους μοντελοποίησης και μεθόδους υπολογισμού του αντίστοιχου βαρυτικού σήματος προκύπτουν πολλές δυνατές υβριδικές προσεγγίσεις. Στην περίπτωση όμως των διατεταγμένων δεδομένων ενός ψηφιακού μοντέλου εδάφους μία αριθμητική τεχνική που ξεχωρίζει για την αποτελεσματικότητά της είναι η τεχνική των ταχέων μετασχηματισμών Fourier (Fast Fourier Transforms, FFT). Αξιοποιώντας τα μαθηματικά χαρακτηριστικά των σχετικών ολοκληρωματικών εκφράσεων η τεχνική FFT επιτρέπει το γρήγορο και ακριβή υπολογισμό τοπογραφικών επιδράσεων για όλα τα σημεία ενός πλέγματος που αντιστοιχεί στη διακριτική ικανότητα ενός ψηφιακού μοντέλου εδάφους. Προχωρώντας σε μία κατάλληλη διαμόρφωση της συνάρτησης πυρήνα της τεχνικής FFT, που είναι και εδώ η συνάρτηση του αντιστρόφου της απόστασης μεταξύ ελκόμενου σημείου και έλκουσας μάζας, μπορεί κάποιος να αντιμετωπίσει ταυτόχρονα το πρόβλημα προσδιοριστίας που εμφανίζεται στους αλγόριθμους FFT και να ορίσει μία υβριδική τεχνική που θα μοντελοποιεί το βαρυτικό σήμα της κοντινής στο σημείο υπολογισμού περιοχής με διαφορετικό τρόπο απ' ό τι στο υπόλοιπο της περιοχής μελέτης. Έτσι προκύπτουν υβριδικές τεχνικές που συνδυάζουν την ακρίβεια των αναλυτικών μεθόδων για τις κοντινές μάζες στο σημείο υπολογισμού, με την ταχύτητα και αποτελεσματικότητα των αριθμητικών μεθόδων FFT για τις πολύ περισσότερες σε έκταση και ποσότητα τοπογραφικές μάζες της υπολοίπομενης περιοχής.

Καθώς η χωρική ανάλυση των σύγχρονων ψηφιακών μοντέλων εδάφους συνεχώς αυξάνεται και οι υπολογιστικές δυνατότητες των διαθέσιμων υπολογιστικών συστημάτων σε επίπεδο μνήμης και επεξεργαστή επιτρέπουν τη διεκπεραίωση όλο και μεγαλύτερων υπολογιστικών φόρτων, οι προτεινόμενες υβριδικές τεχνικές των τελευταίων ετών περιλαμβάνουν πολύπλοκες γεωμετρικές επιλογές για την προσέγγιση του αναγλύφου των τοπογραφικών μαζών της κοντινής στο σημείο υπολογισμού περιο-

χής, όπως πρίσματα με κεκλιμένη οροφή, πολύεδρα, διγραμμικές επιφάνειες κ.λπ. Οι αριθμητικοί υπολογισμοί και οι συγκρίσεις με τις αναλυτικές επιλύσεις αποδεικνύουν ότι η επιλογή διαφορετικής μοντελοποίησης δεν αποτελεί απλώς θέμα καλύτερης γεωμετρικής προσέγγισης της πραγματικότητας. Οι διαφορετικές επιλογές μοντελοποίησης οδηγούν σε διαφορετικές μαθηματικές εκφράσεις του παραγόμενου βαρυτικού σήματος και τελικά σε υπολογίσιμες διαφορές στο βαρυτικό σήμα που υπολογίζεται αριθμητικά και επηρεάζει την ακρίβεια του τελικού αποτελέσματος.

Η μοντελοποίηση πεπερασμένων κατανομών μάζας και ο υπολογισμός του βαρυτικού τους σήματος βρίσκει σημαντική εφαρμογή σε εργαστηριακές εφαρμογές. Η βαθμονόμηση ενός ζυγού στρέψης, του οργάνου που αναπτύχθηκε από τον Ούγγρο φυσικό Lorand Eötvös (1848-1919) για την πραγματοποίηση μετρήσεων των δευτέρων παραγώγων του βαρυτικού δυναμικού στο εργαστήριο, απαιτεί τη μοντελοποίηση του βαρυτικού σήματος των στοιχειωδών πειραματικών μαζών του οργάνου. Ο υπολογισμός του βαρυτικού σήματος του περιβάλλοντα χώρου αλλά και του εξοπλισμού στο εσωτερικό του εργαστηρίου είναι επίσης απαραίτητος στα πλαίσια τέτοιων μετρήσεων υψηλής ακρίβειας. Εκτός από μετρήσεις των δευτέρων παραγώγων του δυναμικού έλξης ένας ζυγός στρέψης επιτρέπει τον εργαστηριακό προσδιορισμό της σταθεράς της παγκόσμιας έλξης ή αλλιώς σταθεράς του Νεύτωνα G . Καθώς το βαρυτικό πεδίο είναι αρκετά πιο ασθενές σε σχέση για παράδειγμα με ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, οι δυνάμεις έλξης που αναπτύσσονται μεταξύ των πειραματικών μαζών ενός ζυγού στρέψης και αποτελούν τις πρωτογενείς μετρήσεις του οργάνου πρέπει να είναι ανεπηρέαστες από το βαρυτικό σήμα άλλων γειτονικών κατανομών μάζας που βρίσκονται στο εσωτερικό και τον περιβάλλοντα χώρο του εργαστηρίου. Ακόμη, ο υπολογισμός του βαρυτικού σήματος και των χρονικών μεταβολών του που προέρχεται από την ίδια μάζα ενός δορυφόρου όταν αυτός φέρει όργανο που δεν πρέπει να επηρεάζεται από το βαρυτικό σήμα του δορυφόρου αποτελεί μία ακόμη εφαρμογή μοντελοποίησης πεπερασμένων μαζών και υπολογισμού του βαρυτικού τους σήματος. Το διαστημικό πείραμα για τη έλεγχο της ισχύος της αρχής της ισοδυναμίας, όπως καλείται η αρχή που πρώτος διερεύνησε ο Γαλιλαίος και σύμφωνα με την οποία η βαρυτική επιτάχυνση που ασκείται σε ένα σώμα εξαρτάται μόνο από τη μάζα του και όχι από τη σύνθεσή του, μέσω του δορυφόρου STEP (Satellite Test of the Equivalence Principle) αποτελεί μία περίπτωση δορυφορικής εφαρμογής όπου ενδιαφέρει ο υπολογισμός του βαρυτικού σήματος της ίδιας μάζας του δορυφόρου και των χρονικών μεταβολών του.

Η διαθεσιμότητα με τη μορφή παγκόσμιων ψηφιακών βάσεων γεωμετρικών και δυναμικών δεδομένων που σχετίζονται με το σχήμα και το βαρυτικό πεδίο της γης δίνουν τη δυνατότητα εφαρμογής γνωστών μαθηματικών εργαλείων για την επεξεργασία

τους και την αξιοποίησή τους στο πλαίσιο της μελέτης και μοντελοποίησης του γήινου πεδίου βαρύτητας. Η πληθώρα δορυφορικών αποστολών των τελευταίων ετών προσφέρει μια σειρά κανονικά διατεταγμένων δεδομένων με παγκόσμια κάλυψη και ομοιογενή ακρίβεια που αναφέρονται τόσο στο σχήμα και τη διακύμανση της ορατής τοπογραφίας όσο και στη διαστρωμάτωση και δομή της γήινης ατμόσφαιρας, το γήινο μαγνητικό πεδίο, το βαρυτικό πεδίο. Τα δεδομένα αυτά σε συνδυασμό με επίγεια δεδομένα τα οποία επίσης οργανώνονται και διατίθενται τα τελευταία χρόνια με τη μορφή οργανωμένων ψηφιακών βάσεων με παγκόσμια κάλυψη και ενιαία χωρική ανάλυση, όπως για παράδειγμα παγκόσμιες βάσεις δεδομένων για τη δομή και τη σύσταση του γήινου φλοιού, επιτρέπουν την αριθμητική εφαρμογή κλασικών μαθηματικών εργαλείων που αναφέρονται σε δεδομένα που είναι διατεταγμένα επάνω σε έναν γεωγραφικό πλέγμα. Χαρακτηριστική αξιοποίηση τέτοιων δεδομένων αποτελεί η αριθμητική εφαρμογή της σφαιρικής αρμονικής ανάλυσης, της διαδικασίας εκείνης κατά την οποία υπολογίζονται οι σφαιρικοί αρμονικοί συντελεστές μιας συνάρτησης χρησιμοποιώντας ως δεδομένα τις κανονικά διατεταγμένες τιμές της συνάρτησης επάνω στη μοναδιαία σφαίρα. Η σφαιρική αρμονική ανάλυση της παγκόσμιας τοπογραφίας ή ενός παγκόσμιου πλέγματος τιμών της συνάρτησης του δυναμικού έλξης του γήινου πεδίου βαρύτητας, όπως αυτό μπορεί να προκύψει από τις παρατηρήσεις ενός δορυφόρου, οδηγούν στον υπολογισμό αδιάστατων συντελεστών που μπορούν να αναπαράγουν το πεδίο βαρύτητας με τη μορφή ενός αναπτύγματος σε σειρά. Με αυτόν τον τρόπο τα σύγχρονα επίγεια και δορυφορικά δεδομένα συνεισφέρουν σε μία πιο ολοκληρωμένη γνώση των διάφορων φασματικών περιοχών του παρατηρούμενου βαρυτικού σήματος.

Μια ειδική εφαρμογή της σφαιρικής αρμονικής ανάλυσης αποτελούν τα λεγόμενα ισοστατικά μοντέλα του πεδίου βαρύτητας. Πρόκειται για τη σφαιρική αρμονική ανάλυση των δεδομένων ενός παγκόσμιου ψηφιακού μοντέλου εδάφους με την εφαρμογή κάποιας ισοστατικής θεωρίας που περιγράφει την υδροστατική ισορροπία των μαζών του ελαφρύτερου γήινου φλοιού με το βαρύτερο υλικό των μαζών του μανδύα. Η διαδικασία οδηγεί στον υπολογισμό των σφαιρικών αρμονικών συντελεστών ενός μοντέλου του πεδίου βαρύτητας που αποτυπώνει τη συνεισφορά των μαζών του φλοιού στη διαμόρφωση του συνολικού βαρυτικού σήματος. Πρόκειται για τη συνθετική ανάκτηση ενός συγκεκριμένου τμήματος του φάσματος του παρατηρούμενου βαρυτικού σήματος, και πιο συγκεκριμένα αυτού που αντιστοιχεί στις υψηλές και τις πολύ υψηλές συχνότητες. Ο συνθετικός αυτός υπολογισμός περιορίζεται μόνο από τη χωρική ανάλυση της παγκόσμιας βάσης δεδομένων, μπορεί επομένως να φθάσει και σε αναπτύγματα που χαρακτηρίζονται από έναν πολύ υψηλό βαθμό. Δημιουργούν έτσι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο τόσο για την καλύτερη φασματική κατανόηση του πεδίου βαρύτητας όσο και για πρακτικές εφαρμογές όπως για παράδειγμα τη συν-

θετική αντικατάσταση επίγειων πρωτογενών μετρήσεων βαρύτητας σε περιοχές όπου οι πρωτογενείς παρατηρήσεις πεδίου είτε είναι πολύ αραιές είτε απουσιάζουν εντελώς.

Η σφαιρική αρμονική ανάλυση αποτελεί με μαθηματικούς όρους τη διακριτή μορφή ενός αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier. Οι φασματικές τεχνικές αποτελούν ένα αναπόσπαστο εργαλείο στις εφαρμογές θεωρίας δυναμικού. Πέρα από τους μετασχηματισμούς Fourier οι πολυφασματικές τεχνικές και η ανάλυση wavelet προσφέρουν τα τελευταία χρόνια μία ευέλικτη και αποτελεσματική τεχνική για όλο το φάσμα των παραδοσιακών εφαρμογών θεωρίας δυναμικού που αντιμετωπίζουν οι αναλυτικές και οι αριθμητικές τεχνικές. Αξιοποιώντας τα θεωρητικά τους χαρακτηριστικά και τη δυνατότητά τους να επιλέγουν διαφορετικές μαθηματικές συναρτήσεις που τις ορίζουν οι πολυφασματικές τεχνικές προσαρμόζονται πιο εύκολα σε τοπικές ιδιαιτερότητες των παρατηρούμενων συναρτησιακών μεγεθών αλλά και του ίδιου του πεδίου βαρύτητας προσφέροντας ξεχωριστά πλεονεκτήματα σε εφαρμογές κυρίως του αντιστρόφου γεωφυσικού προβλήματος και της ερμηνείας και ανάλυσης του παρατηρούμενου βαρυτικού πεδίου.

Κεφάλαιο 2

Στοιχεία διανυσματικού λογισμού

Με τη διατύπωση του νόμου του Νεύτωνα δημιουργήθηκε η ανάγκη δημιουργίας ενός νέου μαθηματικού εργαλείου που θα διαχειριζόταν τη νέα πληροφορία. Ο νόμος του αντιστρόφου τετραγώνου διατύπωνε αλγεβρικά το μέτρο της δύναμης έλξης που αναπτύσσεται αμοιβαία μεταξύ δύο γνωστών κατανομών μάζας. Ταυτόχρονα όμως στη διατύπωσή του εμπλέκει και δύο άλλα ιδιαίτερα σημαντικά και αναπόσπαστα στοιχεία. Τη διεύθυνση επάνω στην οποία ορίζεται η δύναμη έλξη και τη φορά της δύναμης αυτής, η οποία καθορίζει ποιο από τα δύο σώματα αντιμετωπίζεται ως έλκον και ποιο ως ελκόμενο. Με αυτόν τον τρόπο προέκυψε ένα νέο μαθηματικό μέγεθος, το διάνυσμα. Ένα διάνυσμα ορίζεται από τρία μεγέθη, το μέτρο, τη διεύθυνση και τη φορά, ενώ αναπαρίσταται από ένα ευθύγραμμο τμήμα το οποίο καθορίζει τη διεύθυνση του διανύσματος στο χώρο, με την άκρη ενός βέλους στο ένα από τα δύο άκρα του υποδηλώνεται η φορά του ενώ το μέτρο του εκφράζεται με το πραγματικό μήκος του ευθύγραμμου τμήματος στο χώρο υπό μία συγκεκριμένη κλίμακα. Με τον ορισμό του διανύσματος αυτόματα δημιουργήθηκε το μαθηματικό υπόβαθρο για να περιγραφούν διανυσματικά μεγέθη, όπως η δύναμη, η ταχύτητα, η επιτάχυνση, η ορμή, η ένταση του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου. Ταυτόχρονα, σε αντιδιαστολή με τα διανύσματα, εκείνες οι φυσικές ποσότητες που καθορίζονται αποκλειστικά και μόνο από το μέτρο τους χαρακτηρίζονται ως βαθμωτά μεγέθη. Πίεση, μάζα, χρόνος, θερμοκρασία, πυκνότητα, ενέργεια, δυναμικό, αποτελούν παραδείγματα μεγεθών που περιγράφονται μονοσήμαντα από την αριθμητική τους τιμή σε συγκεκριμένα σημεία του χώρου.

Τα μαθηματικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται για την επεξεργασία των βαθμωτών μεγεθών είναι οι τελεστές και τα σχετικά θεωρήματα της ανάλυσης με όλους τους επί μέρους κλάδους της, όπως τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις και τις συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Εάν συμβολίσουμε με x , y και z τρεις τυχαίες βαθμωτές

παραμέτρους, τότε εκφράσεις της μορφής

$$ax + y^2 + b\sqrt{z} \quad , \quad \frac{y}{x} + \ln(z) - \cos(x) \quad , \quad \sum_i a_i x_i \quad (2.1)$$

όπου a συμβολίζει έναν πραγματικό αριθμό, αποτελούν χαρακτηριστικά παραδείγματα μαθηματικής επεξεργασίας βαθμωτών μεγεθών.

Στην περίπτωση διανυσματικών μεγεθών αντίθετα δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τα ίδια μαθηματικά εργαλεία. Η πρόσθεση, η αφαίρεση, ο πολλαπλασιασμός και οι υπόλοιποι τελεστές της κλασικής ανάλυσης δεν ισχύουν για τα διανύσματα. Ταυτόχρονα όμως είναι απαραίτητο να μπορούμε να κάνουμε πράξεις με διανύσματα κάθε φορά που θέλουμε να μελετήσουμε διανυσματικά μεγέθη. Για το σκοπό αυτό αναπτύχθηκε ένας ξεχωριστός κλάδος των μαθηματικών, ο οποίος μαζί με τον απειροστό λογισμό ανήκουν στις λεγόμενες μη συμβατικές τεχνικές της ανάλυσης. Πρόκειται για τον **διανυσματικό λογισμό**, τα βασικά εργαλεία και θεωρήματα του οποίου θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια.

2.1 Βασικοί τελεστές

Σημαντικό ρόλο στις πράξεις με διανύσματα παίζει ο τρόπος συμβολισμού τους. Οι βασικοί τελεστές του διανυσματικού λογισμού, αν και μερικοί από αυτούς, όπως η πρόσθεση και η αφαίρεση, εμφανίζονται με το ίδιο σύμβολο όπως και στην περίπτωση της κλασικής ανάλυσης, εντούτοις έχουν μία διαφορετική σημασία και έναν διαφορετικό τρόπο εφαρμογής στην περίπτωση των διανυσμάτων. Η σωστή εφαρμογή τους απαιτεί εξάσκηση και σωστή θεωρητική κατανόηση του μαθηματικού τρόπου ορισμού τους. Επειδή μάλιστα ο διανυσματικός λογισμός αποτελεί μία εξειδικευμένη κατηγορία ανάλυσης, χρειάζεται μία εξοικείωση από τον μελετητή στην έννοια των διανυσμάτων, που θα τον επιτρέψει να κατανοήσει τη διαφορά του διανυσματικού λογισμού από την κλασική ανάλυση.

Για το συμβολισμό διανυσμάτων μπορούν να χρησιμοποιηθούν μικρά ή μεγάλα γράμματα από το ελληνικό ή το λατινικό αλφάβητο. Εάν θέλουμε να περιγράψουμε ένα διάνυσμα χρησιμοποιώντας το πρώτο γράμμα του λατινικού αλφαβήτου τότε οι δύο τρόποι που υπάρχουν στη βιβλιογραφία για να το κάνουμε αυτό είναι είτε συνοδεύοντας το γράμμα με το σύμβολο του διανύσματος στο επάνω μέρος του ή χρησιμοποιών-

τας έντονο τρόπο γραφής, δηλαδή

$$\vec{a} \quad \text{ή} \quad \mathbf{a} \quad (2.2)$$

Στο παρόν σύγγραμμα θα επιλέξουμε το δεύτερο τρόπο συμβολισμού. Ο συμβολισμός αποτελεί για τον διανυσματικό λογισμό όχι απλώς ένα εργαλείο αλλά ένα μέσο σωστής ανάγνωσης των διανυσμάτων, αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της διατύπωσης του συγκεκριμένου λογισμού, ακριβώς γιατί εσφαλμένος τρόπος χρήσης του συμβολισμού εύκολα μπορεί να παραπέμψει σε βαθμωτά μεγέθη που μπορεί να συμβολίζονται με τον ίδιο τρόπο και στην λογική της κλασικής ανάλυσης των εκφράσεων (2.1).

Γραφικά ένα διάνυσμα παριστάνεται με τη βοήθεια ενός βέλους, το οποίο καθορίζει τη διεύθυνση και τη φορά στο χώρο, την αφετηρία και το πέρας του διανύσματος καθώς και το μέτρο του διανύσματος που εκφράζεται από το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που παριστάνει το διάνυσμα υπό κάποια κλίμακα σχεδίασης. Το μέτρο του διανύσματος \mathbf{a} συμβολίζεται με $|\mathbf{a}|$ ή απλώς a .

Δύο διανύσματα είναι ίσα, οπότε και γράφουμε $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, όταν έχουν το ίδιο μέτρο, την ίδια ή παράλληλη διεύθυνση και την ίδια φορά. Δεν χρειάζεται δηλαδή τα δύο διανύσματα να έχουν κοινή αφετηρία. Αυτό ορίζει μία θεμελιώδη ιδιότητα των διανυσμάτων που διατρέχει το σύνολο του διανυσματικού λογισμού και μπορεί να διατυπωθεί ελεύθερα ως εξής:

Ένα διάνυσμα παραμένει ακέραιο ως μαθηματική ποσότητα, διατηρώντας αμετάβλητα το μέτρο, τη διεύθυνση και τη φορά του, εάν μετατεθεί παράλληλα στο χώρο.

Ένα διάνυσμα που έχει την ίδια διεύθυνση, το ίδιο μέτρο, αλλά αντίθετη φορά με το τυχαίο διάνυσμα \mathbf{a} συμβολίζεται με $-\mathbf{a}$. Το άθροισμα των δύο δεν ισούται με το αριθμητικό μηδέν αλλά με το μηδενικό διάνυσμα, ισχύει δηλαδή $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{a} - \mathbf{a} = \mathbf{0}$. Το μηδενικό διάνυσμα έχει μέτρο μηδέν και καμιά συγκεκριμένη διεύθυνση. Χαρακτηρίζεται και ως μη κανονικό διάνυσμα.

Το άθροισμα δύο διανυσμάτων \mathbf{a} και \mathbf{b} συμβολίζεται ως $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ και πραγματοποιείται γραφικά και αναλυτικά, εάν είναι γνωστές οι συνιστώσες τους ως προς μία κοινή ορθοκανονική βάση. Ο γραφικός τρόπος άθροισης είναι γνωστός και ως κανόνας του παραλληλογράμμου. Το άθροισμα των διανυσμάτων \mathbf{a} και \mathbf{b} είναι ένα τρίτο διάνυσμα \mathbf{c} που προκύπτει από την παράλληλη μετάθεση του διανύσματος \mathbf{b} στο χώρο μέχρι να ταυτιστεί η αφετηρία του \mathbf{b} με το πέρας του \mathbf{a} . Όταν ολοκληρωθεί αυτή η παράλληλη

μετάθεση, κατά την οποία όπως αναφέραμε προηγουμένως δεν αλλάζει καμία από τις ιδιότητες του \mathbf{b} , το διάνυσμα \mathbf{c} προκύπτει ενώνοντας την αφετηρία του διανύσματος \mathbf{a} με το πέρας του διανύσματος \mathbf{b} . Ο γραφικός κανόνας του παραλληλογράμμου επεκτείνεται με παρόμοιο τρόπο και για περισσότερα του ενός διανύσματα. Αρκεί να τοποθετηθούν διαδοχικά το ένα μετά το άλλο, έτσι ώστε η αφετηρία του επόμενου να ταυτίζεται με το πέρας του προηγούμενου διανύσματος στη σειρά με την οποία εμφανίζονται στο άθροισμα. Επίσης ο κανόνας του παραλληλογράμμου ισχύει και για την αφαίρεση δύο διανυσμάτων, καθώς η αφαίρεση μπορεί γραφικά να αντιμετωπιστεί ως πρόσθεση του πρώτου διανύσματος με το αντίθετης φοράς δεύτερο διάνυσμα, δηλαδή $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$.

Εάν k και l είναι δύο βαθμωτά μεγέθη, δηλαδή δύο πραγματικοί αριθμοί, τότε οι βασικοί κανόνες της άλγεβρας διανυσμάτων είναι οι ακόλουθοι

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} \quad (2.4)$$

$$k\mathbf{a} = \mathbf{a}k \quad (2.5)$$

$$k(l\mathbf{a}) = (kl)\mathbf{a} \quad (2.6)$$

$$(k+l)\mathbf{a} = k\mathbf{a} + l\mathbf{a} \quad (2.7)$$

$$k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b} \quad (2.8)$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα ορίζεται ως εκείνο το διάνυσμα που έχει μέτρο ίσο με τη μονάδα. Για το μη μηδενικό διάνυσμα \mathbf{a} το διάνυσμα που ορίζεται από το λόγο $\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ ορίζει το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση του \mathbf{a} , που συμβολίζεται συνήθως ως \mathbf{e}_a . Έτσι, κάθε μη μηδενικό διάνυσμα \mathbf{a} εκφράζεται ως το γινόμενο του μέτρου του με το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση του \mathbf{a} , δηλαδή $\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\mathbf{e}_a$.

Τα διανύσματα μπορούν επίσης να εκφραστούν συναρτήσει των συνιστωσών τους ως προς ένα τοπικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων. Έστω ένα τέτοιο σύστημα συντεταγμένων που ορίζεται από μία καρτεσιανή ορθοκανονική βάση μέσω των διανυσμάτων βάσης ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$). Τα διανύσματα αυτά ορίζουν αντίστοιχα τους τρεις άξονες ενός τοπικού συστήματος καρτεσιανών συντεταγμένων x, y και z . Εάν η αφετηρία του συστήματος ταυτιστεί με την αφετηρία του τυχαίου διανύσματος \mathbf{a} ,

τότε υπάρχουν τρεις πραγματικοί αριθμοί (a_1, a_2, a_3) για τους οποίους ισχύει

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 \quad (2.9)$$

Οι αριθμοί (a_1, a_2, a_3) ονομάζονται συνιστώσες του διανύσματος \mathbf{a} στο συγκεκριμένο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων ενώ τα διανύσματα $a_1 \mathbf{e}_1$, $a_2 \mathbf{e}_2$ και $a_3 \mathbf{e}_3$ είναι τα συνιστώσα διανύσματα του \mathbf{a} στους τρεις άξονες. Εξαιτίας της ιδιότητας του διανύσματος να παραμένει αμετάβλητο όταν μετατεθεί παράλληλα στο χώρο, είναι προφανές ότι οι συνιστώσες ενός διανύσματος \mathbf{a} ως προς ένα τοπικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων είναι οι ίδιες ανεξάρτητα από το εάν η αφετηρία του συστήματος ταυτίζεται με την αφετηρία του \mathbf{a} ή όχι.

Γνωρίζοντας τις συνιστώσες του διανύσματος \mathbf{a} , το μέτρο του πλέον προκύπτει από την εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος στα δύο ορθογώνια τρίγωνα που ορίζονται αντίστοιχα στο επίπεδο $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ και στο κατακόρυφο επίπεδο που περιλαμβάνει το τρίτο άξονα του διανύσματος βάσης \mathbf{e}_3 και το διάνυσμα \mathbf{a} . Θα ισχύει η σχέση

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad (2.10)$$

Ταυτόχρονα με τον ορισμό ενός τοπικού ορθογώνιου συστήματος συντεταγμένων ορίζονται και τα λεγόμενα συνημίτονα κατεύθυνσης ενός οποιουδήποτε διανύσματος ως προς το συγκεκριμένο σύστημα. Πρόκειται για τα συνημίτονα των γωνιών που σχηματίζει το διάνυσμα με τους τρεις άξονες. Εάν συμβολίζουμε με α , β και γ τις γωνίες που σχηματίζει το διάνυσμα \mathbf{a} με τους τρεις άξονες x , y και z αντίστοιχα τότε θα ισχύει

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_3}{|\mathbf{a}|} \quad (2.11)$$

Τα συνημίτονα κατεύθυνσης ενός τυχαίου διανύσματος \mathbf{a} πληρούν τη σχέση

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{|\mathbf{a}|^2} = 1 \quad (2.12)$$

Με τον ορισμό ενός τοπικού ορθογώνιου συστήματος συντεταγμένων η έννοια του βαθμωτού και του διανυσματικού μεγέθους συνδέονται πλέον με τις συντεταγμένες των σημείων στα οποία αναφέρονται τα βαθμωτά και τα διανυσματικά μεγέθη αντίστοιχα. Στο πλαίσιο αυτό ορίζονται οι έννοιες του βαθμωτού και του διανυσματικού πεδίου.

Εάν σε κάθε σημείο (x, y, z) μιας περιοχής του τρισδιάστατου χώρου

R που περιγράφεται από ένα τοπικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων αντιστοιχεί ένας αριθμός ενός βαθμωτού μεγέθους φ τότε η συνάρτηση $\varphi(x, y, z)$ ορίζει μία βαθμωτή συνάρτηση θέσης. Το σύνολο των τιμών του βαθμωτού μεγέθους φ που ορίζεται με αυτόν τον τρόπο ορίζει ένα βαθμωτό πεδίο στο χώρο R .

Εάν σε κάθε σημείο (x, y, z) μιας περιοχής του τρισδιάστατου χώρου R που περιγράφεται από ένα τοπικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων αντιστοιχεί ένα διάνυσμα \mathbf{a} τότε η συνάρτηση $\mathbf{a}(x, y, z)$ ορίζει μία διανυσματική συνάρτηση θέσης. Το σύνολο των διανυσμάτων που ορίζονται με αυτόν τον τρόπο ορίζει ένα διανυσματικό πεδίο στο χώρο R .

Η έννοιες του βαθμωτού πεδίου και του διανυσματικού πεδίου αποτελούν κομβικές ποσότητες για την περιγραφή και τη μελέτη πολλών φυσικών μεγεθών και διεργασιών. Η ατμοσφαιρική θερμοκρασία αποτελεί ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα ενός βαθμωτού πεδίου. Σε κάθε σημείο του ελεύθερου τρισδιάστατου χώρου αντιστοιχεί μία μοναδική αριθμητική τιμή, αυτή της θερμοκρασίας της ατμόσφαιρας. Ένα βαθμωτό πεδίο μπορεί να οριστεί και συναρτησιακά, αρκεί ο πλεγμένος τρόπος ορισμού του να επιτρέπει την αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία σημείων του χώρου με μοναδικές αριθμητικές τιμές του εν λόγω βαθμωτού μεγέθους. Μια συνάρτηση της μορφής

$$\varphi(x, y, z) = x^2 z - 7y^3 \quad (2.13)$$

αποτελεί ένα παράδειγμα μαθηματικού ορισμού ενός βαθμωτού πεδίου.

Ανάλογες θεωρήσεις ισχύουν και για τα διανυσματικά πεδία. Εάν γνωρίζουμε σε μία δεδομένη χρονική στιγμή την ταχύτητα κίνησης για κάθε ένα σημείο (x, y, z) που βρίσκεται στο χώρο που καταλαμβάνεται από ένα κινούμενο υγρό, τότε το σύνολο των διανυσμάτων ταχύτητας που θα προκύψει ορίζει ένα διανυσματικό πεδίο. Ανάλογα παραδείγματα διανυσματικών πεδίων προκύπτουν από τη γνώση του συνόλου των διανυσμάτων της βαρύτητας ή της έντασης του μαγνητικού πεδίου της γης που ορίζονται για κάθε σημείο (x, y, z) μιας περιοχής R του τρισδιάστατου χώρου. Η συνάρτηση

$$\mathbf{a}(x, y, z) = x^3 z \mathbf{e}_1 + 5 y x^2 \mathbf{e}_2 - y^2 z \mathbf{e}_3 \quad (2.14)$$

ορίζει συναρτησιακά ένα διανυσματικό πεδίο, καθώς για κάθε σημείο (x, y, z) του τρισδιάστατου χώρου, ο οποίος μπορεί να περιοριστεί δυνητικά από μία κατάλληλη οριοθέτηση του πεδίου ορισμού της μορφής $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$, $y_{\min} \leq y \leq y_{\max}$ και

$z_{\min} \leq z \leq z_{\max}$ σε μία περιορισμένη περιοχή R , ορίζεται ένα μοναδικό διάνυσμα $\mathbf{a}(x, y, z)$ στο συγκεκριμένο σημείο.

Παράδειγμα 1. Να υπολογιστεί το μοναδιαίο διάνυσμα που ορίζεται στη διεύθυνση του αθροίσματος των διανυσμάτων $\mathbf{a} = 7\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3$ και $\mathbf{b} = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3$.

Έστω \mathbf{c} το διάνυσμα που ορίζεται από το άθροισμα των \mathbf{a} και \mathbf{b} . Στο ίδιο σύστημα ορθογώνιων καρτεσιανών συντεταγμένων οι συνιστώσες του \mathbf{c} προκύπτουν από το αλγεβρικό άθροισμα των αντίστοιχων συνιστωσών των διανυσμάτων \mathbf{a} και \mathbf{b} . Θα έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{c} &= \mathbf{a} + \mathbf{b} \\ &= (7\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3) + (2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3) \\ &= (7 + 2)\mathbf{e}_1 + (4 + 3)\mathbf{e}_2 + (-3 + 5)\mathbf{e}_3 \\ &= 9\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3\end{aligned}\tag{2.15}$$

Το μέτρο του διανύσματος \mathbf{c} θα είναι

$$|\mathbf{c}| = |9\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3| = \sqrt{9^2 + 7^2 + 2^2} = \sqrt{134}\tag{2.16}$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση του \mathbf{c} ορίζεται από τη σχέση

$$\mathbf{e}_c = \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|} = \frac{9\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3}{\sqrt{134}} = \frac{9}{\sqrt{134}}\mathbf{e}_1 + \frac{7}{\sqrt{134}}\mathbf{e}_2 + \frac{2}{\sqrt{134}}\mathbf{e}_3\tag{2.17}$$

Πράγματι το συγκεκριμένο διάνυσμα έχει μέτρο ίσο με τη μονάδα, καθώς

$$\begin{aligned}|\mathbf{e}_c| &= \left| \frac{9}{\sqrt{134}}\mathbf{e}_1 + \frac{7}{\sqrt{134}}\mathbf{e}_2 + \frac{2}{\sqrt{134}}\mathbf{e}_3 \right| \\ &= \sqrt{\left(\frac{9}{\sqrt{134}}\right)^2 + \left(\frac{7}{\sqrt{134}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{134}}\right)^2} = 1\end{aligned}\tag{2.18}$$

Παράδειγμα 2. Να υπολογιστεί το διάνυσμα που έχει αφετηρία το σημείο $A(x_1, y_1, z_1)$ και τέλος το σημείο $B(x_2, y_2, z_2)$, όπου (x_i, y_i, z_i) οι συντεταγμένες των σημείων σε ένα κοινό τοπικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, και να βρεθεί το μέτρο του.

Με δεδομένες τις συντεταγμένες των δύο σημείων στο κοινό τοπικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων τα δύο διανύσματα θέσης στα σημεία A και B ως προς την κοινή αφετηρία του τοπικού συστήματος O θα είναι αντίστοιχα

$$\mathbf{r}_A = x_1 \mathbf{e}_1 + y_1 \mathbf{e}_2 + z_1 \mathbf{e}_3 \quad (2.19)$$

και

$$\mathbf{r}_B = x_2 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2 + z_2 \mathbf{e}_3 \quad (2.20)$$

Ως διάνυσμα θέσης ενός σημείου (x, y, z) σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων ορίζεται το διάνυσμα που έχει ως αφετηρία την αφετηρία του τοπικού συστήματος και τέλος το σημείο (x, y, z) . Καθώς τα δύο διανύσματα θέσης έχουν κοινή αφετηρία το σημείο O , το ζητούμενο διάνυσμα \mathbf{AB} που ενώνει τα δύο σημεία A και B θα συνδέεται με τα διανύσματα θέσης \mathbf{r}_A και \mathbf{r}_B μέσα από τον ορισμό του αθροίσματος δύο διανυσμάτων και συγκεκριμένα

$$\mathbf{r}_A + \mathbf{AB} = \mathbf{r}_B \quad (2.21)$$

Επιλύοντας αυτή τη σχέση ως προς \mathbf{AB} και αντικαθιστώντας τις γνωστές συνιστώσες των διανυσμάτων \mathbf{r}_A και \mathbf{r}_B θα έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A \\ &= (x_2 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2 + z_2 \mathbf{e}_3) - (x_1 \mathbf{e}_1 + y_1 \mathbf{e}_2 + z_1 \mathbf{e}_3) \\ &= (x_2 - x_1) \mathbf{e}_1 + (y_2 - y_1) \mathbf{e}_2 + (z_2 - z_1) \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Το μέτρο του διανύσματος \mathbf{AB} θα είναι

$$|\mathbf{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (2.23)$$

Παρατηρούμε ότι το μέτρο του συγκεκριμένου διαστήματος ισούται με την απόσταση μεταξύ των σημείων A και B .

Δύο βασικοί τελεστές του διανυσματικού λογισμού είναι το εσωτερικό και το εξωτερικό γινόμενο. Το αλγεβρικό γινόμενο μεταξύ δύο διανυσμάτων δεν ορίζεται. Αντίθετα η έννοια του γινομένου εκφράζεται στο διανυσματικό λογισμό με έναν διττό τρόπο, μέσω του εσωτερικού και του εξωτερικού γινομένου. Το εσωτερικό γινόμενο περιγράφεται με το σύμβολο \cdot και ορίζεται ως το γινόμενο των μέτρων των δύο δι-

ανυσμάτων και του συνημιτόνου της γωνίας θ που σχηματίζουν, όταν ταυτιστούν οι δύο τους αφετηρίες. Ισχύει δηλαδή ο ορισμός

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (2.24)$$

Βασικό χαρακτηριστικό του εσωτερικού γινομένου είναι ότι μετατρέπει δύο διανύσματα σε ένα βαθμωτό μέγεθος, δηλαδή σε έναν αριθμό.

Ο τελεστής του εσωτερικού γινομένου ορίζει μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση κατά την οποία δύο διανύσματα μετασχηματίζονται σε έναν μοναδικό αριθμό.

Όπως φαίνεται εύκολα από τη σχέση ορισμού του το εσωτερικό γινόμενο δηλώνει γεωμετρικά την προβολή του ενός διανύσματος στη διεύθυνση του άλλου. Μάλιστα, επειδή ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στην περίπτωση του εσωτερικού γινομένου, δηλαδή $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$, αφού $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta = |\mathbf{b}| |\mathbf{a}| \cos \theta$, η παραπάνω γεωμετρική ερμηνεία ισχύει αμφίδρομα.

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων εκφράζει γεωμετρικά την προβολή του πρώτου στη διεύθυνση του δεύτερου καθώς και την προβολή του δεύτερου στη διεύθυνση του πρώτου.

Εάν k είναι πραγματικός αριθμός, \mathbf{a} , \mathbf{b} και \mathbf{c} τρία μη μηδενικά διανύσματα τότε οι βασικές ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου είναι οι ακόλουθες

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

$$k (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (k \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (k \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) k$$

Επίσης, εάν $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ και τα \mathbf{a} και \mathbf{b} είναι μη μηδενικά διανύσματα τότε τα \mathbf{a} και \mathbf{b} είναι κάθετα μεταξύ τους. Τέλος, εάν είναι γνωστές για δύο τυχαία μη μηδενικά διανύσματα \mathbf{a} και \mathbf{b} οι συνιστώσες τους ως προς ένα τοπικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, δηλαδή

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 \quad (2.25)$$

και

$$\mathbf{b} = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3 \quad (2.26)$$

τότε το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ορίζεται συναρτήσει των συγκεκριμένων συνιστωσών ως εξής

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (2.27)$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3) \cdot (b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3) \\ &= a_1 \mathbf{e}_1 \cdot (b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3) + a_2 \mathbf{e}_2 \cdot (b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3) \\ &\quad + a_3 \mathbf{e}_3 \cdot (b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3) \\ &= a_1 b_1 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + a_1 b_2 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + a_1 b_3 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 \\ &\quad + a_2 b_1 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 + a_2 b_2 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 + a_2 b_3 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 \\ &\quad + a_3 b_1 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 + a_3 b_2 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 + a_3 b_3 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Τα εσωτερικά γινόμενα που σχηματίζονται από τα διανύσματα βάσης του τοπικού ορθογώνιου συστήματος συντεταγμένων έχουν ως αποτέλεσμα είτε το μηδέν είτε τη μονάδα, ανάλογα με το αν αναφέρονται στο εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος βάσης με τον εαυτό του ή σε μικτά εσωτερικά γινόμενα διαφορετικών διανυσμάτων βάσης. Καθώς, ανά δύο τα διανύσματα βάσης ενός ορθογώνιου συστήματος συντεταγμένων σχηματίζουν ορθή γωνία θα ισχύει

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = |\mathbf{e}_i| |\mathbf{e}_i| \cos 0^\circ = 1 \quad (2.29)$$

και

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = |\mathbf{e}_i| |\mathbf{e}_j| \cos 90^\circ = 0 \quad (2.30)$$

Έτσι, η σχέση (2.28) απλοποιείται για να δώσει απευθείας την (2.27) καθώς

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1 \quad (2.31)$$

ενώ όλα τα υπόλοιπα εσωτερικά γινόμενα $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ είναι ίσα με το μηδέν. Όταν σχηματιστεί το εσωτερικό γινόμενο ενός διανύσματος με τον εαυτό του, το αποτέλεσμα εκφράζει το μέτρο του διανύσματος. Πιο συγκεκριμένα

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}| |\mathbf{a}| \cos 0^\circ = |\mathbf{a}|^2 \quad (2.32)$$

Ευρετήριο

- ανάδελτα 35, 37, 41
- αναλυτικές μέθοδοι 5, 79
 - καρτεσιανές συντεταγμένες 100, 148
 - κυλινδρικές συντεταγμένες 128, 140
 - σφαιρικές συντεταγμένες 85, 93, 98
- άξονας συμμετρίας 124, 132
- απλό στρώμα 85, 537, 540
 - κυκλικής διατομής 121
- απόκλιση 45, 47, 50
- αριθμητικές μέθοδοι 7, 191
 - καρτεσιανές συντεταγμένες 217
 - κυλινδρικές συντεταγμένες 201
 - σφαιρικές συντεταγμένες 192
- βαθμωτή συνάρτηση θέσης 18, 43, 44
- βαθμωτό μέγεθος 13
 - γινόμενο με διάνυσμα 16
 - πεδίο 18
- βαρύτητα 2, 386, 390
 - αναγωγή 387
 - αναγωγή Bouguer 392
 - Bouguer 393
 - αναγωγή ελεύθερου αέρα 391
 - ανωμαλία Bouguer 393
- γενικευμένο πολύεδρο 148
 - αναλυτική επίλυση 152, 174
 - απροσδιοριστίες 169, 173
 - αριθμητική επίλυση 227, 245
- γραμμικός αλγόριθμος 232
- γραμμικό ολοκλήρωμα 66, 67, 70
- δέλτα του Kronecker 156, 247
- διάνυσμα 15
 - άθροισμα 15
 - άλγεβρα 16
 - αφαίρεση 16
 - θέσης 20
 - μέτρο 17
 - μοναδιαίο 16, 19
- διανυσματική συνάρτηση 18
- διανυσματικό πεδίο 18
- διγραμμικές επιφάνειες 329, 334, 337
- εσωτερικό γινόμενο 21
 - αναλυτική περιγραφή 22
- εξωτερικό γινόμενο 23, 24
 - αναλυτική περιγραφή 26
- ζυγός στρέψης Eötvös 467, 468
 - βαθμονόμηση 469, 470
- ισοστασία 507
 - Airy/Heiskanen 511, 513
 - Pratt/Hayford 519, 520
- κύλινδρος 128
 - αναλυτική επίλυση 130, 131
 - εκτός άξονα συμμετρίας 135, 137
 - αριθμητική επίλυση 205, 210
- κώνος 140
 - αναλυτική επίλυση 143, 147
- μέθοδος γραμμικών ολοκληρωμάτων 152
- μέθοδος του Werner 246

- μετασχηματισμός Fourier 286
 βαθυμετρικές διορθώσεις 295
 πρόβλημα προσδιοριστίας 304, 305
 τοπογραφικές διορθώσεις 292
 μετασχηματισμός wavelet 576, 579
- ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο 100
 αναλυτική επίλυση 104, 105
 προσδιοριστίες 107, 108
 αριθμητική επίλυση 217, 223
- συνημίτονο κατεύθυνσης 17
- σφαίρα 93
 αριθμητική επίλυση 201
 δεύτερες παράγωγοι 97
 δύναμη έλξης 94, 96
 δυναμικό 94
- σφαίρα Bjerhammar 485, 531, 533
 σφαίρα Brillouin 485, 531, 533, 535, 536, 556
- σφαιρική αρμονική ανάλυση 488
 απώλεια ορθογωνιότητας 493, 495
 μέσες τιμές διαμερισμάτων 498
 σημειακές τιμές 491
- σφαιρική αρμονική σύνθεση 488
 μέσες τιμές διαμερισμάτων 490
 σημειακές τιμές 489
- σφαιρικό κέλυφος πεπερασμένου πάχους
 αναλυτική επίλυση 99, 100
 αριθμητική επίλυση 198, 200
- τεσσεροειδείς 356, 360
- τοπογραφικά/ισοστατικά μοντέλα 510
 Airy/Heiskanen 517, 518
 Pratt/Hayford 525, 526
- τοπογραφικές διορθώσεις 388
 πρισματική μέθοδος 402
 σημειακές μάζες 405
- υβριδικές μέθοδοι 365, 419, 424
- τύπος του Parker 300
- υβριδικές μέθοδοι 283, 285
 Fourier 308, 310, 315
 Mass-Line FFT 323
 Mass-Prism FFT 327, 328
- φασματικό σχήμα Meissl 502, 505
- ψηφιακό μοντέλο εδάφους 397, 399
 παραγωγή 398
 προσέγγιση τοπογραφίας 404, 410
 τριγωνισμός 415
- Bessel
 συναρτήσεις 134, 201, 203, 205, 207, 209
- CRUST 2.0 445, 448
 γεωμετρική μοντελοποίηση 454, 455, 458
 υπολογισμός βαρυτικού σήματος 462
- Gauss
 αριθμητική ολοκλήρωση Gauss-Legendre 361, 362, 370, 372, 379, 494
 θεώρημα 73, 155, 166, 236, 330
 θεώρημα στο επίπεδο 166
- Green
 θεώρημα 75
 συνάρτηση πυρήνα 582
- Laplace 47, 48, 97
 εξίσωση 50, 83
 μετασχηματισμός 203
 σφαιρικές συντεταγμένες 92
 τελεστής 83, 97
- Legendre
 κανονική μορφή 126

- ολοκληρώματα των συναρτήσεων 498, 499, 501
- ολοκλήρωση Gauss-Legendre 361, 362, 379
- ορθογωνικότητα των συναρτήσεων 490
- πολύνυμα 194, 222, 556, 590, 594
- συναρτήσεις 195, 197, 209, 233, 240, 248, 498
- Poisson
 - εξίσωση 83
 - ολοκληρωματική εξίσωση 378
 - σφαιρική συνάρτηση 377
 - wavelets 590, 594
- Stokes
 - θεώρημα 74, 75, 237
 - ολοκλήρωμα 387
 - συνάρτηση 312
- STEP 473
 - χρονικά μεταβαλλόμενο βαρυτικό σήμα 474, 481
- wavelet 578, 580
 - προσανατολισμού 594
 - σφαιρικά 589, 591
 - υπολογισμός βαρυτικού σήματος 581, 584, 586, 588

Κυκλοφορούν επίσης

Δημήτριος Τσούλης

Εισαγωγή στην Τοπογραφία



ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΖΗΤΗ

Δημήτριος Τσούλης

Δορυφορική Γεωδαισία

Σύγχρονες διαστημικές εφαρμογές
για την κατανόηση του δυναμικού συστήματος Γη



ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΖΗΤΗ