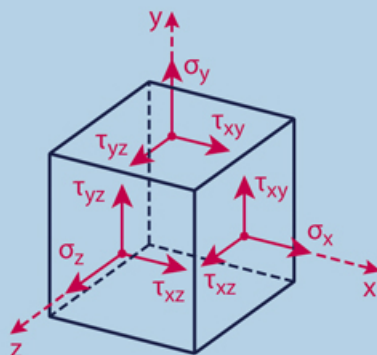


Θωμάς Ν. Βαλιάσης

ΑΝΤΟΧΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ



- Τάσεις – παραμορφώσεις φορέων
- Πειραματικές μέθοδοι μέτρησης μηχανικών μεγεθών
- Δομή της ύλης και μηχανικά χαρακτηριστικά
- Χάλυβας – σκυρόδεμα – ξύλο

120 Παραδείγματα

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα

ISBN 978-960-456-387-6

© Copyright, Βαλιάσης Θωμάς, Εκδόσεις Ζήτη, Ιούλιος 2015, Θεσσαλονίκη

Το παρόν έργο πνευματικής ιδιοκτησίας προστατεύεται κατά τις διατάξεις του ελληνικού νόμου (Ν.2121/1993 όπως έχει τροποποιηθεί και ισχύει σήμερα) και τις διεθνείς συμβάσεις περί πνευματικής ιδιοκτησίας. Απαγορεύεται απολύτως η άνευ γραπτής άδειας του εκδότη κατά οποιοδήποτε τρόπο ή μέσο αντιγραφή, φωτοανατύπωση και εν γένει αναπαραγωγή, εκμίσθωση ή δανεισμός, μετάφραση, διασκευή, αναμετάδοση στο κοινό σε οποιαδήποτε μορφή (ηλεκτρονική, μηχανική ή άλλη) και η εν γένει εκμετάλλευση του συνόλου ή μέρους του έργου.

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση
Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18° χλμ Θεσσαλονίκης - Περαιάς
Τ.Θ. 4171 • Περαιά Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr



www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ:
Αρμενοπούλου 27 - 546 35 Θεσσαλονίκη • Τηλ.: 2310-203.720 • Fax 2310-211.305
e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ - ΑΠΟΘΗΚΗ ΑΘΗΝΩΝ:
Χαριλάου Τρικούπη 22 - Τ.Κ. 106 79, Αθήνα • Τηλ.-Fax: 210-3816.650
e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

Στους παλιούς μου
Φοιτητάς

Πρόλογος

Η αντοχή των υλικών ασχολείται με τον υπολογισμό των τάσεων και των παραμορφώσεων που αναπτύσσονται στους φορείς. Η αριθμητική τιμή των μεγεθών αυτών μας δείχνει αν ο φορέας παραλαμβάνει με ασφάλεια τα φορτία που δέχεται.

Οι αρχές στις οποίες στηρίζονται οι υπολογισμοί αφορούν συνθήκες ισορροπίας, συνθήκες συμβιβαστού των παραμορφώσεων, ενεργειακές αρχές και αρχή των δυνατών έργων ενώ απαραίτητη είναι και η γνώση των καταστατικών νόμων των υλικών.

Τα πρώτα κεφάλαια επομένως του μαθήματος της Αντοχής των Υλικών θα πρέπει να περιλαμβάνουν:

- Τον ορισμό των τάσεων οι οποίες προσδιορίζουν την εντατική κατάσταση του φορέα (κεφάλαιο 1).
- Τον ορισμό των παραμορφώσεων (κεφάλαιο 2).
- Τον προσδιορισμό των καταστατικών εξισώσεων που συσχετίζουν τάσεις και παραμορφώσεις (κεφάλαιο 3).

Τάσεις παραμορφώσεις και καταστατικές εξισώσεις όπως ορίζονται στα κεφάλαια αυτά αναφέρονται σε συνεχή μέσα.

Ο προσδιορισμός της εντατικής κατάστασης ενός πρισματικού φορέα που δέχεται μία σύνθετη φόρτιση είναι εξαιρετικά δύσκολος. Για το λόγο αυτό μελετάται η κατανομή των τάσεων λόγω απλών φορτίσεων. Από την εφαρμογή της αρχής της επαλληλίας για τις απλές φορτίσεις μπορεί να υπολογισθεί η εντατική κατάσταση μιας σύνθετης φόρτισης. Έτσι:

Στο κεφάλαιο 4 εξετάζεται η αξονική φόρτιση

Στο κεφάλαιο 5 εξετάζεται η καθαρή κάμψη

Στο κεφάλαιο 6 εξετάζεται η καθαρή κάμψη από εγκάρσια φορτία

Στο κεφάλαιο 7 εξετάζεται η καθαρή στρέψη

Στο κεφάλαιο 8 τέλος δίδονται παραδείγματα υπολογισμού τάσεων από σύνθετες φορτίσεις

Υπάρχουν φορείς που λόγω του σχήματος και της φόρτισής τους καθιστούν αναγκαία τη χρησιμοποίηση σφαιρικών ή κυλινδρικών ή πολικών συντεταγμένων.

Στο κεφάλαιο 9 εξετάζονται μερικά είδη επιφανειακών φορέων επίπεδης έντασης με τη χρησιμοποίηση πολικών συντεταγμένων.

Οι πειραματικές μέθοδοι μέτρησης στο κεφάλαιο 10 είναι σημαντικές γιατί μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον έλεγχο θεωρητικών αποτελεσμάτων ή και να δώσουν λύσεις εκεί που οι θεωρητικές μέθοδοι αδυνατούν.

Στα κριτήρια αστοχίας του κεφάλαιο 11 εξετάζεται η αστοχία των υλικών για διάφορες σύνθετες εντατικές καταστάσεις.

Στο κεφάλαιο 12 εξετάζεται ο λυγισμός πρισματικών φορέων υπό αξονική φόρτιση. Για την εξήγησή του δεχόμαστε ότι δεν μπορούμε να έχουμε ούτε ένα τέλεια ομογενές υλικό, ούτε αξονική φόρτιση που να μην αποκλίνει από τη θεωρητική λαμβανόμενη.

Τα κρυσταλλικά υλικά των κατασκευών έχουν ατέλειες στη δομή. Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε πως αυτές και το είδος της κρυσταλλικής δομής σχετίζονται με τα μηχανικά χαρακτηριστικά. Στο κεφάλαιο 13 επιχειρείται ένας τέτοιος συσχετισμός.

Οι απλές πειραματικές μετρήσεις στο κεφάλαιο 14 μας δίνουν όλα τα χαρακτηριστικά μεγέθη της συμπεριφοράς του υλικού υπό απλές φορτίσεις. Μεγέθη απαραίτητα για τον προσδιορισμό των επιτρεπομένων τάσεων.

Στο κεφάλαιο 15 εξετάζονται ξεχωριστά τρία σημαντικά δομικά υλικά. Ο δομικός χάλυβας, το σκυρόδεμα και το ξύλο.

Στο κεφάλαιο 16 τέλος δίδονται γεωμετρικά στοιχεία επίπεδων επιφανειών.

Από το περιεχόμενο των παραπάνω κεφαλαίων γίνεται φανερό πως το μάθημα της Αντοχής των Υλικών είναι βασικό στις σπουδές του Μηχανικού.

Εκτός από τις θεωρητικές μεθόδους υπολογισμού, ο συγγραφέας θεωρεί σημαντικό να κατανοήσει ο σπουδαστής και τη σπουδαιότητα των πειραματικών μεθόδων και μετρήσεων καθώς επίσης και το ότι η μηχανική (και όχι μόνο) συμπεριφορά του υλικού καθορίζεται σε μεγάλο βαθμό και από τις ατέλειες της κρυσταλλικής του δομής.

Ευχαριστώ θερμά τις εκδόσεις Ζήτη που πήραν το ρίσκο της έκδοσης ενός βιβλίου εκδοτικά απαιτητικού τα δύσκολα αυτά οικονομικά χρόνια.

Θ. Βαλιάσης

Περιεχόμενα

1. Τάσεις

1.1	Γενικά.....	15
1.2	Ορισμός της τάσης.....	15
1.3	Συνθήκες ισορροπίας στο στοιχειώδες παραλληλεπίπεδο	18
1.4	Μετασχηματισμός του τανυστή τάσης.....	18
1.5	Σχέση του τανυστή τάσης και του διανύσματος τάσης ενός επιπέδου του	21
1.6	Κύριες τάσεις.....	23
1.6.1	Μέγιστα και ελάχιστα διατμητικών τάσεων.....	26
1.7	Τάσεις οκταέδρου	36
1.8	Εκτροπéας και σφαιρικός τανυστής τάσης	36
1.9	Επίπεδη ένταση.....	37
1.9.1	Κύριες τάσεις	40
1.9.2	Μέγιστες διατμητικές τάσεις	41
1.9.3	Καθαρή διάτμηση	41
1.10	Κύκλος του Mohr επίπεδης έντασης	42
1.11	Κύκλος του Mohr τρισδιάστατης έντασης.....	49
1.12	Συνθήκες ισορροπίας	53
1.13	Συνοριακές συνθήκες	55
1.14	Φορτία διατομής	56
	Τύποι του κεφαλαίου 1	57
	Πίνακας I: Αξονική Φόρτιση	57
	Ασκήσεις.....	65

2. Παραμορφώσεις

2.1	Ορισμός των απλών μεταμορφώσεων.....	67
2.2	Γενικός ορισμός των παραμορφώσεων	68
2.3	Μετασχηματισμός του τανυστή παραμόρφωσης.....	72
2.4	Κύριες παραμορφώσεις	74
2.5	Επίπεδη παραμόρφωση.....	76
2.5.1	Κύριες παραμορφώσεις	77
2.5.2	Κύκλος του Mohr	78
2.6	Συνθήκες συμβιβαστού των παραμορφώσεων	78
	Τύποι του κεφαλαίου 2	87
	Πίνακας II: Παραμορφώσεις.....	87

Ασκήσεις	91
----------------	----

3. Καταστατικές Εξισώσεις

3.1 Ομογενή και ισότροπα υλικά	93
3.1.1 Ορθές παραμορφώσεις.....	93
3.1.2 Διατμητικές παραμορφώσεις.....	95
3.2 Γενικές καταστατικές εξισώσεις	96
3.2.1 Υλικά με ένα επίπεδο συμμετρίας	97
3.2.2 Υλικά με τρία επίπεδα συμμετρίας κάθετα μεταξύ τους.....	97
3.2.3 Υλικά με τρία επίπεδα συμμετρίας κάθετα μεταξύ τους και ισότιμα	98
3.2.4 Υλικά με ισότιμες διευθύνσεις του επιπέδου συμμετρίας τους.....	99
3.3 Τάσεις και παραμορφώσεις φορέων	99
3.3.1 Επίπεδη ένταση	100
3.3.2 Επίπεδη παραμόρφωση.....	101
3.4 Ενέργεια παραμόρφωσης.....	109
3.5 Θερμικές παραμορφώσεις και τάσεις.....	112
3.6 Υπολογισμός των μετακινήσεων της επίπεδης κατάστασης.....	113
3.7 Επίλυση φορέων επίπεδης κατάστασης - Τασική συνάρτηση.....	114
3.8 Αρχή του Saint Venant	117
3.9 Μελέτη φορέων	118
Πίνακες του κεφαλαίου 3	119
Πίνακας III: Καταστατικές εξισώσεις υλικών	119
Ασκήσεις	124

4. Αξονική Φόρτιση

4.1 Τάσεις – Παραμορφώσεις	125
4.2 Πειραματική εύρεση του διαγράμματος τάσεων – παραμορφώσεων	127
4.2.1 Δοκιμή εφελκυσμού μαλακού χάλυβα	127
4.2.2 Δοκιμή εφελκυσμού χυτοσιδήρου.....	131
4.2.3 Δοκιμές θλίψης.....	131
4.3 Μορφές αστοχίας δοκιμών σε αξονική φόρτιση – συντελεστές ασφάλειας.....	132
4.4 Επίλυση απλών φορέων υπό αξονική φόρτιση.....	133
4.5 Φορείς με συγκέντρωση τάσεων.....	153
Τύποι του κεφαλαίου 4.....	155
Πίνακας IV: Αξονική Φόρτιση	155
Ασκήσεις.....	156

5. Καθαρή Κάμψη

5.1	Ορισμός	157
5.2	Φορτία διατομής δοκού.....	157
5.3	Δοκοί με επίπεδο συμμετρίας που συμπίπτει με το επίπεδο φόρτισης	159
5.4	Δοκοί τυχαίας διατομής.....	167
5.5	Κάμψη από έκκεντρη αξονική φόρτιση	174
5.6	Καθαρή κάμψη δοκών από διαφορετικά υλικά	176
5.7	Πλαστική κάμψη δοκού	184
5.8	Πλαστική ανάλυση γραμμικών φορέων	199
5.9	Οριακός υπολογισμός φορέων	213
	Τύποι του κεφαλαίου 5	215
	Πίνακας V: Καθαρή Κάμψη	215
	Ασκήσεις.....	219

6. Κάμψη από Εγκάρσια Φορτία

6.1	Πλήρεις διατομές.....	223
6.1.1	Γενικά.....	223
6.1.2	Κάμψη από εγκάρσια φορτία κατά τη διεύθυνση z.....	224
6.2	Λεπτότοιχες διατομές	234
6.2.1	Γενικά	234
6.2.2	Κέντρο διάτμησης.....	234
6.2.3	Ανοιχτές λεπτότοιχες διατομές με άξονα συμμετρίας.....	236
6.2.4	Ανοιχτές λεπτότοιχες διατομές χωρίς άξονα συμμετρίας.....	239
6.2.5	Κλειστές λεπτότοιχες διατομές.....	248
	Τύποι του κεφαλαίου 6	254
	Πίνακας VI: Κάμψη από εγκάρσια φορτία	254
	Ασκήσεις.....	258

7. Στρέψη

7.1	Κυλινδρικοί φορείς	259
7.1.1	Παραμορφώσεις.....	259
7.1.2	Υλικά για τα οποία ισχύει ο νόμος του Hooke	260
7.1.3	Υλικά για τα οποία δεν ισχύει ο νόμος του Hooke	261
7.1.4	Κύριες τάσεις και κύριες παραμορφώσεις	262
7.1.5	Θραύση από στρέψη	262
7.2	Κοίλοι κυλινδρικοί φορείς	263
7.3	Ενέργεια παραμόρφωσης λόγω στρέψης	266
7.4	Λεπτότοιχοι σωληνωτοί φορείς	268
7.4.1	Λεπτότοιχοι σωλήνες σταθερού πάχους.....	268

7.4.2	Λεπτότοιχοι σωλήνες μεταβλητού πάχους.....	269
7.4.3	Λεπτότοιχες πολυσωληνωτές διατομές	274
7.5	Φορείς ανοιχτών λεπτότοιχων διατομών	278
7.5.1	Γενικά	278
7.5.2	Στρέψη ορθογωνικής λωρίδας.....	278
7.5.3	Ανοιχτές σύνθετες λεπτότοιχες διατομές με μέλη σταθερού πάχους	280
7.5.4	Ανοιχτές λεπτότοιχες διατομές οποιουδήποτε σχήματος και μεταβλητού πάχους.....	281
7.6	Γενική λύση του προβλήματος της στρέψης	284
7.6.1	Διατύπωση των επιλυουσών εξισώσεων	284
7.6.2	Επίλυση με την χρησιμοποίηση τασικής συνάρτησης	286
7.7	Στρέψη δοκών ορθογωνικής διατομής	293
7.8	Ελαστοπλαστική στρέψη.....	295
7.8.1	Ελαστοπλαστική στρέψη σύμφωνα με τέλεια ελαστοπλαστικό διάγραμμα (τ, γ).....	295
7.8.2	Ελαστοπλαστική στρέψη σύμφωνα με το πραγματικό διάγραμμα (τ, γ) του υλικού	298
7.9	Πειραματικός προσδιορισμός της καμπύλης (τ, γ) του υλικού.....	303
7.10	Φορείς σε στρέψη	303
7.10.1	Ισοστατικοί φορείς.....	304
7.10.2	Υπερστατικοί φορείς.....	309
	Τύποι του κεφαλαίου 7.....	311
	Πίνακας VII: Στρέψη	311
	Ασκήσεις	317

8. Τάσεις από Σύνθετες Φορτίσεις

8.1	Γενικά.....	319
8.2	Ροπή κάμψης και αξονική δύναμη.....	320
8.3	Ροπή κάμψης και αξονική δύναμη από έκκεντρη φόρτιση.....	321
8.4	Ροπή κάμψης και αξονική δύναμη από προένταση στο σκυρόδεμα.....	322
8.4.1	Το θλιπτικό φορτίο εφαρμόζεται στο κέντρο της διατομής	323
8.4.2	Τα θλιπτικά φορτία εφαρμόζονται επί του άξονα z σε απόσταση h/6 από το κέντρο της διατομής.....	324
8.5	Ροπή κάμψης και ροπή στρέψης.....	325
8.6	Ροπή κάμψης, διατμητική δύναμη, ροπή στρέψης	326
	Ασκήσεις	336

9. Πολικές Συντεταγμένες – Φορείς Επίπεδης Έντασης

9.1	Γενικά.....	337
9.2	Πολικές συντεταγμένες.....	337

9.3	Συγκέντρωση τάσεων.....	343
9.4	Μοναχικές φορτίσεις.....	345
9.5	Τάσεις επαφής.....	348
9.6	Λεπτότοιχα δοχεία πίεσης.....	350
9.7	Φορείς με αξονική συμμετρία	358
9.7.1	Γενικά.....	358
9.7.2	Απλοί κυλινδρικοί αγωγοί.....	358
9.7.3	Σύνθετοι κυλινδρικοί αγωγοί.....	363
9.7.4	Δίσκοι περιστροφής σταθερού πάχους.....	365
9.8	Κάμψη καμπύλων δοκών.....	370
	Τύποι του κεφαλαίου 9.....	379
	Ασκήσεις.....	383
10.	Πειραματικές Μέθοδοι Μέτρησης Στατικών Μεγεθών – Τροχιές Κύριων Τάσεων – Επιτρεπόμενες Τάσεις	
10.1	Πειραματικές μέθοδοι μέτρησης στατικών μεγεθών.....	385
10.1.1	Γενικά.....	385
10.1.2	Ταινίες επιμήκυνσης.....	385
10.1.3	Μέτρηση επίπεδης έντασης.....	387
	Ασκήσεις.....	392
10.2	Τροχιές κύριων τάσεων.....	393
10.3	Επιτρεπόμενες τάσεις (Τάσεις εργασίας)	395
11.	Κριτήρια Αστοχίας	
11.1	Γενικά.....	397
11.2	Κριτήριο Rankine – Ψαθυρά υλικά.....	397
11.3	Κριτήριο Tresca – Όλκιμα υλικά.....	397
11.4	Κριτήριο Von Mises – Όλκιμα υλικά	399
11.5	Σύγκριση των κριτηρίων Tresca και Von Mises επίπεδης έντασης	401
11.6	Κριτήριο του Mohr – Όλκιμα και ψαθυρά υλικά – Επίπεδη εντατική κατάσταση	402
12.	Λυγισμός	
12.1	Περιγραφή του φαινομένου.....	407
12.2	Αμφιέριστος στύλος.....	407
12.3	Στύλοι διάφορων στηρίξεων.....	410
12.4	Σχεδιασμός υποστυλωμάτων	412
12.5	Έκκεντρη φόρτιση	414
12.6	Εμπειρικοί τύποι λυγισμού υπό κεντρική φόρτιση	423

13. Δομή της Ύλης – Μηχανικά Χαρακτηριστικά Κρυσταλλικών Υλικών

13.1	Γενικά.....	429
13.2	Ατομικοί δεσμοί.....	429
13.3	Δομή των στερεών υλικών	431
13.3.1	Γενικά	431
13.3.2	Μεταλλική κρυσταλλική δομή.....	432
13.3.3	Κρυσταλλικές μονάδες και κρύσταλλοι.....	432
13.4	Ατέλειες κρυστάλλων	435
13.4.1	Γενικά	435
13.4.2	Σημειακές ατέλειες.....	435
13.4.3	Γραμμικές ατέλειες.....	436
13.4.4	Επίπεδες ατέλειες.....	438
13.4.5	Ατέλειες που έχουν όγκο	439
13.5	Μετακινήσεις ατόμων – Ολισθήσεις επίπεδων	439
13.5.1	Γενικά	439
13.5.2	Διάχυση.....	439
13.5.3	Ολισθήσεις επίπεδων	440

14. Μηχανικές Ιδιότητες των Υλικών

14.1	Γενικά.....	443
14.2	Δοκιμές εφελκυσμού	444
14.3	Δοκιμή διάρρηξης	447
14.4	Δοκιμές θλίψης	448
14.5	Δοκιμές κάμψης.....	450
14.6	Δοκιμές διάτμησης.....	453
14.7	Δοκιμές στρέψης.....	453
14.8	Δοκιμές σκληρομέτρησης	455
14.8.1	Δοκιμές χάραξης.....	456
14.8.2	Δοκιμή Brinell.....	456
14.9	Κόπωση.....	458
14.9.1	Ορισμός.....	458
14.9.2	Μηχανισμός θραύσης κατά την κόπωση.....	458
14.9.3	Δοκιμές αντοχής σε κόπωση	458
14.10	Ολκιμότητα – Ψαθυρότητα των υλικών.....	462
14.11	Δοκιμές κρούσης σε δοκίμια με εγκοπές	465
14.12	Ερπυσμός.....	466

15. Χάλυβας Κατασκευών – Σκυρόδεμα – Ξύλο

15.1	Χάλυβας κατασκευών.....	469
15.2	Σκυρόδεμα	471

15.2.1 Γενικά.....	471
15.2.2 Τσιμέντο Portland	471
15.2.3 Αδρανή.....	473
15.2.4 Ιδιότητες των υλικών του σκυροδέματος	473
15.2.5 Ιδιότητες του νωπού σκυροδέματος	475
15.2.6 Μηχανική συμπεριφορά του σκυροδέματος.....	475
15.3 Ξύλο	479
15.3.1 Γενικά.....	479
15.3.2 Μικροσκοπική δομή του ξύλου	479
15.3.3 Μηχανική συμπεριφορά του ξύλου	481
15.3.4 Συνθετική ξυλεία	485

16. Γεωμετρικά Στοιχεία Επίπεδων Επιφανειών

16.1 Στατική ροπή – Κέντρο επιφάνειας	487
16.2 Ροπές αδράνειας.....	488
16.3 Αλλαγή συστήματος αξόνων.....	489
16.3.1 Παράλληλη μετάθεση – Θεώρημα Steiner	489
16.3.2 Στροφή του συστήματος αξόνων κατά γωνία d	490
16.3.3 Κύριες ροπές αδράνειας	491
16.3.4 Ακτίνες αδράνειας.....	492

Βιβλιογραφία	507
--------------------	-----

Ευρετήριο Όρων	509
----------------------	-----

1. ΤΑΣΕΙΣ

1.1 ΓΕΝΙΚΑ

Τα υλικά τα οποία εξετάζει η θεωρία ελαστικότητας θεωρούμε ότι έχουν μάζα που κατανέμεται ομοιόμορφα και πλήρως στον όγκο που καταλαμβάνουν. Επίσης οι ατέλειες στη μοριακή τους δομή (ασυνέχεια, κενά, κ.λπ.) δεν λαμβάνονται υπόψη. Η θεώρηση αυτή της συνέχειας των υλικών διαμορφώνει το πλαίσιο στο οποίο στηρίζεται η μελέτη τους. Πιο συγκεκριμένα, η μαθηματική περιγραφή της συμπεριφοράς των υλικών είναι δυνατή γιατί μεγέθη πεδίου, όπως οι τάσεις και οι παραμορφώσεις, εκφράζονται με βάση την αποδοχή της συνέχειας, με συνεχείς συναρτήσεις των συντεταγμένων του χώρου και του χρόνου.

1.2 ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΤΑΣΗΣ

Το στερεό ελαστικό σώμα του σχ. 1.1α ισορροπεί υπό την επίδραση των εξωτερικών φορτίων F_i ενώ στο εσωτερικό του αναπτύσσονται τα φορτία f_i . Ζητείται να ορισθεί η τάση σ ένα σημείο του Σ .

Τέμνεται το σώμα μ' ένα επίπεδο που διέρχεται από το σημείο Σ και λαμβάνεται το αριστερό τμήμα (σχ. 1.1β). Γύρω από το Σ θεωρούμε μια επιφάνεια ΔA επί του επιπέδου της τομής και ένα σύστημα συντεταγμένων $\Sigma(x, y, z)$ με τον άξονα x κάθετο στην επιφάνεια αυτή. Αν στην επιφάνεια ΔA αναπτύσσεται ένα εσωτερικό επιφανειακό φορτίο το οποίο έχει συνισταμένη Δf_x , τότε το διάνυσμα της τάσης t_x ορίζεται από τη σχέση

$$t_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta f_x}{\Delta A} = \frac{df_x}{dA} \quad (1.1)$$

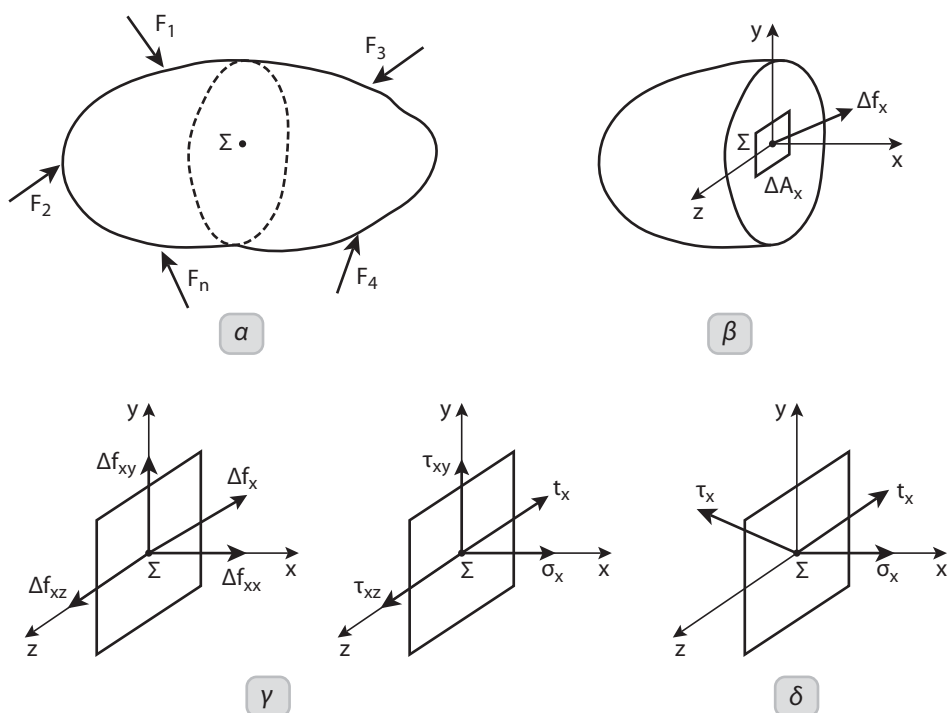
Σχετικά με τους συμβολισμούς: Κάθε επίπεδο συμβολίζεται με την κάθετό του. Π.χ. ένα επίπεδο κάθετο στον άξονα x ονομάζεται επίπεδο x . Επίσης η δύναμη και η τάση που ασκούνται στο επίπεδο x συμβολίζονται με Δf_x , t_x αντίστοιχα. Ο συμβολισμός ενός διάνυσματος, ενός μητρώου, ή ενός τανυστή γίνεται με έντονο γράμμα.

Ορισμός των συνιστωσών της τάσης t_x

Αν Δf_{xx} , Δf_{xy} , Δf_{xz} είναι οι προβολές της Δf_x στους άξονες x , y , z αντίστοιχα (σχ. 1.1γ) τότε οι συνιστώσες της τάσης t_x ορίζονται από τις σχέσεις

ορθή τάση κατά τη διεύθυνση x :

$$\sigma_{xx} = \sigma_x = \frac{\Delta f_{xx}}{\Delta A_x} = \frac{df_{xx}}{dA_x}$$



Σχ. 1.1 Ορισμός των τάσεων

διατμητική τάση κατά τη διεύθυνση y :

$$\tau_{xy} = \frac{\Delta f_{xy}}{\Delta A_x} = \frac{df_{xy}}{dA_x} \quad (1.2)$$

διατμητική τάση κατά τη διεύθυνση z :

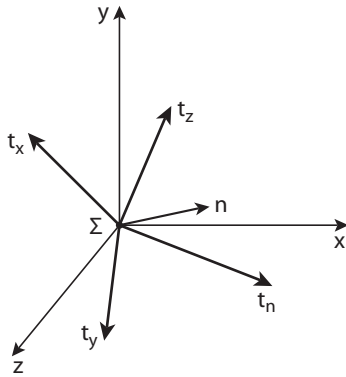
$$\tau_{xz} = \frac{\Delta f_{xz}}{\Delta A_x} = \frac{df_{xz}}{dA_x}$$

Οι τάσεις τ_{xy} , τ_{xz} μπορούν να συντεθούν σε μία, την τ_{xy} , οπότε η τάση t_x του Σ εκφράζεται από τις διανυσματικές συνιστώσες (σ_x, τ_x) (σχ. 1,1δ).

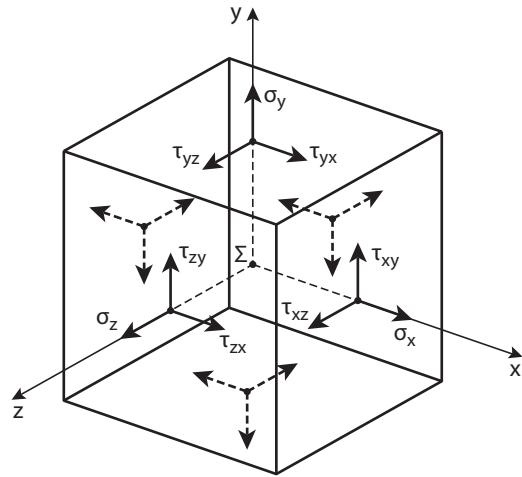
Στους συμβολισμούς των τάσεων ο πρώτος δείκτης συμβολίζει το επίπεδο που η τάση ασκείται και ο δεύτερος τη διεύθυνσή της. Η ορθή τάση σημειώνεται για συντομία σαν σ_x .

Αν από το σημείο Σ επιλέγονταν να περνά ένα επίπεδο άλλης διεύθυνσης, είναι φανερό πως η ορθή και οι διατμητικές τάσεις του επιπέδου αυτού θα προέκυπταν διαφορετικές. Και επειδή από το Σ μπορεί να περνά ένας άπειρος αριθμός επιπέδων, άπειρος είναι και ο αριθμός των τιμών των τάσεων του Σ .

Οι τάσεις όμως των άπειρων αυτών επιπέδων δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, γιατί αν είναι γνωστές οι τάσεις σε τρία επίπεδα που διέρχονται από το Σ μπορούν να διατυπωθούν εξισώσεις μετασχηματισμού που συσχετίζουν τις τάσεις οποιουδήποτε άλλου επιπέδου με τις τάσεις των τριών αυτών επιπέδων. Αυτό γίνεται κατανοητό από το σχ. 1.2. Σ' αυτό t_x, t_y, t_z είναι τα διανύσματα των τάσεων των επιπέδων x, y, z που διέρχονται από



Σχ. 1.2



Σχ. 1.3: Στοιχειώδες παραλληλεπίπεδο των τάσεων

το Σ και t_n η τάση ενός άλλου επιπέδου n που διέρχεται επίσης από το Σ . Είναι προφανές ότι η t_n μπορεί να εκφρασθεί συναρτήσει των t_x, t_y, t_z όπως επίσης και συναρτήσει των συνιστωσών τους. Επομένως η εντατική κατάσταση του Σ προσδιορίζεται από τις εννέα τάσεις $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$.

Πρακτικά η εντατική κατάσταση του Σ αποδίδεται με το στοιχειώδες παραλληλεπίπεδο των τάσεων του σχ. 1.3. Σ' αυτό υποθέτουμε ότι οι μαζικές δυνάμεις λόγω των απειροστών διαστάσεων του είναι μηδενικές και επομένως η εντατική κατάσταση μέσα στο στοιχειώδες παραλληλεπίπεδο δεν μεταβάλλεται με την απόσταση αλλά μόνο με τη διεύθυνση. Αποτέλεσμα της υπόθεσης αυτής είναι στο στοιχειώδες παραλληλεπίπεδο να υπάρχουν πάλι οι τάσεις $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ που ορίζουν την εντατική κατάσταση του Σ .

Εν αντιθέσει με το σχ. 1.2., στο στοιχειώδες παραλληλεπίπεδο του σχ. 1.3 μπορούν να εφαρμοσθούν οι συνθήκες ισορροπίας επειδή πρόκειται για τμήμα του φορέα που ισορροπεί. Επίσης υπό την επίδραση των τάσεων του, αυτό παραμορφώνεται. Για να γίνει κατανοητή η συμπεριφορά αυτή θα μπορούσε να φαντασθεί κανείς ότι το στοιχειώδες παραλληλεπίπεδο συμπίπτει με μία δομική κρυσταλλική μονάδα του υλικού (§13.3.3), η οποία λόγω των απειροστών διαστάσεων της ταυτίζεται με το σημείο Σ .

Πρόσημο των τάσεων: Οι τάσεις των ορατών επιπέδων του στοιχειώδους παραλληλεπίπεδου είναι θετικές κατά τη διεύθυνση των θετικών αξόνων, ενώ οι τάσεις των επιπέδων που δεν φαίνονται είναι θετικές κατά τη διεύθυνση των αρνητικών αξόνων. Οι τάσεις του σχ. 1.3 είναι όλες θετικές.

Οι τάσεις $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ αποτελούν συνιστώσες του τανυστή δεύτερης τάξης σ , ο οποίος σε μητρωϊκή μορφή γράφεται

$$\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (1.3)$$

1.3 ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΣΤΟ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟ

Οι συνθήκες ισορροπίας για ένα φορέα στο χώρο είναι έξι.

Προφανώς ισχύουν οι $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma F_z = 0$ επειδή οι απέναντι ορθές τάσεις είναι ίσες. Επίσης είναι

$$\begin{aligned}\Sigma M_x = 0 & \quad (\tau_{yz} dx dy) \frac{dy}{2} \cdot 2 - (\tau_{zy} dx dy) \frac{dz}{2} \cdot 2 = 0 \Rightarrow \tau_{yz} = \tau_{zy} \\ \Sigma M_y = 0 & \quad (\tau_{zx} dx dy) \frac{dz}{2} \cdot 2 - (\tau_{xz} dy dz) \frac{dx}{2} \cdot 2 = 0 \Rightarrow \tau_{zx} = \tau_{xz} \\ \Sigma M_z = 0 & \quad (\tau_{xy} dz dy) \frac{dx}{2} \cdot 2 - (\tau_{yx} dx dz) \frac{dy}{2} \cdot 2 = 0 \Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx}\end{aligned} \quad (1.4)$$

Σύμφωνα με τις εξ. 1.4 ο τανυστής τάσης είναι συμμετρικός, έχει έξι συνιστώσες και γράφεται

$$\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (1.5)$$

1.4 ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΤΑΝΥΣΤΗ ΤΑΣΗΣ

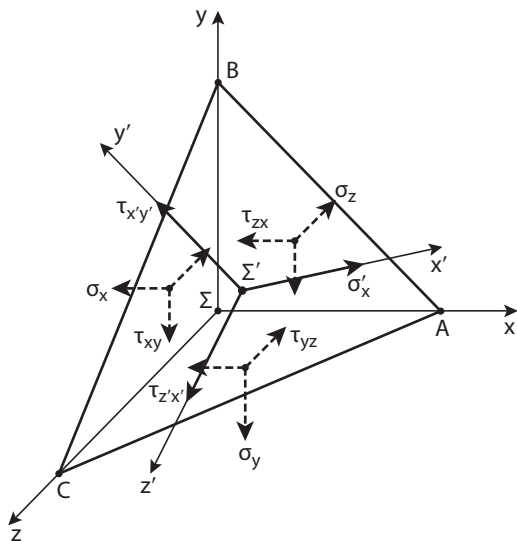
Στο τετράεδρο του σχ. 1.4 φαίνονται οι συνιστώσες του τανυστή τάσης σ του σημείου Σ στο σύστημα συντεταγμένων (σ.σ.)

$\Sigma(x, y, z)$. Το σ.σ. $\Sigma'(x', y', z')$ ως προς το οποίο θα μετασχηματισθεί ο σ έχει τον άξονα x' κάθετο στο πλάγιο επίπεδο (ABC) και τους άξονες y', z' στο επίπεδο (ABC). Η απειροστή απόσταση του Σ' από το Σ όπως έχουμε δει, δεν διαφοροποιεί το αποτέλεσμα του μετασχηματισμού, και επομένως ο μετασχηματισμός στο σ.σ. $\Sigma'(x' y' z')$ είναι και μετασχηματισμός σ' ένα σ.σ. $\Sigma(x, y, z)$.

Για την εύρεση των σχέσεων μετασχηματισμού θα πρέπει να εφαρμοσθούν οι συνθήκες ισορροπίας:

- στο τετράεδρο ΣΑΒC από το οποίο θα βρεθούν οι συνιστώσες

$$\sigma_{x'}, \tau_{x'y'}, \tau_{z'y'}$$



Σχ. 1.4

- σ' ένα τετράεδρο που σχηματίζεται από την τομή του επιπέδου y' με τους άξονες του σ.σ. $\Sigma(x, y, z)$ απ' όπου θα βρεθούν οι συνιστώσες $\sigma_{y'}$, $\sigma_{y'z'}$
- σ' ένα τετράεδρο που σχηματίζεται από την τομή του επιπέδου z' με τους άξονες του σ.σ. $\Sigma(x, y, z)$ απ' όπου θα βρεθεί η συνιστώσα $\sigma_{z'}$.

Για συντομία τα συνημίτονα κατεύθυνσης μεταξύ των αξόνων συμβολίζονται

$$\cos\theta_{x'x} = c_{x'x}, \quad \cos\theta_{x'y} = c_{x'y},$$

$$\cos\theta_{x'z} = c_{x'z}, \quad \cos\theta_{y'x} = c_{y'x}$$

Επίσης τα εμβαδά των επιπέδων του τετραέδρου συμβολίζονται με

$$(ABC) = A_{x'}, \quad (\Sigma BC) = A_x,$$

$$(\Sigma AC) = A_y, \quad (\Sigma AB) = A_z$$

Οι προβολές του $A_{x'}$ πάνω στα επίπεδα A_x, A_y, A_z είναι

$$A_x = A_{x'} c_{x'x}, \quad A_y = A_{x'} c_{x'y}, \quad A_z = A_{x'} c_{x'z}$$

Αν λάβουμε υπόψη ότι η δύναμη που ασκείται σε μία επιφάνεια ισούται με την τάση επί το εμβαδόν τότε είναι

$$\begin{aligned} \Sigma F_{x'} = 0 \quad & \sigma_{x'} A_{x'} - (\sigma_x A_{x'} c_{x'x}) c_{x'x} - (\sigma_y A_{x'} c_{x'y}) c_{x'y} - (\sigma_z A_{x'} c_{x'z}) c_{x'z} - \\ & - (\tau_{xy} A_{x'} c_{x'x}) c_{x'y} - (\tau_{zx} A_{x'} c_{x'x}) c_{x'z} - (\tau_{xy} A_{x'} c_{x'y}) c_{x'x} - \\ & - (\tau_{yz} A_{x'} c_{x'y}) c_{x'z} - (\tau_{zx} A_{x'} c_{x'z}) c_{x'y} - (\tau_{yz} A_{x'} c_{x'z}) c_{x'y} = 0 \end{aligned}$$

από τη οποία προκύπτει

$$\sigma_{x'} = \sigma_x c_{x'x}^2 + \sigma_y c_{x'y}^2 + \sigma_z c_{x'z}^2 + 2\tau_{xy} c_{x'x} c_{x'y} + 2\tau_{yz} c_{x'y} c_{x'z} + 2\tau_{zx} c_{x'x} c_{x'z} \quad (1.6)$$

Με τον ίδιο τρόπο από τις συνθήκες ισορροπίας $\Sigma F_{y'} = 0$, $\Sigma F_{z'} = 0$ προκύπτουν οι εξισώσεις

$$\begin{aligned} \tau_{x'y'} &= \sigma_x c_{x'x} c_{y'x} + \sigma_y c_{y'y}^2 + \sigma_z c_{x'z} c_{y'z} + \tau_{xy} (c_{x'x} c_{y'y} + c_{x'y} c_{y'x}) + \\ &+ \tau_{xz} (c_{x'y} c_{y'z} + c_{x'z} c_{y'y}) + \tau_{zx} (c_{x'x} c_{y'z} + c_{x'z} c_{y'x}) \\ \tau_{x'z'} &= \sigma_x c_{x'x} c_{z'x} + \sigma_y c_{x'y} c_{z'y} + \sigma_z c_{x'z}^2 + \tau_{xy} (c_{x'x} c_{z'y} + c_{x'y} c_{z'x}) + \\ &+ \tau_{yz} (c_{x'y} c_{z'z} + c_{x'z} c_{z'y}) + \tau_{zx} (c_{x'x} c_{z'z} + c_{x'z} c_{z'x}) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Από την εφαρμογή τέλος των συνθηκών ισορροπίας και στα άλλα δύο τετράεδρα προκύπτουν οι εξισώσεις

$$\begin{aligned} \sigma_{y'} &= \sigma_x c_{y'x}^2 + \sigma_y c_{y'y}^2 + \sigma_z c_{y'z}^2 + 2\tau_{xy} c_{y'x} c_{y'y} + 2\tau_{yz} c_{y'y} c_{y'z} + 2\tau_{zx} c_{y'z} c_{y'x} \\ \tau_{y'z'} &= \sigma_x c_{y'x} c_{z'x} + \sigma_y c_{y'y} c_{z'y} + \sigma_z c_{y'z} c_{z'z} + \tau_{xy} (c_{y'x} c_{z'y} + c_{y'y} c_{z'x}) + \\ &+ \tau_{yz} (c_{y'y} c_{z'z} + c_{y'z} c_{z'y}) + \tau_{zx} (c_{y'x} c_{z'z} + c_{y'z} c_{z'x}) \\ \sigma_{z'} &= \sigma_x c_{z'x}^2 + \sigma_y c_{z'y}^2 + \sigma_z c_{z'z}^2 + 2\tau_{xy} c_{z'x} c_{z'y} + 2\tau_{yz} c_{z'y} c_{z'z} + 2\tau_{zx} c_{z'z} c_{z'x} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Οι εξ. 1.6 γράφονται σε μητρωϊκή μορφή

$$\begin{vmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'} \\ \tau_{x'z'} & \tau_{y'z'} & \sigma_{z'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{x'x} & c_{x'y} & c_{x'z} \\ c_{y'x} & c_{y'y} & c_{y'z} \\ c_{z'x} & c_{z'y} & c_{z'z} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{x'x} & c_{y'x} & c_{z'x} \\ c_{x'y} & c_{y'y} & c_{z'y} \\ c_{x'z} & c_{y'z} & c_{z'z} \end{vmatrix} \quad (1.7)$$

$$\text{ή} \quad \sigma_{x'y'z'} = \mathbf{C} \cdot \sigma_{xyz} \cdot \mathbf{C}^T \quad (1.7)$$

όπου σ_{xyz} και $\sigma_{x'y'z'}$ τα μητρώα των τάσεων στα σ.σ. $\Sigma(x, y, z)$ και $\Sigma(x', y', z')$ αντίστοιχα και \mathbf{C} το μητρώο μετασχηματισμού.

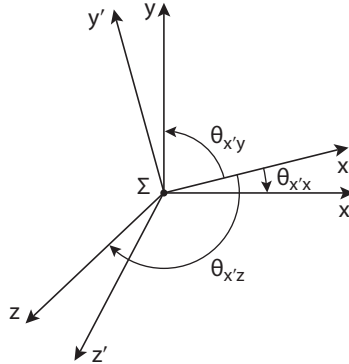
Η εξ. (1.7) εκφράζει το μετασχηματισμό ενός τανυστή δεύτερης τάξης.

Σημείωση:

Ο μετασχηματισμός ενός διανύσματος V_{xyz} του σ.σ. $\Sigma(x, y, z)$ σ' ένα διάνυσμα $V_{x'y'z'}$ του σ.σ. $\Sigma(x', y', z')$ (σχ. 1.5) εκφράζεται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} V_{x'} &= c_{xx'}V_x + c_{xy'}V_y + c_{xz'}V_z \\ V_{y'} &= c_{yx'}V_x + c_{yy'}V_y + c_{yz'}V_z \\ V_{z'} &= c_{zx'}V_x + c_{zy'}V_y + c_{zz'}V_z \end{aligned} \quad \text{ή} \quad \begin{vmatrix} V_{x'} \\ V_{y'} \\ V_{z'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{xx'} & c_{xy'} & c_{xz'} \\ c_{yx'} & c_{yy'} & c_{yz'} \\ c_{zx'} & c_{zy'} & c_{zz'} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{vmatrix}$$

$$\text{ή} \quad \mathbf{V}_{x'y'z'} = \mathbf{C}\mathbf{V}_{xyz} \quad (1.8)$$



Σχ. 1.5: Σημειώνονται μόνο οι γωνίες του άξονα x' με τους άξονες x, y, z .

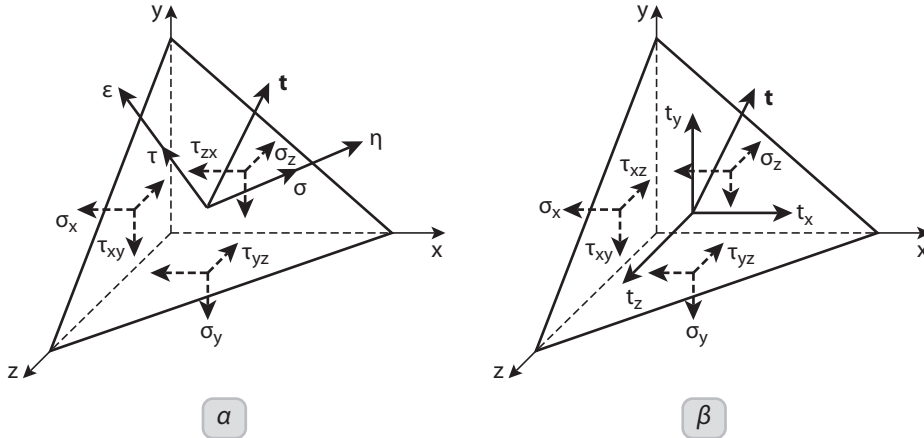
Αν για τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων του σ.σ. $\Sigma(x', y', z')$ εφαρμοσθούν οι εξ. 1.8 τότε μεταξύ των εννέα συνημιτόνων κατεύθυνσης των δύο ορθογωνίων συστημάτων συντεταγμένων προκύπτουν οι έξι λόγω συμμετρίας σχέσεις ορθογωνικότητας.

Σχέσεις ορθογωνικότητας

$$\begin{aligned} c_{x'x}^2 + c_{x'y}^2 + c_{x'z}^2 &= 1 & c_{x'x}c_{y'x} + c_{x'y}c_{y'y} + c_{x'z}c_{y'z} &= 0 \\ c_{y'x}^2 + c_{y'y}^2 + c_{y'z}^2 &= 1 & c_{y'x}c_{z'x} + c_{y'y}c_{z'y} + c_{y'z}c_{z'z} &= 0 \\ c_{z'x}^2 + c_{z'y}^2 + c_{z'z}^2 &= 1 & c_{x'x}c_{z'x} + c_{x'y}c_{z'y} + c_{x'z}c_{z'z} &= 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

1.5 ΣΧΕΣΗ ΤΟΥ ΤΑΝΥΣΤΗ ΤΑΣΗΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΤΑΣΗΣ ΕΝΟΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΤΟΥ

Στο σχ. 1.6 υπάρχει ο τανυστής σ του σημείου Σ στο σ.σ. $\Sigma(x,y,z)$ και η τάση \mathbf{t} ενός επιπέδου του \mathbf{n} . Θα υπολογισθούν οι συνιστώσες της \mathbf{t} συναρτήσει των συνιστωσών του σ για δύο περιπτώσεις:



Σχ. 1.6

- α)** Οι συνιστώσες της \mathbf{t} είναι η σ , κάθετος στο επίπεδο \mathbf{n} , και η τ επί του επιπέδου \mathbf{n} [$\mathbf{t}(\sigma, \tau)$] (σχ. 1.6α).

Αν για τα συνημίτονα κατεύθυνσης των διανυσμάτων \mathbf{n} και \mathbf{t} τεθούν οι παρακάτω απλούστεροι συμβολισμοί

$$n_x = \cos\theta_{nx}, \quad n_y = \cos\theta_{ny}, \quad n_z = \cos\theta_{nz}, \quad l_x = \cos\theta_{tx}, \quad l_y = \cos\theta_{ty}, \quad l_t = \cos\theta_{tz}$$

τότε η τάση σ σύμφωνα με την εξ. (1.6) γίνεται

$$\sigma = \sigma_x n_x^2 + \sigma_y n_y^2 + \sigma_z n_z^2 + 2\tau_{xy} n_x n_y + 2\tau_{yz} n_y n_z + 2\tau_{zx} n_z n_x \quad (1.10)$$

Η τ θα βρεθεί από μία συνθήκη ισορροπίας δυνάμεων για όλο το τετράεδρο.

Αν S_x, S_y, S_z, S_n είναι τα εμβαδά των επιπέδων x, y, z, n αντίστοιχα, τότε η ολική δύναμη F_x κατά τη διεύθυνση x των επιπέδων x και z είναι

$$F_x = -\sigma_x S_x - \tau_{xy} S_y - \tau_{zx} S_z$$

στην οποία αν τεθούν $S_x = S_n n_x, S_y = S_n n_y, S_z = S_n n_z$ προκύπτει

$$F_x = -S_n (\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{zx} n_z) \quad (1.11)$$

Ομοίως προκύπτουν οι F_y, F_z κατά τις διευθύνσεις y, z αντίστοιχα

$$\begin{aligned} F_y &= -S_n (\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z) \\ F_z &= -S_n (\tau_{zx} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Η συνισταμένη τάση του επιπέδου n είναι $(\sigma^2 + \tau^2)^{1/2}$. Συνεπώς

$$\Sigma F = 0 \quad (F_x^2 + F_y^2 + F_z^2)^{1/2} - S_n(\sigma^2 + \tau^2)^{1/2} = 0$$

και αν ληφθούν υπόψη οι εξ. (1.11) προκύπτει

$$\begin{aligned} \tau = & [(\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{zx} n_z)^2 + (\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z)^2 + \\ & + (\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z)^2 - \sigma^2] \end{aligned} \quad (1.12)$$

Τα συνημίτονα κατεύθυνσης l_x, l_y, l_z της τ προκύπτουν από τις συνθήκες ισορροπίας

$$\Sigma F_x = 0 \quad \tau S_n l_x + \sigma S_n n_x + F_x = 0$$

Αντικαθιστώντας την F_x από την εξ. 1.11 και επιλύοντας προκύπτει

$$l_x = \frac{1}{\tau} [(\sigma_x - \sigma) n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{zx} n_z] \quad (1.12)$$

Ομοίως προκύπτουν και τα l_y, l_z

$$\begin{aligned} l_y = & \frac{1}{\tau} [\tau_{xy} n_x + (\sigma_y - \sigma) n_y + \tau_{yz} n_z] \\ l_z = & \frac{1}{\tau} [\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + (\sigma_z - \sigma) n_z] \end{aligned} \quad (1.12)$$

β) Οι συνιστώσες της \mathbf{t} είναι t_x, t_y, t_z κατά τις διευθύνσεις των αξόνων x, y, z , $[(t_x, t_y, t_z)]$.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο επίπεδο n λόγω των τάσεων t_x, t_y, t_z είναι

$$F'_x = t_x S_n \quad F'_y = t_y S_n \quad F'_z = t_z S_n \quad (1.13)$$

Σύμφωνα με τις εξ. (1.11), (1.13) προκύπτουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = F'_x + F_x = 0 & \quad t_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z \\ \Sigma F_y = F'_y + F_y = 0 & \quad t_y = \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z \\ \Sigma F_z = F'_z + F_z = 0 & \quad t_z = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z \end{aligned} \quad (1.14)$$

Οι εξ. (1.14) γράφονται σε μητρωϊκή μορφή

$$\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad (1.15)$$

1.6 ΚΥΡΙΕΣ ΤΑΣΕΙΣ

Σύμφωνα με την εξίσωση (1.15)

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad (1.15)$$

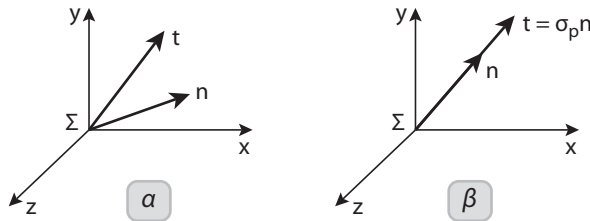
από το γινόμενο του τανυστή $\boldsymbol{\sigma}$ με το διάνυσμα \mathbf{n} προκύπτουν τρεις συνιστώσες οι οποίες ορίζουν το διάνυσμα \mathbf{t} (σχ. 1.7α). Γενικά μπορούμε να πούμε πώς μία εξίσωση της μορφής

$$\mathbf{b} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{a} \quad (1.16)$$

αποτελεί ένα μετασχηματισμό του διανύσματος \mathbf{a} στο διάνυσμα \mathbf{b} μέσω του μητρώου \mathbf{T} (3×3). Στην περίπτωση δε που για κάποιο διάνυσμα \mathbf{a} το \mathbf{b} γίνει συνευθειακό με το \mathbf{a} τότε η εξ. (1.15) γράφεται

$$\mathbf{b} = \lambda \cdot \mathbf{a}$$

όπου λ μια σταθερά.



Σχ. 1.7

Αν επομένως \mathbf{t} και \mathbf{n} είναι συνευθειακά (σχ. 1.7β) τότε ισχύει η σχέση

$$\mathbf{t} = \sigma_p \cdot \mathbf{n}$$

$$\text{ή} \quad \begin{vmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_p & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_p \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{vmatrix} = \sigma_p \begin{vmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{vmatrix} \quad (1.17)$$

όπου σ_p μία σταθερά.

Το επίπεδο n , στην περίπτωση αυτή που οι διατμητικές συνιστώσες του είναι μηδέν, ονομάζεται κύριο επίπεδο και η κάθετη τάση του σ_p ονομάζεται κύρια τάση,

Στο ερώτημα πόσα κύρια επίπεδα και αντίστοιχες κύριες τάσεις υπάρχουν σ' ένα τανυστή, η απάντηση, όπως θα δειχθεί στη συνέχεια είναι τρία και είναι μεταξύ τους κάθετα.

Από τις εξ. (1.15), (1.17) προκύπτει

$$\begin{vmatrix} \sigma_p & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_p \end{vmatrix} \begin{vmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{vmatrix}$$

$$\text{ή} \quad \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_p & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_p & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_p \end{vmatrix} \begin{vmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{vmatrix} = 0 \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned}
 & (\sigma_x - \sigma_p)n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z = 0 \\
 \text{ή} \quad & \tau_{yx}n_x + (\sigma_y - \sigma_p)n_y + \tau_{yz}n_z = 0 \\
 & \tau_{zx}n_x + \tau_{yz}n_y + (\sigma_z - \sigma_p)n_z = 0
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

Το ομογενές σύστημα των εξ. (1.18) δεν μπορεί να έχει την προφανή λύση $n_x = n_y = n_z = 0$ γιατί για τα n_x, n_y, n_z ισχύει η εξίσωση ορθογωνιότητας

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \tag{1.19}$$

Λύση επομένως μη μηδενική προκύπτει από το μηδενισμό της ορίζουσας των εξ. (1.18)

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_p & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_p \end{vmatrix} = 0 \tag{1.20}$$

της οποίας το ανάπτυγμα είναι

$$\begin{aligned}
 & \sigma_p^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma_p^2 + (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{xy}^2)\sigma_p - \\
 & - (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{yz}\tau_{zx}\tau_{xy} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2) = 0
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

$$\text{ή} \quad \sigma_p^3 - I_1\sigma_p^2 + I_2\sigma_p - I_3 = 0 \tag{1.20}$$

όπου $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{xy}^2 \tag{1.21}$$

$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{yz}\tau_{zx}\tau_{xy} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2$$

Οι σταθερές I_1, I_2, I_3 καλούνται αναλλοίωτες πρώτης, δεύτερης και τρίτης τάξης αντίστοιχα του τανυστή τάσης, σ .

Οι ρίζες $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ της εξ. (1.20) είναι οι κύριες τάσεις και στην περίπτωση που είναι διαφορετικές μεταξύ τους, ορίζουν τρεις διευθύνσεις οι οποίες είναι κάθετες μεταξύ τους και καλούνται κύριες διευθύνσεις.

Ο προσδιορισμός των κύριων διευθύνσεων γίνεται ως εξής:

Τίθεται η τιμή της σ_x στις εξ. (1.18). Οι εξισώσεις με αγνώστους τα n_x, n_y, n_z που προκύπτουν δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, και γι' αυτό μόνο δύο απ' αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Σαν τρίτη εξίσωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί η εξ. (1.9), να επιλυθεί το σύστημα των τριών αυτών εξισώσεων και να προκύψουν έτσι οι τιμές των n_x, n_y, n_z της σ .

Κατά τον ίδιο τρόπο θέτοντας την τιμή της σ_2 και στη συνέχεια της σ_3 στις εξ. (1.18) και χρησιμοποιώντας πάλι σαν τρίτη εξίσωση την εξ. (1.18) υπολογίζονται και τα συνημίτονα κατεύθυνσης των σ_2 και σ_3 .

Για τις κύριες τάσεις ισχύουν τα παρακάτω

- Οι τιμές των κύριων τάσεων είναι πραγματικές επειδή πραγματικές είναι οι τιμές των συνιστωσών του τανυστή τάσης. Όσον αφορά το μέγεθός τους χαρακτηρίζονται έτσι που να ισχύει η σχέση $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.
- Οι κύριες τάσεις αποτελούν χαρακτηριστικές τιμές ή ιδιοτιμές του τανυστή τάσης. Για το λόγο αυτό είναι ανεξάρτητες από τον αρχικό προσανατολισμό του συστήματος συντεταγμένων του τανυστή σ . Ανεξάρτητες επομένως από το σύστημα συντεταγμένων είναι και οι αναλλοίωτες I_1, I_2, I_3 .

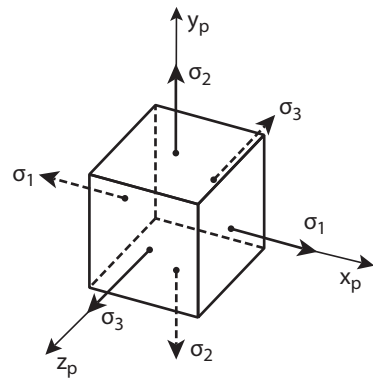
Έτσι για την I_1 π.χ. μπορούμε να γράψουμε.

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_{x'} + \sigma_{y'} + \sigma_{z'}$$

- Από τον υπολογισμό της μέγιστης και ελάχιστης ορθής τάσης του τανυστή σ προκύπτει πως η σ_1 είναι η μέγιστη ορθή τάση και η σ_3 η ελάχιστη ορθή τάση.

Ο τανυστής τάσης σε σύστημα αξόνων τις κύριες διευθύνσεις [κύριο σύστημα αξόνων (x_p, y_p, z_p)] που απεικονίζεται στο σχ. 1.8 γράφεται

$$\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} \quad (1.22)$$



Σχ. 1.8

και οι αναλλοίωτες

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \quad (1.22)$$

$$I_3 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

- Οι συνιστώσες t_1, t_2, t_3 ενός επιπέδου \mathbf{n} που εκφράζονται από την εξίσωση $\mathbf{t} = \sigma \mathbf{n}$ έχουν σε σύστημα αξόνων (x_p, y_p, z_p) έχουν τη μορφή

$$\begin{vmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{vmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{aligned} t_1 &= \sigma_1 n_1 \\ t_2 &= \sigma_2 n_2 \\ t_3 &= \sigma_3 n_3 \end{aligned} \quad (1.24)$$

όπου n_1, n_2, n_3 και t_1, t_2, t_3 τα συνημίτονα κατεύθυνσης και οι τάσεις ως προς τους άξονες x_p, y_p, z_p .

Από τις εξ. (1.24) καθώς και τη σχέση $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ προκύπτει

$$\frac{t_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{t_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{t_3^2}{\sigma_3^2} = 1 \quad (1.25)$$

Η εξ. (1.25) παριστάνει ένα ελλειψοειδές γνωστό σαν ελλειψοειδές των τάσεων του Lane.

► Οι συνιστώσες (σ, τ) ενός επιπέδου n σε σύστημα αξόνων x_p, y_p, z_p έχουν τη μορφή

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \\ \tau &= (\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - \sigma^2)^{1/2}\end{aligned}\quad (1.26)$$

Από τις οποίες προκύπτει

$$\tau^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2 \quad (1.27)$$

Η εξ. (1.27) αν χρησιμοποιηθεί η ταυτότητα $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ αποκτά τη μορφή

$$\tau = [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 n_1^2 n_2^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 n_2^2 n_3^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 n_3^2 n_1^2]^{1/2} \quad (1.28)$$

Παρατήρηση: Αν $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ τότε η τ σύμφωνα με την εξ. (1.28) είναι μηδέν ως προς οποιαδήποτε διεύθυνση και η εντατική αυτή κατάσταση χαρακτηρίζεται υδροστατική.

1.6.1 Μέγιστα και ελάχιστα διατμητικών τάσεων

Οι μέγιστες και ελάχιστες τιμές της τ , τα επίπεδα στα οποία αυτή ασκείται, καθώς και οι τιμές των ορθών τάσεων σ_{av} των επιπέδων αυτών, βρίσκεται από την εξίσωση (εξ. 1.27)

$$\tau^2 = (\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2) \quad (1.27)$$

αν εφαρμοσθεί σ' αυτήν η μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange.

Προκύπτουν έτσι τα παρακάτω αποτελέσματα

$$\text{Επίπεδο } (n_1 = 0, \quad n_2 = \pm 1/\sqrt{2}, \quad n_3 = \pm 1/\sqrt{2}) \quad \tau = \pm(\sigma_2 - \sigma_3)/2 \quad \sigma_{av} = \pm(\sigma_2 + \sigma_3)/2$$

$$\text{Επίπεδο } (n_1 = \pm 1/\sqrt{2}, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = \pm 1/\sqrt{2}) \quad \tau = \pm(\sigma_3 - \sigma_1)/2 \quad \sigma_{av} = \pm(\sigma_3 + \sigma_1)/2$$

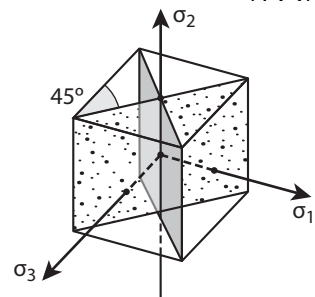
$$\text{Επίπεδο } (n_1 = \pm 1/\sqrt{2}, \quad n_2 = \pm 1/\sqrt{2}, \quad n_3 = 0) \quad \tau = \pm(\sigma_1 - \sigma_2)/2 \quad \sigma_{av} = \pm(\sigma_1 + \sigma_2)/2$$

(1.29)

Άρα η μέγιστη διατμητική τάση είναι η

$$\tau_{\max} = \pm(\sigma_3 - \sigma_1)/2$$

και ενεργεί στα επίπεδα που διχοτομούν τις ορθές γωνίες των τάσεων σ_1 και σ_3 (σχ. 1.9).



Σχ. 1.9

Παράδειγμα 1.1

Ο τανυστής τάσης ενός σημείου ως προς το σ.σ. (x, y, z) είναι

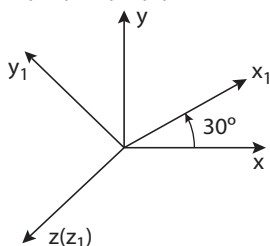
$$\sigma = \begin{vmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

Να βρεθεί ο τανυστής τάσης σ' του σημείου αυτού σ' ένα σ.σ. (x', y', z') που προκύπτει:

- από την περιστροφή κατ' αρχάς του σ.σ. (x, y, z) γύρω από τον άξονα z κατά 30° οπότε προκύπτει το σ.σ. (x_1, y_1, z_1) και
- την περιστροφή στη συνέχεια του σ.σ. (x_1, y_1, z_1) γύρω από τον άξονα x_1 κατά 45° οπότε προκύπτει το σ.σ. (x', y', z') .

Θα βρεθεί το μητρώο μετασχηματισμού του σ.σ. (x', y', z') ως προς το σ.σ. (x, y, z)

1η περιστροφή

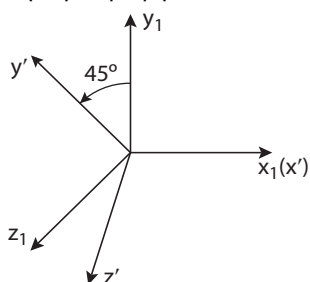


συνημίτονα κατεύθυνσης

	x	y	z
x_1	$\cos 30$	$\sin 30$	0
y_1	$-\sin 30$	$\cos 30$	0
z_1	0	0	1

$$C = \begin{vmatrix} \cos 30 & \sin 30 & 0 \\ -\sin 30 & \cos 30 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2η περιστροφή



συνημίτονα κατεύθυνσης

	x_1	y_1	z_1
x'	1	0	0
y'	0	$\cos 45$	$\sin 45$
z'	0	$-\sin 45$	$\cos 45$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 45 & \sin 45 \\ 0 & -\sin 45 & \cos 45 \end{vmatrix}$$

Σύμφωνα με τις εξ. (1.8) είναι

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 45 & \sin 45 \\ 0 & -\sin 45 & \cos 45 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 45 & \sin 45 \\ 0 & -\sin 45 & \cos 45 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos 30 & \sin 30 & 0 \\ -\sin 30 & \cos 30 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos 30 & \sin 30 & 0 \\ -\cos 45 \sin 30 & \cos 45 \cos 30 & \sin 45 \\ \sin 45 \sin 30 & -\sin 45 \cos 30 & \cos 45 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,87 & 0,5 & 0 \\ -0,35 & 0,61 & 0,71 \\ 0,35 & 0,61 & 0,71 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$$

Στις εξ. 1.6 μετασχηματισμού τίθενται τα συνημίτονα κατεύθυνσης του σ.σ. (x', y', z') της τελευταίας εξίσωσης και οι τάσεις του σ .

$$\sigma_{x'} = -4 \cdot 0,87^2 + 2 \cdot 0,5^2 + 2 \cdot 3 \cdot 0,87 \cdot 0,5 = 0,08$$

$$\sigma_{y'} = -4(-0,35)^2 + 2 \cdot 0,61^2 - 3 \cdot 0,71^2 - 2 \cdot 3 \cdot 0,35 \cdot 0,61 + 2 \cdot 1 \cdot 0,61 \cdot 0,71 + 2 \cdot 1 \cdot 0,71 \cdot 0,35 = -1,18$$

$$\sigma_{z'} = -4 \cdot 0,35^2 + 2 \cdot 0,61^2 - 3 \cdot 0,71^2 + 2 \cdot 3 \cdot 0,35 \cdot 0,61 + 2 \cdot 1 \cdot 0,61 \cdot 0,71 + 2 \cdot 1 \cdot 0,71 \cdot 0,35 = 0,39$$

$$\tau_{x'y'} = +4 \cdot 0,87 \cdot 0,35 + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,61 + 3 \cdot (0,87 \cdot 0,61 - 0,5 \cdot 0,35) + 1(0,5 \cdot 0,71) - 1 \cdot 0,87 \cdot 0,71 = 2,63$$

$$\tau_{x'z'} = -4 \cdot 0,87 \cdot 0,35 + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,61 + 3 \cdot (0,87 \cdot 0,61 + 0,5 \cdot 0,35) + 1 \cdot 0,5 \cdot 0,71 - 1 \cdot 0,87 \cdot 0,71 = 1,25$$

$$\tau_{y'z'} = +4 \cdot 0,35 \cdot 0,35 + 2 \cdot 0,61 \cdot 0,61 - 3 \cdot 0,71 \cdot 0,71 + 3(-0,35 \cdot 0,61 + 0,61 \cdot 0,35) + 1(0,61 \cdot 0,71 + 0,71 \cdot 0,61) - 1(-0,35 \cdot 0,71 + 0,71 \cdot 0,35) = 0,59$$

Επομένως είναι

$$\sigma' = \begin{vmatrix} 0,08 & 2,63 & 1,25 \\ 2,63 & -1,18 & 0,59 \\ 1,25 & 0,59 & 0,39 \end{vmatrix}.$$

Παράδειγμα 1.2

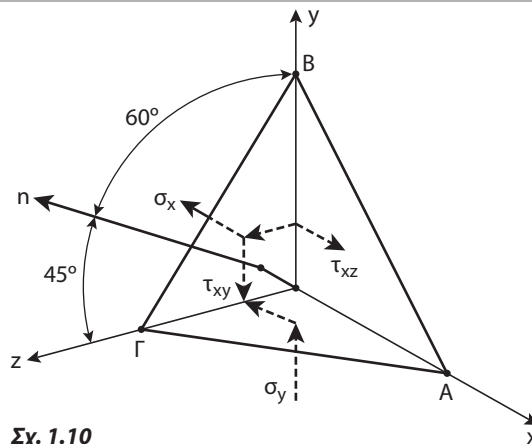
Στο απειροστό τετράεδρο του σχ. 1.10 οι συνιστώσες του τανυστή τάσης είναι

$$\sigma_x = 14, \sigma_y = -8, \sigma_z = 0, \tau_{xy} = 14, \tau_{yz} = 0, \tau_{xz} = -6.$$

Να βρεθεί η τάση t του επιπέδου ABΓ εκφρασμένη:

α) από τις συνιστώσες t_x, t_y, t_z

β) από τις συνιστώσες σ, τ .

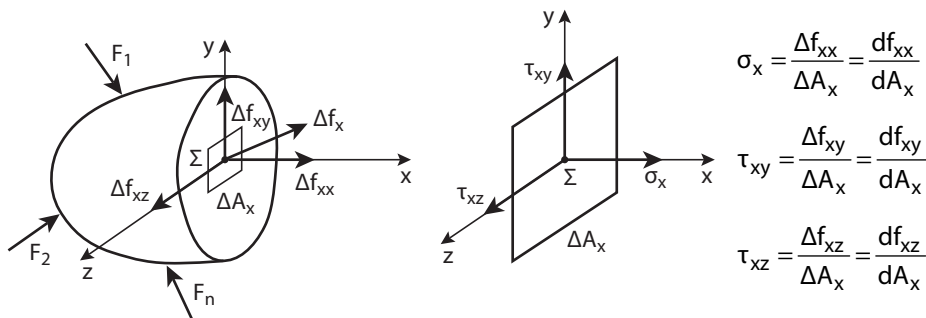


Σχ. 1.10

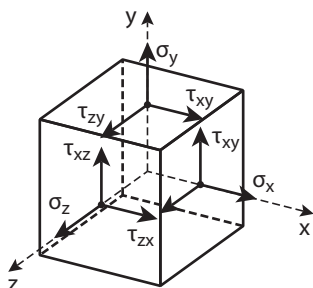
ΤΥΠΟΙ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 1

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι: ΤΑΣΕΙΣ

1. Ορισμός των τάσεων



2. Στοιχειώδες παραλληλεπίπεδο



Τανυστής τάσεων

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} ,$$

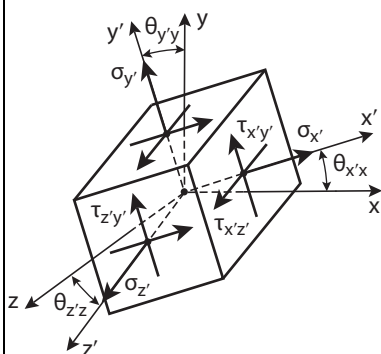
$$\tau_{xz} = \tau_{zx} ,$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Πρόσημο τάσεων

Οι τάσεις των ορατών πλευρών είναι θετικές κατά τη διεύθυνση των θετικών αξόνων, ενώ οι υπόλοιπες κατά την αντίθετη διεύθυνση

3. Εξισώσεις μετασχηματισμού του τανυστή $\boldsymbol{\sigma}$



$$\begin{bmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'x'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'} \\ \tau_{z'x'} & \tau_{z'y'} & \sigma_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{x'x} & c_{x'y} & c_{x'z} \\ c_{y'x} & c_{y'y} & c_{y'z} \\ c_{z'x} & c_{z'y} & c_{z'z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{x'x} & c_{y'x} & c_{z'x} \\ c_{x'y} & c_{y'y} & c_{z'y} \\ c_{x'z} & c_{y'z} & c_{z'z} \end{bmatrix}$$

$$\text{ή } \sigma_{x'y'z'} = \mathbf{C} \cdot \sigma_{xyz} \mathbf{C}^T \text{ ή}$$

$$\sigma_{x'} = \sigma_x c_{x'x}^2 + \sigma_y c_{x'y}^2 + \sigma_z c_{x'z}^2 + 2\tau_{xy} c_{x'x} c_{x'y} + 2\tau_{yz} c_{x'y} c_{x'z} + 2\tau_{zx} c_{x'x} c_{x'z}$$

$$\sigma_{y'} = \sigma_x c_{y'x}^2 + \sigma_y c_{y'y}^2 + \sigma_z c_{y'z}^2 + 2\tau_{xy} c_{y'x} c_{y'y} + 2\tau_{yz} c_{y'y} c_{y'z} + 2\tau_{zx} c_{y'x} c_{y'z}$$

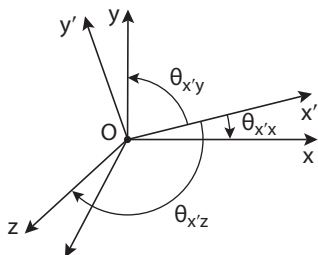
$$\sigma_{z'} = \sigma_x c_{z'x}^2 + \sigma_y c_{z'y}^2 + \sigma_z c_{z'z}^2 + 2\tau_{xy} c_{z'x} c_{z'y} + 2\tau_{yz} c_{z'y} c_{z'z} + 2\tau_{zx} c_{z'z} c_{z'x}$$

$$\tau_{x'y'} = \sigma_x c_{x'x} c_{y'y} + \sigma_y c_{x'y} c_{y'y} + \sigma_z c_{x'z} c_{y'y} + \tau_{xy} (c_{x'x} c_{y'y} + c_{x'y} c_{y'x}) + \tau_{yz} (c_{x'y} c_{y'z} + c_{x'z} c_{y'y}) + \tau_{zx} (c_{x'x} c_{y'z} + c_{x'z} c_{y'x})$$

$$\tau_{x'z'} = \sigma_x c_{x'x} c_{z'z} + \sigma_y c_{x'y} c_{z'z} + \sigma_z c_{x'z} c_{z'z} + \tau_{xy} (c_{x'x} c_{z'z} + c_{x'y} c_{z'x}) + \tau_{yz} (c_{x'y} c_{z'z} + c_{x'z} c_{z'y}) + \tau_{zx} (c_{x'x} c_{z'z} + c_{x'z} c_{z'x})$$

$$\tau_{y'z'} = \sigma_x c_{y'x} c_{z'z} + \sigma_y c_{y'y} c_{z'z} + \sigma_z c_{y'z} c_{z'z} + \tau_{xy} (c_{y'x} c_{z'y} + c_{y'y} c_{z'x}) + \tau_{yz} (c_{y'y} c_{z'z} + c_{y'z} c_{z'y}) + \tau_{zx} (c_{y'x} c_{z'z} + c_{y'z} c_{z'x})$$

4. Συνθήκες ορθογωνικότητας



$$c_{x'x}^2 + c_{x'y}^2 + c_{x'z}^2 = 1 \quad c_{x'x} c_{y'y} + c_{x'y} c_{y'x} + c_{x'z} c_{y'z} = 0$$

$$c_{y'x}^2 + c_{y'y}^2 + c_{y'z}^2 = 1 \quad c_{y'x} c_{z'x} + c_{y'y} c_{z'y} + c_{y'z} c_{z'z} = 0$$

$$c_{z'x}^2 + c_{z'y}^2 + c_{z'z}^2 = 1 \quad c_{x'x} c_{z'x} + c_{x'y} c_{z'y} + c_{x'z} c_{z'z} = 0$$

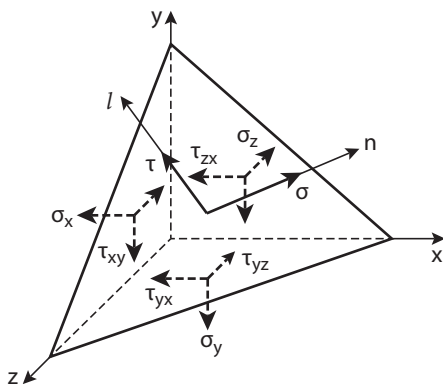
$$\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{C} = \mathbf{I}$$

5. Εξισώσεις μετασχηματισμού διανύσματος $\mathbf{V}(V_x, V_y, V_z)$

$$\begin{aligned} V_{x'} &= c_{xx'} V_x + c_{xy'} V_y + c_{xz'} V_z \\ V_{y'} &= c_{yx'} V_x + c_{yy'} V_y + c_{yz'} V_z \\ V_{z'} &= c_{zx'} V_x + c_{zy'} V_y + c_{zz'} V_z \end{aligned} \quad \text{ή} \quad \begin{vmatrix} V_{x'} \\ V_{y'} \\ V_{z'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{xx'} & c_{xy'} & c_{xz'} \\ c_{yx'} & c_{yy'} & c_{yz'} \\ c_{zx'} & c_{zy'} & c_{zz'} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{vmatrix}$$

$$\text{ή} \quad \mathbf{V}_{x'y'z'} = \mathbf{C} \mathbf{V}_{xyz}$$

6. Σχέση του σ και του διανύσματος τάσης $\mathbf{t}(\sigma, \tau)$ επιπέδου \mathbf{n}



Συνημίτονα κατεύθυνσης της τ

$$l_x = \frac{1}{\tau} [(\sigma_x - \sigma)n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{zx}n_z]$$

$$l_y = \frac{1}{\tau} [\tau_{xy}n_x + (\sigma_y - \sigma)n_y + \tau_{yz}n_z]$$

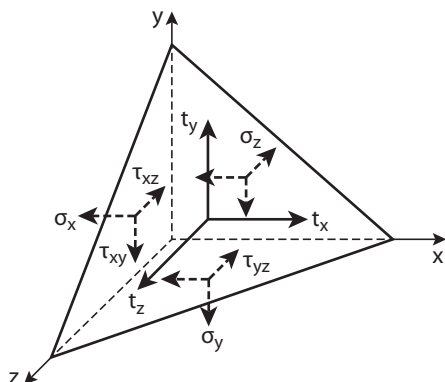
$$l_z = \frac{1}{\tau} [\tau_{zx}n_x + \tau_{yz}n_y + (\sigma_z - \sigma)n_z]$$

$$\sigma = \sigma_x n_x^2 + \sigma_y n_y^2 + \sigma_z n_z^2 + 2\tau_{xy} n_x n_y + 2\tau_{yz} n_y n_z + 2\tau_{zx} n_z n_x$$

$$\tau = [(\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{zx} n_z)^2 + (\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z)^2 + (\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z)^2 - \sigma^2]^{1/2}$$

7. Σχέση του σ και του διανύσματος τάσης $\mathbf{t}(t_x, t_y, t_z)$ επιπέδου \mathbf{n}

Συνριακές συνθήκες



$$t_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z$$

$$t_y = \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z$$

$$t_z = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z$$

$$\text{ή} \quad \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$$

$$\text{ή} \quad \mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$$

8. Κύριες τάσεις

1. Εύρεση των τιμών

$$\sigma_p^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma_p^2 + (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{xy}^2)\sigma_p - (\sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_z + 2\tau_{yz}\tau_{zx}\tau_{xy} - \sigma_x \cdot \tau_{yz}^2 - \sigma_y \cdot \tau_{zx}^2 - \sigma_z \cdot \tau_{xy}^2) = 0$$

$$\text{ή} \quad \sigma_p^3 - I_1\sigma_p^2 + I_2\sigma_p - I_3 = 0$$

$$\text{όπου} \quad I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{xy}^2$$

$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{yz}\tau_{zx}\tau_{xy} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2$$

αναλλοίωτες στο σ.σ. (x, y, z)

2. Εύρεση των διευθύνσεων

$$(\sigma_x - \sigma_p)n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z = 0$$

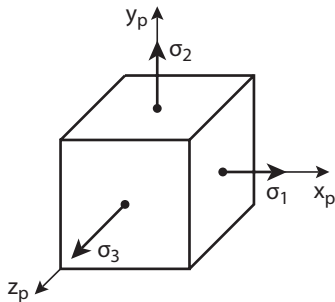
$$\tau_{xy}n_x + (\sigma_y - \sigma_p)n_y + \tau_{yz}n_z = 0$$

$$\tau_{zx}n_x + \tau_{yz}n_y + (\sigma_z - \sigma_p)n_z = 0$$

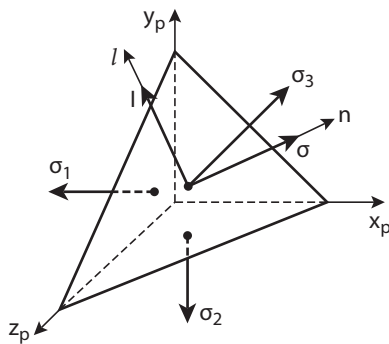
$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$

9. Τανυστής τάσης σε σ.σ. (x_p, y_p, z_p)

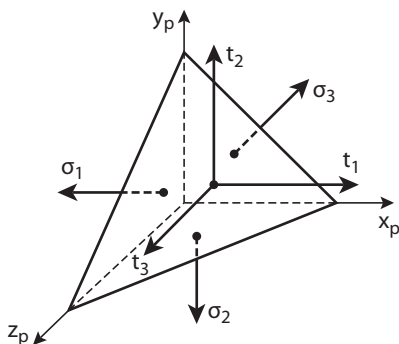
Αναλλοίωτες



$$\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned}$$

10. Τάση $\tau(\sigma, n)$ επιπέδου n σε σ.σ. (x_p, y_p, z_p)

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \\ \tau &= (\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - \sigma^2)^{1/2} \\ \text{ή } \tau^2 &= \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2 \\ \text{ή } \tau &= [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 n_1^2 n_2^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 n_2^2 n_3^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 n_3^2 n_1^2]^{1/2} \\ \text{Διεύθυνση της } \tau & \\ l_1 &= \frac{1}{\tau}(\sigma_1 - \sigma)n_1 \quad l_2 = \frac{1}{\tau}(\sigma_2 - \sigma)n_2 \quad l_3 = \frac{1}{\tau}(\sigma_3 - \sigma)n_3 \end{aligned}$$

11. Τάση $\mathbf{t}(t_1, t_2, t_3)$ επιπέδου n σε σ.σ. (x_p, y_p, z_p)

$$\begin{aligned} t_1 &= \sigma_1 n_1 \\ t_2 &= \sigma_2 n_2 \\ t_3 &= \sigma_3 n_3 \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{ή } \mathbf{t} = \sigma \cdot \mathbf{n}$$

12. Μέγιστα και ελάχιστα διατμητικών τάσεων σε σ.σ. (x_p, y_p, z_p)

$$\text{Επίπεδο } (n_1 = 0, n_2 = \pm 1/\sqrt{2}, n_3 = \pm 1/\sqrt{2})$$

$$\tau = \pm(\sigma_2 - \sigma_3)/2$$

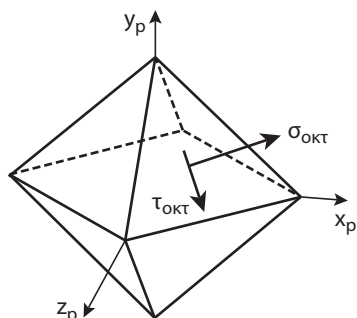
$$\text{Επίπεδο } (n_1 = \pm 1/\sqrt{2}, n_2 = 0, n_3 = \pm 1/\sqrt{2})$$

$$\tau_{\max} = \pm(\sigma_1 - \sigma_3)/2$$

$$\text{Επίπεδο } (n_1 = \pm 1/\sqrt{2}, n_2 = \pm 1/\sqrt{2}, n_3 = 0)$$

$$\tau = \pm(\sigma_1 - \sigma_2)/2$$

13. Τάσεις επιπέδων οκταέδρου σε σ.σ. (x_p, y_p, z_p)



$$\sigma_{OK} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\tau_{OK} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$n_1 = n_2 = n_3 = 1/\sqrt{3}$$

Τάσεις οκταέδρου σε σ.σ. (x, y, z)

$$\sigma_{OK} = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$\tau_{OK} = \frac{1}{3}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_y - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]^{1/2}$$

14. Εκτροπές και σφαιρικός τανυστής τάσης σε σ.σ. (x_p, y_p, z_p)

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_m \end{vmatrix} \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_\Sigma + \boldsymbol{\sigma}_D$$

$$\text{όπου } \sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

15. Εκτροπές και σφαιρικός τανυστής σε σ.σ. (x_p, y_p, z_p)

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_1 - \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_m \end{vmatrix}$$

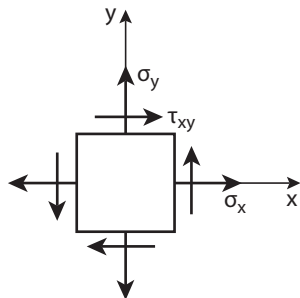
$$\text{ή} \quad \sigma_1 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \frac{1}{3}(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \frac{1}{3}(2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1)$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \frac{1}{3}(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)$$

16. Εξισώσεις ισορροπίας

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x = 0 \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0$$

Επίπεδη ένταση**17. Στοιχειώδες παραλληλεπίπεδο**

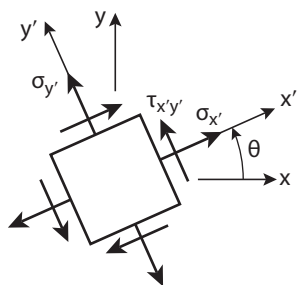
Τανυστής τάσεων

Πρόσημο των τάσεων

$$\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix}$$

Όλες οι τάσεις του σχήματος είναι θετικές

$$\sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$$

18. Εξισώσεις μετασχηματισμού

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \cos \theta \sin \theta$$

$$\sigma_{y'} = \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \cos \theta \sin \theta$$

$$\tau_{x'y'} = -(\sigma_x - \sigma_y) \cos \theta \sin \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

ή

$$\sigma_{x'} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\sigma_{y'} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

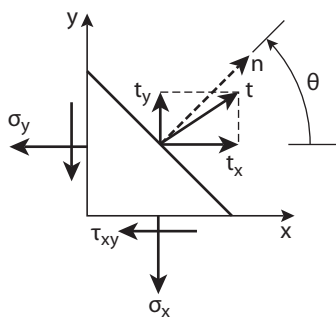
$$\tau_{x'y'} = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

Αναλλοιώτες

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y$$

$$I_3 = 0$$

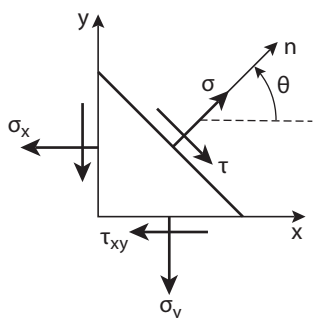
$$I_2 = \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2$$

19. Τάση $t(t_x, t_y)$ επιπέδου n

$$t_x = \sigma_x \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta$$

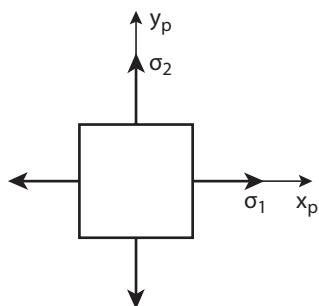
$$t_y = \tau_{xy} \cos \theta + \sigma_y \sin \theta$$

20. Τάση $\mathbf{t}(\sigma, n)$ επιπέδου \mathbf{n}



$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \cos \theta \sin \theta \\ \tau &= -(\sigma_x - \sigma_y) \cos \theta \sin \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ \text{ή} \quad & \dots\dots\dots \\ \sigma_n &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta\end{aligned}$$

21. σ.σ. (x_p, y_p)



Τανυστής τάσης Αναλλοίωτες

$$\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 \\ I_2 &= \sigma_1 \sigma_2 \end{aligned}$$

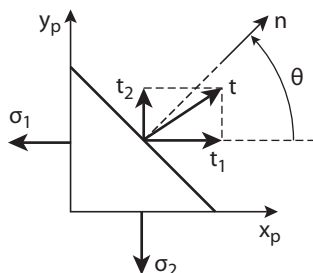
Εύρεση των τιμών:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

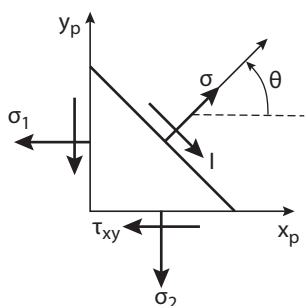
Εύρεση των διευθύνσεων:

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

22. Τάση $\mathbf{t}(t_1, t_2)$ επιπέδου \mathbf{n} σε σ.σ. (x_p, y_p)



$$\begin{aligned}t_1 &= \sigma_1 \cos \theta \\ t_2 &= \sigma_2 \sin \theta\end{aligned}$$

23. Τάση $\mathbf{t}(\sigma, \mathbf{n})$ επιπέδου \mathbf{n} σε σ.σ. (x_p, y_p) 

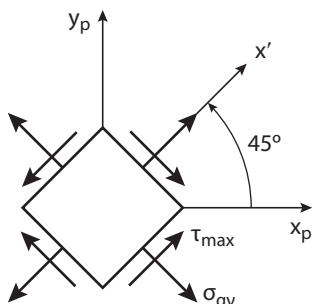
$$\sigma = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta$$

$$\tau = -(\sigma_1 - \sigma_2) \cos \theta \sin \theta$$

ή

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta$$

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\theta$$

24. Μέγιστες διατμητικές τάσεις

$$\tau_{\max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

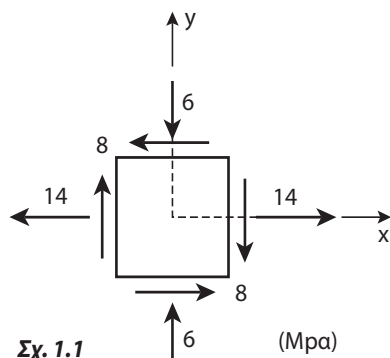
$$\sigma_{av} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$$

Οι τ_{\max} βρίσκονται σε επίπεδα κεκλιμένα κατά 45° ως προς τους κύριους άξονες

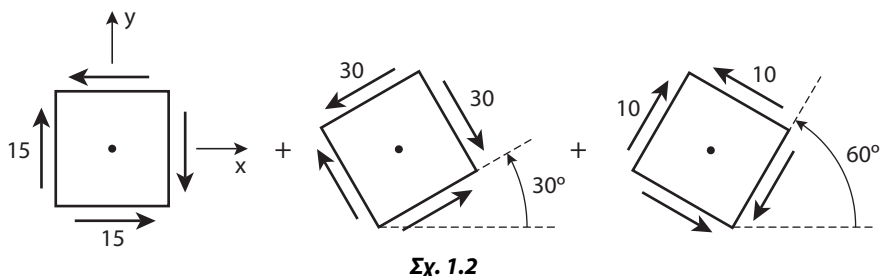
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.1 Για την επίπεδη εντατική κατάσταση ενός σημείου που εκφράζεται από το στοιχειώδες παραλληλεπίπεδο του σχ.1.1 να βρεθούν

- α)** Οι τιμές και οι διευθύνσεις των κυρίων τάσεων.
- β)** Η μέγιστη διατμητική τάση και η αντίστοιχη ορθή τάση του επιπέδου αυτού.
- γ)** Οι τάσεις σ' ένα στοιχειώδες παραλληλεπίπεδο στραμμένο δεξιόστροφα κατά 30° .



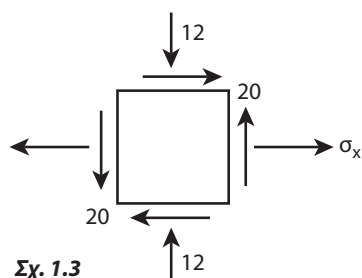
1.2 Τρία διαφορετικά είδη φορτίων που επιδρούν σ' ένα φορέα αναπτύσσουν σ' ένα σημείο του τις εντατικές καταστάσεις που εκφράζονται από τα στοιχειώδη παραλληλεπίπεδα του σχ. 1.2. Να βρεθούν οι τιμές και οι διευθύνσεις των κυρίων τάσεων του σημείου από τη σύνθετη εντατική του κατάσταση.



1.3 Η εντατική κατάσταση ενός σημείου φορέα απεικονίζεται στο σχ. 1.3. Αν η μέγιστη επιτρεπόμενη θλιπτική τάση είναι 14 MPa να βρεθούν:

- α)** Η τάση σ_x .
- β)** Η μέγιστη κύρια τάση και η μέγιστη διατμητική τάση.

Να γραφούν τα αποτελέσματα στα κατάλληλα προσανατολισμένα στοιχειώδη παραλληλεπίπεδα.



1.4 Ο τανυστής τάσης ενός σημείου στο σ.σ. (x, y, z) είναι

$$\sigma = \begin{bmatrix} 10 & 6 & -8 \\ 6 & 0 & 12 \\ -8 & 12 & 20 \end{bmatrix}$$

Να βρεθούν:

- α)** Ο τανυστής τάσης ως προς το σ.σ. (x', y', z') που προκύπτει από την περιστροφή του σ.σ. (x, y, z) γύρω από τον άξονα y κατά 30° .

- β)** Οι τιμές και οι διευθύνσεις των κυρίων τάσεων.
γ) Οι μέγιστες και ελάχιστες τιμές των διατμητικών τάσεων καθώς και οι ορθές τάσεις των επιπέδων τους.
δ) Οι αναλλοίωτες του σ .

1.5 Ο τανυστής τάσης ενός σημείου είναι:

$$\sigma = \begin{vmatrix} 20 & 5 & 7 \\ 5 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -15 \end{vmatrix}$$

Να βρεθεί ο σ' στο σ.σ. (x', y', z') του οποίου τα συνημίτονα κατεύθυνσης ως προς το σ.σ. (x, y, z) είναι:

$$\begin{vmatrix} c_{x'x} & c_{x'y} & c_{x'z} \\ c_{y'x} & c_{y'y} & c_{y'z} \\ c_{z'x} & c_{z'y} & c_{z'z} \end{vmatrix} = \frac{1}{9} \begin{vmatrix} 1 & -8 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ -8 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

1.6 Ο τανυστής τάσης ενός σημείου Σ στο σ.σ. (x, y, z) είναι:

$$\sigma = \begin{vmatrix} 10 & 0 & -4 \\ 0 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

Να βρεθούν οι τάσεις $t(\sigma, \tau)$ και $t(t_x, t_y, t_z)$ του επιπέδου

$$10x - 4y - 2z = 1$$

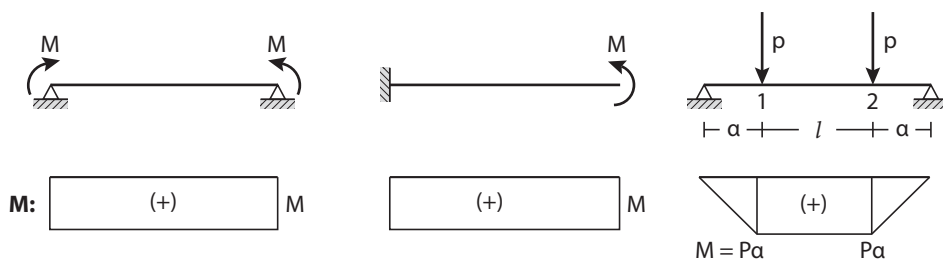
που διέρχονται από το Σ .

5. ΚΑΘΑΡΗ ΚΑΜΨΗ

5.1 ΟΡΙΣΜΟΣ

Μία δοκός βρίσκεται σε καθαρή κάμψη όταν κάθε διατομή της φέρει σταθερή ροπή M ενώ τα υπόλοιπα φορτία διατομής είναι μηδέν.

Η αμφιέριστη δοκός και ο πρόβολος του σχ. 5.1 βρίσκονται σε καθαρή κάμψη.



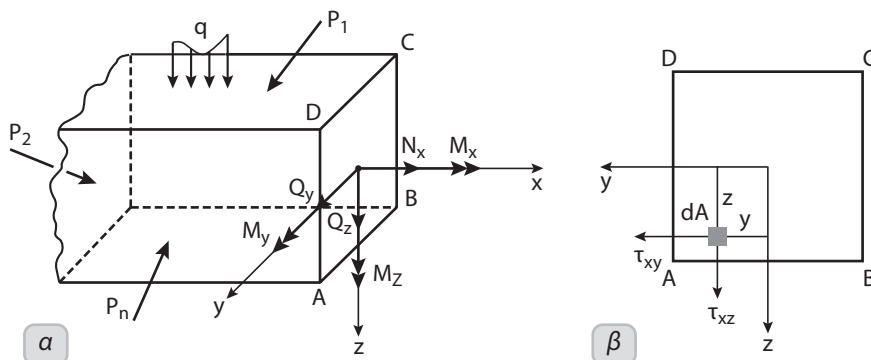
Σχ. 5.1

Επίσης το τμήμα (1,2) της αμφιέριστης δοκού του σχ. 5.1 βρίσκεται σε καθαρή κάμψη.

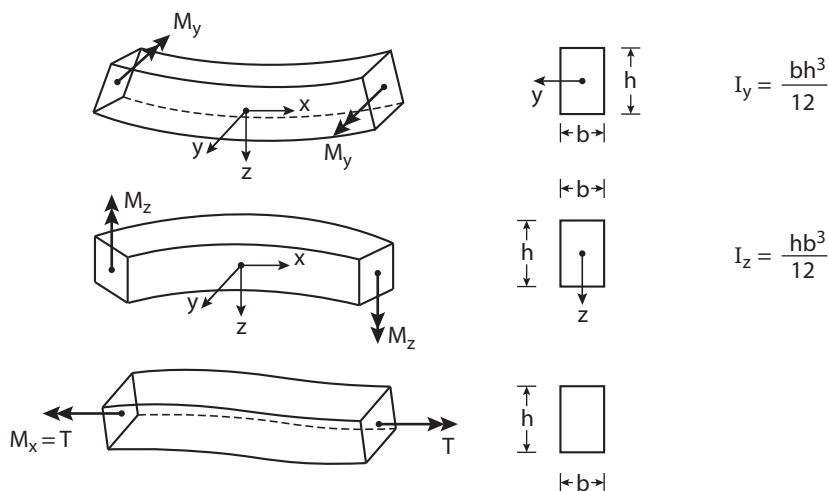
Πριν υπεισεέλθουμε στη θεωρία της καθαρής κάμψης θα προσδιορίσουμε την εντατική κατάσταση μιας απλής δοκού η οποία δέχεται φορτία στο χώρο.

5.2 ΦΟΡΤΙΑ ΔΙΑΤΟΜΗΣ ΔΟΚΟΥ

Στο σχ. 5.2 είναι σχεδιασμένο το διάγραμμα ελευθέρου σώματος ενός τμήματος γραμμι-



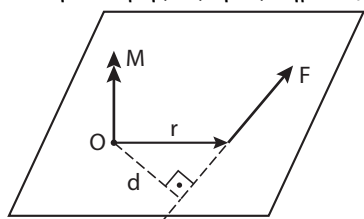
Σχ. 5.2



Σχ. 5.3

κού φορέα, του οποίου το επίπεδο ABCD είναι κάθετο στον άξονα του. Υπάρχουν τα εξωτερικά φορτία $P_1, P_2 \dots P_n, q$ στα οποία περιλαμβάνονται και οι αντιδράσεις και τα φορτία διατομής $N_x, Q_y, Q_z, M_x = T, M_y, M_z$. Για να συσχετισθούν οι ροπές με τις παραμορφώσεις που αυτές προκαλούν, σχεδιάσθηκαν στο σχ. 5.3 οι παραμορφώσεις μιας δοκού όταν στα άκρα της δρουν οι θετικές ροπές M_y, M_z και $M_x = T$. Για να γίνει επίσης κατανοητός ο συμβολισμός των ροπών δίδονται οι παρακάτω ορισμοί.

Ροπή δύναμης ως προς σημείο (σχ. 5.4):



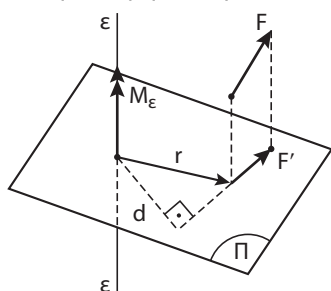
Σχ. 5.4

Ορίζεται από τη σχέση

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (5.1)$$

της οποίας το μέτρο είναι $M = F \cdot d$ και είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν η \mathbf{F} και το σημείο O. Παριστάνεται μ' ένα διπλό βέλος με φορά δεξιόστροφης περιστροφής.

Ροπή δύναμης ως προς άξονα (σχ. 5.5):



Σχ. 5.5

Αν \mathbf{F}' είναι η προβολή της \mathbf{F} σ' ένα επίπεδο Π κάθετο στον άξονα εε τότε η αξονική ροπή της \mathbf{F} ως προς τον άξονα εε ορίζεται από τη σχέση

$$\mathbf{M}_\epsilon = \mathbf{r} \times \mathbf{F}' \quad (5.2)$$

της οποίας το μέτρο είναι: $M_\epsilon = F' \cdot d$

Η \mathbf{M}_ε είναι ένα διάνυσμα κατά τη διεύθυνση ε και παριστάνεται μ' ένα διπλό βέλος με φορά δεξιόστροφης περιστροφής. Προφανώς η \mathbf{M}_ε είναι ανεξάρτητη από τη θέση του επιπέδου Π .

Εκτός από τους παραπάνω συμβολισμούς οι ροπές στο κεφάλαιο αυτό μπορεί να συμβολίζονται και με απλά κεκαμένα βέλη.

Τα φορτία διατομής υπολογίζονται από τη στατική επίλυση του φορέα. Συνδέονται δε με τις τάσεις της διατομής $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ (σχ. 5.2) με τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
 \text{Αξονική δύναμη} & \quad N_x = \int \sigma_x dA \\
 \text{Διατμητική δύναμη} & \quad Q_y = \int \tau_{xy} dA \\
 \text{Διατμητική δύναμη} & \quad Q_z = \int \tau_{xz} dA \\
 \text{Ροπή στρέψης} & \quad T = M_x = \int (\tau_{xz}y - \tau_{xy}z) dA \\
 \text{Ροπή κάμψης} & \quad M_y = \int \sigma_x z dA \\
 \text{Ροπή κάμψης} & \quad M_z = - \int \sigma_x y dA
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων των εξ. 5.3 πρέπει να είναι γνωστές οι συναρτήσεις των τάσεων $\sigma_x(y,z)$, $\tau_{xy}(x,z)$, $\tau_{xz}(y,z)$.

5.3 ΔΟΚΟΙ ΜΕ ΕΠΙΠΕΔΟ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΠΟΥ ΣΥΜΠΙΠΤΕΙ ΜΕ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΦΟΡΤΙΣΗΣ

5.3.1 Τάσεις

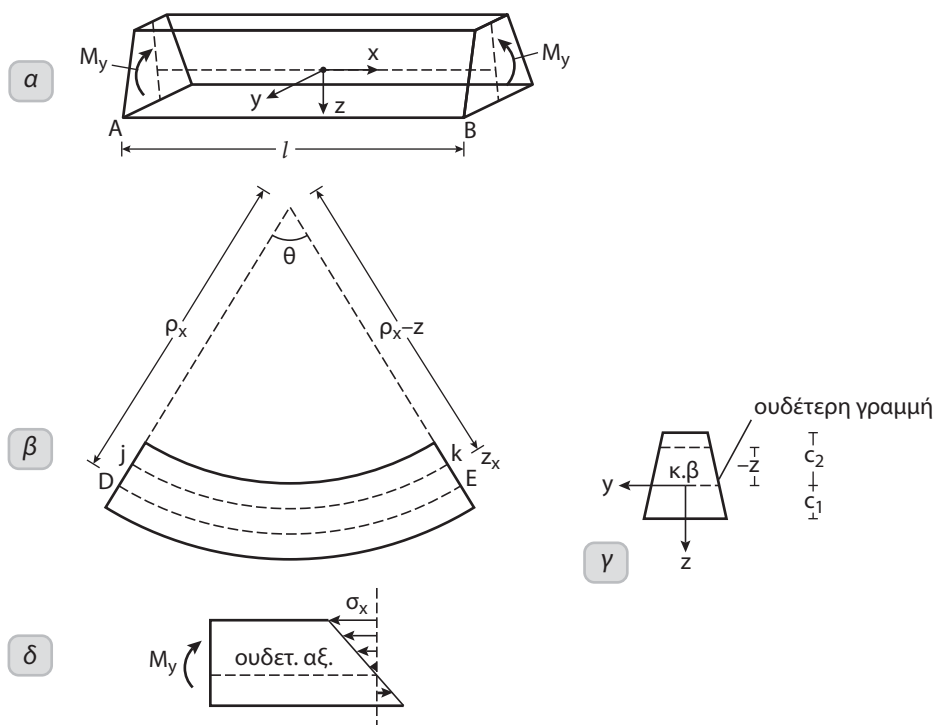
Έστω η δοκός του σχ. 5.6α. Η διατομή της είναι συμμετρική ως προς τον άξονα z , οι ροπές M_y των άκρων ενεργούν στο επίπεδο συμμετρίας (x, z) και βρίσκεται σε καθαρή κάμψη. Υποθέτουμε επίσης ότι αποτελείται από ομογενές υλικό που υπακούει στο νόμο του Hooke, το δε μέτρο ελαστικότητας σε εφελκυσμό και θλίψη είναι ίδιο. Θα διερευνηθεί η κατανομή των τάσεων της διατομής.

Η στατική επίλυση του φορέα δίδει τις τιμές των φορτίων διατομής οπότε οι εξ. 5.3 γίνονται

$$\begin{aligned}
 N_x = \int \sigma_x dA = 0 & \quad Q_y = \int \tau_{xy} dA = 0 & \quad Q_z = \int \tau_{xz} dA = 0 \\
 M_x = (\tau_{xz}y - \tau_{xy}z) dA = 0 & \quad M_y = \int z \sigma_x dA \neq 0 & \quad M_z = - \int y \sigma_x dA = 0
 \end{aligned}$$

Από τις εξισώσεις αυτές προκύπτει ότι

$$\sigma_x \neq 0 \quad \sigma_y = \sigma_z = 0 \quad \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$



Σχ. 5.6

Δηλ. στη διατομή υπάρχουν μόνο τάσεις σ_x των οποίων το άθροισμα ισούται με μηδέν ($N_x = 0$).

Η κατανομή των σ_x στη διατομή δεν μπορεί να προκύψει από τις στατικές εξισώσεις. Για το λόγο αυτό θα χρησιμοποιηθούν οι παραμορφώσεις.

Λόγω της σταθερής ροπής M_y είναι λογικό να υποθέσουμε ότι η δοκός AB θα παραμορφωθεί σ' ένα κυκλικό τόξο με ακτίνα ρ_x (σχ. 5.6β). Στην παραμορφωμένη δοκό οι οριζόντιες προς την κυρτή επιφάνεια ίνες επιμηκύνονται ενώ προς την κοίλη επιβραχύνονται. Μεταξύ της επάνω και της κάτω πλευράς της δοκού πρέπει επομένως να υπάρχει ένα στρώμα ινών που δεν μεταβάλλει μήκος. Αυτό καλείται ουδέτερη επιφάνεια και η τομή της ουδέτερης επιφάνειας με το αξονικό επίπεδο συμμετρίας καλείται ουδέτερος άξονας της δοκού. Η ουδέτερη επιφάνεια τέμνει μία διατομή του φορέα κατά μία ευθεία η οποία χαρακτηρίζεται σαν ουδέτερη γραμμή.

Δεχόμαστε επίσης ότι επίπεδες διατομές παραμένουν επίπεδες και μετά την κάμψη. Υπ' αυτές τις προϋποθέσεις, αν DE είναι ο ουδέτερος άξονας της δοκού είναι (σχ. 5.6β)

$$\text{μήκος δοκού:} \quad L = \rho_x \theta$$

$$\text{μήκος της ίνας } jk: \quad L' = (\rho_x - z) \theta$$

$$\text{επιμήκυνση της ίνας } jk: \quad \delta = L' - L = (\rho_x - z) \theta - \rho_x \theta = -z \theta$$

παραμόρφωση της ίνας jk:
$$\varepsilon_x = \frac{\delta}{L} = \frac{-z\theta}{\rho_x \theta} = -\frac{z}{\rho_x}$$

ή αν θεωρήσουμε ότι το z λαμβάνει θετικές και αρνητικές τιμές

$$\varepsilon_x = \frac{z}{\rho_x} \quad (5.4)$$

Σύμφωνα με την εξίσωση 5.4 η ε_x μεταβάλλεται γραμμικά κατά το ύψος της διατομής, η δε μέγιστη απόλυτη τιμή της ε_m είναι στο σημείο που η z είναι μέγιστη.

Τάσεις της διατομής: Οι τάσεις σ_x λόγω των παραμορφώσεων ε_x είναι:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = \frac{E}{\rho_x} z \quad (5.5)$$

Η κατανομή τους, που είναι ομοιόμορφη κατά το πλάτος της διατομής, φαίνεται στο σχ. 5.6δ

Ουδέτερος άξονας της διατομής: Η θέση του βρίσκεται από την εφαρμογή της εξίσωσης $N_x = 0$. Αν dA ένα στοιχείο της διατομής είναι

$$N = \int_A \sigma_x dA = \int_A \frac{E}{\rho_x} z dA = 0$$

και επειδή $E/\rho_x \neq 0$ έπεται ότι

$$\int_A z dA = Az_c = 0 \Rightarrow z_c = 0 \quad (\text{κεφ. 16 Γεωμετρικά στοιχεία επίπεδων επιφανειών})$$

όπου z_c η απόσταση του κ.β. από την ουδέτερη γραμμή.

Επομένως η ουδέτερη γραμμή διέρχεται από το κέντρο βάρους της διατομής και είναι κάθετη στο επίπεδο συμμετρίας.

Καμπυλότητα της δοκού: Σύμφωνα με τις εξ. 5.3 είναι

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA = \frac{E}{\rho_x} \int_A z^2 dA = 0$$

αλλά $\int_A z^2 dA = I_y$ οπότε

$$k = \frac{1}{\rho_x} = \frac{M_y}{EI_y} \quad (5.6)$$

Το γινόμενο EI_y εκφράζει την αντίσταση του υλικού στην καμπύλωση και καλείται δείκτης δυσκαμψίας.

Τάσεις της διατομής: Από τις εξ. (5.5), (5.6) προκύπτει.

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z \quad (5.7)$$

Η μέγιστη και ελάχιστη τιμή της σ_x βρίσκεται στην επάνω και κάτω πλευρά της διατομής

$$\sigma_{\max} = \frac{M_y c_1}{I_y} \quad \sigma_{\min} = -\frac{M_y c_2}{I_y} \quad (5.8)$$

Αν τεθούν $W_1 = \frac{I_z}{c_1}$ και $W_2 = \frac{I_z}{c_2}$.

όπου W_1, W_2 καλούνται ροπές αντίστασης, οι εξ. 5.8 γίνονται

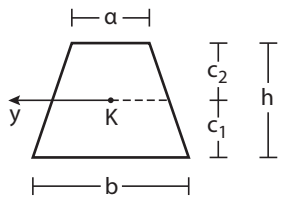
$$\sigma_{\max} = \frac{M_y}{W_1} \quad \sigma_{\min} = -\frac{M_y}{W_2} \quad (5.9)$$

Παραμορφώσεις:

$$\epsilon_x = \frac{M_y z}{EI_y} \quad \epsilon_y = \epsilon_z = -\nu \frac{M_y z}{EI_y} \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \quad (5.10)$$

Τιμές ροπών αντιστάσεως διαφόρων διατομών δίδονται από πίνακες

Για τη διατομή του σχ. 5.6 είναι:



$$I_y = \frac{h^3}{36} \frac{a^2 + 4ab + b^2}{a+b} \quad W_1 = \frac{I_y}{c_1}$$

$$c_2 = \frac{h}{3} \frac{a+2b}{a+b} \quad W_2 = \frac{I_y}{c_2}$$

$$c_1 = h - c_2 = \frac{(2a+b)h}{3(a+b)}$$

$$(5.11)$$

5.3.2 Βυθίσεις των σημείων του άξονα της δοκού

Η καμπυλότητα του ουδέτερου άξονα δοκού σε καθαρή κάμψη λόγω M_y βρέθηκε ίση με

$$\frac{1}{\rho_x} = \frac{M_y}{EI_y} \quad (5.6)$$

Από τα μαθηματικά είναι γνωστό ότι για την παραμορφωμένη καμπύλη $z = z(x)$ του ουδέτερου άξονα της δοκού ισχύει η σχέση

$$\frac{1}{\rho_x} = \frac{\frac{d^2 z}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (5.12)$$

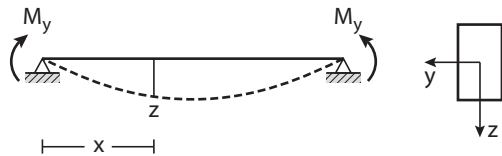
Επειδή η κλίση dz/dx της καμπύλης $z = z(x)$ σε μία δοκό είναι πολύ μικρή, το τετράγωνό της στην εξ. 5.12 παραλείπεται και η εξ. 5.12 γράφεται

$$\frac{1}{\rho_x} = \frac{d^2 z}{dx^2} \quad (5.13)$$

Από τις εξ. (56), (5.13) προκύπτει

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{M_y}{EI_y} \quad (5.14)$$

Η εξ. 5.14 είναι η διαφορική εξίσωση του άξονα της δοκού. Από την ολοκλήρωσή της και τον προσδιορισμό των σταθερών ολοκλήρωσης, προκύπτουν οι βυθίσεις z των σημείων του άξονα της δοκού (σχ. 5.7).



Σχ. 5.7

Σημείωση: Η καμπυλότητα της δοκού αυτής που προκαλείται από θετικές ροπές λαμβάνεται θετική.

5.3.3 Εγκάρσιες παραμορφώσεις

Οι διατομές μιας δοκού σε καθαρή κάμψη παραμένουν μεν επίπεδες, υφίστανται όμως εγκάρσιες παραμορφώσεις οι οποίες μεταβάλλουν το σχήμα τους.

Επειδή οι διαμήκεις ίνες της δοκού εφελκύνονται ή θλίβονται ανάλογα με τη θέση τους όπως συμβαίνει και με τις ίνες μιας δοκού σε αξονική φόρτιση, θα υφίστανται τις παραμορφώσεις

$$\epsilon_y = -\nu \epsilon_x \quad \epsilon_z = -\nu \epsilon_x$$

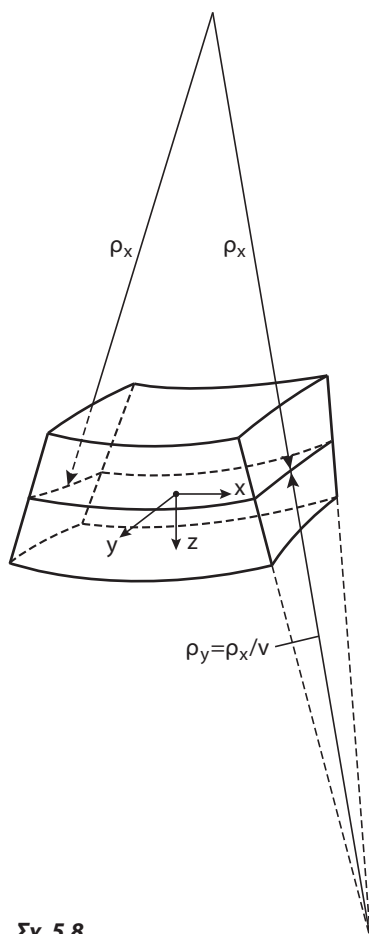
και σύμφωνα με την εξ. 5.4, για θετικές ροπές M_y είναι

$$\epsilon_y = -\frac{\nu z}{\rho_x} \quad \epsilon_z = -\frac{\nu z}{\rho_x} \quad (5.15)$$

Σύμφωνα με την εξ. 5.15 οι παράλληλες προς την ουδέτερη γραμμή ίνες που βρίσκονται πάνω από αυτή επιμηκύνονται ενώ αυτές που βρίσκονται κάτω βραχύνονται με συνέπεια να έχουμε κάμψη στο επίπεδο (y, z) σε τόξα με ακτίνα καμπυλότητας

$$\frac{1}{\rho_y} = -\frac{\epsilon_y}{z} = \frac{\nu \epsilon_x}{z} = \frac{\nu}{\rho_x} = \frac{\nu M_y}{EI_y} \quad (5.16)$$

Η καμπυλότητα $1/\rho_y$ καλείται αντικλαστική. Στο σχ. 5.8 δίδεται η παραμορφωμένη εικόνα μιας δοκού ορθογωνικής διατομής και σημειώνονται οι ακτίνες καμπυλότητας ρ_x, ρ_y . Οι παραμορφώσεις ϵ_y πάνω από την ουδέτερη γραμμή και $-\epsilon_y$ κάτω από την ουδέτερη γραμμή, αντισταθμίζονται με συνέπεια το ύψος της διατομής να μην μεταβάλλεται.



Σχ. 5.8

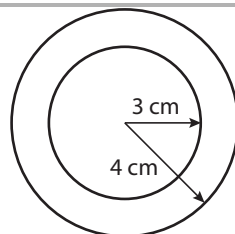
Παράδειγμα 5.1

Σ' ένα σωλήνα του οποίου η διατομή φαίνεται στο σχ. 5.8β η μέγιστη επιτρεπόμενη εφελκυστική ή θλιπτική τάση είναι $\sigma_{\max} = 80 \text{ Mpa}$. Να βρεθεί η μέγιστη ροπή M την οποία μπορεί να παραλάβει η διατομή.

Όλοι οι άξονες που διέρχονται από το κέντρο της διατομής είναι κύριοι κεντρικοί άξονες. Συνεπώς οποιαδήποτε διεύθυνση και να έχουν οι M που προκαλούν καθαρή κάμψη στο σωλήνα είναι

$$\sigma = \frac{M}{I} y$$

$$I = \frac{\pi(4 \cdot 10^{-2})^4}{4} - \frac{\pi(3 \cdot 10^{-2})^4}{4} = 137,375 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$$

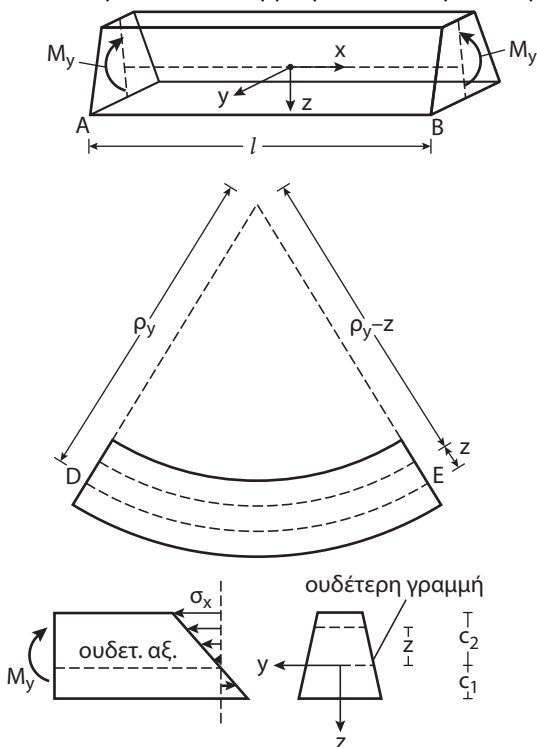


Σχ. 5.8β

ΤΥΠΟΙ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 5

ΠΙΝΑΚΑΣ V: ΚΑΘΑΡΗ ΚΑΜΨΗ

1. Δοκοί με επίπεδο συμμετρίας που συμπίπτει με το επίπεδο φόρτισης



(DE): ουδέτερος άξονας

Εξίσωση ελαστικής γραμμής:

$$\epsilon_x = \frac{z}{\rho_y} \quad \epsilon_y = -\frac{vz}{\rho_x} \quad \epsilon_z = -\frac{vz}{\rho_x}$$

$$k = \frac{1}{\rho_x} = \frac{M_y}{EI_y}$$

$$\frac{1}{\rho_y} = -\frac{\epsilon_y}{z} = \frac{v\epsilon_x}{z} = \frac{v}{\rho_x} = \frac{vM_y}{EI_y}$$

($1/\rho_y$: αντικλαστική καμπυλότητα)

$$\epsilon_x = \frac{M_y z}{EI_y} \quad \epsilon_y = \epsilon_z = -v \frac{M_y z}{EI_y}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

$$\sigma_x = \frac{M_y z}{I_y}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_y c_1}{I_y} = \frac{M_y}{W_1}$$

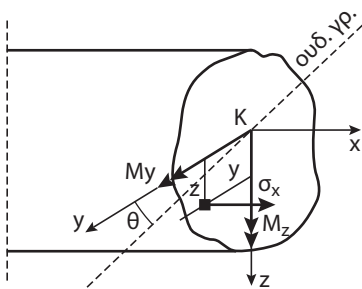
$$\sigma_{\min} = \frac{M_y c_2}{I_y} = \frac{M_y}{W_2}$$

$$(W_1 = I_y/c_1 \quad W_2 = I_y/c_2)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{M_y}{EI_y}$$

2. Δοκοί τυχαίας διατομής – Ροπές καθαρής κάμψης $M = M_y + M_z$



$$\sigma_x = \frac{-(I_{yz}M_y + I_yM_z)y + (I_zM_y + I_{yz}M_z)z}{I_yI_z - I_{yz}^2}$$

Εξίσωση ουδέτερης γραμμής

$$z = \frac{I_{yz}M_y + I_yM_z}{I_zM_y + I_{yz}M_z} y$$

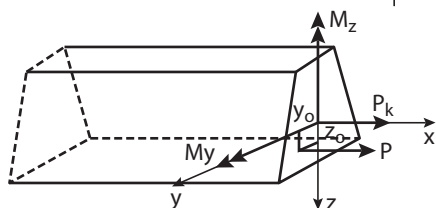
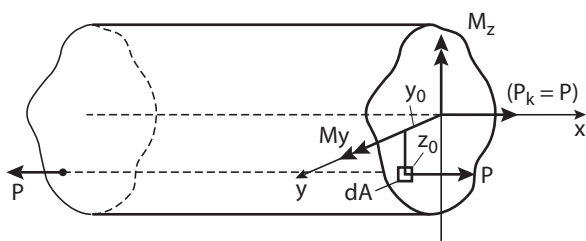
Κύριοι άξονες (y_p, z_p):

$$\sigma_x = -\frac{M_{z_p} y_p}{I_{z_p}} + \frac{M_{y_p} z_p}{I_{y_p}} \quad z_p = \frac{I_{y_p} M_{z_p}}{I_{z_p} M_{y_p}}$$

3. Κάμψη από έκκεντρη αξονική φόρτιση

Τυχαία διατομή

$$\sigma_x = \frac{P}{A} + \frac{-(I_{yz} M_y + I_y M_z) y + (I_z M_y + I_{yz} M_z) z}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$



$$P_k = P \quad M_y = P z_0 \quad M_z = P y_0$$

A: εμβαδόν διατομής

ουδέτερη γραμμή: βρίσκεται για $\sigma_x = 0$.

Διατομή με άξονα συμμετρίας.

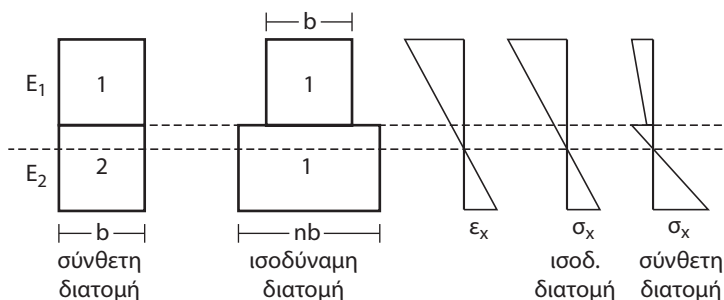
- P στον άξονα συμμετρίας (σχήμα)

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

- P στον άξονα συμμετρίας ($M_z = 0$)

$$\sigma_x = \frac{P}{A} + \frac{M_y}{I_y} z$$

4. Δοκοί από διαφορετικά υλικά



$$E_1 < E_2$$

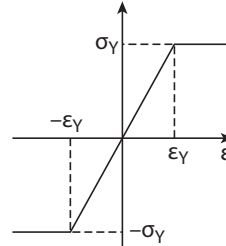
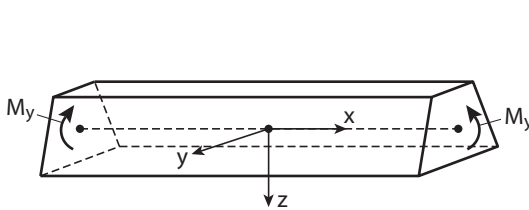
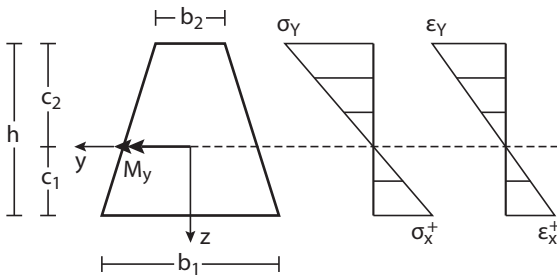
$$n = \frac{E_1}{E_2}$$

Σύνθετη διατομή: $(EI)_\Sigma = E_1 I_1 + E_2 I_2$

Ισοδύναμη διατομή: $(EI)_I = E_1 I_1 + E_1 n I = E_1 I_1 + E_2 I_2$

Πλαστική κάμψη δοκών

5.

5.1. $M_y \leq M_Y$  $M_y < M_Y$

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z$$

$$\epsilon_x = \frac{M_y}{EI_y} z$$

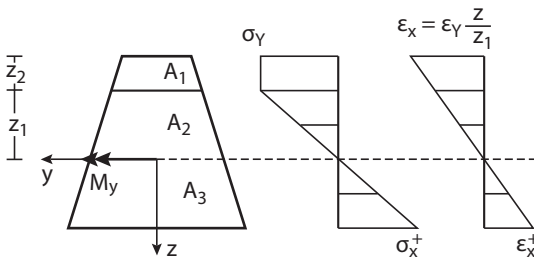
$$k = \frac{M_y}{EI_y}$$

 $M_y = M_Y$

$$\sigma_Y = \frac{M_Y}{I_y} c_2$$

$$\epsilon_Y = \frac{M_Y}{EI_y} c_2$$

$$k_y = \frac{M_Y}{EI_y}$$

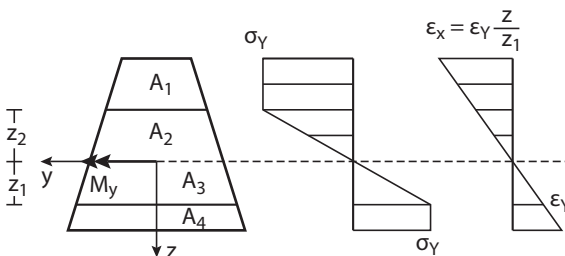
5.2. $M_y > M_Y$ $\sigma_x^- > \sigma_Y$ $\sigma_x^+ < \sigma_Y$ 

$$-A_1 + \frac{1}{z_1} S_e = 0$$

$$M_Y = \sigma_Y \left(\sigma_p + \frac{1}{z_1} I_e \right)$$

$$\sigma_x = \sigma_Y \frac{z}{z_1}$$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_Y}{E} \frac{z}{z_1} \quad k = \frac{\sigma_Y}{E} \frac{1}{z_1}$$

5.3. $M_y > M_Y$ $\sigma_x^- > \sigma_Y$ $\sigma_x^+ > \sigma_Y$ 

$$-A_1 + A_4 + \frac{1}{z_1} S_e = 0$$

$$M_Y = \sigma_Y \left(S_{p1} + S_{p4} + \frac{1}{z_1} I_e \right)$$

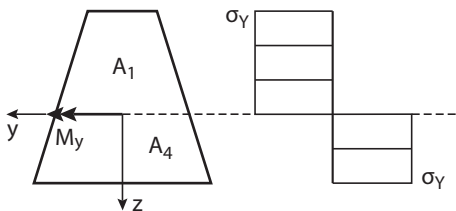
$$\sigma_x = \sigma_Y \frac{z}{z_1}$$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_Y}{E} \frac{z}{z_1} \quad k = \frac{\sigma_Y}{E} \frac{1}{z_1}$$

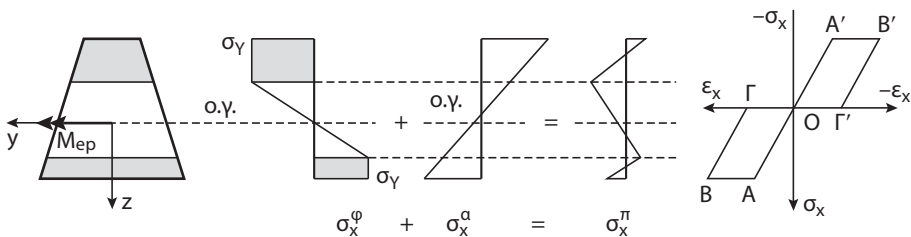
5.4. $M_y = M_p$ $\sigma_x^- = \sigma_x^+ = \sigma_Y$

$$A_1 = A_4 = \frac{1}{2}A$$

$$M_p = \sigma_Y (S_{p1} + S_{p4})$$



5.5. Παραμένουσες τάσεις, παραμορφώσεις, καμπυλότητα

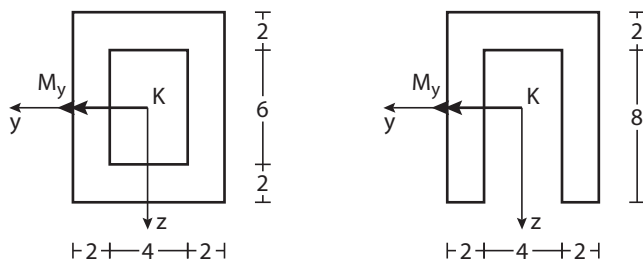


$$\sigma_x^\pi = \sigma_x^\phi + \sigma_x^\alpha \quad \epsilon_x^\pi = \epsilon_x^\phi + \epsilon_x^\alpha \quad k_\rho^\pi = k_\rho^\phi + k_\rho^\alpha \quad \text{ή} \quad \frac{1}{\rho^\pi} = \frac{1}{\rho^\phi} + \frac{1}{\rho^\alpha} \quad \left| \quad \sigma_x^\alpha = \frac{M_y^\alpha}{I_y} z \right.$$

όπου ϕ : φόρτιση, α : αποφόρτιση, π : παραμένουσα

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

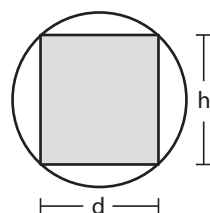
5.1 Οι διατομές του σχ. 5.1 ανήκουν σε δοκούς που υφίστανται καθαρή κάμψη λόγω των ροπών $M_y = 30 \text{ kNm}$ που ενεργούν στον κεντρικό άξονα. Να βρεθούν τα διαγράμματα σ_x .



Σχ. 5.1

5.2 Η κυκλική διατομή του σχ. 5.2 ανήκει σε μία δοκό από την οποία πρόκειται να αφαιρεθούν τα μη σκιασμένα τμήματα και να προκύψει η ορθογώνια διατομή.

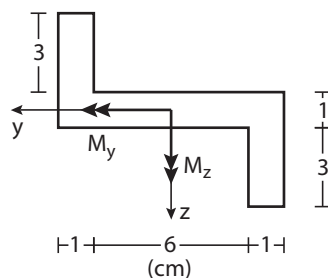
Να υπολογισθεί ο λόγος b/h της ορθογώνιας διατομής για να έχει αυτή τη μεγαλύτερη αντοχή σε καθαρή κάμψη.



Σχ. 5.2

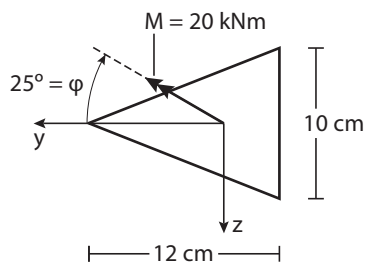
5.3 Στη διατομή του σχ. 5.3 που ανήκει σε μία δοκό εφαρμόζονται οι ροπές $M_y = 1,6M_0$ και $M_z = M_0$

Να βρεθεί η μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή της M_0 αν οι επιτρεπόμενες τάσεις σ_x είναι 120 MPa .



Σχ. 5.3

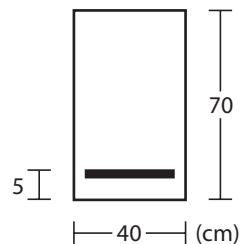
5.4 Δοκός με τη διατομή του σχ. 5.4 βρίσκεται σε καθαρή κάμψη λόγω των ροπών M . Να βρεθούν ο ουδέτερος άξονας και η μέγιστη τάση.



Σχ. 5.4

5.5 Η δοκός οπλισμένου σκυροδέματος που έχει τη διατομή του σχ. 5.5 πρέπει να μπορεί να παραλαμβάνει ροπή $M=90 \text{ kNm}$. Αν η θλιπτική αντοχή του σκυροδέματος είναι $\sigma_c=3,5 \text{ MPa}$ και $n=E_s/E_c=10$ να βρεθούν:

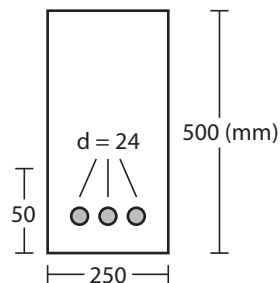
- Το εμβαδόν του απαιτούμενου χαλύβδινου οπλισμού και
- Οι αναπτυσσόμενες τάσεις στο χάλυβα.



Σχ. 5.5

5.6 Δοκός οπλισμένου σκυροδέματος που έχει τη διατομή του σχ. 5.6 παραλαμβάνει ροπή 60 kNm . Αν $E_c=25 \text{ GPa}$ και $E_s=200 \text{ GPa}$ να βρεθούν:

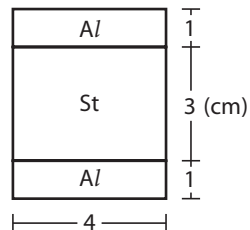
- Η τάση του χάλυβα
- Η μέγιστη τάση στο σκυρόδεμα.



Σχ. 5.6

5.7 Η διατομή μιας δοκού στο σχ. 5.7 πρέπει να παραλαμβάνει ροπή $M=8 \text{ kNm}$. Αν $E_s=200 \text{ GPa}$ και $E_{Al}=70 \text{ GPa}$ να βρεθούν:

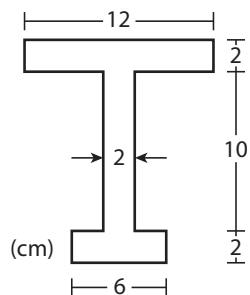
- Το διάγραμμα των τάσεων της διατομής
- Η ακτίνα καμπυλότητας της δοκού.



Σχ. 5.7

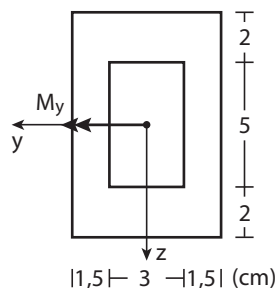
5.8 Η διατομή του σχ. 5.8 ανήκει σε μία δοκό που υφίσταται καθάρη κάμψη. Να βρεθούν:

- Οι M_Y, M_P αν $\sigma_Y=200 \text{ MPa}$
- Οι παραμένουσες τάσεις και παραμορφώσεις αν η δοκός φορτισθεί με τη ροπή $M=M_Y+0,5(M_P-M_Y)$ και μετά αποφορτισθεί.



Σχ. 5.8

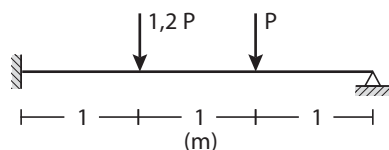
5.9 Στη διατομή του σχ. 5.9 λόγω καθαρής κάμψης από ροπές M_y πλαστικοποιήθηκε το πάνω και το κάτω τμήμα πάχους 2 cm . Να βρεθούν οι παραμένουσες τάσεις και η παραμένουσα καμπυλότητα μετά την απομάκρυνση των ροπών.



Σχ. 5.9

5.10 Να βρεθεί το φορτίο κατάρρευσης της δοκού του σχ.5.10

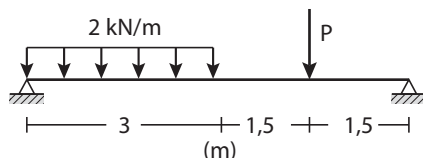
Δεδομένα: Διατομή $b \times h = 10 \times 20$ cm ,
 $\sigma_Y = 240$ Mpa .



Σχ. 5.10

5.11 Να βρεθεί το φορτίο κατάρρευσης της δοκού του σχ. 5.11.

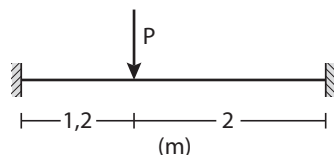
Δεδομένα: Διατομή $b \times h = 6 \times 10$ cm ,
 $\sigma_Y = 240$ Mpa .



Σχ. 5.11

5.12 Να βρεθεί το φορτίο κατάρρευσης της δοκού του σχ. 5.12

Δεδομένα: $b \times h = 5 \times 8$ cm , $\sigma_Y = 240$ Mpa .



Σχ. 5.12

16 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

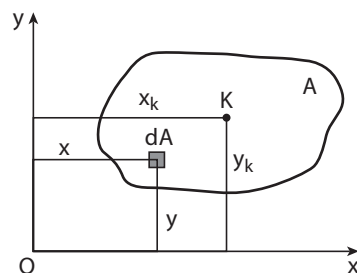
16.1 ΣΤΑΤΙΚΗ ΡΟΠΗ – ΚΕΝΤΡΟ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

Για μια επιφάνεια A (σχ. 16.1) οι στατικές ροπές αδράνειας ή πρωτοβάθμιες ροπές S_x, S_y ορίζονται από τις σχέσεις

$$S_x = \int y dA \quad S_y = \int x dA \quad (16.1)$$

ενώ οι συντεταγμένες του κέντρου K της επιφάνειας δίδονται από τις σχέσεις

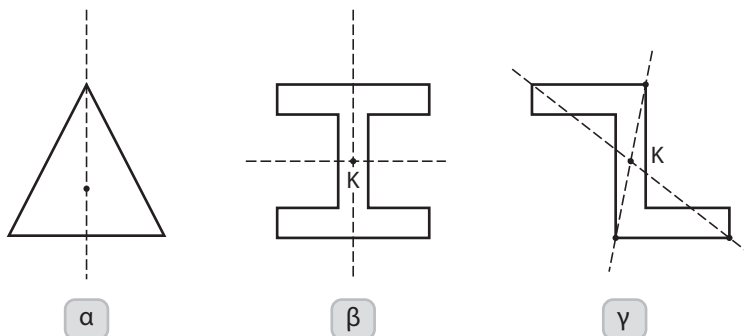
$$x_K = \frac{S_y}{A} = \frac{\int x dA}{\int dA} \quad y_K = \frac{S_x}{A} = \frac{\int y dA}{\int dA} \quad (16.2)$$



Σχ. 16.1

Σημειώνονται οι παρακάτω χαρακτηριστικές περιπτώσεις.

- Αν μία επιφάνεια έχει άξονα συμμετρίας, το κέντρο βρίσκεται πάνω σ' αυτόν (σχ. 16.2α).
- Αν μια επιφάνεια έχει δύο άξονες συμμετρίας το κέντρο βρίσκεται στην τομή τους (σχ. 16.2β).
- Αν μία επιφάνεια έχει κέντρο συμμετρίας η θέση του κέντρου της ταυτίζεται μ' αυτό (σχ. 16.2γ).

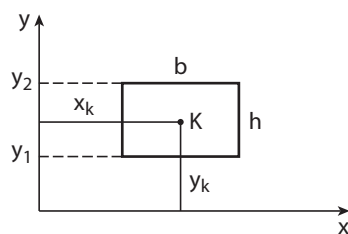


Σχ. 16.2

Έστω τώρα η ορθογώνια επιφάνεια του σχ. 16.3 της οποίας το κέντρο είναι γνωστό

Είναι:

$$\begin{aligned} S_x &= \int y dA = \int_{y_1}^{y_2} y b dy = \frac{1}{2} (y_1 + y_2) (y_2 - y_1) = \\ &= y_k \cdot b h = A y_k \end{aligned}$$



Σχ. 16.3

Με ανάλογο τρόπο προκύπτει και η S_y οπότε ισχύουν οι σχέσεις

$$S_x = A y_k \quad S_y = A x_k \quad (16.3)$$

Για μια σύνθετη επιφάνεια που αποτελείται από τμήματα των οποίων τα κέντρα είναι γνωστά οι εξ. 16.2 υπολογισμού των x_k, y_k της σύνθετης επιφάνειας μπορεί επομένως να έχουν τη μορφή:

$$x_k = \frac{\sum A_i \bar{x}_i}{\sum A_i} \quad y_k = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i} \quad (16.4)$$

όπου τα αθροίσματα αναφέρονται στα τμήματα που χωρίζεται η επιφάνεια.

16.2 ΡΟΠΕΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

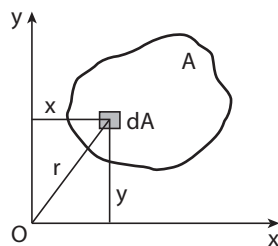
Οι ροπές αδράνειας ή δευτεροβάθμιες ροπές μιας επιφάνειας A στο σ.σ. (Ο x, y) (σχ. 16.4) ορίζονται από τις σχέσεις.

- αξονικές ροπές αδράνειας:

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad I_y = \int_A x^2 dA \quad (16.5)$$

- φυγόκεντρη ροπή αδράνειας:

$$I_{xy} = I_{yx} = \int_A xy dA \quad (16.6)$$



Σχ. 16.4

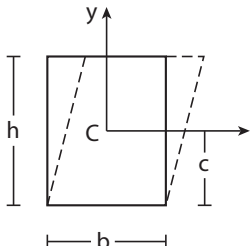
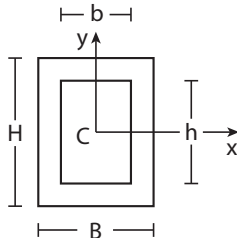
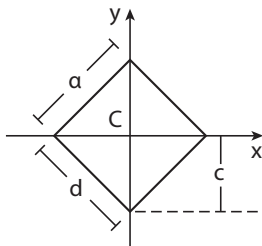
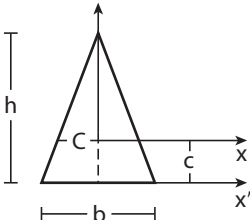
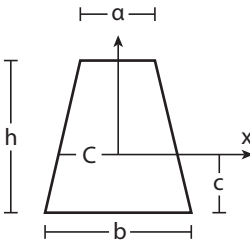
- πολική ροπή αδράνειας: $I_p = \int r^2 dA = \int (x^2 + y^2) dA = I_x + I_y \quad (16.7)$

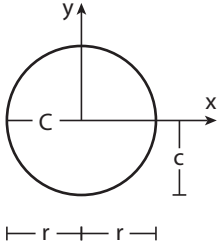
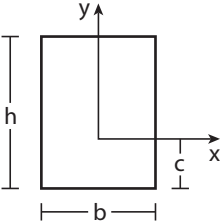
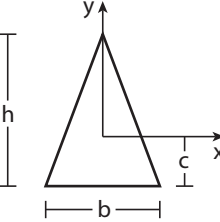
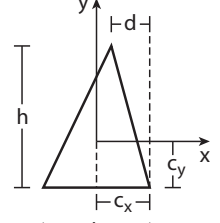
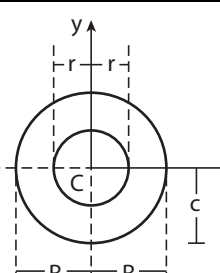
Οι I_x, I_y, I_p είναι πάντα θετικές

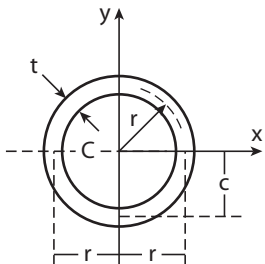
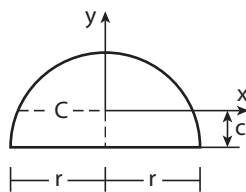
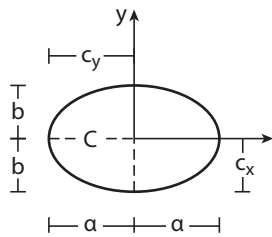
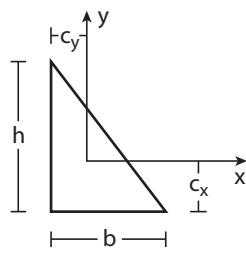
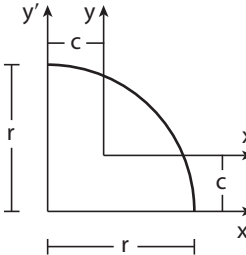
Η I_{xy} μπορεί να είναι θετική ή αρνητική ή μηδέν.

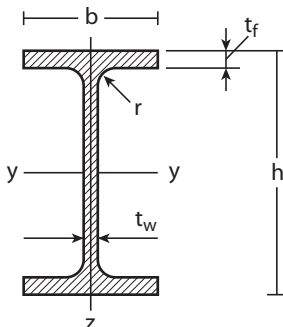
Η I_{yx} , όταν είτε ο άξονας x είτε ο άξονας y είναι άξονας συμμετρίας, είναι μηδέν.

Πίνακας 16.1 Γεωμετρικά στοιχεία διατομών

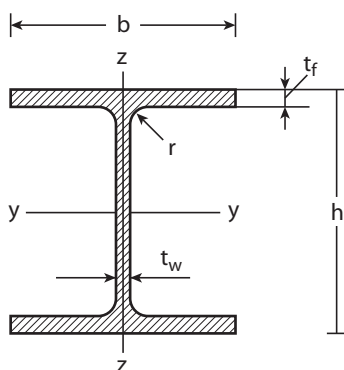
	$A = bh$ $c = \frac{h}{2}$ $i_x = \frac{h}{\sqrt{12}}$	$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $I_y = \frac{hb^3}{12}$ $I_{xy} = 0$	$I_p = \frac{bh}{12} (b^2 + h^2)$
	$A = BH - bh$	$I_x = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$ $I_y = \frac{HB^3 - hb^3}{12}$ $I_{xy} = 0$	
	$A = a^2$ $c = \frac{a}{\sqrt{2}}$ $i_x = \frac{a}{\sqrt{12}}$	$I_x = \frac{a^4}{12}$ $I_y = \frac{a^4}{12}$ $I_{xy} = 0$	
	$A = \frac{bh}{2}$ $c = \frac{h}{3}$ $i_x = \frac{h}{\sqrt{18}}$	$I_x = \frac{bh^3}{36}$ $I_y = \frac{hb^3}{48}$ $I_{xy} = 0$	$I_p = \frac{bh}{144} (3b^2 + 4h^2)$ $I_{x'} = \frac{bh^3}{12}$
	$A = \frac{h}{2}(a+b)$ $c = \frac{h}{3} \left(\frac{b+2a}{b+a} \right)$ $i_x = \frac{h\sqrt{a^2 + 4ab + b^2}}{\sqrt{18}(a+b)}$	$I_x = \frac{h^3}{36} \left(\frac{a^2 + 4ab + b^2}{a+b} \right)$ $I_y = \frac{h(a+b)(a^2b^2)}{48}$ $I_{xy} = 0$	

	$A = \pi r^2$ $c = r$ $i_x = \frac{r}{2}$	$I_x = \frac{\pi r^4}{4}$ $I_y = \frac{\pi r^4}{4}$ $I_{xy} = 0$	$I_p = \frac{\pi r^4}{2}$
	$A = bh$ $c = \frac{h}{2}$ $r_x = \frac{h}{\sqrt{12}}$	$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $I_y = \frac{hb^3}{12}$ $I_{xy} = 0$	$I_p = \frac{bh}{12}(b^2 + h^2)$
	$A = \frac{bh}{2}$ $c = \frac{h}{3}$ $r_x = \frac{h}{\sqrt{18}}$	$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $I_y = \frac{hb^3}{12}$ $I_{xy} = 0$	$I_p = \frac{bh}{144}(3b^2 + 4h^2)$
	$A = \frac{bh}{2}$ $c_x = \frac{b+d}{3}$ $c_y = \frac{h}{3}$	$I_x = \frac{bh^3}{36}$ $I_y = \frac{bh}{36}(b^2 - bd + d^2)$ $I_{xy} = -$	$I_p = \frac{bh}{36} \times (b^2 - bd + d^2)$
	$A = \pi(R^2 - r^2)$ $c = R$ $i = \sqrt{\frac{R^2 + r^2}{4}}$	$I_x = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4)$ $I_y = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4)$ $I_{xy} = 0$	$I_p = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4)$

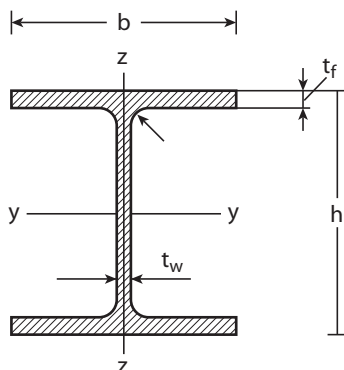
	$A = 2\pi r t$ $c = r$ $i_x = \frac{r}{\sqrt{12}}$	$I_x = \pi t r^3$ $I_y = \pi t r^3$ $I_{xy} = 0$	$I_p = 2\pi r^3 t$
	$A = \frac{\pi r^2}{2}$ $c = \frac{4r}{3\pi}$ $i_x = 0,264 r$	$I_x = 0,110 r^4$ $I_y = \frac{\pi r^4}{8}$ $I_{xy} = 0$	
	$A = \pi a b$ $c_x = b \quad c_y = a$ $i_x = \frac{b}{2}$	$I_x = \frac{\pi a b^3}{4}$ $I_y = \frac{\pi a^3 b}{4}$ $I_{xy} = 0$	$I_p = \frac{\pi a b}{4} (a^2 + b^2)$
	$A = \frac{bh}{2}$ $c_x = \frac{h}{3} \quad c_y = \frac{b}{3}$ $i_x = \frac{h}{\sqrt{18}}$	$I_x = \frac{bh^3}{36}$ $I_y = \frac{hb^3}{36}$ $I_{xy} = -\frac{b^2 h^2}{72}$	$I_p = \frac{bh}{36} (b^2 + h^2)$
	$A = \frac{\pi r^2}{4}$ $c = \frac{4r}{3\pi}$ $i_x = \frac{h}{\sqrt{18}}$	$I_x = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) r^4$ $I_y = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) r^4$ $I_{xy} = \left(\frac{1}{8} - \frac{4}{9\pi} \right) r^4$	$I_{x'} = \frac{\pi r^4}{16}$ $I_{y'} = \frac{\pi r^4}{16}$

Πίνακας 6.2 IPE Euronorm 19-57

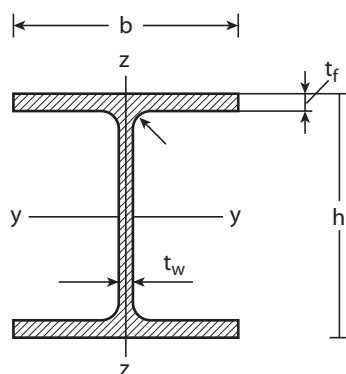
Nenn höhe	Maße							y-y			z-z		
	h	b	t _w	t _f	r	A	g _k	I _y	W _{el,y}	i _y	I _z	W _{el,z}	i _z
	mm					cm ²	kg/m	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm
80	80	46	3,8	5,2	5	7,64	6,0	80,1	20,0	3,24	8,49	3,69	1,05
100	100	55	4,1	5,7	7	10,3	8,1	171	34,2	4,07	15,9	5,79	1,24
120	120	64	4,4	6,3	7	13,2	10,4	318	53,0	4,90	27,7	8,65	1,45
140	140	73	4,7	6,9	7	16,4	12,9	541	77,3	5,74	44,9	12,3	1,65
160	160	82	5,0	7,4	9	20,1	15,8	869	109	6,58	68,3	16,7	1,84
180	180	91	5,3	8,0	9	23,9	18,8	1320	146	7,42	101	22,2	2,05
200	200	100	5,6	8,5	12	28,5	22,4	1940	194	8,26	142	28,5	2,24
220	220	110	5,9	9,2	12	33,4	26,2	2770	252	9,11	205	37,3	2,48
240	240	120	6,2	9,8	15	39,1	30,7	3890	324	9,97	284	47,3	2,69
270	270	135	6,6	10,2	15	45,9	36,1	5790	429	11,2	420	62,2	3,02
300	300	150	7,1	10,7	15	53,8	42,2	8360	557	12,5	604	80,5	3,35
330	330	160	7,5	11,5	18	62,6	49,1	11770	713	13,7	788	98,5	3,55
360	360	170	8,0	12,7	18	72,7	57,1	16270	904	15,0	1040	123	3,79
400	400	180	8,6	13,5	21	84,5	66,3	23130	1160	16,5	1320	146	3,95
450	450	190	9,4	14,6	21	98,8	77,6	33740	1500	18,5	1680	176	4,12
500	500	200	10,2	16,0	21	116	90,7	48200	1930	20,4	2140	214	4,31
500	550	210	11,1	17,2	24	134	106	67120	2440	22,3	2670	254	4,45
600	600	220	12,0	19,0	24	156	122	92080	3070	24,3	3390	308	4,66

Πίνακας 6.3 HEA Euronorm 53-62

Maße								y-y			z-z		
Nenn höhe	h	b	t _w	t _f	r	A cm ²	g _k kg/m	I _y cm ⁴	W _{el,y} cm ³	i _y cm	I _z cm ⁴	W _{el,z} cm ³	i _z cm
	mm												
100	96	100	5	8	12	21,2	16,7	349	72,8	4,06	134	26,8	2,51
120	114	120	5	8	12	25,3	19,9	606	106	4,89	231	38,5	3,02
140	133	140	5,5	8,5	12	31,4	24,7	1030	155	5,73	389	55,6	3,52
160	152	160	6	9	15	38,8	30,4	1670	220	6,57	616	76,9	3,98
180	171	180	6	9,5	15	45,3	35,5	2510	294	7,45	925	103	4,52
200	190	200	6,5	10	18	53,8	42,3	3690	389	8,28	1340	134	4,98
220	210	220	7	11	18	64,3	50,5	5410	515	9,17	1950	178	5,51
240	230	240	7,5	12	21	76,8	60,3	7760	675	10,1	2770	231	6,00
260	250	260	7,5	12,5	24	86,8	68,2	10450	836	11,0	3670	282	6,50
280	270	280	8	13	24	97,3	76,4	13670	1010	11,9	4760	340	7,00
300	290	300	8,5	14	27	113	88,3	18260	1260	12,7	6310	421	7,49
320	310	300	9	15,5	27	124	97,6	22930	1480	13,6	6990	466	7,49
340	330	300	9,5	16,5	27	133	105	27690	1680	14,4	7440	496	7,46
360	350	300	10	17,5	27	143	112	33090	1890	15,2	7890	526	7,43
400	390	300	11	19	27	159	125	45070	2310	16,8	8560	571	7,34
450	440	300	11,5	21	27	178	140	63720	2900	18,9	9470	631	7,29
500	490	300	12	23	27	198	155	86970	3550	21,0	10370	691	7,24
550	540	300	12,5	24	27	212	166	111900	4150	23,0	10820	721	7,15
600	590	300	13	25	27	226	178	141200	4790	25,0	11270	751	7,05
650	640	300	13,5	26	27	242	190	175200	5470	26,9	11720	782	6,97
700	690	300	14,5	27	27	260	204	215300	6240	28,8	12180	812	6,84
800	790	300	15	28	30	286	224	303400	7680	32,6	12640	843	6,65
900	890	300	16	30	30	321	252	422100	9480	36,3	13550	903	6,50
1000	990	300	16,5	31	30	347	272	553800	11190	40,0	14000	934	6,35

Πίνακας 6.4 HE-B Euronorm 53-62

Maße								y-y			z-z		
Nenn höhe	h	b	t _w	t _f	r	A cm ²	g _k kg/m	I _y cm ⁴	W _{ely} cm ³	i _y cm	I _z cm ⁴	W _{ely} cm ³	i _z cm
	mm												
100	100	100	6	10	12	26	20,4	450	89,9	4,16	167	33,5	2,5
120	120	120	6,5	11	12	34	26,7	864	144	5,04	318	52,9	3,06
140	140	140	7	12	12	43	33,7	1510	216	5,93	550	78,5	3,58
160	160	160	8	13	15	54,3	42,6	2490	311	6,78	889	111	4,05
180	180	180	8,5	14	15	65,3	51,2	3830	426	7,66	1360	151	4,57
200	200	200	9	15	18	78,1	61,3	5700	570	8,54	2000	200	5,07
220	220	220	9,5	16	18	91	71,5	8090	736	9,43	2840	258	5,59
240	240	240	10	17	21	106	83,2	11260	938	10,3	3920	327	6,08
260	260	260	10	17,5	24	118	93,0	14920	1150	11,2	5130	395	6,58
280	280	280	10,5	18	24	131	103	19270	1380	12,1	6590	471	7,09
300	300	300	11	19	27	149	117	25170	1680	13,0	8560	571	7,58
320	320	300	11,5	20,5	27	161	127	30820	1930	13,8	9240	616	7,57
340	340	300	12	21,5	27	171	134	36660	2160	14,6	9690	646	7,53
360	360	300	12,5	22,5	27	181	142	43190	2400	15,5	10140	676	7,49
400	400	300	13,5	24	27	198	155	57680	2880	17,1	10820	721	7,40
450	450	300	14	26	27	218	171	79890	3550	19,1	11720	781	7,40
450	450	300	14	26	27	218	171	79890	3550	19,1	11720	781	7,33
500	500	300	14,5	28	27	239	187	107200	4290	21,2	12620	842	7,27
550	550	300	15	29	27	259	199	136700	4970	23,2	13080	872	7,17
600	600	300	15,5	30	27	270	212	171000	5700	25,2	13530	902	7,08
650	650	300	16	31	27	286	225	210600	6480	27,1	13980	932	6,99
700	700	300	17	32	27	306	241	256900	7340	29,0	14400	963	6,87
800	800	300	17,5	33	30	334	262	359100	8980	32,8	14900	994	6,68
900	900	300	18,5	35	30	371	291	494100	10980	36,5	15820	1050	6,53
1000	1000	300	19	36	30	400	314	644700	12890	40,1	16280	1090	6,38

Πίνακας 6.5 HE-M Nach Euronorm 53-62

Nenn höhe	Maße							y-y			z-z		
	h	b	t _w	t _f	r			I _y	W _{el,y}	i _y	I _z	W _{el,z}	i _z
	mm					A	g _k	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm
100	120	106	12	20	12	53,2	41,8	1140	190	4,63	399	75,3	2,74
120	140	126	12,5	21	12	66,4	52,1	2020	288	5,51	703	112	3,25
140	160	146	13	22	12	80,6	63,2	3290	411	6,39	1140	157	3,77
160	180	166	14	23	15	97,1	76,2	5100	566	7,25	1760	212	4,26
180	200	186	14,5	24	15	113	88,9	7480	748	8,13	2580	277	4,77
200	220	206	15	25	18	131	103	10640	967	9,00	3650	354	5,27
220	240	226	15,5	26	18	149	117	14600	1220	9,89	5010	444	5,79
240	270	248	18	32	21	200	157	24290	1800	11,0	8150	657	6,39
260	290	268	18	32,5	24	220	172	31310	2160	11,9	10450	780	6,90
280	310	288	18,5	33	24	240	189	39550	2550	12,8	13160	914	7,40
300	340	310	21	39	27	303	238	59200	3480	14	19400	1250	8,00
320	359	309	21	40	27	312	245	68130	3800	14,8	19710	1280	7,95
340	377	309	21	40	27	316	248	76370	4050	15,6	19710	1280	7,90
360	395	308	21	40	27	319	250	84870	4300	16,3	19520	1270	7,83
400	432	307	21	40	27	326	256	104100	4820	17,9	19340	1260	7,70
450	478	307	21	40	27	335	263	131500	5500	19,8	19340	1260	7,59
500	524	306	21	40	27	344	270	161900	6180	21,7	19150	1250	7,46
550	572	306	21	40	27	354	278	198000	6920	23,6	19160	1250	7,35
600	620	305	21	40	27	364	285	237400	7660	25,6	18960	1240	7,22
650	668	305	21	40	27	374	293	281700	8430	27,5	18980	1240	7,13
700	716	304	21	40	27	383	301	329300	9200	29,3	18800	1240	7,01
800	814	303	21	40	30	404	317	442600	10870	33,1	18630	1230	6,79
900	910	302	21	40	30	424	333	570400	12540	36,7	18450	1220	6,60
1000	1008	302	21	40	30	444	349	722300	14330	40,3	18460	1220	6,45

Πίνακας 6.6 Ενδεικτικές τιμές μηχανικών χαρακτηριστικών δομικών υλικών

Υλικό	Πυκνότητα ρ (kg/m ³)	Εφελκ. Ε (Gpa)	Διάτμηση G (Mpa)	Εφελκ. E(Gpa)	Διάτμηση τ _y (Mpa)	Εφελκ. σ _u (Mpa)	Θλίψη σ _u (Mpa)	Διάτμηση τ _u (Mpa)	Θερμ. διασ. α (10 ⁻⁶ °C)	Ολκιμότητα % ανά 50 mm
Χάλυβας										
Κατασκευών	7860	200	77	145	250	400	-	-	11,7	23
Ενισχυμ. μέσης αντοχής	7860	200	77		275	480			11,7	
Ενισχυμ. υψηλής αντοχής	7860	200	77		415	620			11,7	
Χυτοσίδηρος										
Φαιός (4,5%)	7200	69	28			170	655	240	12,1	0,5
Αλουμίνιο										
Κράμα 6061-T6	2710	10	26	140	240	260		165		
Κράμα 2014-T6	2800	75	27	230	400	455		275	23,0	13
Χαλκός										
Μπρούντζος (85% Cu, 15% Zn)	8740	120	44		435	585		320	18,7	3
Σκυρόδεμα										
Μέσης αντοχής	2320	25					28		9,9	
Υψηλής αντοχής	2320	30					40		9,9	
Ξύλο (παράλληλο προς τις ίνες)										
Έλατο	470	13	0,7			100	50	7,6		
Δρυς	660	12					47	12,4		
Πλαστικά										
Νάυλον (τύπος 6/6)	1140	2,8		45		75	35		144	50
Καουτσούκ	910					15			162	600