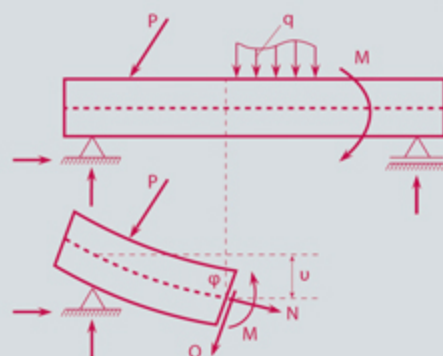


Θωμάς Ν. Βαλιάσης

ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΦΟΡΕΩΝ

- Ένταση Ισοστατικών φορέων
- Μετακινήσεις Ισοστατικών φορέων
- Μέθοδος Δυνάμεων
- Κλασική Μέθοδος Μετακινήσεων
- Μητρική διατύπωση της Μεθόδου Μετακινήσεων
- Μέθοδος Cross
- Εφαρμογή της Μεθόδου Μετακινήσεων στον Η/Υ
- Φορείς στο χώρο
- Θέματα Εξεταστικών Περιόδων



240 Παραδείγματα

Έκδοση
Βελτιωμένη

ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΖΗΤΗ

ISBN 978-960-456-347-0

© Copyright, Θωμάς Βαλιάσης, Εκδόσεις Ζήτη
2^η έκδοση: Φεβρουάριος 2013, Θεσσαλονίκη

Το παρόν έργο πνευματικής ιδιοκτησίας προστατεύεται κατά τις διατάξεις του ελληνικού νόμου (Ν.2121/1993 όπως έχει τροποποιηθεί και ισχύει σήμερα) και τις διεθνείς συμβάσεις περί πνευματικής ιδιοκτησίας. Απαγορεύεται απολύτως η άνευ γραπτής άδειας του εκδότη κατά οποιοδήποτε τρόπο ή μέσο αντιγραφή, φωτοανατύπωση και εν γένει αναπαραγωγή, εκμίσθωση ή δανεισμός, μετάφραση, διασκευή, αναμετάδοση στο κοινό σε οποιαδήποτε μορφή (ηλεκτρονική, μηχανική ή άλλη) και η εν γένει εκμετάλλευση του συνόλου ή μέρους του έργου.

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση
Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ

18^ο χλμ Θεσσαλονίκης - Περαιάς
Τ.Θ. 4171 • Περαιά Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr



www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ:

Αρμενοπούλου 27 - 546 35 Θεσσαλονίκη • Τηλ.: 2310-203.720 • Fax 2310-211.305
e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΕΝΩΣΗ ΕΚΔΟΤΩΝ ΒΙΒΛΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ:

Στοά του Βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5) - 105 64 ΑΘΗΝΑ • Τηλ.-Fax: 210-3211.097

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ - ΑΠΟΘΗΚΗ ΑΘΗΝΩΝ:

Χαριλάου Τρικούπη 22 - Τ.Κ. 106 79, Αθήνα • Τηλ.-Fax: 210-3816.650
e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η χρησιμοποίηση του Ηλεκτρονικού Υπολογιστή στο στατικό υπολογισμό των κατασκευών άλλαξε εντελώς τον τρόπο παρουσίασης των μεθόδων της Στατικής. Ο Πολιτικός Μηχανικός που σήμερα επιβάλλεται να χρησιμοποιήσει ένα πρόγραμμα για το στατικό υπολογισμό, πρέπει να έχει την ικανότητα αφενός μεν να δώσει ένα σωστό για τη λειτουργικότητα της κατασκευής στατικό μοντέλο βάσει του οποίου θα εισάγει τα δεδομένα στον υπολογιστή και αφετέρου να ελέγξει τα αποτελέσματα που θα πάρει.

Η ικανότητα αυτή αποκτάται μόνο με την πλήρη και σε βάθος γνώση των αρχών της κλασικής Στατικής.

Στην ύλη επομένως της κλασικής Στατικής μέθοδοι όπως των ομάδων δυνάμεων, των διορθωτικών υπεραρίθμων, των τριών ροπών για συνεχείς δοκούς, του κυρίου υπερστατικού συστήματος κ.λπ., οι οποίες αναπτύχθηκαν για να διευκολύνουν την επίλυση με το χέρι, δεν έχουν πια πρακτική αξία.

Οι δύο τελευταίες μέθοδοι αναπτύσσονται εδώ για εκπαιδευτικούς λόγους.

Στη «Στατική των Γραμμικών Φορέων» περιέχονται οι βασικές γνώσεις που διδάσκονται στους φοιτητές του τμήματος Πολιτικών Μηχανικών του ΑΠΘ στα εξάμηνα IV, V και VI.

Η όσο το δυνατόν σύντομη αλλά πλήρης ανάπτυξη του θεωρητικού μέρους, ο μεγάλος αριθμός παραδειγμάτων για την κατανόησή του και την κάλυψη των εφαρμογών είναι επιλογές που στοχεύουν στο να γίνει το βιβλίο αυτό ένα χρήσιμο και ευκολότερα αναγνώσιμο βοήθημα για τους φοιτητές στους οποίους βασικά και απευθύνεται.

Με την έκδοση του συγγράμματος αυτού ολοκληρώνεται μια προσπάθεια που άρχισε με τη συγγραφή της «Στατικής των Γραμμικών Ισοστατικών φορέων» η οποία εκδόθηκε το 1995. Ένα δεύτερο μέρος που περιλαμβάνει τους υπερστατικούς φορείς προστέθηκε στην έκδοση του 1997. Στη σημερινή τέλος έκδοση του 2013 προστέθηκαν και οι φορείς στο χώρο.

Έτσι η ύλη του συγγράμματος αυτού διαρθρώνεται ως εξής:

Στα κεφάλαια 1-8 επιλύονται τα διάφορα είδη των ισοστατικών φορέων με τη χρησιμοποίηση των συνθηκών ισορροπίας και προσδιορίζεται η εντατική τους κατάσταση.

Στο κεφάλαιο 9 μελετάται η επίδραση των κινούμενων φορτίων στους ισοστατικούς φορείς με τη χρησιμοποίηση των γραμμών επιρροής.

Στο κεφάλαιο 10 περιλαμβάνονται οι ενεργειακές μέθοδοι υπολογισμού των μετακινήσεων των ισοστατικών φορέων.

Στο κεφάλαιο 11 με τίτλο «Γεωμετρικές Μέθοδοι» υπολογίζονται βυθίσεις και κλίσεις σημείων καθώς και η ελαστική γραμμή των ισοστατικών φορέων με βάση τη διαφορική εξίσωση που ισχύει για τον άξονα μιας δοκού που βρίσκεται σε καθαρή κάμψη.

Στο κεφάλαιο 13 αναπτύσσεται η μέθοδος των δυνάμεων.

Στο κεφάλαιο 14 η κλασική μέθοδος μετακινήσεων δίδεται για διδακτικούς λόγους σε εκτεταμένη μορφή ενώ θα μπορούσε να δοθεί συνοπτικότερα επειδή σημαντικότερη είναι η μητρωϊκή διατύπωσή της, η οποία εισάγει στις μεθόδους υπολογισμού της μητρωϊκής στατικής.

Η μητρωϊκή διατύπωση της μεθόδου μετακινήσεων (μέθοδος δυσκαμψίας) αναπτύσσεται στο κεφάλαιο 15.

Στο κεφάλαιο 16 αναπτύσσεται η μέθοδος Cross.

Στο κεφάλαιο 17 δίδεται η θεωρητική ανάλυση της άμεσης μεθόδου δυσκαμψίας στην οποία στηρίζεται η διατύπωση των περισσότερων προγραμμάτων στατικού υπολογισμού των κατασκευών.

Στο κεφάλαιο 18, τέλος με συνοπτική θεωρία και ασκήσεις αναπτύσσονται οι φορείς στο χώρο, κεφάλαιο σημαντικό αφού με τέτοιους φορείς θα ασχοληθεί κατά βάσει ο Πολιτικός Μηχανικός.

Ευχαριστώ θερμά την κ. Βάσω Μπινίκου-Σιφουνάκη η οποία επιμελήθηκε όλα τα σχήματα.

Ευχαριστώ θερμά επίσης τις κ. κ. Μαρίκα Γιουζουκτίδου - Βαφειάδου και Βιργινία Μπαξεβάνη - Παπαδοπούλου οι οποίες δακτυλογράφησαν τα κείμενα και επεξεργάστηκαν τους τύπους του πρώτου και δεύτερου μέρους, καθώς και τις εκδόσεις Ζήτη οι οποίες ανάλαβαν την υπόλοιπη εκδοτική προσπάθεια.

Θεωρώ επίσης χρέος μου να ευχαριστήσω τη σύζυγό μου Ευαγγελία για την κατανόηση και υπομονή που έδειξε όλο αυτό το διάστημα που τόσες πολλές ώρες ήμουν σκυμμένος στο γραφείο μου.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

Η ΕΝΤΑΣΗ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΙΣΟΣΤΑΤΙΚΩΝ ΦΟΡΕΩΝ

Εισαγωγή	10
1. Γενικές Αρχές	
1.1 Η κίνηση του δίσκου	12
1.2 Στηρίξεις – Σύνδεσμοι	14
1.3 Εξισώσεις στατικής ισορροπίας – – Υπολογισμός των αντιδράσεων του δίσκου	19
1.4 Εσωτερικές δυνάμεις του δίσκου	20
2. Η Απλή Δοκός	
2.1 Γενικά	26
2.2 Επίλυση της δοκού	27
2.3 Διαφορικές εξισώσεις της δοκού – Χαρακτηριστικές ιδιότητες των διαγραμμάτων M, Q, N ευθύγραμμων δοκών	28
2.4 Αρχή της επαλληλίας	44
2.5 Συμμετρία – Αντισυμμετρία	46
2.6 Ομόλογη δοκός	48
3. Δικτυώματα	
3.1 Γενικά	53
3.2 Μόρφωση των επίπεδων δικτυωμάτων	54
3.3 Στατικότητα των δικτυωμάτων	57
3.4 Κινητότητα των δικτυωμάτων	57
3.5 Παραδοχές για την επίλυση των δικτυωμάτων	60
3.6 Μέθοδοι επίλυσης	61
4. Η Αρθρωτή Δοκός	
4.1 Συνεχής δοκός	84
4.2 Αρθρωτή δοκός	84

5. Πλαίσια

5.1 Γενικά	91
5.2 Απλά αμφιέριστα πλαίσια	94
5.3 Τριαρθρωτά πλαίσια	97
5.4 Στατικότητα και στερεότητα των πλαισίων	100
5.5 Σύνθετα πλαίσια	108

6. Καμπύλες Δοκοί – Τόξα

6.1 Καμπύλες δοκοί	112
6.2 Τόξα	118

7. Καλωδιακοί Φορείς

7.1 Γενικά	126
7.2 Επίλυση με την εφαρμογή των συνθηκών ισορροπίας	127
7.3 Επίλυση με τη βοήθεια της ομόλογης δοκού	131
7.4 Αρθρωτός συρμός ράβδων	136

8. Ενισχυμένες δοκοί

8.1 Γενικά	138
8.2 Επίλυση της ενισχυμένης δοκού	140

9. Γραμμές Επιρροής

9.1 Γενικά	157
9.2 Ορισμός των γραμμών επιρροής	158
9.3. Εύρεση των γραμμών επιρροής	159
9.4 Κινηματική μέθοδος	173
9.5 Χρησιμότητα των γραμμών επιρροής	200

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ**ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΙΣ ΙΣΟΣΤΑΤΙΚΩΝ ΦΟΡΕΩΝ**

Εισαγωγή	220
----------------	-----

10. Ενεργειακές Μέθοδοι

10.1 Γενικά	221
10.2 Έργο εξωτερικών δυνάμεων	221
10.3 Υπολογισμός των μετακινήσεων με την εφαρμογή της διατήρησης της ενέργειας	223

10.4	Υπολογισμός των μετακινήσεων με την εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων	234
10.5	Υπολογισμός ορισμένων ολοκληρωμάτων της μορφής $\int \varphi(x) \cdot \psi(x) dx$ με τη βοήθεια πινάκων	254
10.6	Καταναγκασμοί	255
10.7	Υπολογισμός των μετακινήσεων λόγω καταναγκασμών	258
10.8	Θεώρημα Castigliano	264
10.9	Θεώρημα Betti	270
10.10	Το σχήμα του παραμορφωμένου φορέα	274

11. Γεωμετρικές Μέθοδοι

11.1	Γενικά	278
11.2	Μέθοδος των ροπών	279
11.3	Μέθοδος Mohr – Ελαστική γραμμή	283
11.4	Ισοστατικοί φορείς με ελαστικές στηρίξεις	320

12. Προσεγγιστική Επίλυση Υπερστατικών Φορέων

12.1	Γενικά	322
12.2	Τρόπος επίλυσης	323
12.3	Πλαίσις	323
12.4	Δικτυώματα	331

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟ

ΥΠΕΡΣΤΑΤΙΚΟΙ ΦΟΡΕΙΣ

13. Μέθοδος Δυνάμεων (Μέθοδος Ευκαμψίας)

13.1	Γενικά	335
13.2	Το σκεπτικό της μεθόδου δυνάμεων	335
13.3	Δείκτες ευκαμψίας	339
13.4	Συμμετρία – Αντισυμμετρία	358
13.5	Εξίσωση των τριών ροπών	379
13.6	Μετακινήσεις υπερστατικών φορέων	391
13.7	Ελαστική γραμμή υπερστατικών φορέων	407
13.8	Γραμμές επιρροής (Γ.Ε)	417
13.9	Υπερστατικοί φορείς με ελαστικές στηρίξεις	454

14. Κλασική Μέθοδος Μετακινήσεων

14.1	Γενικά	456
------	--------------	-----

14.2	Κινηματική αοριστία (Γενικά)	457
14.3	Οι βαθμοί ελευθερίας της κλασικής μεθόδου μετακινήσεων	459
14.4	Σχηματισμός των ράβδων	462
14.5	Πρόσημα της μεθόδου μετακινήσεων	464
14.6	Δομικά στοιχεία των φορέων – Εξισώσεις ροπών - μετακινήσεων	465
14.7	Το σκεπτικό της μεθόδου μετακινήσεων	469
14.8	Συνεχείς δοκοί	476
14.9	Πάγια πλαίσια	478
14.10	Υπερπάγια πλαίσια	484
14.11	Κινητά πλαίσια	488
14.12	Καταναγκασμοί	525

15. Μητρώϊκή Διατύπωση της Μεθόδου Μετακινήσεων (Μέθοδος Δυσκαμψίας)

15.1	Υπολογισμός των μεγεθών έντασης	543
15.2	Υπολογισμός των μετακινήσεων	578
15.3	Υπολογισμός της ελαστικής γραμμής	578
15.4	Υπολογισμός των γραμμών επιρροής	578
15.5	Έλεγχος των αποτελεσμάτων	587
15.6	Παραλληλισμός των μεθόδων δυνάμεων και μετακινήσεων	589
15.7	Σχέση μεταξύ του μητρώου ευκαμψίας F και του μητρώου δυσκαμψίας K	591

16. Μέθοδος Cross

16.1	Γενικά	594
16.2	Πρόσημα της μεθόδου Cross	595
16.3	Δείκτης δυσκαμψίας δοκού	595
16.4	Συντελεστής μεταβίβασης δοκού	595
16.5	Συντελεστής κατανομής	596
16.6	Ανάπτυξη της μεθόδου Cross	598
16.7	Συνεχείς δοκοί	601
16.8	Πάγια και υπερπάγια πλαίσια	606
16.9	Κινητά πλαίσια	609

17. Εφαρμογές της Μεθόδου Μετακινήσεων στον Ηλεκτρονικό Υπολογιστή

17.1	Γενικά	629
17.2	Το σκεπτικό της εφαρμογής της άμεσης μεθόδου δυσκαμψίας στον Ηλεκτρονικό Υπολογιστή	629
17.3	Το ημιέυρος ταινίας του συστήματος εξισώσεων ισορροπίας	641

18. Φορείς στο Χώρο

18.1	Γενικά	648
18.2	Κίνηση στερεού σώματος στο χώρο	648
18.3	Στήριξη στερεού σώματος στο χώρο	651
18.4	Εξισώσεις στατικής ισορροπίας	653
18.5	Αντιδράσεις	655
18.6	Φορτία διατομής	655
18.7	Επίλυση χωρικών γραμμικών φορέων	657
18.8	Χωροδικτυώματα	674
18.9	Μέθοδος ευκαμψίας	679
18.10	Μέθοδος δυσκαμψίας	683
18.11	Σχάρες	694

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

I.	Πίνακες	708
II.	Θέματα εξεταστικών περιόδων στο Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Α.Π.Θ.	721
	Εφ. Στατική Ι: Ισοστατικοί φορείς (Ένταση – Μετακινήσεις – Ελαστική γραμμή)	723
	Εφ. Στατική II: Μέθοδος δυνάμεων	738
	Εφ. Στατική III: Μέθοδος μετακινήσεων	751

18

ΦΟΡΕΙΣ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

18.1 ΓΕΝΙΚΑ

Σχεδόν όλες οι κατασκευές που συναντώνται στην πράξη μπορούν να χαρακτηρισθούν σαν τρισδιάστατες, όχι μόνο γιατί ορθώνονται στο χώρο, αλλά και γιατί δέχονται γενικά φορτία τριών διευθύνσεων. Έτσι π.χ. και η απλή δοκός όταν δέχεται φορτία χώρου, μελετάται σαν ένας τρισδιάστατος φορέας.

Στους γραμμικούς φορείς του χώρου τα επιβεβλημένα φορτία και οι αντιδράσεις θεωρούμε ότι διέρχονται από τους κεντροβαρικούς άξονες των δοκών, όπως ακριβώς και στους γραμμικούς επίπεδους φορείς. Για τον λόγο αυτό στην επίλυση αρκεί να σχεδιάζεται ο κεντροβαρικός άξονάς τους.

Η μελέτη σε βάθος των επίπεδων γραμμικών φορέων που προηγήθηκε στο σύγγραμμα αυτό, χωρίς παράλληλα να μελετώνται και οι χωρικοί φορείς έγινε γιατί:

- Είναι απλούστεροι. Επιτρέπουν έτσι την ευκολότερη και σε βάθος κατανόηση και επίλυση των προβλημάτων.
- Οι νόμοι, οι αρχές και οι μέθοδοι της επίλυσης των στατικών προβλημάτων τους ισχύουν και για τους φορείς στο χώρο, αρκεί να ληφθούν υπόψη και τα επιπλέον μεγέθη που χαρακτηρίζουν τους φορείς αυτούς.
- Υπάρχουν φορείς στο χώρο που μπορούν υπό ορισμένες συνθήκες να αναλυθούν σ' ένα σύνολο επίπεδων φορέων, των οποίων η συνισταμένη στατική συμπεριφορά προσεγγίζει αυτήν των χωρικών φορέων. Η μελέτη των επίπεδων αυτών φορέων προφανώς είναι απλούστερη και θα μπορούσε ενδεχομένως να επιλεγεί στην περίπτωση που δε θα υπήρχε η βοήθεια του υπολογιστή.

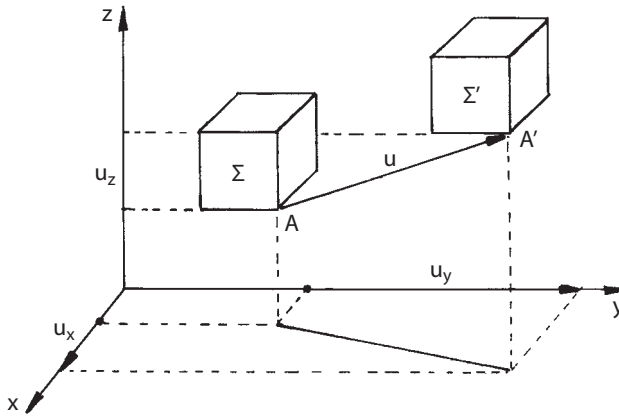
Στις παραγράφους του κεφαλαίου αυτού θα ορισθούν: η κίνηση και η στήριξη στερεού σώματος, οι αντιδράσεις και τα φορτία διατομής, οι εξισώσεις στατικής ισορροπίας, και θα δοθούν παραδείγματα επίλυσης χωρικών φορέων με όλες τις μεθόδους που αναπτύχθηκαν στους επίπεδους φορείς.

18.2 ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

Θα μελετηθούν κατ' αρχάς δύο θεμελιώδεις μετακινήσεις του στερεού σώματος από τη σύνθεση των οποίων προκύπτει η γενική του κίνηση.

α. Παράλληλη μετάθεση (μεταφορική κίνηση)

Κατ' αυτήν όλα τα σημεία του σώματος μετακινούνται κατά ίσα και παράλληλα διαστήματα και συνεπώς η κίνηση αυτή εκφράζεται από ένα διάνυσμα $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$.



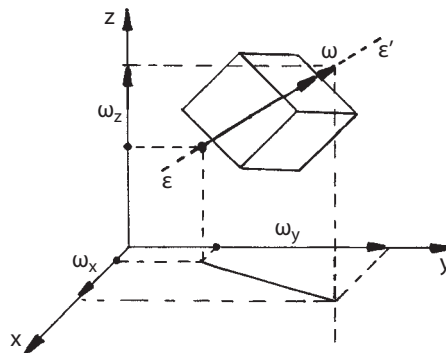
Σχ. 18.1

Στο σχ. 18.1 η μετακίνηση του σώματος από τη θέση Σ στη θέση Σ' έχει διάνυσμα μεταφοράς το $\vec{u} = \vec{AA'}$.

Οι βαθμοί ελευθερίας της μετακίνησης αυτής είναι οι τρεις συνιστώσες u_x, u_y, u_z .

β. Περιστροφή γύρω από έναν άξονα

Το στερεό σώμα του σχ. 18.2 περιστρέφεται γύρω από τον άξονα $\epsilon\epsilon'$. Μία δε περιστροφή κατά γωνία ω παριστάνεται μ' ένα διάνυσμα $\vec{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ στη διεύθυνση $\epsilon\epsilon'$ και αυτή τη γωνία τη διαγράφουν όλα τα σημεία του σώματος.



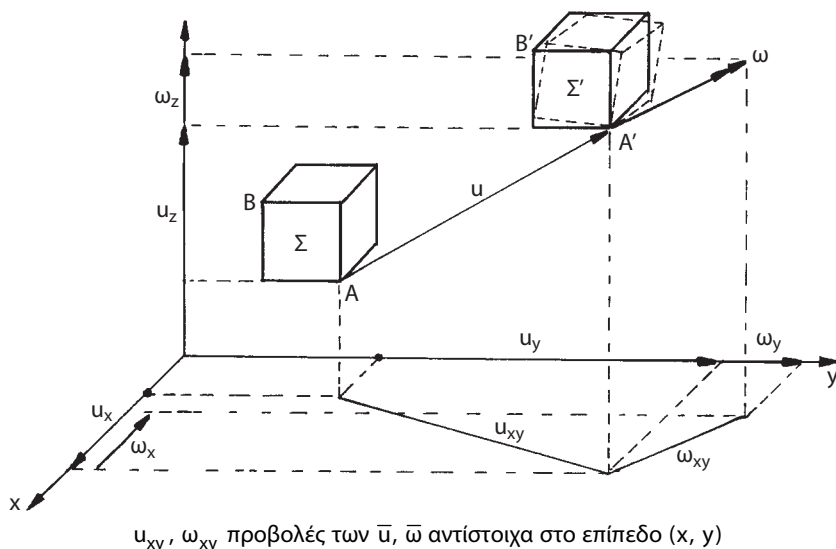
Σχ. 18.2

Οι βαθμοί ελευθερίας της κίνησης αυτής είναι οι συνιστώσες $\omega_x, \omega_y, \omega_z$.

Η ανάλυση της μεταφορικής ή της περιστροφικής κίνησης γύρω από άξονα σε τρεις συνιστώσες, σημαίνει ότι το στερεό σώμα μπορεί να βρεθεί στην τελική του θέση για κάθε μια κίνηση αντίστοιχα, διαγράφοντας πρώτα τη μετακίνηση u_x , ή ω_x , μετά τη μετακίνηση u_y ή ω_y και τέλος τη μετακίνηση u_z , ω_z .

γ. Γενική κίνηση

Η μετακίνηση ενός στερεού σώματος από την αρχική θέση Σ στην τελική Σ' μπορεί να γίνει με την εξής διαδικασία: (σχ. 18.3)



Σχ. 18.3

- Επιλέγεται αυθαίρετα ένα σημείο του A και το σώμα υφίσταται παράλληλη μετάθεση μέχρι το A να πέσει στο A' (διάνυσμα παράλληλης μετάθεσης $\vec{u} = \vec{AA'}$).
- Περιστρέφεται στη συνέχεια κατά γωνία ω γύρω από άξονα που διέρχεται από το A' μέχρι να συμπίψει στην τελική του θέση Σ' .

Αν στην παραπάνω διαδικασία επιλεγόταν ένα διαφορετικό σημείο B του σώματος, τότε η παράλληλη μετάθεση θα ήταν η $\vec{u} = \vec{BB'}$ και το διάνυσμα $\vec{\omega}$ που θα διερχόταν από το σημείο B' θα ήταν παράλληλο και ίσο μ' αυτό του σημείου A' . Από την επιλογή επομένως του σημείου του σώματος ως προς το οποίο αναφέρεται η μετακίνησή του, εξαρτώνται μόνο το σημείο εφαρμογής της \vec{u} και το σημείο εφαρμογής της $\vec{\omega}$.

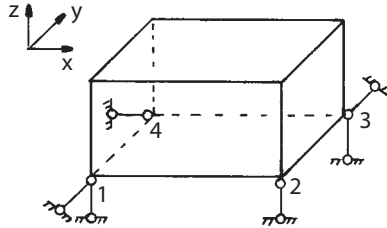
Συμπέρασμα: Οι ελευθερίες μετακίνησης του στερεού σώματος στο χώρο είναι έξι. Οι u_x, u_y, u_z του διανύσματος παράλληλης μετατόπισης \vec{u} και $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ του διανύσματος περιστροφής $\vec{\omega}$.

Το ότι οι ελευθερίες μετακίνησης ενός στερεού σώματος είναι έξι μπορεί να προκύψει και από την εξής διαπίστωση:

Η θέση ενός στερεού σώματος στο σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$ καθορίζεται από τη θέση τριών σημείων του, έστω A, B, Γ . Για τον προσδιορισμό δε της θέσης των σημείων αυτών απαιτούνται, για το A τρεις συντεταγμένες, για το B δύο γιατί απέχει γνωστή απόσταση από το A , και για το Γ μία γιατί είναι γνωστή η απόστασή του από το A και από το B . Επομένως οι ελευθερίες μετακίνησης είναι έξι.

18.3 ΣΤΗΡΙΞΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

Για να στηριχθεί ισοστατικά ένα στερεό σώμα θα πρέπει να παγιωθούν και οι έξι ελευθερίες μετακίνησής του. Αυτό μπορεί να γίνει απλά με έξι δεσμικές ράβδους όπως π.χ. στο σώμα του σχ. 18.4. Στη στήριξη αυτή παρατηρούμε τα εξής:



Σχ. 18.4

- Οι τρεις ράβδοι κατά τον άξονα z στα σημεία 1, 2, 3 απαγορεύουν τις μετακινήσεις u_z, ω_x, ω_y και επιτρέπουν τις μετακινήσεις u_y, u_x, ω_z . Μία επιπλέον ράβδος κατά τη διεύθυνση αυτή θα έκανε υπερορισμένη την απαγόρευση των μετακινήσεων αυτών και οι υπόλοιπες ράβδοι δεν θα επαρκούσαν για την απαγόρευση των υπόλοιπων μετακινήσεων.
- Η προσθήκη των ράβδων στο 1 και στο 3 κατά τη διεύθυνση y απαγορεύει τις μετακινήσεις u_y, ω_z . Οι ράβδοι αυτές είναι επίσης οι ελάχιστες κατά τη διεύθυνση αυτή για την απαγόρευση των μετακινήσεων αυτών.
- Η προσθήκη τέλος της ράβδου στο 4 κατά τη διεύθυνση x απαγορεύει και τη μετακίνηση u_x .

Οι έξι ράβδοι της ισοστατικής στήριξης μπορούν να συνδυασθούν κατά ποικίλους τρόπους στη στήριξη ενός χωρικού φορέα. Τους συνδυασμούς αυτούς τους βλέπεις κανείς στα διάφορα εφέδρανα στήριξης των κατασκευών.

Στο σχ. 18.5 υπάρχουν μερικά τέτοια είδη εφεδράνων στήριξης καθώς και εφεδράνων σύνδεσης των δοκών και σημειώνονται οι μετακινήσεις τις οποίες αυτά επιτρέπουν, καθώς και οι αντιδράσεις κατά τις διευθύνσεις των μετακινήσεων που απαγορεύουν.

Παράδειγμα φορέα ισοστατικής στήριξης είναι το πλαίσιο του σχ. 18.6 στο οποίο η κυλινδρική καμπτική άρθρωση στο Α και η σφαιρική δικινητή άρθρωση στο Β ασκούν τις έξι αντιδράσεις που φαίνονται στο σχήμα.

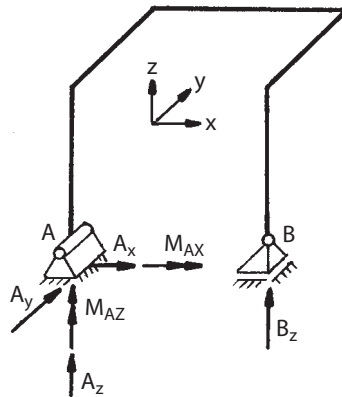
Οι κατασκευές είναι φορείς με πολύ μεγάλο συνήθως βαθμό στατικής αοριστίας. Το μονόροφο πλαίσιο π.χ. του σχ. 18.7α έχει $n = 6 \times 12 = 72$, όπως προκύπτει από την αναγωγή του σε ισοστατικούς προβόλους (σχ. 18.7β) με τις 12 τομές στους κλειστούς βρόγχους που ισοδυναμεί η καθεμία με την αφαίρεση έξι ράβδων.

Όπως στους επίπεδους φορείς, έτσι και στους χωρικούς, υπάρχουν περιπτώσεις διάταξης των ράβδων στήριξης οι οποίες επιτρέπουν απειροστή ή πεπερασμένη κινητικότητα, και για το λόγο αυτό πρέπει να αποφεύγονται. Αναφέρονται οι εξής περιπτώσεις:

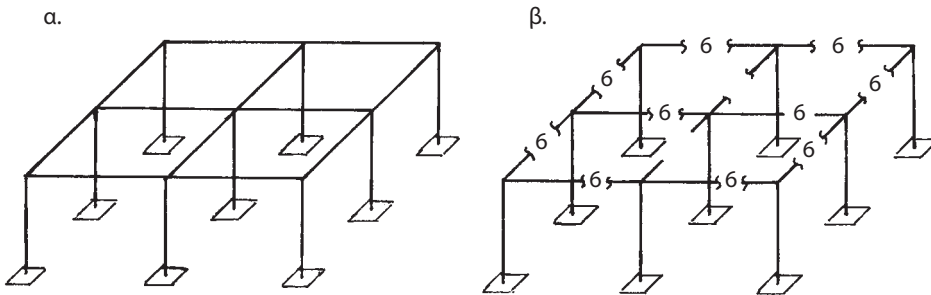
- α) Δεν επιτρέπεται οι άξονες των έξι ράβδων στήριξης να τέμνονται προεκτινόμενες σε μία ευθεία, γιατί τότε ο φορέας έχει απειροστή ή πεπερασμένη περιστροφή γύρω από την ευθεία αυτή.

Εφέδρανα - Κινητότητες	Συμβολισμός - Αντιδράσεις	Εφέδρανα - Κινητότητες	Συμβολισμός - Αντιδράσεις

Σχ. 18.5 Εφέδρανα στήριξης - μηχανισμοί σύνδεσης δοκών



Σχ. 18.6



Σχ. 18.7

β) Δεν επιτρέπεται για την παγίωση ορισμένων διευθύνσεων μετακίνησης ο αριθμός των ράβδων που χρησιμοποιείται να είναι μεγαλύτερος από τον ελάχιστο που απαιτείται, γιατί τότε οι υπόλοιπες ράβδοι δεν επαρκούν να παγιώσουν τις υπόλοιπες διευθύνσεις μετακίνησης. Για το λόγο αυτό:

- τέσσερις ράβδοι δεν επιτρέπεται να διέρχονται από το ίδιο σημείο γιατί τρεις αρκούν να παγιώσουν το σημείο αυτό
- τέσσερις ράβδοι δεν πρέπει να βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο γιατί από τους επίπεδους φορείς είναι γνωστό ότι τρεις ράβδοι αρκούν να παγιώσουν το επίπεδο αυτό
- τρεις ράβδοι που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο δεν πρέπει να τέμνονται στο ίδιο σημείο γιατί δύο ράβδοι αρκούν για την παγίωση του σημείου αυτού.

18.4 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Ένα στερεό σώμα στο οποίο επιδρά ένα σύνολο δυνάμεων, ισορροπεί (ή έχει ομαλή μεταφορική ή περιστροφική κίνηση) όταν σύμφωνα με τη θεμελιώδη αρχή της δυναμικής, ισχύουν ως προς οποιαδήποτε σύστημα συντεταγμένων οι εξισώσεις:

$$\Sigma \vec{F} = 0, \quad \Sigma \vec{M} = 0 \quad 18.1$$

Οι εξ. 18.1 αναφερόμενες στο σύστημα συντεταγμένων (σ.σ.) Οxyz αναλύονται

στις εξισώσεις

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0 \quad \Sigma M_x = 0 \quad \Sigma M_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0 \quad 18.2$$

οι οποίες εκφράζουν τις στατικές συνθήκες ισορροπίας του σώματος στο χώρο. Για τη διατύπωση των εξ. 18.2 σ' ένα στερεό σώμα δίδονται οι παρακάτω ορισμοί

Ροπή δύναμης ως προς σημείο (σχ. 18.8).

$$\text{Ορίζεται από τη σχέση} \quad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\text{της οποίας το μέτρο είναι} \quad M = F \cdot d$$

και είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν η \vec{F} και το σημείο O. Παριστάνεται με ένα διπλό βέλος, με φορά δεξιόστροφης περιστροφής Ροπή δύναμης ως προς άξονα (σχ. 18.9).

Αν F' είναι η προβολή της F σ' ένα επίπεδο π κάθετο στον άξονα $\varepsilon\varepsilon'$, τότε η αξονική ροπή της F ως προς τον άξονα $\varepsilon\varepsilon'$ ορίζεται από τη σχέση

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad 18.3$$

της οποίας το μέτρο είναι $M = F' \cdot d$.

Η \vec{M} είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο π και παριστάνεται με διπλό βέλος με φορά δεξιόστροφης περιστροφής. Προφανώς η \vec{M} είναι ανεξάρτητη από τη θέση του επιπέδου π .

Έστω τώρα η δύναμη \vec{F} η οποία αναφέρεται στο σ.σ. Oxyz (σχ. 18.10). Αυτή αναλύεται στις συνιστώσες F_x, F_y, F_z και η ροπή της \vec{F} στις αξονικές συνιστώσες M_x, M_y, M_z οι οποίες υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$M_x = F_z \cdot y - F_y \cdot z \quad M_y = F_x \cdot z - F_z \cdot x \quad M_z = F_y \cdot x - F_x \cdot y \quad 18.4$$

Στο σχ. 18.10 φαίνεται ο τρόπος υπολογισμού της M_z που είναι ίδιος και για τις M_x, M_y .

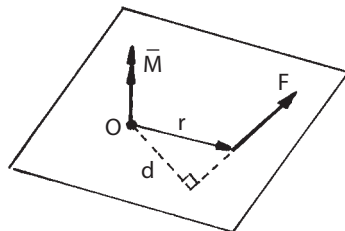
Αν επομένως σ' ένα σώμα ενεργεί μια ομάδα δυνάμεων $F_1, F_2 \dots F_n$ στα σημεία (x_i, y_i, z_i) , τότε τα συνιστάμενα φορτία εκφράζονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} F_{x\Sigma} &= \Sigma F_{xi} & F_{y\Sigma} &= \Sigma F_{yi} & F_{z\Sigma} &= \Sigma F_{zi} \\ M_{x\Sigma} &= \Sigma (F_{zi}y_i - F_{yi}z_i) & M_{y\Sigma} &= \Sigma (F_{xi}z_i - F_{zi}x_i) & M_{z\Sigma} &= \Sigma (F_{yi}x_i - F_{xi}y_i) \end{aligned} \quad 18.5$$

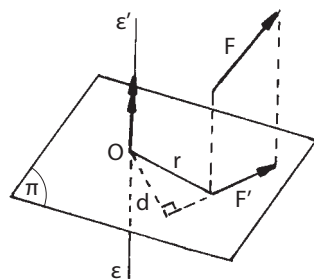
από τις οποίες προκύπτουν οι στερεοστατικές συνθήκες ισορροπίας

$$\begin{aligned} \Sigma F_{x\Sigma} &= 0 & \Sigma F_{y\Sigma} &= 0 & \Sigma F_{z\Sigma} &= 0 \\ \Sigma (F_{zi}y_i - F_{yi}z_i) &= 0 & \Sigma (F_{xi}z_i - F_{zi}x_i) &= 0 & \Sigma (F_{yi}x_i - F_{xi}y_i) &= 0 \end{aligned} \quad 18.6$$

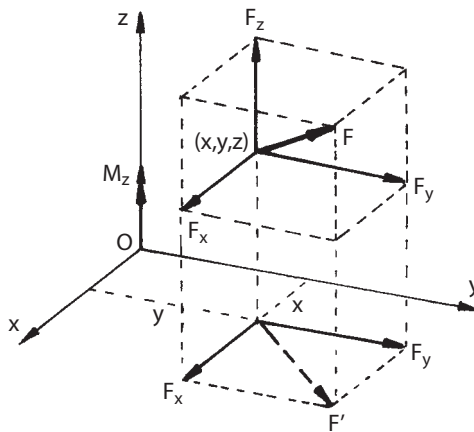
οι οποίες ισχύουν ως προς οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων.



Σχ. 18.8



Σχ. 18.9



Σχ. 18.10

Στις εξ. 18.6 είναι δυνατόν να αντικατασταθεί μία, δύο ή και τρεις εξισώσεις δυνάμεων με αντίστοιχες εξισώσεις ροπών, χωρίς να είναι δυνατό να συμβεί το αντίθετο, και να έχουμε έτσι τέσσερις, πέντε ή έξι εξισώσεις ροπών, υπό την προϋπόθεση στην τελευταία περίπτωση να μην υπάρχει ευθεία που να τέμνει και τους έξι άξονές τους.

18.5 ΑΝΤΙΔΡΑΣΕΙΣ

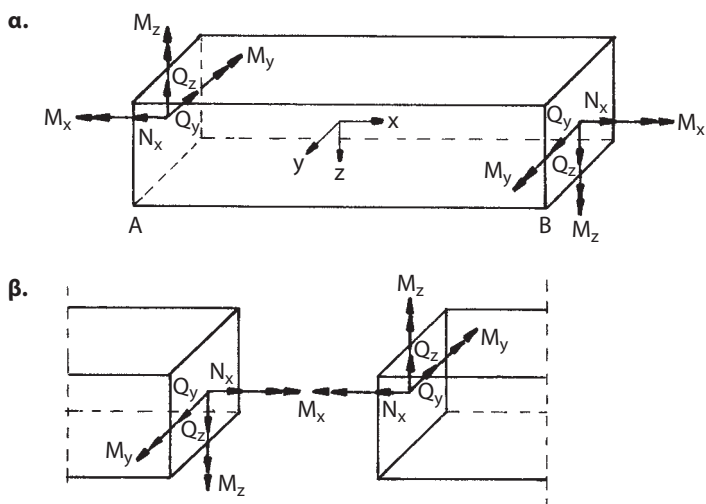
Επιλέγεται ένα σ.σ. Oxyz για ολόκληρο το φορέα (καθολικό σύστημα συντεταγμένων) (κ.σ.σ.) και τίθενται στις στηρίξεις οι αντιδράσεις τις οποίες αυτές μπορούν να παραλάβουν, κατά τις διευθύνσεις των αξόνων του συστήματος αναφοράς. Για έναν ισοστατικό φορέα οι αντιδράσεις είναι έξι, όσες και οι συνθήκες ισορροπίας που μπορούν να διατυπωθούν (εξ. 18.6) και από την επίλυσή τους υπολογίζονται οι άγνωστες αντιδράσεις.

18.6 ΦΟΡΤΙΑ ΔΙΑΤΟΜΗΣ

Έστω η δοκός AB του σχ. 18.11α η οποία κόπηκε από ένα γραμμικό χωρικό φορέα. Για να σχεδιασθεί το διάγραμμα ελευθέρου σώματος, ορίζεται γι' αυτήν ένα σύστημα συντεταγμένων (τοπικό σύστημα συντεταγμένων) (τ.σ.σ.) και τίθενται τα φορτία διατομής κατά την διεύθυνση των αξόνων του. Η θετική φορά των φορτίων διατομής της δεξιάς διατομής επιλέγεται να είναι ίδια μ' αυτήν του συστήματος αναφοράς, ενώ των φορτίων διατομής της αριστερής διατομής η αντίθετη.

Τα φορτία διατομής διακρίνονται σε αξονικά N_x , διατμητικά Q_y, Q_z , ροπές στρέψης $M_x = T$ και ροπές κάμψης M_y, M_z , δηλ. έξι τον αριθμό.

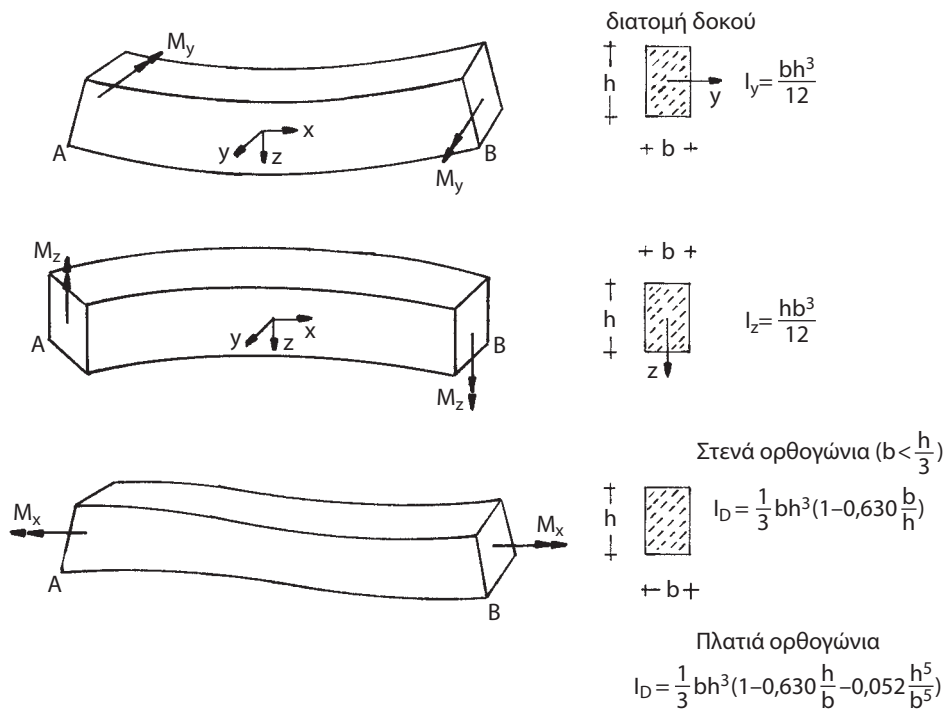
Ως προς την επιλογή του σ.σ. Oxyz της δοκού AB του σχ. 18.11 πρέπει να πούμε ότι έγινε με κριτήριο η θετική φορά των N_x, Q_z, M_y να είναι ίδια μ' αυτή που ορίστηκε στους επίπεδους γραμμικούς φορείς. Έτσι η ίνα αναφοράς για τα μεγέθη Q_z, M_y είναι στην κάτω επιφάνεια της δοκού (αυτή που δείχνει το βέλος του άξονα z). Επίσης τα μεγέθη Q_y, M_z για το σύστημα αυτό συντεταγμένων έχουν την ίνα αναφοράς



Σχ. 18.11 Φορτία διατομής

στην πίσω πλευρά της δοκού (αντίθετη αυτής που δείχνει το βέλος του άξονα y).

Στο σχ. 18.11 β φαίνονται επίσης τα θετικά φορτία διατομής σε μία τομή i της δοκού AB.



Σχ. 18.12 Παραμορφώσεις δοκού λόγω M_1 , M_2 , M_x

Μετά τον ορισμό των διευθύνσεων και των προσήμων των φορτίων διατομής μπορούν να διατυπωθούν για τη δοκό AB οι συνθήκες ισορροπίας

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0 \quad \Sigma M_x = 0 \quad \Sigma M_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0$$

από τις οποίες υπολογίζονται τα άγνωστα φορτία διατομής.

Τα φορτία διατομής μιας δοκού ενός φορέα του χώρου προφανώς δεν μπορούν να αναφέρονται όπως στους επίπεδους φορείς σ' ένα καθολικό σύστημα συντεταγμένων παρά μόνο σ' ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων. Έτσι για κάθε μία δοκό θα πρέπει να ορίζεται ένα τ.σ.σ. με βάση το οποίο θα ορίζονται τα φορτία διατομής και θα καθίσταται δυνατή η διατύπωση των συνθηκών ισορροπίας.

Στο σχήμα 18.12 φαίνεται η παραμόρφωση της δοκού AB λόγω καθαρής κάμψης από M_y , λόγω καθαρής κάμψης από M_z και λόγω στρέψης από M_x .

18.7 ΕΠΙΛΥΣΗ ΧΩΡΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΦΟΡΕΩΝ

Οι μέθοδοι επίλυσης των επίπεδων γραμμικών φορέων εφαρμόζονται και στην επίλυση των χωρικών γραμμικών φορέων αρκεί να λαμβάνονται υπόψη τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των φορέων αυτών. Έτσι εκτός από τα φορτία διατομής Q_z, M_y, N_x των επίπεδων φορέων πρέπει να υπολογίζονται και τα Q_y, M_z, M_x . Στον πίνακα 10.3 των μετακινήσεων των επίπεδων φορέων αν προστεθούν οι αντίστοιχοι όροι των φορτίων αυτών προκύπτει ο πίνακας 18.1.

Πίνακας 18.1

Μετακινήσεις ισοστατικών χωρικών φορέων	
1) Λόγω εξωτερικής φόρτισης	$\delta_{ip} = \int \frac{M_{y,p} M_{y,1}}{EI_y} ds + \int \frac{M_{z,p} M_{z,1}}{EI_z} ds + \int \frac{M_{x,p} M_{x,1}}{EI_D} ds + K_Q \int \frac{Q_{y,p} Q_{y,1}}{GF} ds +$ $+ K_Q \int \frac{Q_{z,p} Q_{z,1}}{GF} ds + \int \frac{N_{x,p} N_{x,1}}{EF} ds + \sum \frac{S_{r,p} S_{r,1} l_r}{EF_r}$
2) Λόγω θερμοκρασιακών μεταβολών	$\delta_{i,\theta} = \int M_{y,1} \frac{d\Delta t}{h_z} ds + \int M_{z,1} \frac{a\Delta t}{h_y} ds + \int N_{x,1} a t ds + \sum S_{r,1} a t_r l_r$
3) Λόγω διαφορών συναρμογής (ρήκτη)	$\delta_{i,k} = \sum_j M_{jy,1} \Delta \varphi_{jy} + M_{jz,1} \Delta \varphi_{jz} + Q_{jy,1} \Delta h_{jy} + Q_{jz,1} \Delta h_{jz} + N_{jx,1} \Delta s_{jx} + \sum S_{r,1} \Delta l_r$
4) Λόγω υποχώρησης στηρίξεων	$\delta_{i,w} = - \sum R_{jx,1} u_{jx} + R_{jy,1} \cdot u_{jy} + R_{jz,1} u_{jz} + M_{jy,1} \varphi_{jy} + M_{jz,1} \varphi_{jz}$

Στα απλά παραδείγματα που ακολουθούν, επιλύονται ισοστατικοί χωρικοί φορείς και υπερστατικοί χωρικοί φορείς με τη μέθοδο ευκαμψίας και τη μέθοδο δυσκαμψίας.

Η σύντομη ανάπτυξη του κεφαλαίου αυτού δεν έχει σαν στόχο να αποκτήσει ο σπουδαστής την ικανότητα επίλυσης τέτοιων φορέων η οποία είναι υπόθεση του υπολογιστή, αλλά να γνωρίσει τα χαρακτηριστικά τους.

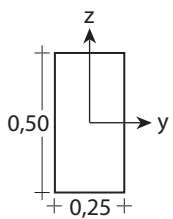
Παράδειγμα 18.1: Στο φορέα του σχ. 18.13 να βρεθούν:

- Τα διαγράμματα των φορτίων διατομής Q_y, Q_z, M_x, M_y, M_z
- Η ελαστική γραμμή κατά τη διεύθυνση z και η ελαστική γραμμή κατά τη διεύθυνση y . (Να ληφθούν υπόψη παραμορφώσεις μόνο λόγω ροπών).
- Η στροφή της διατομής της κάθετης στον άξονα x στο Β έναντι της διατομής της κάθετης στον άξονα x στο Α.
- Η γραμμή επιρροής $[M_{yA}]$ για κίνηση φορτίου $P_z = 1$ στο φορέα ABC, και η γραμμή επιρροής $[M_{zA}]$ για κίνηση φορτίου $P_y = 1$ στο φορέα ABC.

Δεδομένα: Διατομή δοκών $0,25 \times 0,50\text{m}$, $E = 20 \cdot 10^6 \text{ KN/m}^2$, $\nu = 0,25$.

Για την επίλυση υπολογίζονται τα παρακάτω μεγέθη.

Διατομή δοκών



$$EI_y = 20 \cdot 10^6 \frac{0,25 \cdot 0,50^3}{12} = 52 \cdot 10^3 \text{ KN} \cdot \text{m}^2$$

$$EI_z = 20 \cdot 10^6 \frac{0,50 \cdot 0,25^3}{12} = 13 \cdot 10^3 \text{ KN} \cdot \text{m}^3$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{20 \cdot 10^6}{2(1+0,25)} = 8 \cdot 10^6 \text{ KN/m}^2$$

$$I_D = \frac{1}{3}bh^3 \left(1 - 0,630 \frac{0,50}{0,25} + 0,052 \frac{0,50^5}{0,25^5} \right) = 14,6 \cdot 10^{-3} \quad (\text{βλέπε σελ. 239})$$

$$GI_D = 8 \cdot 10^6 \cdot 14,6 \cdot 10^{-3} = 116,8 \cdot 10^3$$

$$GF = 125 \cdot 10^3$$

α) Ο φορέας είναι ένας πρόβολος στο χώρο σε σχήμα γάμα και είναι ισοστατικός. Σχεδιάστηκε δε με όλες του τις διαστάσεις χάριν εποπτείας.

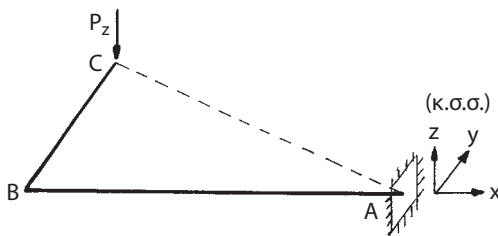
Αντιδράσεις

Ορίζεται το κ.σ.σ. του σχ. 18.13, τίθενται στην πάκτωση Α οι αντιδράσεις τις οποίες αυτή μπορεί να παραλάβει και διατυπώνονται οι εξισώσεις ισορροπίας

$$\begin{array}{lll} \Sigma F_x = 0 & N_{xA} + P_x = 0 & \Rightarrow N_{xA} = -10 \\ \Sigma F_y = 0 & Q_{yA} + P_y = 0 & \Rightarrow Q_{yA} = -10 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 \Sigma F_z = 0 & q_{zA} - P_z = 0 & \Rightarrow Q_{zA} = 20 \\
 \Sigma M_{xA} = 0 & M_{xA} - P_z \cdot 1,2 = 0 & \Rightarrow M_{xA} = 24 \\
 \Sigma M_{yA} = 0 & M_{yA} - P_z \cdot 3 = 0 & \Rightarrow M_{yA} = 60 \\
 \Sigma M_{zA} = 0 & M_{zA} - P_x \cdot 1,2 - P_y \cdot 3 = 0 & \Rightarrow M_{zA} = 42
 \end{array}$$

Παρατήρηση: Η ροπή της P_z ως προς A ισούται με $\bar{M}_A = \overline{AC} \times \bar{P}_z$ και είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν η P_z και το σημείο A . Αλλά επειδή $\overline{AC} = (\bar{x}_c + \bar{y}_c)$ είναι



$$\begin{aligned}
 \bar{M}_A &= (\bar{x}_c + \bar{y}_c) \times \bar{P}_z = \\
 &= \bar{x}_c \times \bar{P}_z + \bar{y}_c \times \bar{P}_z = -\bar{M}_{yA} - \bar{M}_{xA} \\
 \text{όπου } |\bar{M}_{xA}| &= y_c P_z = 1,2 P_z \text{ επειδή } P_z \perp \bar{y}_c \\
 |\bar{M}_{yA}| &= x_c P_z = 3 P_z \text{ επειδή } \bar{P}_z \perp \bar{x}_c.
 \end{aligned}$$

Οι τιμές των M_{xA} , M_{yA} προκύπτουν εύκολα και χωρίς την παραπάνω ανάλυση και γι' αυτό μπορούν να τίθενται αμέσως στις συνθήκες ισορροπίας.

Φορτία διατομής

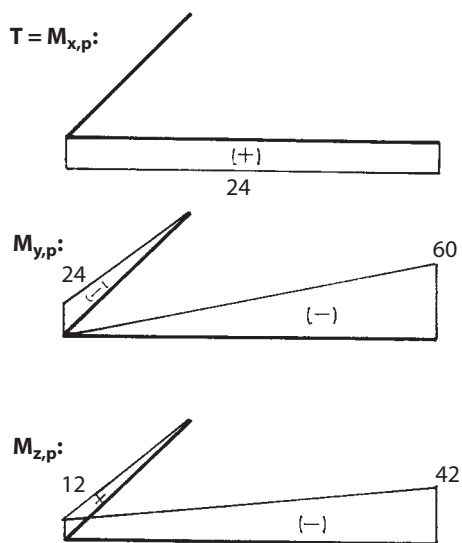
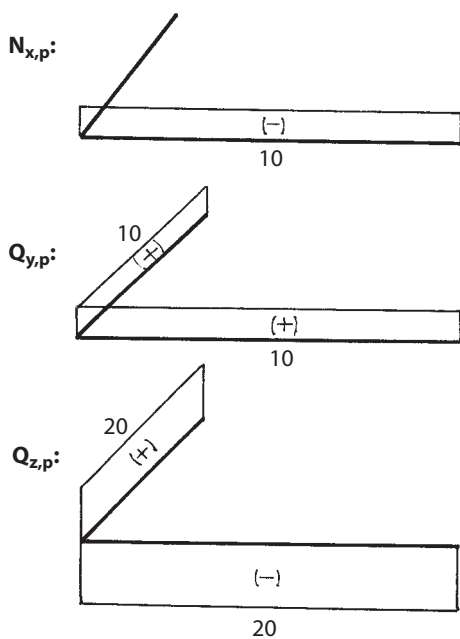
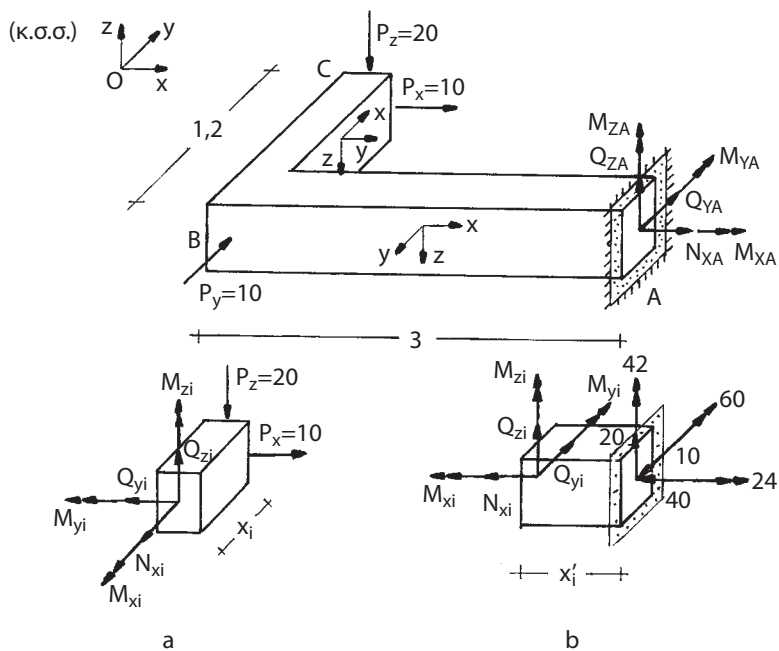
Επιλέγονται τα τ.σ.σ. των δοκών AB και BC που φαίνονται στο σχ. 18.13.

Δοκός BC: Από το διάγραμμα ελευθέρου σώματος που προκύπτει από μία τομή σε απόσταση x_i από το C (σχ 18.13α) προκύπτει:

$$\begin{array}{lll}
 \Sigma F_x = 0 & N_{xi} = 0 \\
 \Sigma F_y = 0 & Q_{yi} - P_x = 0 & Q_{yi} = 10 \\
 \Sigma F_z = 0 & Q_{zi} - P_z = 0 & Q_{zi} = 20 \\
 \Sigma M_{xi} = 0 & M_{xi} = 0 \\
 \Sigma M_{yi} = 0 & M_{yi} + P_z x_i = 0 & M_{yi} = -P_z x_i \quad (x_i = 1,2 \quad M_{yi} = -20 \cdot 1,2 = -24) \\
 \Sigma M_{zi} = 0 & M_{zi} - P_x x_i = 0 & M_{zi} = P_x x_i \quad (x_i = 1,2 \quad M_{zi} = 10 \cdot 1,2 = 12)
 \end{array}$$

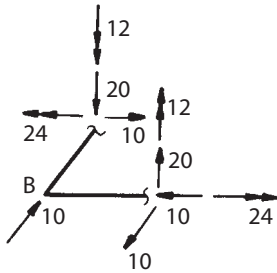
Δοκός AB: Από το διάγραμμα ελευθέρου σώματος του σχ. 18.13β προκύπτει

$$\begin{array}{lll}
 \Sigma F_x = 0 & N_{xi'} + 10 = 0 \\
 \Sigma F_y = 0 & Q_{yi'} - 10 = 0 \\
 \Sigma F_z = 0 & Q_{zi'} + 20 = 0 \\
 \Sigma M_{xi'} = 0 & M_{xi'} - 24 = 0 \\
 \Sigma M_{yi'} = 0 & M_{yi'} + 60 - 20x_i' = 0 & M_{yi'} = -60 + 20x_i' \quad (x_i' = 3 \quad M_{yi'}^\delta = 0) \\
 \Sigma M_{zi'} = 0 & M_{zi'} + 42 - 10x_i' = 0 & M_{zi'} = -42 + 10x_i' \quad (x_i' = 3 \quad M_{zi'}^\delta = -12)
 \end{array}$$



Σχ. 18.13

Για τον έλεγχο της ορθότητας της επίλυσης εξετάζεται η ισορροπία κόμβου B:



$$\Sigma F_x = 10 - 10 = 0 \quad \Sigma M_x = 24 - 24 = 0$$

$$\Sigma F_y = 10 - 10 = 0 \quad \Sigma M_y = 0$$

$$\Sigma F_z = 20 - 20 = 0 \quad \Sigma M_z = 12 - 12 = 0$$

Τα διαγράμματα των φορτίων διατομής υπάρχουν στο σχ. 18.13.

β) Στους επίπεδους γραμμικούς φορείς είδαμε ότι με τη μέθοδο Mohr υπολογίζονται κάθετες μετακινήσεις καθώς και η ελαστική γραμμή των μετακινήσεων αυτών. Στους χωρικούς φορείς, με τη μέθοδο Mohr μπορεί να υπολογισθεί η ελαστική γραμμή κατά τη διεύθυνση z λόγω των ροπών M_y , καθώς και η ελαστική γραμμή κατά τη διεύθυνση y λόγω των ροπών M_z . Λόγω των ροπών M_x υπολογίζεται η στροφή μιας διατομής έναντι μιας άλλης.

Ελαστική γραμμή κατά τη διεύθυνση z .

Για τον υπολογισμό των βυθίσεων u_{zB} , u_{zC} υπολογίζονται στο σχ. 18.14 τα διαγράμματα ροπών τους για μοναδιαίο φορτίο στο B και C αντίστοιχα οπότε από την εξίσωση 1 του πίνακα 18.1 προκύπτει:

$$u_{zB} = \int \frac{M_{y,p} M_{y,1}}{EI_y} ds = \frac{1}{52 \cdot 10^3} \frac{1}{3} (-60)(-3) \cdot 3 = 3,461 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$u_{zC} = \int \frac{M_{y,p} M_{y,1}}{EI_y} ds + \int \frac{M_{x,p} M_{x,1}}{GI_D} ds = \frac{1}{52 \cdot 10^3} \left[\frac{1}{3} (-24)(-1,2) \cdot 1,2 + \frac{1}{3} (-60)(-3) \cdot 3 \right] + \frac{1}{116,8 \cdot 10^3} 24 \cdot 1,2 \cdot 3 = 3,683 \cdot 10^{-3} + 0,740 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 4,423 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

Δοκός BC (ελαστικό φορτίο $M_{y,p} / EI_y$)

$$u_z = 3,461 \cdot 10^{-3} \frac{x'}{l} + 4,423 \cdot 10^{-3} \frac{x}{l} + \frac{1,2(-24)}{6EI_y} \omega_D' =$$

$$= \left(3,461 \frac{x'}{l} + 4,423 \frac{x}{l} - 0,111 \omega_D' \right) \cdot 10^{-3}$$

$$x/l = 0,25 \quad u_z = 3,461 \cdot 0,75 + 4,423 \cdot 0,25 - 0,111 \cdot 0,3281 \cdot 10^{-3} = 3,665 \cdot 10^{-3}$$

$$x/l = 0,50 \quad u_z = (3,461 \cdot 0,50 + 4,423 \cdot 0,50 - 0,111 \cdot 0,3750) \cdot 10^{-3} = 3,900 \cdot 10^{-3}$$

$$x/l = 0,75 \quad u_z = (3,461 \cdot 0,25 + 4,423 \cdot 0,75 - 0,111 \cdot 0,2344) \cdot 10^{-3} = 4,156 \cdot 10^{-3}$$

Δοκός ΒΑ: (ελαστικό φορτίο $M_{y,p}/EI_y$)

$$u_z = 3,461 \cdot 10^{-3} \frac{x'}{l} + \frac{3^2(-60)}{6EI_y} \omega_D = \left(3,461 \frac{x'}{l} - 1,731 \omega_D \right) \cdot 10^{-3}$$

$$x/l = 0,25 \quad u_z = (3,461 \cdot 0,75 - 1,731 \cdot 0,2344) \cdot 10^{-3} = 1,325 \cdot 10^{-3}$$

$$x/l = 0,50 \quad u_z = (3,461 \cdot 0,50 - 1,731 \cdot 0,3750) \cdot 10^{-3} = 1,081 \cdot 10^{-3}$$

$$x/l = 0,75 \quad u_z = (3,461 \cdot 0,25 - 1,731 \cdot 0,3281) \cdot 10^{-3} = 0,297 \cdot 10^{-3}$$

Ελαστική γραμμή κατά τη διεύθυνση y.

$$u_{yB} = \int \frac{M_{z,p} M_{z,1}}{EI_z} ds = \frac{1}{13 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{1}{6} [(-3)(-12 - 2 \cdot 42)] \cdot 3 = 11,077 \cdot 10^{-3}$$

$$u_{yC} = \int \frac{M_{z,p} M_{z,1}}{EI_z} ds = \frac{1}{13 \cdot 10^3} \cdot \left[\frac{1}{6} 12(-1,2)1,2 + \frac{1}{2} 12(-12 - 42)3 \right] = -7,92 \cdot 10^{-3}$$

Δοκός ΒΑ (ελαστικό φορτίο $M_{z,p}/EI_z$)

$$u_y = 11,077 \cdot 10^{-3} \frac{x'}{l} + \frac{3^2(-12)}{2EI_z} \omega_R + \frac{3^2(-30)}{6EI_z} \omega_D =$$

$$= \left(11,077 \frac{x'}{l} - 4,154 \omega_R - 3,461 \omega_D \right) \cdot 10^{-3}$$

$$x/l = 0,25 \quad u_y = (11,077 \cdot 0,75 - 4,154 \cdot 0,1875 - 3,461 \cdot 0,2344) \cdot 10^{-3} = 6,718 \cdot 10^{-3}$$

$$x/l = 0,50 \quad u_y = (11,077 \cdot 0,50 - 4,154 \cdot 0,2500 - 3,461 \cdot 0,3750) \cdot 10^{-3} = 3,202 \cdot 10^{-3}$$

$$x/l = 0,75 \quad u_y = (11,077 \cdot 0,25 - 4,154 \cdot 0,2100 - 3,461 \cdot 0,3570) \cdot 10^{-3} = 0,661 \cdot 10^{-3}$$

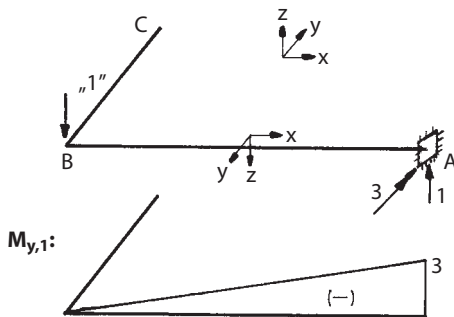
Δοκός ΒC (ελαστικό φορτίο $M_{z,p}/EI_z$)

$$u_y = -7,92 \cdot 10^{-3} \frac{x}{l} + \frac{1,2^2 \cdot 12}{6EI_z} \omega'_D + \left(-7,92 \frac{x}{l} + 0,221 \cdot \omega'_D \right) \cdot 10^{-3}$$

$$x/l = 0,25 \quad u_y = (-7,92 \cdot 0,25 + 0,221 \cdot 0,3281) \cdot 10^{-3} = -1,907 \cdot 10^{-3}$$

$$x/l = 0,50 \quad u_y = (-7,92 \cdot 0,50 + 0,221 \cdot 0,3750) \cdot 10^{-3} = -3,877 \cdot 10^{-3}$$

$$x/l = 0,75 \quad u_y = (-7,92 \cdot 0,75 + 0,221 \cdot 0,2344) \cdot 10^{-3} = -5,888 \cdot 10^{-3}$$

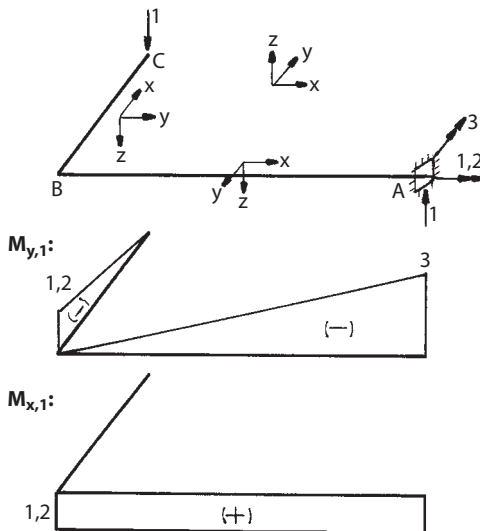
Υπολογισμός της u_{zB} 

Αντιδράσεις

$$\Sigma F_z = 0 \quad A_z - 1 = 0 \quad \Rightarrow A_z = 1$$

$$\Sigma M_{yA} = 0 \quad M_{yA} - 1 \cdot 3 = 0 \quad \Rightarrow M_{yA} = 3$$

$$\text{Στο τοπικό σ.σ. είναι} \quad M_{yA} = -3$$

Υπολογισμός της u_{zC} 

Αντιδράσεις

$$\Sigma F_z = 0 \quad A_z - 1 = 0 \quad \Rightarrow A_z = 1$$

$$\Sigma M_x = 0 \quad M_{xA} - 1 \cdot 1,2 = 0 \quad \Rightarrow M_{xA} = 1,2$$

$$\Sigma M_y = 0 \quad M_{yA} - 1 \cdot 3 = 0 \quad \Rightarrow M_{yA} = 3$$

Φορτία διατομής

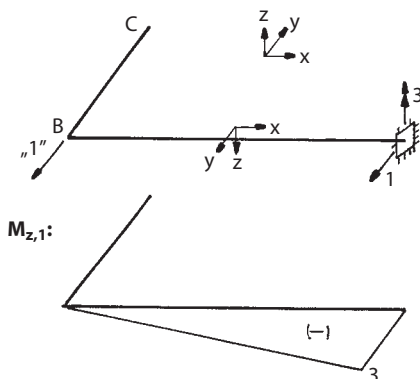
Δοκός (BC)

$$\Sigma M_{yB} = 0 \quad M_{yB} + 1 \cdot 1,2 = 0 \quad M_{yB} = -1,2$$

Δοκός (BA)

$$\Sigma M_x = 0 \quad M_{xB} - 1,2 = 0 \quad \Rightarrow M_{xB} = 1,2$$

$$\Sigma M_{yB} = 0 \quad M_{yB} + 3 - 1 \cdot 3 = 0 \quad \Rightarrow M_{yB} = 0$$

Υπολογισμός της u_{yB} 

Αντιδράσεις

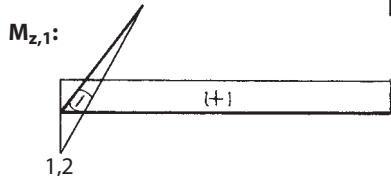
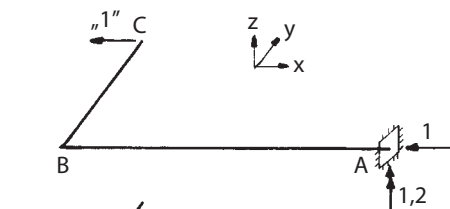
$$\Sigma M_{zA} = 0 \quad M_{zA} - 1 \cdot 3 = 0 \quad \Rightarrow M_{zA} = 3$$

Φορτία διατομής

$$\Sigma M_{zB} = 0 \quad M_{zB} + 3 - 1 \cdot 3 = 0 \quad \Rightarrow M_{zB} = 0$$

$$\text{Για το τοπικό σ.σ. είναι:} \quad M_{zA} = -3$$

Σχ. 18.14

Υπολογισμός της u_{yC} 

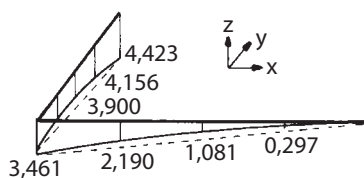
Αντιδράσεις

$$\Sigma M_z = 0 \quad M_{zA} - 1 \cdot 1,2 = 0 \Rightarrow M_{zA} = 1,2$$

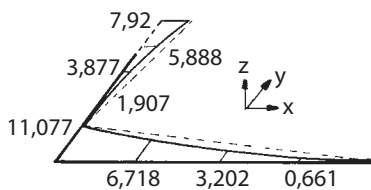
Φορτία διατομής

$$\Sigma M_{z,B} = 0 \quad M_{z,B} - 1 \cdot 1,2 = 0 \Rightarrow M_{zB} = 1,2$$

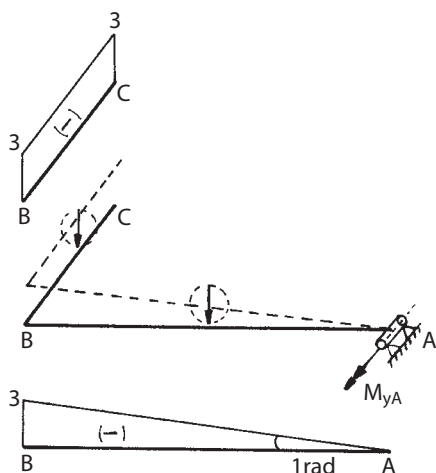
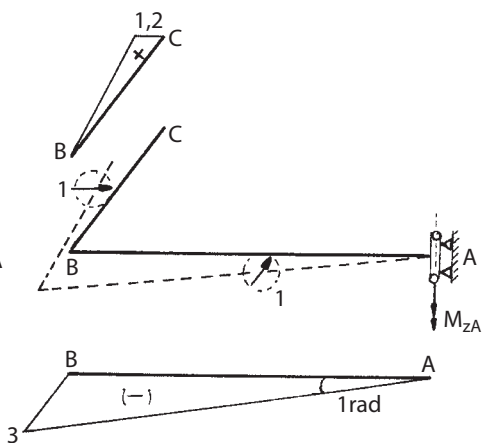
Ε.Γ. κατά τη διεύθυνση z



Ε.Γ. κατά τη διεύθυνση y



Σχ. 18.14 (συνέχεια)

Γ.Ε. $[M_{yA}]$ Γ.Ε. $[M_{zA}]$ 

Σχ. 18.15

γ) Σύμφωνα με την εξ. 10.52 (σελ. 239) είναι

$$\theta_{T,B} = \int_0^3 \frac{T}{GI_D} dx = \frac{24 \cdot 3}{116,8 \cdot 10^3} = 0,616 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

δ) Οι απλές αυτές γραμμές επιρροής προκύπτουν εύκολα από την εύρεση των τιμών τους για μοναδιαίο φορτίο στο C και στο B. Εδώ θα υπολογισθούν με την κινηματική μέθοδο για να εφαρμοσθεί η μέθοδος αυτή σ' ένα χωρικό φορέα.

– $[M_{yA}]$: (φορτίο $P_z = 1$ κινείται στο φορέα ABC)

Αφαιρείται από την πάκτωση A μία ράβδος έτσι που να προκύψει κυλινδρική άρθρωση η οποία δεν παραλαμβάνει ροπές M_{yA} ($M_{yA} = 0$), και προκαλείται αρνητική μοναδιαία μετακίνηση ($\Delta\varphi_{yA} = -1$).

Η γραμμή των βυθίσεων της δοκού AB κατά τη διεύθυνση z του τοπικού συστήματος αναφοράς της, καθώς και η γραμμή των βυθίσεων της δοκού BC κατά τη διεύθυνση z του τοπικού συστήματος αναφοράς της, συμπίπτουν με την $[M_{yA}]$ (σχ. 18.15).

– $[M_{zA}]$: (φορτίο $P_y = 1$ κινείται στο φορέα ABC)

Αφαιρείται από την πάκτωση A μία ράβδος έτσι που να προκύψει κυλινδρική άρθρωση η οποία δεν παραλαμβάνει ροπές M_{zA} ($M_{zA} = 0$) και προκαλείται αρνητική μοναδιαία μετακίνηση.

Η γραμμή των βυθίσεων της δοκού AB κατά τη διεύθυνση y του τ.σ.σ. καθώς και η γραμμή των βυθίσεων της δοκού BC κατά τη διεύθυνση y του τ.σ.σ. συμπίπτουν με την $[M_{zA}]$ (σχ. 18.15).

Παράδειγμα 18.2: Για το πλαίσιο του σχ. 18.16 να βρεθούν

- Τα διαγράμματα των φορτίων διατομής
- Η ελαστική γραμμή της δοκού DE κατά την διεύθυνση y .
- Η στροφή φ_z του κόμβου E.

(Να ληφθούν υπόψη μετακινήσεις μόνο λόγω ροπών για τα ερωτήματα α, και β).

Δεδομένα:

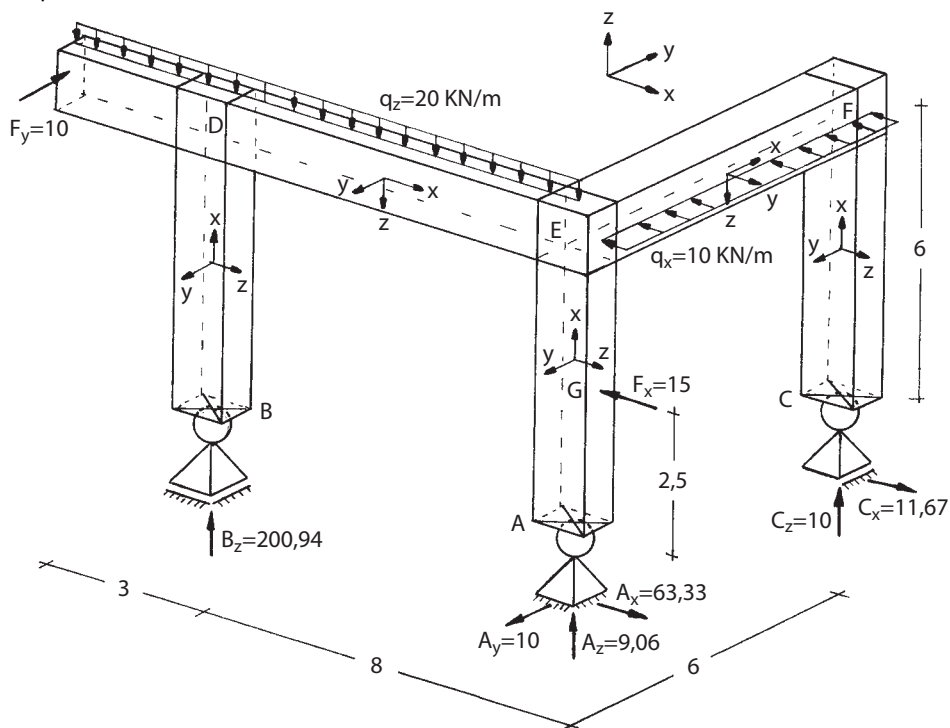
$$EI_y = 120 \cdot 10^3 \text{ KN} \cdot \text{m}^2, EI_z = 50 \cdot 10^3 \text{ KN} \cdot \text{m}^2, GI_D = 90 \cdot 10^3 \text{ KN} \cdot \text{m}^2, GF = 140 \cdot 10^3 \text{ KN}.$$

Αντιδράσεις:

Ο φορέας είναι ισοστατικός. Ορίζεται το κ.σ.σ. του σχ. 18.16, φέρονται τα διανύσματα των αντιδράσεων των οποίων οι δείκτες, όπως και οι δείκτες των εξωτερικών φορτίων αναφέρονται στο κ.σ.σ. και διατυπώνονται οι συνθήκες ισορροπίας

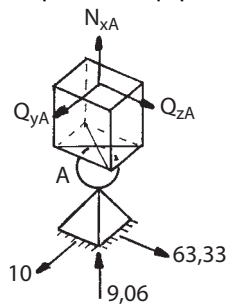
$$\begin{array}{lcl}
 \Sigma F_x = 0 & A_x + C_x - F_x - q_x \cdot 6 = 0 & A_x = 63,33 \\
 \Sigma F_y = 0 & -A_y + F_y = 0 & A_y = 10 \\
 \Sigma F_z = 0 & A_z + B_z + C_z - q_z \cdot 11 = 0 & A_z = 9,06 \\
 \Sigma M_{xA} = 0 & C_z \cdot 6 - F_y \cdot 6 = 0 & C_z = 10 \\
 \Sigma M_{yA} = 0 & B_z \cdot 8 - q_z \cdot 20 \cdot 11 \cdot 5,5 - q_x \cdot 6 \cdot 6 = 0 & B_z = 200,94 \\
 \Sigma M_{zA} = 0 & -C_x \cdot 6 + q_x \cdot 6 \cdot 3 - F_y \cdot 11 = 0 & C_x = 11,67
 \end{array}$$

Φορέας

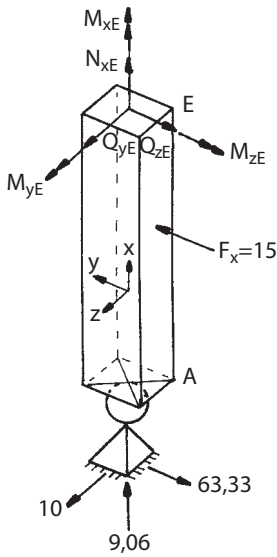


Σχ. 18.16

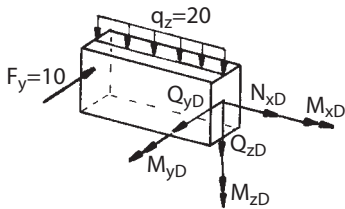
Φορτία διατομής



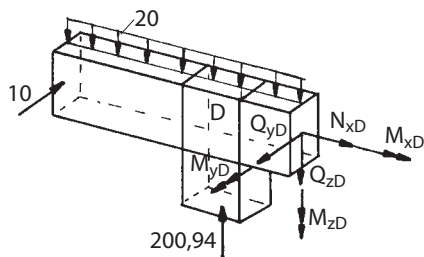
$$\begin{array}{lcl}
 \Sigma F_x = 0 & N_{xA} + 9,06 = 0 & N_{xA} = -9,06 \\
 \Sigma F_y = 0 & Q_{yA} + 10 = 0 & Q_{yA} = -10 \\
 \Sigma F_z = 0 & Q_{zA} + 63,33 = 0 & Q_{zA} = -63,33
 \end{array}$$



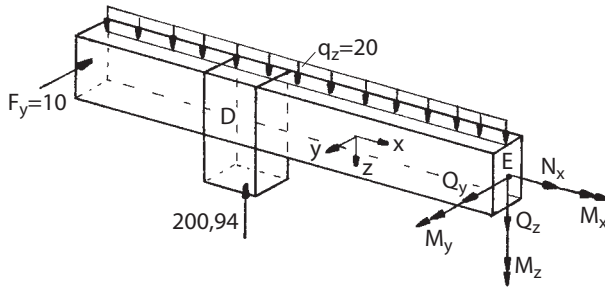
$$\begin{aligned}
 \Sigma F_x &= 0 & N_{xE} + 9,06 &= 0 & N_{xE} &= -9,06 \\
 \Sigma F_y &= 0 & Q_{yE} + 10 &= 0 & Q_{yE} &= -10 \\
 \Sigma F_z &= 0 & Q_{zE} + 63,33 - 15 &= 0 & Q_{zE} &= -48,33 \\
 \Sigma M_{xE} &= 0 & & & M_{xE} &= 0 \\
 \Sigma M_{yE} &= 0 & M_{yE} + 63,33 \cdot 6 - 15 \cdot 3,5 &= 0 & M_{yE} &= -327,48 \\
 \Sigma M_{zE} &= 0 & M_{zE} - 10 \cdot 6 &= 0 & M_{zE} &= 60
 \end{aligned}$$



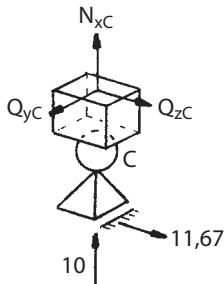
$$\begin{aligned}
 \Sigma F_x &= 0 & N_{xD} &= 0 & \Sigma M_{xD} &= 0 & M_{xD} &= 0 \\
 \Sigma F_y &= 0 & Q_{yD} &= 10 & \Sigma M_{yD} &= 0 & & \\
 & & & & \Sigma M_{yD} &= -20 \cdot 3 \cdot 1,5 &= -90 & \\
 \Sigma F_z &= 0 & Q_{zD} &= -20 \cdot 3 &= -60 & \Sigma M_{zD} &= 0 & \\
 & & & & M_{zD} &= -10 \cdot 3 &= -30 &
 \end{aligned}$$



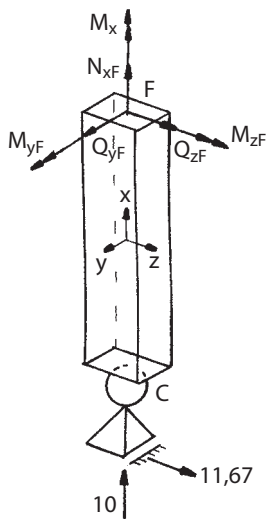
$$\begin{aligned}
 \Sigma F_x &= 0 & N_{xD} &= 0 & & & \\
 \Sigma F_y &= 0 & Q_{yD} - 10 &= 0 & Q_{yD} &= 10 & \\
 \Sigma F_z &= 0 & Q_{zD} - 200,94 + 20 \cdot 3 &= 0 & Q_{zD} &= 140,94 & \\
 \Sigma M_{xD} &= 0 & & & M_{xD} &= 0 & \\
 \Sigma M_{yD} &= 0 & M_{yD} + 20 \cdot 3 \cdot 1,5 &= 0 & M_{yD} &= -90 & \\
 \Sigma M_{zD} &= 0 & M_{zD} + 10 \cdot 3 &= 0 & M_{zD} &= -30 &
 \end{aligned}$$



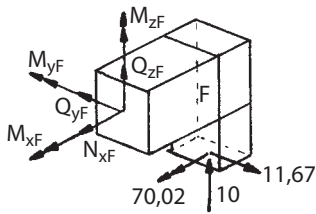
$$\begin{aligned}
 \Sigma F_x &= 0 & N_{xE} &= 0 \\
 \Sigma F_y &= 0 \Rightarrow & Q_y - 10 &= 0 \Rightarrow & Q_{yE} &= 10 \\
 \Sigma F_z &= 0 \Rightarrow & Q_z + 20 \cdot 11 - 200,94 &= 0 & Q_{zE} &= -19,06 \\
 \Sigma M_{xE} &= 0 & M_x &= 0 & M_{xE} &= 0 \\
 \Sigma M_{yE} &= 0 & M_y + 20 \cdot 11 \cdot 5,5 - 200,94 \cdot 8 &= 0 & M_{yE} &= 397,52 \\
 \Sigma M_{zE} &= 0 & M_{zE} + 10 \cdot 11 &= 0 \Rightarrow & M_{zE} &= -110
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \Sigma F_x &= 0 & N_{xC} + 10 &= 0 & N_{xC} &= -10 \\
 \Sigma F_y &= 0 & & & Q_{yC} &= 0 \\
 \Sigma F_z &= 0 & Q_{zC} + 11,67 &= 0 & Q_{zC} &= -11,67
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \Sigma F_x &= 0 & N_{xC} + 10 &= 0 \Rightarrow & N_{xC} &= -10 \\
 \Sigma F_y &= 0 & & & Q_{yF} &= 0 \\
 \Sigma F_z &= 0 & Q_z + 11,67 &= 0 \Rightarrow & Q_{zF} &= -11,67 \\
 \Sigma M_{xF} &= 0 & & & M_{xF} &= 0 \\
 \Sigma M_{yF} &= 0 & M_y + 11,67 \cdot 6 &= 0 \Rightarrow & M_{yF} &= -70,02 \\
 \Sigma M_{zF} &= 0 & & & M_{zF} &= 0
 \end{aligned}$$



$$\Sigma F_x = 0$$

$$N_{xF} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$Q_{yF} - 11,67 = 0 \Rightarrow Q_{yF} = 11,67$$

$$\Sigma F_z = 0$$

$$Q_{zF} + 10 = 0 \Rightarrow Q_{zF} = -10$$

$$\Sigma M_x = 0$$

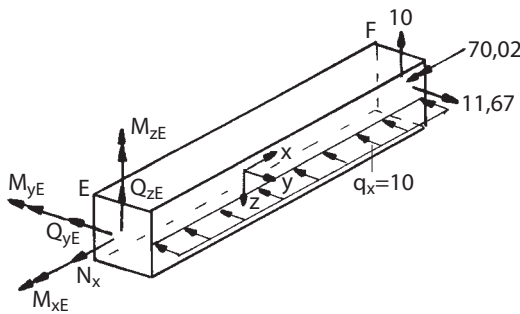
$$M_{xF} + 70,02 = 0 \Rightarrow M_{xF} = -70,02$$

$$\Sigma M_y = 0$$

$$M_{yE} = 0$$

$$\Sigma M_z = 0$$

$$M_{zF} = 0$$



$$\Sigma F_x = 0$$

$$N_{xE} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$Q_{yE} - 11,67 + 10 \cdot 6 = 0$$

$$Q_{yE} = -48,33$$

$$\Sigma F_z = 0$$

$$Q_{zE} + 10 = 0$$

$$Q_{zE} = -10$$

$$\Sigma M_{xE} = 0$$

$$M_{xE} + 70,02 = 0$$

$$M_{xE} = -70,02$$

$$\Sigma M_{yE} = 0$$

$$M_y - 10 \cdot 6 = 0$$

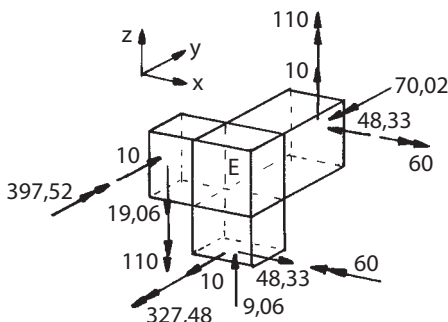
$$M_y = 0$$

$$\Sigma M_{zE} = 0$$

$$M_{zE} - 11,67 \cdot 6 + 10 \cdot 6 \cdot 3 = 0$$

$$M_{zE} = -110$$

Έλεγχος ισορροπίας του κόμβου E



$$\Sigma F_x = 0 \quad 48,33 - 48,33 = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad -10 + 10 = 0$$

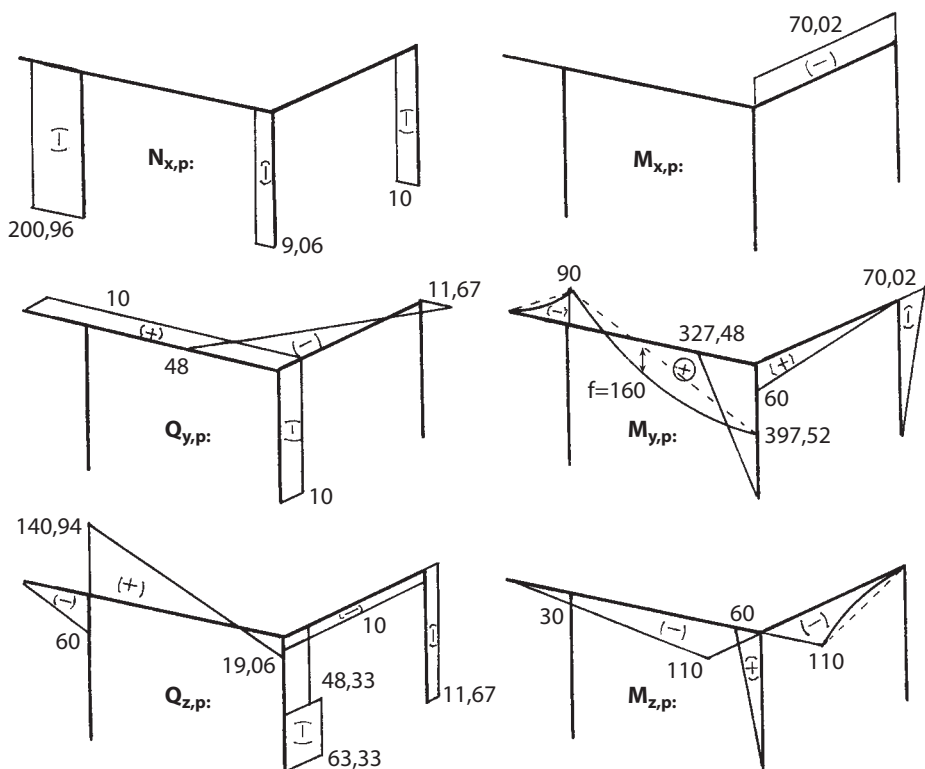
$$\Sigma F_z = 0 \quad 19,06 + 10 + 9,06 = 0$$

$$\Sigma M_x = 0 \quad 60 - 60 = 0$$

$$\Sigma M_y = 0 \quad -70,02 + 397,52 - 327,50 = 0$$

$$\Sigma M_z = 0 \quad 110 - 110 = 0$$

Τα διαγράμματα των φορτίων διατομής υπάρχουν στο σχ. 18.17



Σχ. 18.17 Διαγράμματα των φορτίων διατομής λόγω P

β) Στο σχ. 18.18 και στο σχ. 18.19 υπολογίζονται τα διαγράμματα M_{y1} για $P_{yD}=1$ και $P_{yE}=1$ αντίστοιχα. Από την εξίσωση 1 του πίνακα 18.1 προκύπτει

$$\begin{aligned}
 u_{yD} &= \int \frac{M_{y,p} M_{y,1}}{EI_y} ds + \int \frac{M_{z,p} M_{z,1}}{EI_z} ds + \int \frac{M_{x,p} M_{x,1}}{GI_D} ds = \\
 &= \frac{1}{120 \cdot 10^3} + \left[\frac{1}{3} (-327,48) (-8) \cdot 8 + \frac{1}{3} 60 \cdot 6 \cdot 6 \right] + \\
 &+ \frac{1}{50 \cdot 10^3} \frac{1}{6} (-8) [(-30) + 2(-110)] \cdot 8 + \frac{1}{120 \cdot 10^3} [-70,02] (-8) \cdot 6 = \\
 &= 64,22 \cdot 10^{-3} + 10,80 \cdot 10^{-3} + 0,78 \cdot 10^{-3} = 75,8 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\
 u_{yE} &= \frac{1}{120 \cdot 10^3} \frac{1}{3} 60 \cdot 6 \cdot 6 + \frac{1}{50 \cdot 10^3} \frac{1}{3} 60 \cdot 6 \cdot 6 = 6 \cdot 10^{-3} + 1,44 \cdot 10^{-3} = 7,44 \cdot 10^{-3} \text{ m} .
 \end{aligned}$$

Το ελαστικό φορτίο της δοκού DE είναι $w = M_{z,p} / EI_z$. Για τη διατύπωση δε της

εξίσωσης της ελαστικής γραμμής, επειδή η ίνα αναφοράς της DE βρίσκεται στην πίσω πλευρά από αυτή που δείχνει το βέλος του άξονα y , η απόσταση x μετράται από το F προς το D οπότε είναι:

$$u_y = u_E \frac{x'}{l} + u_B \frac{x}{l} + \frac{8^2(-110)}{6EI_y} \omega_D = \left(7,44 \frac{x'}{l} + 75,80 \frac{x}{l} - 9,78 \omega_D \right) \cdot 10^{-3}$$

$$x/l = 0,25 \quad u_y = (7,44 \cdot 0,75 + 75,8 \cdot 0,25 - 9,78 \cdot 0,2344) \cdot 10^{-3} = 22,24 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$x/l = 0,50 \quad u_y = (7,44 \cdot 0,50 + 75,8 \cdot 0,50 - 9,78 \cdot 0,3750) \cdot 10^{-3} = 37,95 \cdot 10^{-3}$$

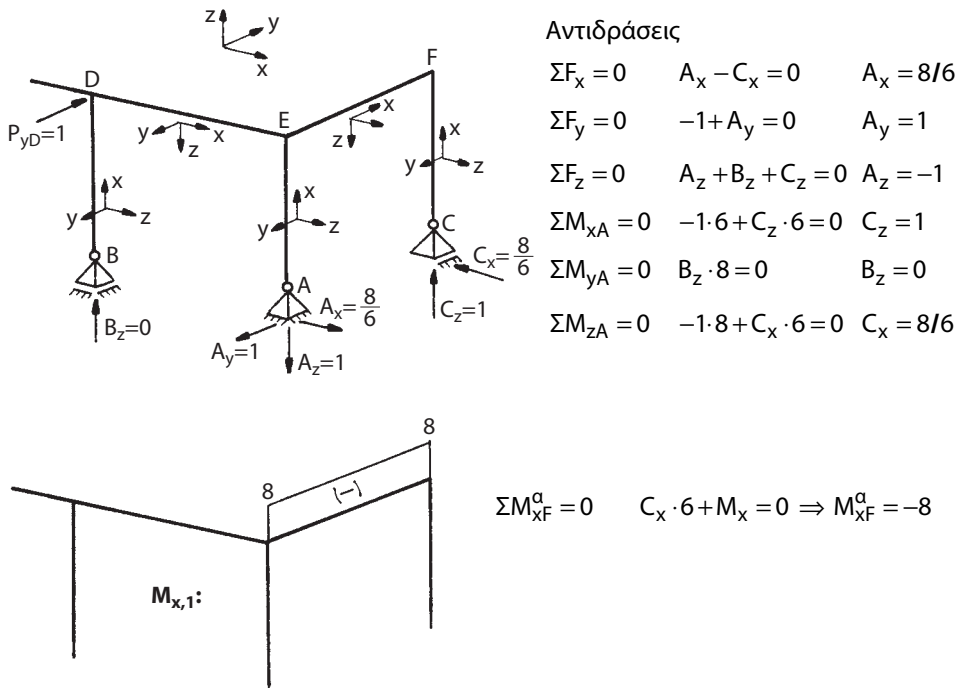
$$x/l = 0,75 \quad u_y = (7,44 \cdot 0,25 + 75,8 \cdot 0,75 - 9,78 \cdot 0,3281) \cdot 10^{-3} = 55,50 \cdot 10^{-3}$$

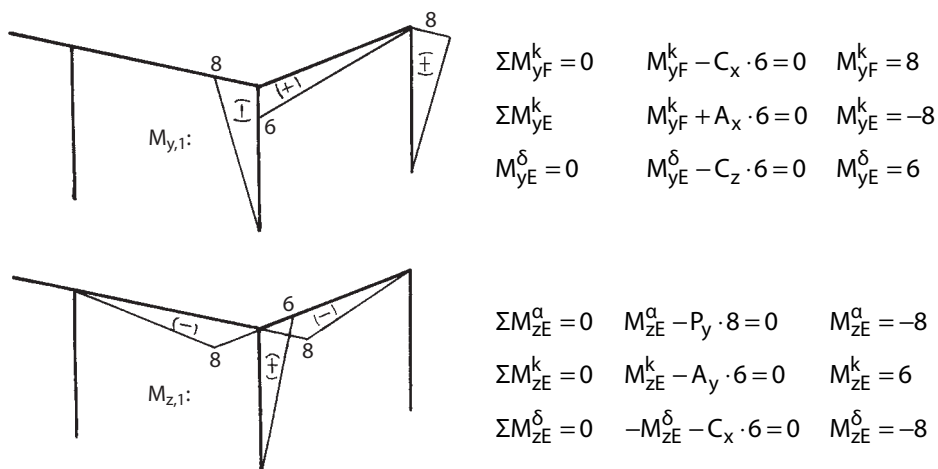
Η ελαστική γραμμή είναι σχεδιασμένη στο σχ. 18.20

γ) Στο σχ. 18.21 υπολογίζονται τα διαγράμματα $M_{x,1}$ για $M_{zE} = 1$ οπότε είναι

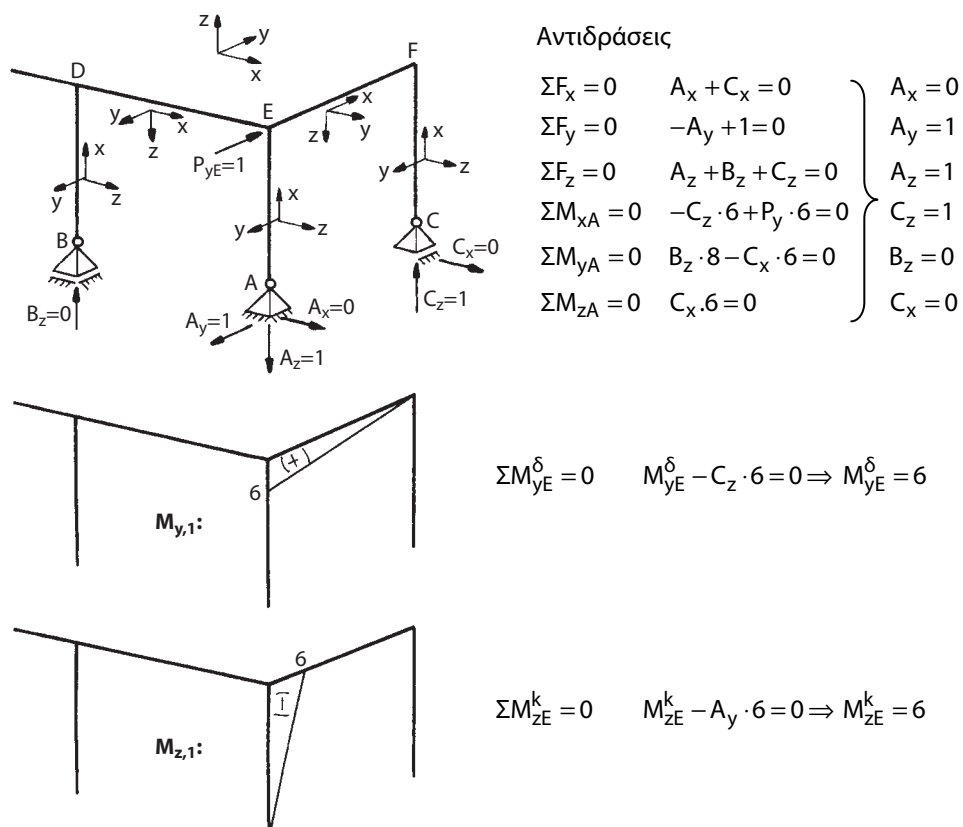
$$\varphi_{z,p} = \frac{1}{GI_D} (-70,02)(-1) \cdot 6 + \frac{1}{EI_y} \frac{1}{3} (-327,48) \cdot 1 \cdot 6 + \frac{1}{EI_z} \frac{1}{4} (-110) \cdot 1 \cdot 6$$

$$\varphi_{z,p} = -4,668 \cdot 10^{-3} - 5,458 \cdot 10^{-3} - 3,3 \cdot 10^{-3} = 4,09 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

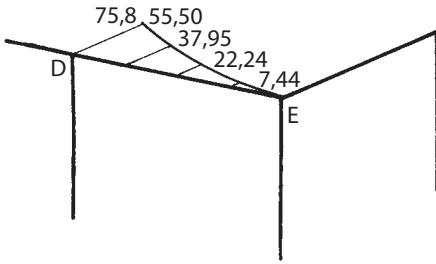




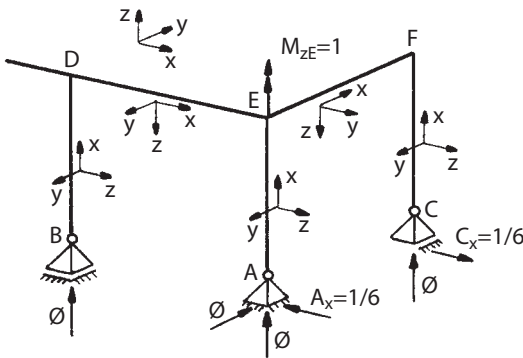
Σχ. 18.18 Διαγράμματα $M_{y,1}$ για τον υπολογισμό της u_{yD} .



Σχ. 18.19 Διαγράμματα $M_{y,1}$ για τον υπολογισμό της u_{yE}

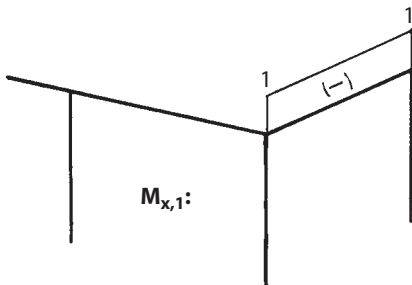


Σχ. 18.20 Ε.Γ της DE κατά τη διεύθυνση y.

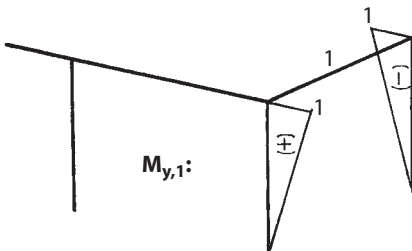


Αντιδράσεις

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma F_x = 0 \quad C_x + A_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \quad A_y = 0 \\ \Sigma F_z = 0 \quad A_z + C_z = 0 \\ \Sigma M_{xA} = 0 \quad C_z \cdot 6 = 0 \\ \Sigma M_{yA} = 0 \quad B_z \cdot 8 = 0 \\ \Sigma M_{zA} = 0 \quad M_z - C_x \cdot 6 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A_x = \frac{1}{6} \\ A_y = 0 \\ A_z = 0 \\ C_z = 0 \\ B_z = 0 \\ C_x = \frac{1}{6} \end{array}$$

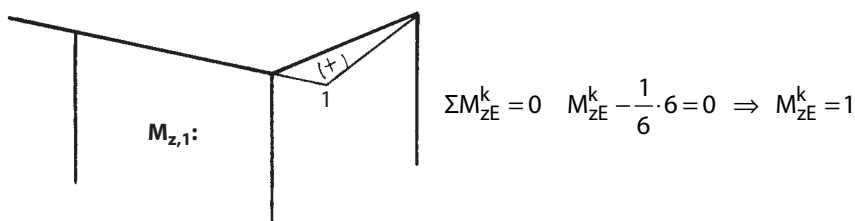


$$\Sigma M_{x(FE)} = 0 \quad M_{x(FE)} + \frac{1}{6} \cdot 6 = 0 \quad M_{x(FE)} = -1$$



$$\Sigma M_{yF}^k = 0 \quad M_{yF}^k + \frac{1}{6} \cdot 6 = 0 \Rightarrow M_{yF}^k = -1$$

$$\Sigma M_{yE}^k = 0 \quad M_{yE}^k - \frac{1}{6} \cdot 6 = 0 \Rightarrow M_{yE}^k = 1$$



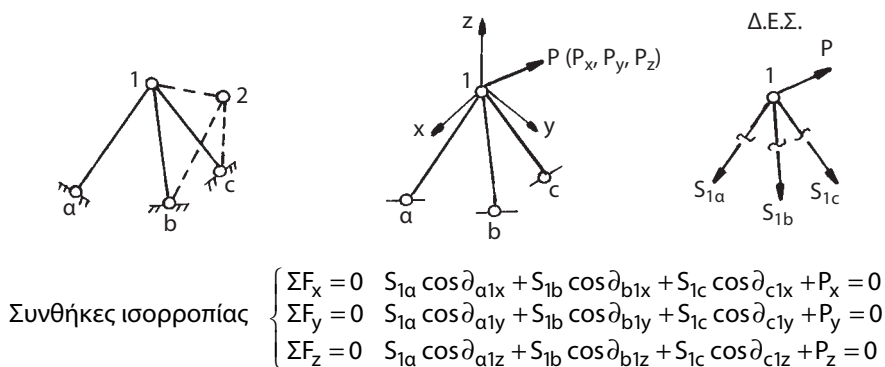
Σχ. 18.21 Διαγράμματα $M_{,1}$ για τον υπολογισμό της φ_{zE} .

18.8 ΧΩΡΟΔΙΚΤΥΩΜΑΤΑ

Μόρφωση των χωροδικτυωμάτων:

Κατ' αντιστοιχία με τα επίπεδα δικτύωματα η μόρφωση ενός χωροδικτυώματος του οποίου οι κόμβοι είναι σφαιρικές αρθρώσεις, μπορεί να γίνει αν ληφθεί σαν βάση:

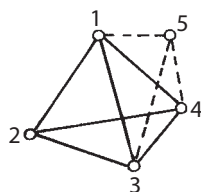
- η αρθρωτή σύνδεση τριών ράβδων οι οποίες στηρίζονται με άρθρωση η κάθε μια στο στερεό υπόβαθρο (σχ. 18.22). Η προσθήκη ενός κόμβου 2 στο στερεό αυτό σχηματισμό γίνεται με τρεις ράβδους οι οποίες καταλήγουν σε τρεις διαφορετικούς κόμβους. Η προσθήκη στη συνέχεια κατ' αυτόν τον τρόπο και άλλων κόμβων δημιουργεί ένα ισοστατικό στερεό δικτύωμα. Για κάθε κόμβο ενός χωροδικτυώματος μπορούν να διατυπωθούν τρεις συνθήκες ισορροπίας δυνάμεων, όπως αυτές του σχ. 18.22 για τον κόμβο 1.



Σχ. 18.22

- Ο τετραεδρικός σχηματισμός έξι ράβδων οι οποίες συνδέονται αρθρωτά στα άκρα τους (σχ. 18.23). Η προσθήκη κόμβων στο σχηματισμό αυτό, η οποία γίνεται με τρεις ράβδους για τον καθένα, όπως π.χ. για τον κόμβο 5 του σχ. 18.23 δημιουργεί ένα ισοστατικό στερεό χωροδικτύωμα. Η ισοστατική στήριξη του δικτυώματος αυτού απαιτεί έξι ράβδους.

Υπάρχει ένας πολύ μεγάλος αριθμός διαφορετικών χωροδικτυωμάτων που συναντώνται στις κατασκευές τα οποία μο-



Σχ. 18.23

ρούν να ταξινομηθούν σε απλά, σύνθετα και ανώμαλα όπως και τα επίπεδα δικτυώματα.

Στατικότητα των χωροδικτυωμάτων: Αν

ρ : ο αριθμός των ράβδων

k : ο αριθμός των κόμβων

α : ο αριθμός των αντιδράσεων

επειδή για κάθε κόμβο ισχύουν οι συνθήκες $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma F_z = 0$, ο βαθμός στατικής ισορροπίας n του φορέα δίδεται από τη σχέση

$$n = (\rho + \alpha) - 3k \quad 18.7$$

Αν $n = 0$ το χωροδικτύωμα είναι ισοστατικό

Κινητότητα των χωροδικτυωμάτων: Επειδή ένα χωροδικτύωμα, που βάσει της εξ. 18.7 εμφανίζεται ισοστατικό ή υπερστατικό, δεν είναι κατ' ανάγκη και στερεό, είναι απαραίτητο να εξετάζεται αν παρουσιάζει κινητότητα.

Αυτό γίνεται με τρόπους ανάλογους των επίπεδων δικτυωμάτων (σελ. 57).

Επίλυση χωροδικτυωμάτων: Γίνεται όπως και στα επίπεδα δικτυώματα με τη μέθοδο των κόμβων ή την μέθοδο των τομών.

Παράδειγμα 18.3: Στο χωροδικτύωμα του σχ. 18.24 να βρεθούν:

- Οι αξονικές δυνάμεις των ράβδων που συμβάλλουν στους κόμβους 1, 2, 3, 4, 5 με τη μέθοδο των κόμβων.
- Οι αξονικές δυνάμεις των ράβδων του δευτέρου από δεξιά φατνώματος με τη μέθοδο των τομών

Το δικτύωμα είναι ισοστατικό ($\rho=48$, $k=18$, $\alpha=6$, $48+6=3 \cdot 18$).

Η μόρφωση που μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχει σαν βάση το τετράεδρο (1, 2, 3, 4) στο οποίο προστίθενται διαδοχικά, ο κόμβος 5 με τις ράβδους S_{52} , S_{53} , S_{54} , ο κόμβος 6 με τις ράβδους S_{63} , S_{64} , S_{65} κ.λπ. Επομένως είναι και στερεό.

Αντιδράσεις

$$\Sigma F_x = 0 \quad -A_x - B_x + P_{7x} + P_{10x} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x + B_x = 10$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad -B_y + P_{1y} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = 10$$

$$\Sigma F_z = 0 \quad A_z + B_z + C_z - P_{7z} - P_{10z} - P_{14z} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_z + B_z + C_z = 40$$

$$\Sigma M_{xA} = 0 \quad B_z \cdot 10 + C_z \cdot 10 - P_{14z} \cdot 8 - P_{10z} \cdot 6 - P_{7z} \cdot 4 - P_{1y} \cdot 2 - P_{5z} \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad B_z + C_z = 22$$

$$\Sigma M_{yA} = 0 \quad C_z \cdot 2 + P_{10x} \cdot 2 + P_{7x} \cdot 2 - P_{10z} \cdot 2 - P_{7z} \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_z = 10$$

$$\Sigma M_{zA} = 0 \quad B_x \cdot 10 - P_{10x} \cdot 6 - P_{7x} \cdot 4 - P_{1y} \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad B_x = 7$$

Από το σύστημα των εξισώσεων αυτών προκύπτει

$$A_x = 3, \quad B_x = 7, \quad B_y = 10, \quad A_z = 18, \quad B_z = 12, \quad C_z = 10.$$

α) Η διατύπωση των συνθηκών ισορροπίας για κάθε κόμβο θα γίνει απευθείας

από το σχήμα του δικτυώματος (σχ. 18.24) γιατί στα διαγράμματα ελεύθερου σώματος των κόμβων δεν υπάρχει η απαραίτητη εποπτεία.

Οι τρεις πλευρές του χωροδικτυώματος στο ίδιο σχήμα, σχεδιάσθηκαν για τον ευκολότερο υπολογισμό των συνημιτόνων των γωνιών προβολής.

Στη διατύπωση των συνθηκών ισορροπίας το πρόσημο των αξονικών δυνάμεων δεν καθορίζεται από τη φορά των αξόνων του κ.σ.σ. αλλά από το αν είναι εφελκυστικές ή θλιπτικές όπως στα επίπεδα δικτυώματα.

Κόμβος 1

$$\begin{aligned}\Sigma F_x = 0 & \quad S_{12} \cos 45 = 0 & \quad S_{12} = 0 \\ \Sigma F_y = 0 & \quad S_{14} + 10 = 0 & \quad S_{14} = -10 \\ \Sigma F_z = 0 & \quad S_{13} + S_{12} \cos \partial_{213} = 0 & \quad S_{13} = 0\end{aligned}$$

Κόμβος 2

$$\left. \begin{aligned}\Sigma F_x = 0 & \quad S_{23} + S_{24} \cos \partial_{423} + A_x = 0 \Rightarrow S_{23} + S_{24} \cdot 0,5773 + 3 = 0 \\ \Sigma F_y = 0 & \quad S_{25} + S_{24} \cos \partial_{425} = 0 \Rightarrow S_{25} + S_{24} \cdot 0,5773 = 0 \\ \Sigma F_z = 0 & \quad S_{24} \cos \partial_{42z} + A_z = 0 \Rightarrow S_{24} \cdot 0,5773 + 18 = 0\end{aligned} \right\} \begin{aligned}S_{23} &= 15 \\ S_{25} &= 18 \\ S_{24} &= -31,18\end{aligned}$$

Κόμβος 3

$$\begin{aligned}\Sigma F_x = 0 & \quad S_{35} \cos \partial_{235} + S_{32} = 0 \\ \Sigma F_y = 0 & \quad S_{36} + S_{35} \cos \partial_{536} + S_{34} \cos \partial_{436} = 0 \\ \Sigma F_z = 0 & \quad S_{31} + S_{34} \cos \partial_{134} = 0\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}S_{35} \cdot 0,7071 + 15 &= 0 \\ S_{36} + S_{35} \cdot 0,7071 + S_{34} \cdot 0,7071 &= 0 \\ S_{34} \cdot 0,7071 &= 0\end{aligned} \right\} \begin{aligned}S_{35} &= -21,21 \\ S_{36} &= -15 \\ S_{34} &= 0\end{aligned}$$

Κόμβος 4

$$\begin{aligned}\Sigma F_x = 0 & \quad S_{24} \cos \partial_{243} + S_{45} \cos \partial_{546} = 0 \\ \Sigma F_y = 0 & \quad -S_{41} + S_{47} - S_{42} \cos \partial_{142} - S_{43} \cos \partial_{143} = 0 \\ \Sigma F_z = 0 & \quad S_{46} + S_{45} \cos \partial_{546} + S_{43} \cos \partial_{346} + S_{42} \cos \partial_{246} = 0\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}-31,18 \cdot 0,8165 + S_{45} \cdot 0,7071 &= 0 \\ 10 + S_{47} + 31,18 \cdot 0,5773 &= 0 \\ S_{46} + S_{45} \cdot 0,7071 - 31,18 \cdot 0,5773 &= 0\end{aligned} \right\} \begin{aligned}S_{45} &= 36,0 \\ S_{47} &= 28,0 \\ S_{46} &= -7,45\end{aligned}$$

Κόμβος 5

$$\Sigma F_x = 0 \quad S_{53} \cos \partial_{356} + S_{56} + S_{54} \cos \partial_{456} = 0$$

$$\begin{aligned}
\Sigma F_y = 0 & \quad -S_{52} + S_{58} - S_{53} \cos \theta_{352} = 0 \\
\Sigma F_z = 0 & \quad S_{54} \cos \theta_{45z} - P_{5z} = 0 \\
& \quad -21,21 \cdot 0,7071 + S_{56} + 36 \cdot 0,7071 = 0 \\
& \quad -18 + S_{58} + 21,21 \cdot 0,7071 = 0 \\
& \quad S_{54} \cdot 0,7071 - 10 = 0
\end{aligned}
\left. \vphantom{\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma F_z = 0 \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} S_{056} &= -10,46 \\ S_{58} &= 3,0 \\ S_{54} &= 134,14 \end{aligned}$$

β) Τέμνονται οι ράβδοι του φατνώματος και σχεδιάζεται το διάγραμμα ελευθέρου σώματος του δεξιού τμήματος. Για το τμήμα αυτό, όπως και για το αριστερό, μπορούν να διατυπωθούν έξι συνθήκες ισορροπίας, όσες και οι άγνωστες αξονικές δυνάμεις και να υπολογισθούν οι αξονικές αυτές δυνάμεις. Για το φορέα του σχ. 18.24, επειδή από τον κόμβο 13 διέρχονται τρεις άγνωστες αξονικές δυνάμεις, διατυπώνονται ως προς αυτόν τρεις συνθήκες ροπών οπότε υπολογίζονται οι $S_{14,11}$, $S_{14,12}$, $S_{15,12}$, και μετά τρεις συνθήκες δυνάμεων ως προς όλο το τμήμα και υπολογίζονται και οι $S_{13,10}$, $S_{13,11}$, $S_{13,12}$.

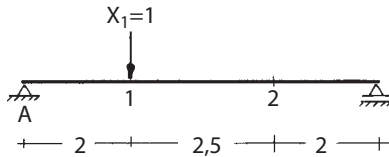
Οι ροπές των διαφόρων δυνάμεων ως προς τον κόμβο 13, για να μπορούν να προστεθούν αριθμητικά στη διατύπωση των συνθηκών ισορροπίας, πρέπει να είναι αναλυμένες κατά τους άξονες x, y, z. Η ανάλυση αυτή φαίνεται στις παραπάνω εξισώσεις.

$$\begin{aligned}
B_x l_{13,18} : (M_y = B_x l_{18,16} = 7 \cdot 2 = 14 & \quad M_z = B_x l_{18,15} = 7 \cdot 2 = 14) \\
B_x l_{13,14} : (M_x = -B_y l_{13,15} = -10 \cdot 2 = -20 & \quad M_z = -B_y l_{14,15} = -10 \cdot 2 = -20) \\
B_z l_{17,15} : (M_x = B_z l_{17,14} = 12 \cdot 2 = 24 & \quad M_y = -B_z l_{17,18} = -12 \cdot 2 = -24) \\
C_z l_{16,13} : (M_x = C_z l_{16,13} = 10 \cdot 2 = 20) & \\
S_{14,11} l_{14,13} : (M_x = -S_{14,11} l_{15,13} = -2 S_{14,11} & \quad M_z = -S_{14,11} l_{14,15} = -2 S_{15,12}) \\
S_{14,12} l_{14,13} : \left\{ \begin{aligned} S_{14,12} \cos 45^\circ \cdot l_{14,13} &\Rightarrow M_y = S_{14,12} \cos 45^\circ l_{15,13} = 1,41 S_{14,12} \\ S_{14,12} \sin 45^\circ \cdot l_{14,13} &\Rightarrow \begin{cases} M_x = -S_{14,12} \cos 45^\circ l_{15,13} = -1,41 S_{14,12} \\ M_z = -S_{14,12} \cos 45^\circ l_{14,15} = -1,41 S_{14,12} \end{cases} \end{aligned} \right\} \\
\Sigma M_{x13} = 0 & \quad -20 + 24 = 20 - 2 S_{14,11} - 2 S_{15,12} - 12,41 S_{14,12} = 0 \\
\Sigma M_{y13} = 0 & \quad 14 - 24 + 1,41 S_{14,12} + 10 \cdot 2 = 0 \\
\Sigma M_{z13} = 0 & \quad 14 - 20 - 2 S_{15,12} - 1,41 S_{14,12} = 0
\end{aligned}
\left. \vphantom{\begin{aligned} \Sigma M_{x13} = 0 \\ \Sigma M_{y13} = 0 \\ \Sigma M_{z13} = 0 \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} S_{14,11} &= -15 \\ S_{14,12} &= -7,09 \\ S_{15,12} &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma F_x = 0 & \quad -S_{14,12} \cdot 0,7071 + S_{13,11} \cdot 0,5773 - 7 = 0 \\
\Sigma F_y = 0 & \quad -S_{13,10} - S_{15,12} + S_{14,11} - S_{14,12} \cdot 0,7071 - S_{13,12} \cdot 0,7071 - S_{13,11} \cdot 0,5773 - 10 = 0 \\
\Sigma F_z = 0 & \quad -S_{13,11} \cdot 0,8165 - S_{13,12} \cdot 0,7071 - 10 + 12 = 0 \\
& \quad S_{13,10} = -23,17 \quad S_{13,11} = 3,44 \quad S_{13,18} = -1,14
\end{aligned}$$

Δείκτες ευκαμψίας - Φορτιστικοί όροι

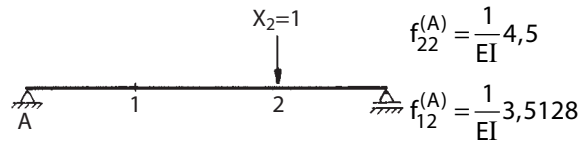
Δοκός Α

Για $x=2$ είναι

$$f_{11}^{(A)} = \frac{6,5^2 \cdot 4,5}{6EI} \frac{2}{6} \left[1 - \left(\frac{4,5}{6,5} \right)^2 - \left(\frac{2}{6,5} \right)^2 \right] = \frac{1}{EI} 4,5$$

Για $x'=2$ είναι

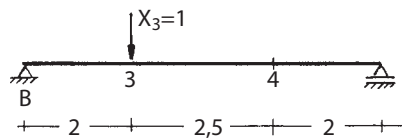
$$f_{21}^{(A)} = \frac{6,5^2 \cdot 2}{6EI} \frac{2}{6,5} \left[1 - \left(\frac{2}{6,5} \right)^2 - \left(\frac{2}{6,5} \right)^2 \right] = \frac{1}{EI} 3,5128$$



$$f_{22}^{(A)} = \frac{1}{EI} 4,5$$

$$f_{12}^{(A)} = \frac{1}{EI} 3,5128$$

Δοκός Β



$$f_{33}^{(B)} = \frac{1}{EI} 4,5$$

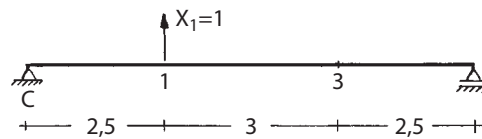
$$f_{43}^{(B)} = \frac{1}{EI} 3,5128$$



$$f_{44}^{(B)} = \frac{1}{EI} 4,5$$

$$f_{34}^{(B)} = \frac{1}{EI} 3,5128$$

Δοκός C

Για $x_1=2,5$ είναι

$$f_{11}^{(C)} = \frac{8^2 \cdot 5,5}{6 \cdot EI} \frac{2,5}{8} \left[1 - \left(\frac{5,5}{8} \right)^2 - \left(\frac{2,5}{8} \right)^2 \right] = \frac{1}{EI} 1,5755$$

Για $x'=2,5$ είναι

$$f_{31}^{(C)} = \frac{8^2 \cdot 2,5}{6 \cdot EI} \frac{2,5}{8} \left[1 - \left(\frac{2,5}{8} \right)^2 - \left(\frac{2,5}{8} \right)^2 \right] = \frac{1}{EI} 1,3411$$

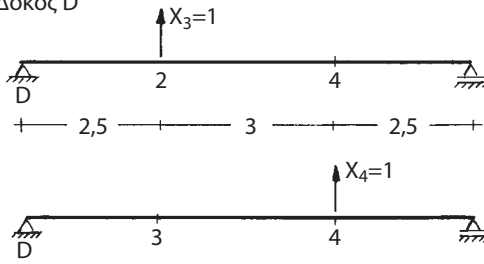


$$f_{31}^{(A)} = 0$$

$$f_{33}^{(C)} = \frac{1}{EI} 1,5755$$

$$f_{13}^{(C)} = \frac{1}{EI} 1,3411$$

Δοκός D



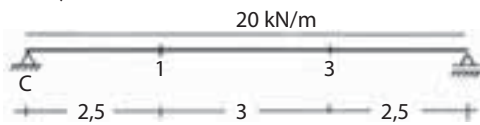
$$f_{22}^{(D)} = \frac{1}{EI} 1,5755$$

$$f_{42}^{(D)} = \frac{1}{EI} 1,3411$$

$$f_{44}^{(D)} = \frac{1}{EI} 1,5755$$

$$f_{24}^{(D)} = \frac{1}{EI} 1,3411$$

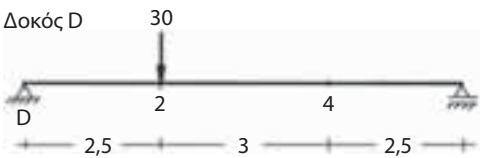
Δοκός C



$$f_{1p}^{(C)} = \frac{20 \cdot 8^4}{24 \cdot 5 \cdot EI} \left[\left(\frac{2,5}{8} \right) - 2 \left(\frac{2,5}{8} \right)^3 + \left(\frac{2,5}{8} \right)^4 \right]$$

$$= \frac{1}{EI} 178,1770$$

Δοκός D



$$f_{3p}^{(C)} = 3,56354 \cdot 10^{-3} = \frac{1}{EI} 178,1770$$

$$f_{2p}^{(D)} = -\frac{30 \cdot 8^2 \cdot 5,5 \cdot 2,5}{6 \cdot 5 \cdot EI \cdot 8} \left[1 - \left(\frac{5,5}{8} \right)^2 - \left(\frac{2,5}{8} \right)^2 \right]$$

$$= -\frac{1}{EI} 63,0208$$

$$f_{4p}^{(D)} = -\frac{30 \cdot 8^2 \cdot 2,5 \cdot 2,5}{6 \cdot 5 \cdot EI \cdot 8} \left[1 - \left(\frac{2,5}{8} \right)^2 - \left(\frac{2,5}{8} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{EI} 40,2344$$

Δείκτες ευκαμψίας

$$f_{11} = f_{11}^{(A)} + f_{11}^{(C)} = \frac{1}{EI} (4,5 + 1,5755) = \frac{1}{EI} 6,0755$$

$$f_{22} = f_{22}^{(A)} + f_{22}^{(D)} = \frac{1}{EI} (4,5 + 1,5755) = \frac{1}{EI} 6,0755$$

$$f_{33} = f_{33}^{(B)} + f_{33}^{(C)} = \frac{1}{EI} (4,5 + 1,5755) = \frac{1}{EI} 6,0755$$

$$f_{44} = f_{44}^{(B)} + f_{44}^{(D)} = \frac{1}{EI} (4,5 + 1,5755) = \frac{1}{EI} 6,0755$$

$$f_{12} = f_{21} = \frac{1}{EI} 3,5128$$

$$f_{13} = f_{31} = \frac{1}{EI} 1,3411$$

$$f_{23} = f_{32} = 0$$

$$f_{41} = f_{14} = 0$$

$$f_{42} = f_{24} = \frac{1}{EI} 1,3411$$

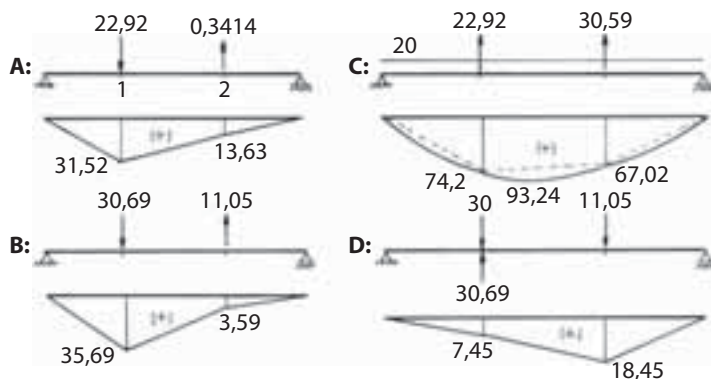
$$f_{43} = f_{34} = \frac{1}{EI} 3,5128$$

Εξίσωση ευκαμψίας

$$\begin{vmatrix} 6,0755 & 3,5128 & 1,3411 & 0 \\ 3,5128 & 6,0755 & 0 & 1,3411 \\ 1,3411 & 0 & 6,0755 & 3,5128 \\ 0 & 1,3411 & 3,5128 & 6,0755 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -178,177 \\ -63,0208 \\ -178,177 \\ -40,2344 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 22,92 \\ -0,3414 \\ 30,69 \\ -11,05 \end{vmatrix}$$

Διαγράμματα ροπών κάμψης

Η κάθε μία δοκός με τα υπεράριθμα φορτία σαν επιβεβλημένα φορτία επιλύεται και βρίσκεται το διάγραμμα M.



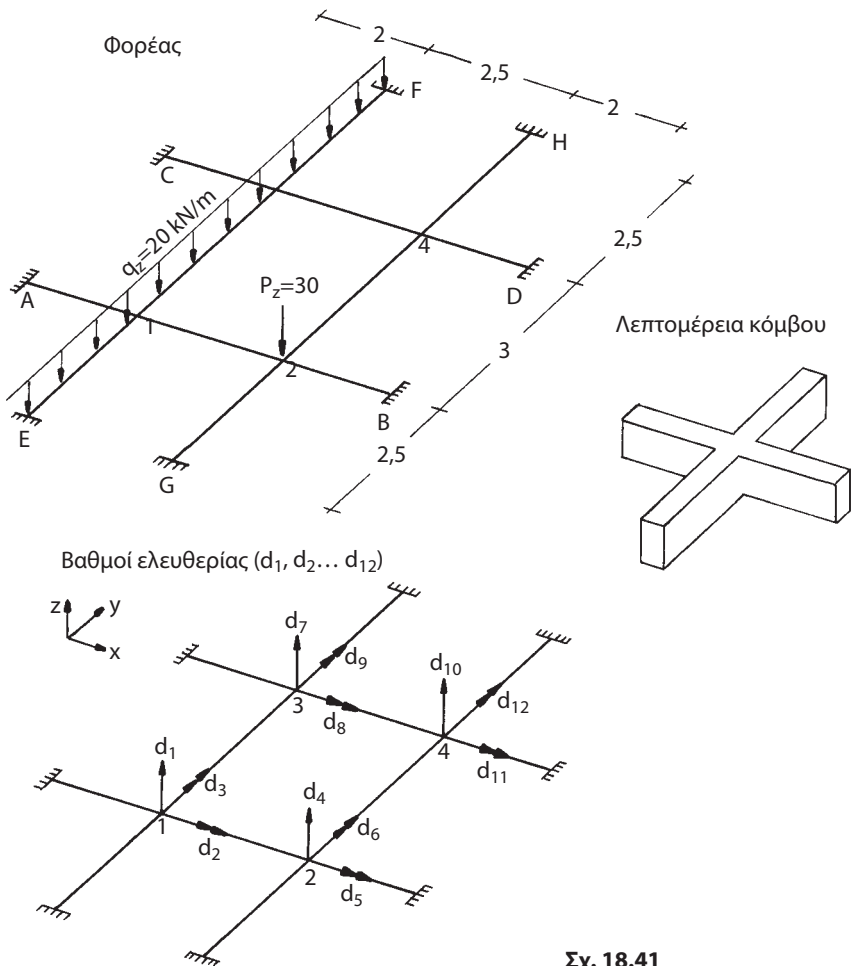
Σχ. 18-40

Παράδειγμα 18.7: Να βρεθεί η εξίσωση δυσκαμψίας της σχάρας του σχ. 18.41.

Δεδομένα: EI ίδιο για όλες τις δοκούς

Στο σχ. 18.41 φαίνονται οι 12 βαθμοί ελευθερίας της σχάρας της οποίας οι κόμβοι είναι ολόσωμοι:

Στα σχ. 18.42-18.44 υπολογίζονται οι δείκτες δυσκαμψίας των κινηματικών καταστάσεων 1, 2, 3 και στο σχ. 18.45 οι φορτιστικοί όροι. Λόγω της συμμετρίας του φορέα κατά x και κατά y οι υπόλοιποι δείκτες δυσκαμψίας των κόμβων 2,3, 4 είναι κατ' αντιστοιχία ίση με τους δείκτες δυσκαμψίας του κόμβου 1. Έτσι είναι:



Σχ. 18.41

Κ.Κ.-4:

$$k_{14} = (k_{41}), \quad k_{24} = (k_{51}), \quad k_{34} = -(k_{61}), \quad k_{44} = (k_{11}), \quad k_{54} = (k_{21}), \quad k_{64} = (k_{31})$$

$$k_{74} = (k_{10,1}), \quad k_{84} = (k_{11,1}), \quad k_{94} = (k_{12,1}), \quad k_{10,4} = (k_{71}), \quad k_{11,4} = (k_{81}), \quad k_{12,4} = (k_{91})$$

Κ.Κ.-5:

$$k_{15} = (k_{42}), \quad k_{25} = (k_{52}), \quad k_{35} = (k_{62}), \quad k_{45} = (k_{12}), \quad k_{55} = (k_{22}), \quad k_{65} = (k_{32}),$$

$$k_{75} = (k_{10,2}), \quad k_{85} = (k_{11,2}), \quad k_{95} = (k_{12,2}), \quad k_{10,5} = (k_{72}), \quad k_{11,5} = (k_{82}), \quad k_{12,5} = (k_{92})$$

Κ.Κ.-6:

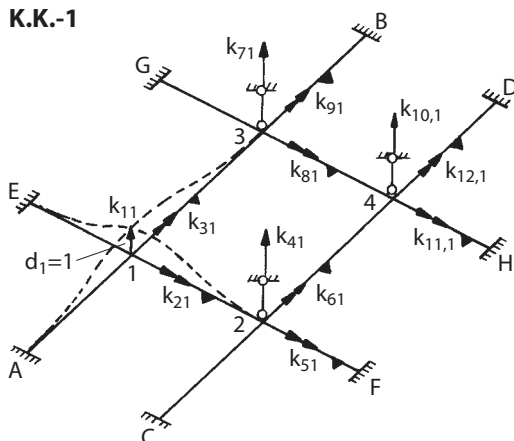
$$k_{16} = -(k_{43}), \quad k_{26} = (k_{53}), \quad k_{36} = (k_{63}), \quad k_{46} = (k_{13}), \quad k_{56} = (k_{23}), \quad k_{66} = (k_{33}),$$

$$k_{76} = (k_{10,3}), \quad k_{86} = (k_{11,3}), \quad k_{96} = (k_{12,3}), \quad k_{10,6} = (k_{73}), \quad k_{11,6} = (k_{83}), \quad k_{12,6} = (k_{93})$$

κ.λπ.

Η αντιστοιχία αυτή επιτρέπει να γραφεί χωρίς άλλους υπολογισμούς η εξίσωση δυσκαμψίας.

Κ.Κ.-1



Ροπές - τέμνουσες παγίωσης

$$M_{1A,1} = M_{A1,1} = \frac{6 \cdot 3EI}{2,5^2} = 2,88EI$$

$$M_{13,1} = M_{31,1} = \frac{6 \cdot 3EI}{3^2} = 2EI$$

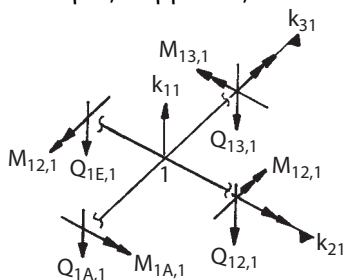
$$M_{1E,1} = M_{E1,1} = \frac{6EI}{2^2} = 1,5EI$$

$$M_{12,1} = M_{21,1} = \frac{6EI}{2,5^2} = 0,96EI$$

$$Q_{1A,1} = Q_{A1,1} = \frac{12 \cdot 3EI}{2,5^3} = 2,30EI$$

$$Q_{13,1} = Q_{31,1} = \frac{12 \cdot 3EI}{3^3} = 1,33EI \quad Q_{1E,1} = Q_{E1,1} = \frac{12EI}{2^3} = 1,50EI \quad Q_{12,1} = Q_{21,1} = \frac{12EI}{2,5^3} = 0,77EI$$

Συνθήκες ισορροπίας

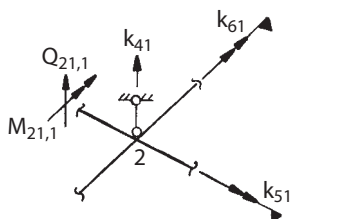


$$\Sigma F_{z1} = 0 \quad k_{11} - Q_{1A,1} - Q_{12,1} - Q_{13,1} - Q_{1E,1} = 0$$

$$\Rightarrow k_{11} = 5,90EI$$

$$\Sigma M_{x1} = 0 \quad k_{21} - M_{1A,1} - M_{13,1} = 0 \Rightarrow k_{21} = -0,88EI$$

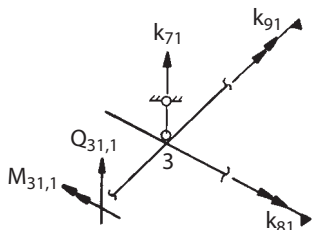
$$\Sigma M_{y1} = 0 \quad k_{31} - M_{12,1} - M_{1E,1} = 0 \Rightarrow k_{31} = 0,54EI$$



$$\Sigma F_{z2} = 0 \quad k_{41} + Q_{21,1} = 0 \Rightarrow k_{41} = -0,77EI$$

$$\Sigma M_{y2} = 0 \quad k_{61} + M_{21,1} = 0 \Rightarrow k_{61} = -0,96EI$$

$$\Sigma M_{x2} = 0 \Rightarrow k_{51} = 0$$



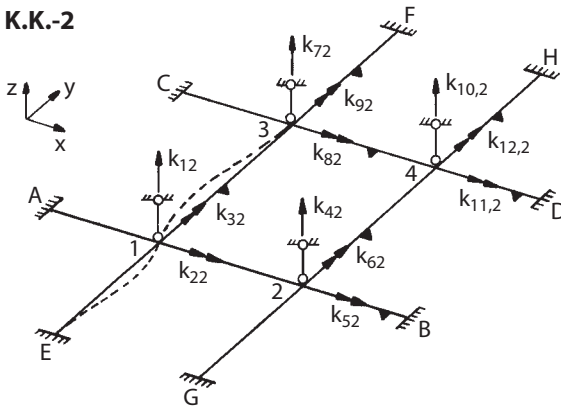
$$\Sigma F_{z3} = 0 \quad k_{71} + Q_{31,1} = 0 \Rightarrow k_{71} = -1,33EI$$

$$\Sigma M_{x3} = 0 \quad k_{81} - M_{31,1} = 0 \Rightarrow k_{81} = 2EI$$

$$\Sigma M_{y3} = 0 \Rightarrow k_{91} = 0$$

$$k_{11} = [5, 10, -0,88, 0,54, -0,77, 0, -0,96, -1,33, 2, 0, 0, 0, 0, 0]^T \cdot EI$$

Σχ. 18.42

Κ.Κ.-2

Ροπές - τέμνουσες παγίωσης

$$M_{13,2} = 2M_{31,2} = \frac{4 \cdot 3EI}{3} = 4EI$$

$$M_{1E,2} = \frac{4 \cdot 3EI}{2,5} = 4,8EI$$

$$T_{1A,2} = \frac{GI_D}{2} = 0,5GI_D = 0,19EI$$

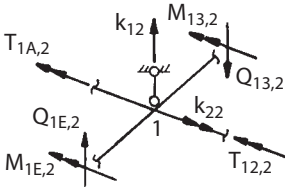
$$T_{12,2} = \frac{GI_D}{2} = 0,5GI_D = 0,15EI$$

$$Q_{1E,2} = \frac{6 \cdot 3EI}{2,5^2} = 2,88EI$$

$$Q_{13,2} = \frac{6 \cdot 3EI}{3^2} = 2EI$$

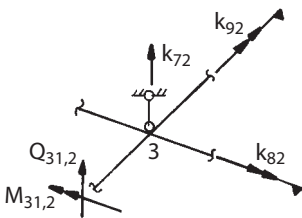
$$T_{21,2} = \frac{GI_D}{2,5} = 0,4GI_D = 0,15EI$$

Συνθήκες ισορροπίας



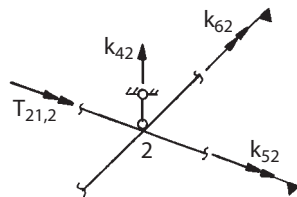
$$\Sigma F_{z1} = 0 \quad k_{12} + Q_{1E,2} - Q_{13,2} = 0 \Rightarrow k_{12} = -0,88EI$$

$$\Sigma M_{x1} = 0 \quad k_{22} - T_{12,2} - T_{1A,2} - M_{13,2} - M_{1E,2} = 0 \\ \Rightarrow k_{22} = 7,14EI$$



$$\Sigma F_{z3} = 0 \quad k_{72} + Q_{31,2} = 0 \Rightarrow k_{72} = -2EI$$

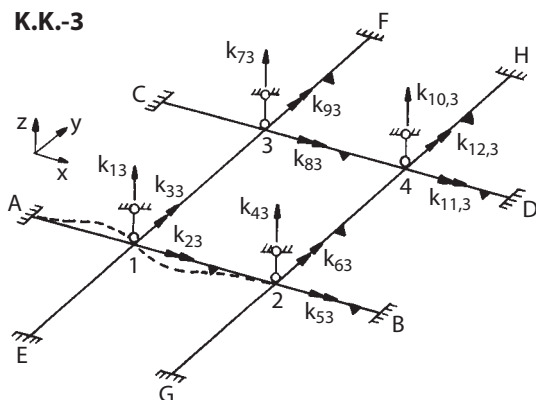
$$\Sigma M_{x3} = 0 \quad k_{82} + M_{31,2} = 0 \Rightarrow k_{82} = 2EI$$



$$\Sigma M_{x2} = 0 \quad k_{52} + T_{21,2} = 0 \Rightarrow k_{52} = -0,15EI$$

$$k_{i2} = [-0,88, 7,14, 0, 0, -0,15, 0, -2, 2, 0, 0, 0, 0]^T \cdot EI$$

Σχ. 18.43

Κ.Κ.-3

Ροπές - τέμνουσες παγίωσης

$$M_{12,2} = \frac{4EI}{2,5} = 1,60EI$$

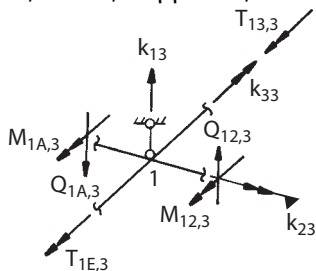
$$M_{1A,3} = \frac{4EI}{2} = 2EI$$

$$M_{21,3} = \frac{2EI}{2,5} = 0,80EI$$

$$T_{13,3} = T_{31,3} \frac{G3I_D}{3} = 0,38EI$$

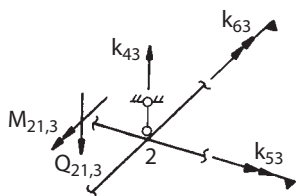
$$T_{1E,3} = \frac{G3I_D}{2,5} = 0,46EI$$

$$Q_{12,3} = \frac{6EI}{2,5^2} = 0,96EI \quad Q_{21,3} = \frac{6EI}{2,5^2} = 0,96EI \quad Q_{1A,3} = \frac{6EI}{2^2} = 1,5EI$$

Εξισώσεις ισορροπίας

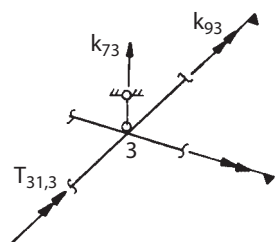
$$\Sigma F_{z1} = 0 \quad k_{13} - Q_{1A,3} + Q_{12,3} = 0 \Rightarrow k_{13} = 0,54EI$$

$$\Sigma M_{y1} = 0 \quad k_{33} - T_{13,3} - T_{1E,3} - M_{12,3} - M_{1A,3} = 0 \Rightarrow k_{33} = 3,64EI$$



$$\Sigma F_{z2} = 0 \quad k_{43} - Q_{21,3} = 0 \Rightarrow k_{43} = 0,96EI$$

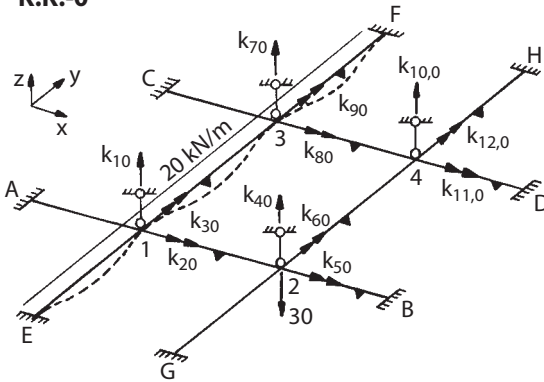
$$\Sigma M_{y2} = 0 \quad k_{63} - M_{21,3} = 0 \Rightarrow k_{63} = 0,80EI$$



$$\Sigma M_{y3} = 0 \quad K_{93} + T_{31,3} = 0 \Rightarrow K_{93} = -0,38EI$$

$$k_{i3} = [0,54, 0, 3,64, 0,96, 0, 0,80, 0, 0, -0,38, 0, 0, 0]^T \cdot EI$$

Σχ. 18.44

Κ.Κ.-0

Ροπές - τέμνουσες παγίωσης

$$M_{13,0} = M_{31,0} \frac{20 \cdot 3^2}{12} = 15$$

$$M_{1E,0} = M_{E1,0} \frac{20 \cdot 2,5^2}{12} = 10,42$$

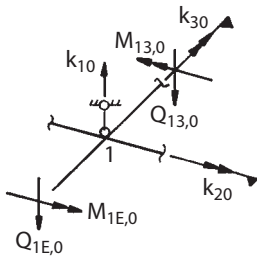
$$M_{3F,0} = M_{F3,0} \frac{20 \cdot 2,5^2}{12} = 10,42$$

$$Q_{13,0} = Q_{31,0} = \frac{20 \cdot 3}{2} = 30$$

$$Q_{1E,0} = Q_{E1,0} = \frac{20 \cdot 2,5}{2} = 25$$

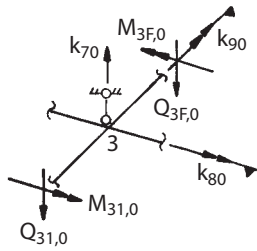
$$Q_{3F,0} = Q_{F3,0} = \frac{20 \cdot 2,5}{2} = 25$$

Συνθήκες ισορροπίας



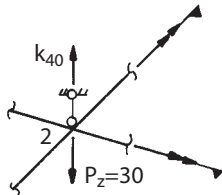
$$\Sigma M_{x1} = 0 \quad k_{20} - M_{13,0} + M_{1E,0} = 0 \quad k_{20} = 4,58$$

$$\Sigma F_{z1} = 0 \quad k_{10} - Q_{13,0} - Q_{1E,0} = 0 \quad k_{10} = 55$$



$$\Sigma M_{x3} = 0 \quad k_{80} - M_{3F,0} + M_{31,0} = 0 \quad k_{80} = -4,58$$

$$\Sigma F_{z3} = 0 \quad k_{70} - Q_{31,0} - Q_{3E,0} = 0 \quad k_{70} = 55$$



$$\Sigma F_z = 0 \quad k_{40} - P_z = 0 \Rightarrow k_{40} = 30$$

$$k_{i0} = [55, 4,58, 0, 30, 0, 0, 55, -4,58, 0, 0, 0, 0]^T$$

Σχ. 18.45

Εξίσωση δυσκαμψίας

$$EI \cdot \begin{vmatrix} 5,90 & -0,88 & 0,54 & -0,77 & 0 & -0,96 & -1,33 & +2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,88 & 7,14 & 0 & 0 & -0,15 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,54 & 0 & 3,64 & 0,96 & 0 & 0,80 & 0 & 0 & -0,38 & 0 & 0 & 0 \\ 0,77 & 0 & 0,96 & 5,90 & -0,88 & 0,54 & 0 & 0 & 0 & 1,33 & 2 & 0 \\ 0 & -0,15 & 0 & -0,88 & 7,14 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ -0,96 & 0 & 0,80 & 0,54 & 0 & 3,64 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,38 \\ -1,33 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5,90 & -0,88 & -0,54 & -0,77 & 0 & -0,96 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,88 & 7,14 & 0 & 0 & 0,15 & 0 \\ 0 & 0 & -0,38 & 0 & 0 & 0 & 0,54 & 0 & 3,64 & 0,96 & 0 & 0,80 \\ 0 & 0 & 0 & -1,33 & -2 & 0 & -0,77 & 0 & 0,96 & 5,90 & -0,88 & 0,54 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & -0,15 & 0 & -0,88 & 7,14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,38 & -0,96 & 0 & 0,80 & 0,54 & 0 & 3,64 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \\ d_8 \\ d_9 \\ d_{10} \\ d_{11} \\ d_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 55 \\ 4,58 \\ 0 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \\ 55 \\ -4,58 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = 0$$