Χ. Χαρτώνας

Λογική & Πληροφορική

Βασική Λογική

- Σύνολα, Δικτυωτά
- Προτασιακά και Τροπικά Συστήματα Λογικής

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Αφιερώνεται με όλη μου την καρδιά στο Δημήτρη και στη Λένα, με τις ένοχες ευχαριστίες μου για την υπομονή και την κατανόησή τους για τις ατελείωτες ώρες απουσίας μου "στο γραφείο"!

Αφιερώνεται, επίσης, στους φοιτητές μου, για την προσπάθεια που καταβάλουν να ανταπεξέλθουν στις απαιτήσεις των μαθημάτων που διδάσκω στην περιοχή της Λογικής και της Θεμελίωσης του Προγραμματισμού.

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Αν μπορούσε κανείς να χρησιμοποιήσει μια αναλογία για να δείξει ποιά είναι η σχέση της Λογικής με την Πληροφορική θα αναφερόταν αναμφίβολα στη Φυσική και τη Μαθηματική Ανάλυση. Χοντρικά και σχηματικά

$$\frac{\text{Κλασσική Φυσική}}{\text{Μαθηματική Ανάλυση}} = \frac{\text{Πληροφορική}}{\text{Μαθηματική Λογική}}$$

Η συνάφεια της Λογικής με την Πληροφορική είναι ισχυρή και πολυεπίπεδη. Θέματα *υπολογισιμότητας* (computability) και *αποφασισιμότητας* (decidability), παραδοσιακά αντικείμενα της Μαθηματικής Λογικής, είναι βασικής σημασίας στην Πληροφορική. Οι γλώσσες προγραμματισμού είναι *τυπικές γλώσσες* επομένως κατ' εξοχήν στο επίκεντρο λογικής διαπραγμάτευσης, τόσο όσον αφορά θέματα *συντακτικής θεωρίας* όσο και σε ότι αφορά προβλήματα *σημασιολογίας*, με όλες τις ιδιομορφίες βέβαια που παρουσιάζει το αντικείμενο αυτό ειδικά για τις γλώσσες προγραμματισμού. Με τον πολλαπλασιασμό των γλωσσών προγραμματισμού τέθηκε ήδη το πρόβλημα μελέτης *θεμελιωτικών λογισμών* για προγραμματισμό. Τυπικά συστήματα όπως η CCS και η CSP ή ο Λογισμός π, για να αναφέρουμε μόνο μερικά, δεν είναι εκ πρώτης όψεως συστήματα που παραδοσιακά θα θεωρούνταν ως αντικείμενα λογικής διαπραγμάτευσης, όπως αναμφίβολα είναι ο Λογισμός λ, που αποτελεί το θεμελιωτικό λογισμό για συναρτησιακό προγραμματισμό. Για τον ερευνητή της Λογικής ωστόσο δεν είναι παρά τυπικά συστήματα με μια αυστηρή τυπική σύνταξη, μια σχέση ισότητας ή προσέγγισης μεταξύ όρων της γλώσσας και με τη συνακόλουθη ανάγκη για διερεύνηση της δομής αυτής της σχέσης και μοντελοποίησης του συστήματος μέσω μιας αυστηρής ερμηνείας σε μια κατάλληλη μαθηματική δομή.

Από μια άλλη σκοπιά, με την ανάπτυξη της Πληροφορικής έγινε αισθητή και η ανάγκη για την ανάπτυξη συστημάτων Λογικής κατάλληλων για την έκφραση ιδιοτήτων προγραμμάτων. Υπάρχει πλέον σήμερα μια πληθώρα τέτοιων συστημάτων που είναι συλλογικά γνωστά ως Resourse Logics, με σημαντικότερο εκπρόσωπο ίσως τη λεγόμενη Γραμμική Λογική του Girard, που προτάθηκε ως η *λογική του παράλληλου υπολογισμού*. Από διαφορετική κατεύθυνση επίσης, συστήματα όπως η Δυναμική Λογική (Dynamic Logic) του Vaughan Pratt και ο Λογισμός μ του Dexter Kozen που επιτρέπουν την έκφραση και μελέτη ιδιοτήτων αναδρομικά οριζόμενων προγραμμάτων οφείλουν την ύπαρξή τους στη συνειδητοποίηση της στενής σχέσης ανάμεσα σε Λογική και Πληροφορική και της γονιμότητας της χρήσης μεθόδων Λογικής στη διαπραγμάτευση προβλημάτων υπολογιστικών διεργασιών.

Υπάρχει όμως επίσης και ισχυρή συνάφεια της Λογικής με την Τεχνητή Νοημοσύνη. Δεν εννοούμε μόνον την προφανή σχέση της Λογικής με το Λογικό Πογραμματισμό. Η συνάφεια αυτή δεν εξαντλείται στο υπόδειγμα του Λογικού Προγραμματισμού, ούτε και μόνο στις περιοχές της κλασικής Μαθηματικής Λογικής αλλά εξαπλώνεται εντυπωσιακά σε περιοχές που παραδοσιακά θεωρούνταν ότι ανήκουν στη Φιλοσοφική Λογική. Προβλήματα *αναθεώρησης πεποιθήσεων* (belief revision), *κοινής γνώσσης* (common, shared knowledge) όπως και *θεωρίες πράξης* (agency theories) βρίσκονται σήμερα στο επίκεντρο του ενδιαφέροντος των ερευνητών που ασχολούνται με θέματα όπως η Μηχανική Μάθηση (Machine Learning) και οι Intelligent Agents.

Η στενή συνάφεια Λογικής και Πληροφορικής καταδεικνύεται και στην ύπαρξη ενός σημαντικού αριθμού έγκυρων επιστημονικών περιοδικών σε θέματα Λογικής και Πληροφορικής, καθώς και τακτικών ετήσιων διεθνών συνεδρίων μεγάλου κύρους, αφιερομένων σε σχετικά θέματα (λόγου χάριν LICS, Logic in Computer Science και CSL, Computer Science Logic). Το εύρος της σχετικής έρευνας είναι ήδη τόσο εκτεταμένο ώστε κρίθηκε σκόπιμο να συνοψισθούν τα θέματα της σχετικής έρευνας σε πολύτομα έργα όπως το Handbook of Logic in Computer Science (6 τόμοι) και το Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming (5 τόμοι).

Είναι φυσικά αδύνατο να καλύψουμε σε μια εισαγωγική μονογραφία όλο το φάσμα των θεμάτων Λογικής που βρίσκουν εφαρμογές, με τον ένα ή τον άλλο τρόπο, στην Πληροφορική. Στόχος μας σε αυτόν τον τόμο είναι μόνο να παρουσιάσουμε μεν κλασικά θέματα Μαθηματικής Λογικής (σε εισαγωγικό επίπεδο) αλλά επίσης να δώσουμε καθ' οδόν όλες εκείνες τις υποδείξεις που είναι δυνατό να δωθούν προς ποικίλες κατευθύνσεις εφαρμογών της Λογικής στην Πληροφορική. Επαφίεται βέβαια στον αναγνώστη να αποφασίσει σε τι βαθμό θα αξιοποιήσει αυτό το υπόβαθρο, εμβαθύνοντας περισσότερο σε ειδικά θέματα δικού του ενδιαφέροντος.

Η μονογραφία αυτή γράφτηκε για να καλύψει τις εκπαιδευτικές ανάγκες του Τμήματος Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών του ΤΕΙ Λάρισας, στου οποίου τη δημιουργία και τον καθορισμό του Προγράμματος Σπουδών έπαιξε σημαντικό ρόλο ο συγγραφέας αυτής της μονογραφίας.

Συνέχεια του *Λογική & Πληροφορική Ι: Βασική Λογική* αποτελεί η μονογραφία *Λογική & Πληροφορική ΙΙ: Εισαγωγή στο Λογικό Προγραμματισμό και την Prolog*, στο οποίο ο αναγνώστης έχει την ευκαιρία να δει μια πιο εξειδικευμένη προσέγγιση του θέματος των εφαρμογών της Λογικής στην Πληροφορική.

Ελπίζω ότι το περιεχόμενο και το επίπεδο διαπραγμάτευσης στους δύο αυτούς τόμους θα συμβάλει στην αλλαγή στάσης, τουλάχιστον του καλόπιστου, για την πολυσυζητούμενη σήμερα δυνατότητα "αναβάθμισης" του status των Τμημάτων των ΤΕΙ, μέσω μιας αναγκαίας αντίστοιχης αναβάθμισης του περιεχομένου και του επιπέδου σπουδών των Τμημάτων τους.

Λάρισα, 10 Σεπτεμβρίου 2000.

Κεφάλαιο 1

Στοιχεία Θεωρίας Συνόλων

1.1 Βασικές Εννοιες

Ενα *σύνολο* (set) ή κλάση, είναι η έκταση μιας ιδιότητας[1] , δηλαδή η συλλογή των ατόμων ή/καί αντικειμένων κάθε μορφής που έχουν τη συγκεκριμένη ιδότητα:

$$S = \{x | \; x \text{ είναι πρώτος αριθμός}\}$$

$$S' = \{\mathcal{A} | \; \mathcal{A} \text{ είναι πλανήτης του ηλιακού μας συστήματος}\}$$

Ενα σύνολο μπορεί να περιγραφεί όχι μόνο με αναγραφή της ιδιότητας που το καθορίζει, αλλά και με καταγραφή των μελών του:

$$A = \{x | \text{ ο } x \text{ είναι πρώτος αριθμός μικρότερος του } 8 \} \qquad B = \{1, 3, 5, 7\}$$

- Λέμε ότι ο φυσικός αριθμός 3 είναι **μέλος** του συνόλου B και γράφουμε $3 \in B$ (γενικότερα $x \in S$, το στοιχείο x ανήκει στο σύνολο S, είναι μέλος του)

[1]Παρουσιάζουμε σε αυτό το Κεφάλαιο τη λεγόμενη "Αφελή Θεωρία Συνόλων". Ο αναγνώστης θα πρέπει όμως να έχει υπόψην του ότι η αφελής έννοια του συνόλου δεν είναι συνεκτική, όπως απέδειξε ο Russell. Στο Παράρτημα, εξηγούμε πώς η θεμελίωση της θεωρίας των συνόλων μπορεί να γίνει με αυστηρό, μαθηματικό τρόπο, εισάγοντας ένα σύστημα αξιωμάτων. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης θα πρέπει να συμβουλευθεί το Παράρτημα, ή τη σχετική βιβλιογραφία πάνω στη Θεωρία Συνόλων.

- Ο συμβολισμός $x \notin A$ σημαίνει ότι το στοιχείο x δεν είναι μέλος του συνόλου A
- Γράφουμε επίσης $A \subseteq B$, αν κάθε μέλος του A είναι και μέλος του B και καλούμε το A **υποσύνολο** του B
- Δύο σύνολα θεωρούνται ίσα , αν έχουν ακριβώς τα ίδια μέλη
- Ο συμβολισμός $A \nsubseteq B$ σημαίνει ότι το A δεν είναι υποσύνολο του B (δηλαδή υπάρχει στοιχείο a με $a \in A$ και $a \notin B$)
- Το A είναι **γνήσιο υποσύνολο** του B, συμβολικά $A \subset B$, αν $A \subseteq B$ και $A \neq B$
- Το **κενό σύνολο**, το οποίο συμβολίζουμε με $\emptyset$, είναι το σύνολο χωρίς μέλη. Από τον ορισμό της σχέσης υποσυνόλου είναι φανερό ότι για κάθε σύνολο A έχουμε $\emptyset \subseteq A$ και $A \subseteq A$.

Οι βασικές πράξεις στα σύνολα με τις οποίες είναι εξοικειωμένος ο αναγνώστης από τη Μέση Εκπαίδευση είναι οι πράξεις **τομή, ένωση**, **σχετικό συμπλήρωμα** και **δυναμοσύνολο** (σύνολο υποσυνόλων). Η ένωση $A \cup B$ δύο συνόλων είναι το σύνολο που απαρτίζεται από τα στοιχεία που ανήκουν είτε στο A είτε στο B, ενώ η τομή $A \cap B$ απαρτίζεται από τα στοιχεία που είναι κοινά και στα δύο σύνολα. Το σχετικό συμπλήρωμα $A \setminus B$, ή $A - B$, απαρτίζεται από τα στοιχεία του A που δεν είναι στοιχεία του B. Για υποσύνολα A, B ενός σταθερού συνόλου X, γράφουμε $-A, -B$ για τα συμπληρώματα $X \setminus A$, $X \setminus B$. Συνοπτικά, έχουμε

- $x \in A \cup B$ αν και μόνον αν $x \in A$, ή $x \in B$
- $x \in A \cap B$ αν και μόνον αν $x \in A$ και $x \in B$
- $x \in A \setminus B$ αν και μόνον αν $x \in A$, αλλά $x \notin B$
- $u \in P(A)$ αν και μόνον αν $u \subseteq A$

Αν x, y είναι σύνολα, τότε με (x, y) συμβολίζουμε το $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ και το αποκαλούμε **διατεταγμένο ζεύγος** (ordered pair).

Αν A, B είναι σύνολα, τότε το **καρτεσιανό γινόμενο** (cartesian product) $A \times B$ είναι το σύνολο $\{(a,b) |\ a \in A \ \text{ και } b \in B\}$. Συνήθως, γράφουμε A^2 αντί για $A \times A$.

Αν A είναι σύνολο, τότε ορίζουμε το σύνολο $\bigcap A$ (**τομή** (intersection) του A) ως το σύνολο όλων των κοινών μελών των μελών του A, δηλαδή $\bigcap A = \{a |\ \forall x \in A \ \ a \in x\}$. Αντίστοιχα ορίζεται και η πράξη της μεγάλης ένωσης $\bigcup A$ (το σύνολο $\bigcup A$ είναι το σύνολο όλων των στοιχείων x για τα οποία υπάρχει σύνολο $u \in A$, έτσι ώστε να είναι $x \in u$). Τις μεγάλες τομές και ενώσεις τις χρησιμοποιούμε συνήθως στη μορφή $\bigcup\{U_i |\ i \in I\}$ και $\bigcap\{U_i |\ i \in I\}$, και ο πιο συνηθισμένος συμβολισμός είναι $\bigcup_{i \in I} U_i$ και $\bigcap_{i \in I} U_i$. Συνοψίζοντας, έχουμε

- $u \in A \times B$ αν και μόνον αν $\exists x \in A\ \exists y \in B\ u = (x, y)$
- $x \in \bigcap_{i \in I} U_i$ αν και μόνον αν $\forall i \in I\ x \in U_i$
- $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$ αν και μόνον αν $\exists i \in I\ x \in U_i$

Παραδείγματα και Ασκήσεις

1.1 Να δειχθεί ότι για οποιαδήποτε σύνολα A, B, C ισχύει $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Λύση: Δείχνουμε ότι $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ και αντιστρόφως ότι $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$. Για τον πρώτο εγκλεισμό, έστω ότι $x \in A \cap (B \cup C)$. Τότε $x \in A$ και $x \in B \cup C$. Ωστε θα είναι $x \in B$ ή $x \in C$. Αν είναι $x \in B$, τότε $x \in A \cap B$ και συνεπώς $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Επίσης όμως, αν είναι $x \in C$, τότε θα είναι $x \in A \cap C$ και συνεπώς $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Επομένως $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Για το αντίστροφο, έστω $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, ώστε θα είναι είτε $x \in (A \cap B)$, είτε $x \in (A \cap C)$. Στην πρώτη περίπτωση, $x \in A$ και $x \in B$. Επομένως, $x \in A$ και $x \in B \cup C$, ώστε $x \in A \cap (B \cup C)$. Αλλά και στη δεύτερη περίπτωση είναι $x \in A$ και $x \in C$, ώστε $x \in A \cap (B \cup C)$. Προκύπτει δηλαδή $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$.

1.2 Να δειχθεί ότι $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Λύση: Εστω $x \in A \setminus (B \cup C)$, δηλαδή $x \in A$ και $x \notin B \cup C$. Αφού το x δεν ανήκει στην ένωση των B, C, δε μπορεί να ανήκει σε κανένα από τα B, C.

Ωστε $x \in A$ και $x \notin B$, δηλαδή $x \in A \setminus B$. Παρόμοια, $x \in A \setminus C$. Επομένως $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. Αντιστρόφως, έστω $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. Τότε το x ανήκει στο A, αλλά σε κανένα από τα B, C. Συνεπώς, $x \in A$ και $x \notin B \cup C$, δηλαδή $x \in A \setminus (B \cup C)$. ∎

1.3 Να δειχθεί ότι $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

Λύση: Εστω $u \in A \times (B \cup C)$. Τότε υπάρχει $a \in A$ και $x \in B \cup C$, ώστε να είναι $u = (a, x)$. Αφού $x \in B \cup C$, θα είναι είτε $x \in B$, είτε $x \in C$. Αν ισχύει $x \in B$, τότε $u = (a, x) \in A \times B$ και, συνεπώς, $u \in (A \times B) \cup (A \times C)$. Αλλά, επίσης, και αν $x \in C$, θα είναι $u = (a, x) \in A \times C$, ώστε $u \in (A \times B) \cup (A \times C)$. Επομένως, δείξαμε ότι $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$.

Αντιστρόφως, αν $u \in (A \times B) \cup (A \times C)$, θα είναι είτε $u \in A \times B$, είτε $u \in A \times C$. Στην πρώτη περίπτωση, θα είναι $u = (a, b)$, για κάποια $a \in A$ και $b \in B$. Αλλά, αφού $B \subseteq B \cup C$, θα είναι $b \in B \cup C$. Επομένως, $u = (a, b) \in A \times (B \cup C)$. Παρόμοια, αν $u \in A \times C$, τότε υπάρχουν $a \in A$ και $c \in C$ ώστε $u = (a, c)$. Αλλά $c \in C \subseteq B \cup C$ σημαίνει ότι $u = (a, c) \in A \times (B \cup C)$. Ωστε δείξαμε και ότι $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$. Συνεπώς, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

1.4 Στον ορισμό του διατεταγμένου ζεύγους που δώσαμε συμπεραίνουμε εύκολα ότι ισχύει η βασική ιδιότητα ζευγών, $(a, b) = (x, y)$ αν και μόνον αν $a = x$ και $b = y$. Πράγματι, αν $(a, b) = (x, y)$ έχουμε $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Στην περίπτωση που $a = b$, το πρώτο σύνολο είναι το σύνολο $\{\{a\}\}$. Για να είναι ίσο με το $\{\{x\}, \{x, y\}\}$, θα πρέπει αυτό το σύνολο να έχει ένα μόνο μέλος. Επομένως, θα πρέπει να ισχύει $\{x\} = \{x, y\}$. Αλλά για να είναι αυτά τα σύνολα ίσα, θα πρέπει το $\{x, y\}$ να έχει ένα μόνο μέλος, πράγμα το οποίο μπορεί να συμβαίνει μόνον όταν $x = y$. Συνεπώς, αν $a = b$ τότε και $x = y$ και ισχύει $\{\{a\}\} = \{\{x\}\}$. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι $\{x\} = \{a\}$ και, συνεπώς, $a = x$. Ωστε, ισχύει $a = x$ και $b = a = x = y$. Παρόμοια, αν $x = y$ προκύπτει ότι και $a = b$.

Εστω τώρα ότι $a \neq b$ και $x \neq y$. Τότε, από την ισότητα $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$, προκύπτει ότι τα δύο σύνολα έχουν τα ίδια μέλη. Δεν είναι δυνατόν να έχουμε $\{a\} = \{x, y\}$, διότι για να έχουν τα δύο αυτά σύνολα τα ίδια μέλη θα έπρεπε να ισχύει $a = x = y$. Ωστε θα είναι $\{a\} = \{x\}$ και $\{a, b\} = \{x, y\}$. Από αυτή τη σχέση προκύπτει ότι $a = x$ και κατόπιν ότι $b = y$.

Δεν είναι όμως όλοι οι "προφανείς" τρόποι κωδικοποίησης ζευγών με τη μορφή συνόλων σωστοί. Λόγου χάριν, έστω ότι προσπαθούμε να κωδικοποιήσουμε ζεύγη θέτοντας $(a, b) = \{a, \{b\}\}$. Εστω τώρα $(a, b) = (x, y)$. Δεν προκύπτει ότι $a = x$ και $b = y$! Από την ισότητα $\{a, \{b\}\} = \{x, \{y\}\}$ προκύπτει ότι είτε $a = x$ και $b = y$, είτε όμως ότι $a = \{y\}$ και $b = \{x\}$. Η τελευταία περίπτωση δε μπορεί να αποκλεισθεί.

1.5 Να δειχθεί ότι ο τελεστής δυναμοσυνόλου είναι μονοτονικός, δηλαδή αν $A \subseteq B$, τότε και $P(A) \subseteq P(B)$.

Λύση: Υποθέτουμε ότι $u \in P(A)$ και θέλουμε να δείξουμε ότι $u \in P(B)$. Αλλά, αν $u \in P(A)$, τότε $u \subseteq A$. Αφού όμως $A \subseteq B$, συμπεραίνουμε ότι $u \subseteq B$. Δηλαδή, $u \in P(B)$.

1.6 (Βασικές Συνολοθεωρητικές Ταυτότητες) Να δειχθεί ότι

- $A \cup A = A$ και $A \cap A = A$
- Αν $A \subseteq B$, τότε $A \cup B = B$ και $A \cap B = A$
- $A \cup B = B \cup A$ και $A \cap B = B \cap A$
- $A \subseteq A \cup B$ και $A \cap B \subseteq A$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ και $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

1.7 (Επιμερισμός $\cap, \cup$) Να δειχθεί ότι

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

1.8 Να δειχθεί ότι $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$.

1.9 Να δειχθεί ότι

$$X \setminus (A \cap (B \cup C)) = ((X \setminus A) \cup (X \setminus B)) \cap ((X \setminus A) \cup (X \setminus C))$$

1.10 Να δειχθεί ότι $-(-A) = A$.

1.11 Να δειχθεί ότι $A \subseteq -B$ αν και μόνον αν $B \subseteq -A$

1.12 Να δειχθεί ότι οι τελεστές $\cap, \cup, \times$ είναι μονοτονικοί. Δηλαδή, ότι αν $A \subseteq A'$ και $B \subseteq B'$, τότε

$$A \cap B \subseteq A' \cap B' \qquad A \cup B \subseteq A' \cup B' \qquad A \times B \subseteq A' \times B'$$

1.13 Να δειχθεί ότι ο τελεστής $-$ είναι αντιτονικός. Δηλαδή, αν $A \subseteq B$, τότε $-B \subseteq -A$.

1.14 Να δειχθεί ότι

- Αν $A, B \subseteq C$, τότε και $A \cup B \subseteq C$
- Αν $C \subseteq A, B$, τότε $C \subseteq A \cap B$

1.15 Να αποδειχθούν οι παρακάτω ταυτότητες

$$A \times (\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I}(A \times B_i) \qquad A \times (\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I}(A \times B_i)$$

1.16 Να δειχθεί ότι

- $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$ και
- $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$, αλλά στη γενική περίπτωση
- $P(A \cup B) \neq P(A) \cup P(B)$.

1.17 Εστω X σύνολο. Ορίζουμε μια πράξη $\Rightarrow$ σε υποσύνολα του X θέτοντας

$$A \Rightarrow B = \{x \in X| \text{ αν } x \in A, \text{ τότε } x \in B\}$$

Να δειχθεί ότι

1. $A \Rightarrow B = (X \setminus A) \cup B$
2. $A \cap (A \Rightarrow B) \subseteq B$
3. $A \Rightarrow B = \bigcup\{C| \ A \cap C \subseteq B\}$
4. $A \cap B \subseteq C$, αν και μόνον αν $A \subseteq B \Rightarrow C$
5. $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) = B \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
6. $A \Rightarrow A = X$
7. $A \Rightarrow \emptyset = X \setminus A$

1.18 Να αποδειχθεί ότι $x \subseteq \emptyset$, αν και μόνον αν $x = \emptyset$.

1.2 Σχέσεις και Συναρτήσεις

Ως μια **σχέση** από το A στο B εννοούμε ένα οποιοδήποτε υποσύνολο $R \subseteq A \times B$, και γράφουμε συνήθως Rab, ή aRb αντί για $(a, b) \in R$. Για παράδειγμα, η σχέση διάταξης $\leq$ των φυσικών αριθμών είναι υποσύνολο του γινομένου $N \times N$ (δηλαδή $\leq \subseteq N \times N$). Συνηθίζεται να γράφουμε $m \leq n$ αντί για $(m, n) \in \leq$. Σχέσεις όπως οι παραπάνω ονομάζονται *διμελείς* (συσχετίζουν ζεύγη αντικειμένων). Γενικότερα, μια n-μελής σχέση R είναι ένα σύνολο διατεταγμένων n-άδων, συνεπώς υποσύνολο κάποιου καρτεσιανού γινομένου, $R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n$. Μια *μονομελής σχέση*, ή *ιδιότητα* δεν είναι, επομένως, παρά ένα σύνολο, ακριβέστερα, ένα υποσύνολο κάποιας συλλογής αντικειμένων.

Αν $R \subseteq A \times B$, τότε το πεδίο ορισμού dom και το πεδίο τιμών rng της R ορίζονται με τις σχέσεις

$$dom(R) = \{a \in A |\ \exists b \in B\ aRb\}$$
$$rng(R) = \{b \in B |\ \exists a \in A\ aRb\}$$

Αφού οι σχέσεις δεν είναι παρά σύνολα, ορίζονται βέβαια όλες οι συνηθισμένες συνολοθεωρητικές πράξεις (τομή, ένωση, καρτεσιανό γινόμενο κλπ). Ιδιαίτερες πράξεις που ορίζονται στις σχέσεις είναι η πράξη του αντίστροφου μιας διμελούς σχέσης $R \mapsto R^{-1}$, όπου $aR^{-1}b$ ανν bRa. Επίσης, αν $R \subseteq A \times B$ και $S \subseteq B \times C$, τότε ορίζεται η σύνθετη σχέση $R \circ S$, με τη συνθήκη

$$a(R \circ S)c \text{ ανν } \exists b \in B\ \ aRb \text{ και } bRc$$

Μια **συνάρτηση** είναι μια σχέση R με την ιδιότητα ότι κάθε στοιχείο a στο πεδίο ορισμού της, dom(R), απεικονίζεται σε ένα μοναδικό στοιχείο b στο πεδίο τιμών της. Λόγω μοναδικότητας του b, γράφουμε $b = R(a)$ αντί για Rab. Αν f είναι συνάρτηση με $dom(f) = A$ και $rng(f) \subseteq B$, γράφουμε $f : A \longrightarrow B$, αντί για $f \subseteq A \times B$. Εναλλακτικά, μπορούμε να σκεφτούμε μια συνάρτηση ως ένα μετασχηματισμό, ο οποίος απεικονίζει κάθε $a \in A$ σ' ένα μοναδικό στοιχείο $f(a) \in B$.

Αν $f : A \longrightarrow B$ είναι συνάρτηση, τότε ως σχέση έχει μια αντίστροφη f^{-1}. Η σχέση f^{-1} δεν είναι όμως απαραίτητα συνάρτηση, αφού είναι

δυνατό να υπάρχουν $x, y \in A$ με την ιδιότητα $f(x) = f(y) = u \in B$. Δεν ορίζεται τότε μονοσήμαντα κάποιο στοιχείο $a \in A$ για το οποίο να μπορούμε να θέσουμε $a = f^{-1}(u)$. Γνωρίζουμε μόνον ότι $(x, u) \in f^{-1}$ και $(y, u) \in f^{-1}$. Αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε η αντίστροφη σχέση f^{-1} μιας συνάρτησης f να είναι επίσης συνάρτηση, είναι να είναι η f μονοσήμαντη. Πράγματι, αν η f είναι μονοσήμαντη και $y = f(x)$, τότε το x αυτό είναι μοναδικό, ώστε μπορούμε να θέσουμε $f^{-1}(y) = x$.

Εστω $f : A \longrightarrow B$ και $g : B \longrightarrow C$ δύο συναρτήσεις. Η σύνθετη συνάρτηση $g \circ f$ ορίζεται όπως και η σύνθεση σχέσεων. Για τις συναρτήσεις η κατάσταση είναι απλούστερη, αφού για κάθε $a \in A$ υπάρχει ακριβώς ένα $b \in B$ για το οποίο ισχύει $f(a) = b$. Ωστε η σύνθετη συνάρτηση $g \circ f : A \longrightarrow C$ ορίζεται απλά με τον κανόνα $(g \circ f)(a) = g(b)$ αν και μόνον αν $b = f(a)$. Δηλαδή, μπορούμε να θέσουμε $(g \circ f)(a) = g(f(a))$. Για παράδειγμα, αν $f(x) = x^2$ και $g(x) = \sqrt[3]{x}$, τότε $(g \circ f)(a) = \sqrt[3]{a^2}$.

Η συνάρτηση $f : A \longrightarrow B$ είναι **μονότιμη** (μονοσήμαντη, 1-1) ανν

$$\forall a, a' \in A \ (a \neq a' \Longrightarrow f(a) \neq f(a'))$$

Για παράδειγμα η $f(x) = 3x + 1$ είναι μονότιμη, αφού αν $3x + 1 = 3y + 1$ τότε προκύπτει άμεσα ότι $x = y$. Αν $f : A \longrightarrow B$ είναι μονότιμη, τότε γράφουμε επίσης $A \preceq B$ και λέμε ότι το σύνολο A *εμφυτεύεται* στο B, μέσω της f.

Λέμε ότι η $f : A \longrightarrow B$ είναι **επιμορφική**, ή απλά επί, ανν

$$\forall b \in B \ \exists a \in A \ b = f(a)$$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f : N \longrightarrow E$ από τους φυσικούς αριθμούς στους άρτιους φυσικούς, $f(n) = 2n$ είναι επιμορφική. Αν η $f : A \longrightarrow B$ είναι ταυτότχρονα 1-1 και επί, τότε ονομάζεται **αμφιμονοσήμαντη** ή **αμφιμονότιμη**.

Αν A, B είναι σύνολα, τότε με ${}^{A}\boldsymbol{B}$, ή $[\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}]$, συμβολίζουμε το σύνολο όλων των συναρτήσεων από την A στη B.

Εστω A σύνολο και $R \subseteq A^2$ μια διμελής σχέση πάνω στο A. Η σχέση R ονομάζεται

- **αυτοπαθής** (reflexive), όταν για κάθε $a \in A$ ισχύει aRa και μη-αυτοπαθής (irreflexive), αν aRa δεν ισχύει για κανένα a.

- **μεταβατική** (transitive), όταν για κάθε $a, b, c \in A$ ισχύει: αν aRb και bRc, τότε aRc
- **συμμετρική** (symmetric), όταν για κάθε $a, b \in A$, αν ισχύει aRb, τότε ισχύει επίσης και bRa
- **σχέση ισοδυναμιας** (equivalence relation), όταν είναι αυτοπαθής, συμμετρική και μεταβατική

Τυπικό παράδειγμα σχέσης, η οποία είναι αυτοπαθής και μεταβατική, είναι η αριθμητική σχέση $\leq$. Παραδείγματα συμμετρικών σχέσεων μπορεί να σκεφθεί κανείς πολλά, λόγου χάριν η σχέση Axy ανν ο x είναι αδελφός του y.

Αν η R είναι σχέση ισοδυναμιας και $a \in A$, τότε η κλάση

$$[a] = \{b \in A |\ aRb\}$$

ονομάζεται **κλάση ισοδυναμιας** (equivalence class) καθοριζόμενη από το στοιχείο a. Θα λέμε επίσης ότι η κλάση $\{[a] \mid a \in A\}$ αποτελεί ένα **διαμερισμό** (partition) της A (σε κλάσεις ισοδυναμιας). Τις σχέσεις ισοδυναμιας τις συμβολίζουμε συνήθως με $\sim$ ή $\approx$.

Παράδειγμα 1.2.1 Αν με V συμβολίσουμε την κλάση όλων των συνόλων και ορίσουμε τη σχέση $A \approx B$ ανν υπάρχει μια μονοσήμαντη και επιμορφική συνάρτηση $f : A \longrightarrow B$, τότε η σχέση αυτή είναι σχέση ισοδυναμιας. Πράγματι, η ταυτοτική συνάρτηση $f : A \longrightarrow A$, $f(a) = a$, είναι αμφιμονοσήμαντη. Αν $f : A \longrightarrow B$ είναι αμφιμονοσήμαντη, ώστε $A \approx B$, τότε η αντίστροφη συνάρτησή στης $f^{-1}(y) = x$ ανν $f(x) = y$ είναι επίσης αμφιμονοσήμαντη $f^{-1} : B \longrightarrow A$. Ωστε $B \approx A$. Επίσης, αν $A \approx B \approx C$, με $A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C$ αμφιμονοσήμαντες συναρτήσεις, τότε η σύνθεσή τους $(f \circ g)(a) = f(g(a))$ είναι αμφιμονοσήμαντη (γιατί;), ώστε $A \approx C$.

Παράδειγμα 1.2.2 Οι ρητοί αριθμοί ορίζονται ως διατεταγμένα ζεύγη φυσικών αριθμών, με τη βοήθεια μιας κατάλληλης σχέσης ισοδυναμιας. Αν θέσουμε $(m, n) \sim (m', n')$ αν και μόνον αν $mn' = m'n$, τότε η σχέση αυτή είναι σχέση ισοδυναμιας στο σύνολο $N \times N$ των ζευγών φυσικών

αριθμών. Ενας ρητός αριθμός δεν είναι παρά μια κλάση ισοδυναμιας $[(m, n)]$. Συνηθίζουμε να γράφουμε τους ρητούς αριθμούς στη μορφή, λόγου χάριν, $\frac{2}{3}$ (χρησιμοποιώντας ένα τυχαίο αντιπρόσωπο της κλάσης ισοδυναμιας).

Αν $A \approx B$, τότε λέμε ότι τα δύο σύνολα είναι **ισάριθμα**, ή **ισοδύναμα**. Ορίζουμε $\boldsymbol{A \prec B}$ αν και μόνον αν $A \preceq B$, αλλά $A \not\approx B$, δηλαδή υπάρχει εμφύτευση της A στη B, αλλά τα δύο σύνολα δεν είναι ισάριθμα.

Αναφέρουμε χωρίς απόδειξη τα παρακάτω θεωρήματα.

Θεώρημα 1.2.1 (Θεώρημα Cantor) *Αν x είναι οποιοδήποτε σύνολο, τότε $x \prec P(x)$.* ∎

Θεώρημα 1.2.2 (Θεώρημα Cantor-Bernstein) *Αν $x \preceq y$ και $y \preceq x$, τότε $x \approx y$, δηλαδή αν υπάρχουν εμφυτεύσεις του x στο y και του y στο x, τότε τα δύο σύνολα είναι ισάριθμα.* ∎

Αναδρομικά Οριζόμενες Συναρτήσεις: Σε ορισμένες περιπτώσεις είναι δυνατό να ορίσουμε μια συνάρτηση με τρόπο που περιλαμβάνει, κατά κάποιον τρόπο, μια αναφορά στην ίδια την οριζόμενη συνάρτηση. Για παράδειγμα, η πράξη της πρόσθεσης ορίζεται με το (αναδρομικό) σχήμα

$$m + 0 = m \qquad\qquad m + (n + 1) = (m + n) + 1$$

Στον ορισμό αυτό, υποθέτουμε πως μας είναι γνωστή η συνάρτηση του επόμενου ενός φυσικού αριθμού, $x \mapsto x + 1$. Ορίζουμε άμεσα την τιμή της νέας συνάρτησης για $n = 0$, και για οποιοδήποτε $n+1$ (τυχαίο φυσικό μεγαλύτερο του μηδενός), υποθέτουμε πως έχουμε ορίσει το αποτέλεσμα $m + n$ και προχωράμε να ορίσουμε το $m + (n + 1)$ χρησιμοποιώντας το γνωστό $m + n$ και τη γνωστή συνάρτηση του επόμενου. Η πρακτική ορισμών αυτού του είδους (αναδρομικοί ορισμοί) είναι πολύ συνηθισμένη. Η πράξη του πολλαπλασιασμού ορίζεται, επίσης, με αναδρομή, έχοντας ως δεδομένη την πράξη της πρόσθεσης

$$m \cdot 0 = 0 \qquad\qquad m \cdot (n + 1) = (m \cdot n) + m$$

Παρόμοια και για την εκθετική συνάρτηση (με εκθέτη φυσικό), για τη συνάρτηση παραγοντικού, κλπ. Τεχνικές λεπτομέρειες για το θέμα θα βρει ο αναγνώστης στο Παράρτημα. Παραδείγματα χρήσης αναδρομικών ορισμών θα δει επίσης αρκετά ο αναγνώστης στα επόμενα κεφάλαια.

Παραδείγματα και Ασκήσεις

1.19 Εστω $f : X \longrightarrow Y$ μια συνάρτηση και $A, B \subseteq X$. Να δειχθεί ότι $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ (οι συναρτήσεις διατηρούν τις ενώσεις), όπου για ένα σύνολο U είναι $f(U) = \{y \in Y | \, \exists x \in X \; y = f(x)\}$.

Λύση: Εστω $y \in f(A \cup B)$. Τότε υπάρχει $x \in A \cup B$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Αν $x \in A$, τότε $f(x) = y \in f(A) \subseteq f(A) \cup f(B)$. Παρόμοια, αν $x \in B$, τότε $f(x) = y \in f(B) \subseteq f(A) \subseteq f(B)$. Συμπεραίνουμε ότι $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$.

Αντίστροφα, έστω $y \in f(A) \cup f(B)$. Αν $y \in f(A)$, τότε έστω $a \in A$ ώστε να είναι $y = f(a)$. Αλλά $a \in A \subseteq A \cup B$ σημαίνει ότι $y \in f(A \cup B)$. Παρόμοια είναι και η περίπτωση που $y \in f(B)$, ώστε $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$. Συνεπώς $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

1.20 Να δειχθεί ότι $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Λύση: Αν $y \in f(A \cap B)$, έστω $x \in A \cap B$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Επειδή $A \cap B \subseteq A$ και $A \cap B \subseteq B$, θα είναι $x \in A$, οπότε $y \in f(A)$, και $x \in B$, οπότε $y \in f(B)$. Συνεπώς, $y \in f(A) \cap f(B)$.

Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει. Διότι αν $y \in f(A) \cap f(B)$, τότε συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $a \in A$ ώστε $y = f(a)$ και ότι υπάρχει $b \in B$ ώστε να είναι επίσης $y = f(b)$. Αλλά δεν είναι απαραίτητο να υπάρχει στοιχείο x στην *τομή* $A \cap B$ για το οποίο να ισχύει $y = f(x)$. Για παράδειγμα, έστω $A = \{a, x\}$ και $B = \{b, x\}$ και X ένα σύνολο που περιέχει τα στοιχεία u, v. Εστω f η συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(a) = f(b) = u$ και $f(x) = v$. Είναι $A \cap B = \{x\}$ και $f(A \cap B) = f(\{x\}) = \{f(x)\} = \{v\}$. Ομως, $f(A) = \{u, v\} = f(B)$, ώστε

$$f(\{x\}) = f(A \cap B) = \{v\} \subset \{u, v\} = f(A) \cap f(B)$$

1.21 Αν $f : A \longrightarrow B$, τότε η σχέση f^{-1} δεν είναι γενικά συνάρτηση από το B στο A (αφού μπορεί, για τυχόν $b \in B$, να υπάρχουν περισσότερα από ένα

στοιχεία στο A των οποίων το b είναι η εικόνα, έστω $a_1, a_2 \in A$ για τα οποία να ισχύει $f(a_1) = b = f(a_2)$). Μπορούμε, όμως, να θεωρήσουμε την f^{-1} ως συνάρτηση από το B στο *δυναμοσύνολο* του A, $f^{-1} : B \longrightarrow P(A)$. Ωστε, $f^{-1}(b) = \{a \in A |\, f(a) = b\}$. Δείξτε ότι για υποσύνολα $U, V \subseteq B$ ισχύει

$$f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) \text{ και } f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$$

(Οι αντίστροφες συναρτήσεις διατηρούν όχι μόνον ενώσεις, αλλά και τομές)

1.22 Αφού οι συναρτήσεις είναι σύνολα, η ισότητα συναρτήσεων είναι ισότητα συνόλων. Δηλαδή, $f = g$ αν και μόνον αν για κάθε ζευγάρι (a, b), $(a, b) \in f$ αν και μόνον αν $(a, b) \in g$. Δείξτε, με βάση τον ορισμό των συναρτήσεων, ότι $f = g$ αν και μόνον αν

1. $dom(f) = dom(g)$ και
2. $\forall x \in dom(f)\ f(x) = g(x)$

1.23 Δείξτε ότι αν $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ είναι συναρτήσεις, τότε

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

1.24 Εστω A, B σύνολα και $p_1 : A \times B \longrightarrow A$, $p_2 : A \times B \longrightarrow B$ οι *συναρτήσεις προβολής*, που ορίζοντα με τις σχέσεις $p_1(a, b) = a$ και $p_2(a, b) = b$. Αν $f : X \longrightarrow A$ και $g : X \longrightarrow B$ είναι συναρτήσεις, τότε ορίζουμε τη συνάρτηση $(f, g) : X \longrightarrow A \times B$, θέτοντας $(f, g)(x) = (fx, gx)$. Δείξτε ότι $(p_1, p_2) : A \times B \longrightarrow A \times B$ είναι η ταυτοτική συνάρτηση $1_{A\times B}(a, b) = (a, b)$.

1.25 Η *διαχωρισμένη ένωση* συνόλων ορίζεται θέτοντας

$$A + B = (\{0\} \times A) \cup (\{1\} \times B)$$

Εστω $\jmath_A, \jmath_B$ οι συναρτήσεις που εμφυτεύουν τα A, B στη διαχωρισμένη ένωση $A + B$ (π.χ. $\jmath_A(a) = (0, a)$). Δείξτε ότι αν C είναι τυχόν σύνολο και $f : A \longrightarrow C$, $g : B \longrightarrow C$ συναρτήσεις, τότε υπάρχει μια μοναδική συνάρτηση $h : A + B \longrightarrow C$ (την οποία συμβολίζουμε συνήθως με $[f, g]$) ώστε να ισχύει $f = h \circ \jmath_A$ και $g = h \circ \jmath_B$. Δείξτε επίσης ότι $[\jmath_A, \jmath_B]$ είναι η ταυτοτική συνάρτηση στο $A + B$.

1.26 Εστω $R \subseteq A \times A$ μια σχέση. Δείξτε ότι υπάρχει μια μικρότερη σχέση ισοδυναμιας που περιέχει την R.

Λύση: Θέτουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &::= \{S \mid \text{όπου } S \text{ είναι σχέση ισοδυναμιας και } R \subseteq S \subseteq A \times A\} \\ \widehat{R} &::= \bigcap \mathbf{R} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $\mathbf{R} \neq \emptyset$, αφού η καθολική σχέση $A \times A$ είναι σχέση ισοδυναμιας και περιέχει την R. Εχουμε $R \subseteq \widehat{R}$ (αφού η R περιέχεται σε κάθε S στο σύνολο $\mathbf{R}$ και η $\widehat{R}$ ορίζεται ως η τομή αυτού του συνόλου). Πρέπει να δείξουμε ότι η τομή αυτή είναι σχέση ισοδυναμιας.

Θα ισχύει $x\widehat{R}x$ αν και μόνον αν για κάθε $S \in \mathbf{R}$ ισχύει xSx. Αυτό όμως πράγματι ισχύει, αφου τα S είναι σχέσεις ισοδυναμιας. Εστω τώρα ότι $x\widehat{R}y$. Τότε για κάθε $S \in \mathbf{R}$ θα ισχύει xSy. Επειδή τα S είναι σχέσεις ισοδυναμιας, θα έχουμε και ySx (για κάθε S). Συνεπώς, ισχύει $y\widehat{R}x$. Εστω, επίσης, ότι $x\widehat{R}y\widehat{R}z$. Τότε, για κάθε $S \in \mathbf{R}$ θα έχουμε $xSySz$. Τα S είναι σχέσεις ισοδυναμιας, συνεπώς θα ισχύει (για κάθε S) xSz. Συμπεραίνουμε ότι $x\widehat{R}z$.

Η σχέση $\widehat{R}$ είναι η μικρότερη σχέση ισοδυναμιας που περιέχει την R, διότι αν S είναι οποιαδήποτε ισοδυναμια που περιέχει την R, τότε θα είναι $S \in \mathbf{R}$. Συνεπώς, $\widehat{R} = \bigcap \mathbf{R} \subseteq S$.

1.27 Εστω N το σύνολο των φυσικών αριθμών και $\Delta \subseteq N \times N$ η σχέση που ορίζεται με τη συνθήκη $m\Delta n$ αν και μόνον αν ο m διαιρεί τον n. Εστω, επίσης, η σχέση $\Pi \subseteq N \times N$ που ορίζεται με τη συνθήκη $m\Pi n$ αν και μόνον αν ο m είναι πολλαπλάσιο του n. Τότε οι σχέσεις Δ, Π είναι αντίστροφες η μια της άλλης.

Λύση: Πράγματι, έστω $x\Delta y$. Τότε ο x διαιρεί τον y και, επομένως, υπάρχει k ώστε να ισχύει $y = kx$. Τότε, όμως, ο y είναι πολλαπλάσιο του x και, συνεπώς, θα ισχύει $y\Pi x$. Ωστε $\Pi = \Delta^{-1}$. Παρόμοια δείχνουμε ότι και $\Delta = \Pi^{-1}$.

1.28 Το αυτοπαθές (ή το μεταβατικό) κλείσιμο μιας σχέσης R είναι η μικρότερη αυτοπαθής (αντίστοιχα, μεταβατική) σχέση R^* που περιέχει την R. Δείξτε πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε το αυτοπαθές (μεταβατικό) κλείσιμο μιας σχέσης R.

1.29 Η συμμετρικοποίηση μιας σχέσης R είναι η μικρότερη συμμετρική σχέση $R^{\sim}$ που περιέχει την R. Δείξτε πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε τη συμμετρικοποίηση μιας σχέσης R.

1.30 (Iteration) Εστω R μια διμελής σχέση στο σύνολο X. Ορίζουμε τις σχέσεις R^n, $n \geq 0$ ως εξής:

- xR^0y αν και μόνον αν $x = y$
- $xR^{n+1}y$ αν και μόνον αν $x(R \circ R^n)y$ (δηλ αν και μόνον αν υπάρχει z ώστε να ισχύει xRz και zR^ny)

Ορίζουμε τη σχέση R^* με τη συνθήκη xR^*y αν και μόνον αν $\exists n\, xR^ny$. Δείξτε ότι

1. xR^*x
2. Αν xRy και yR^*z, τότε xR^*z
3. Αν xR^*y και yRz, τότε xR^*z
4. Αν xR^*y και yR^*z, τότε xR^*z

1.31 Να δειχθεί ότι το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι ισάριθμο με το σύνολο των αρτίων φυσικών αριθμών.

Λύση: Εστω N και A τα σύνολα των φυσικών και αρτίων φυσικών αριθμών, αντίστοιχα. Ορίζουμε συναρτήσεις $f : A \longrightarrow N$, θέτοντας $f(x) = x$, και $g : N \longrightarrow A$, θέτοντας $g(x) = 2x$. Οι συναρτήσεις αυτές είναι εμφυτεύσεις. Πράγματι, αν $f(x) = f(y)$, τότε $x = f(x) = f(y) = y$. Επίσης, αν $g(x) = g(y)$, τότε $2x = g(x) = g(y) = 2y$ και συνεπώς $x = y$. Συμπεραίνουμε ότι $f : A \preceq N$ και $g : N \preceq A$. Από το Θεώρημα Cantor-Bernstein προκύπτει ότι $A \approx N$.

1.32 Να δειχθεί ότι το σύνολο N των φυσικών αριθμών είναι ισάριθμο με το σύνολο Z των ακεραίων αριθμών.

Λύση: Η ταυτοτική συνάρτηση $f : N \longrightarrow Z$, $f(x) = x$ είναι εμφύτευση, ώστε $N \preceq Z$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g : Z \longrightarrow N$ θέτοντας

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x = 0 \\ 2x & \text{αν } x > 0 \\ 2(-x) + 1 & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

Προφανώς, αν $2x = 2y$ τότε $x = y$ και αν $2(-x)+1 = 2(-y)+1$, τότε $x = y$. Δηλαδή η συνάρτηση g είναι μια εμφύτευση $g : Z \preceq N$. Συμπεραίνουμε, από το Θεώρημα Cantor-Bernstein, ότι $Z \approx N$.

1.33 Να δειχθεί ότι αν $A \approx X$ και $B \approx Y$ τότε $A \times B \approx X \times Y$.

Λύση: Εστω $f : A \approx X$ και $g : B \approx Y$ αμφιμονότιμες συναρτήσεις. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f \times g : A \times B \longrightarrow X \times Y$, θέτοντας $(f \times g)(a,b) = (fa, gb) \in X \times Y$. Αν $(f \times g)(a,b) = (f \times g)(a',b')$, τότε $(fa, gb) = (fa', gb')$ και συνεπώς $fa = fa'$ και $gb = gb'$. Αλλά οι συναρτήσεις f, g είναι μονότιμες και, συνεπώς, $a = a'$ και $b = b'$. Αυτό δείχνει ότι η συνάρτηση $f \times g$ είναι μονοσήμαντη. Συνεπώς, $A \times B \preceq X \times Y$. Η συνάρτηση $f \times g$ είναι όμως και επιμορφική. Αν $(x,y) \in X \times Y$, τότε $x \in X$ και $y \in Y$. Επειδή οι f, g είναι επιμορφικές, υπάρχουν a, b ώστε να ισχύει $x = fa$, $y = gb$. Τότε όμως $(x,y) = (f \times g)(a,b)$. Συνεπώς $f \times g : A \times B \approx X \times Y$.

1.34 Να δειχθεί ότι $N \approx N \times N$ και $Z \approx Z \times Z$, όπου N, Z είναι τα σύνολα των φυσικών και των ακεραίων αριθμών, αντίστοιχα.

Λύση: Η συνάρτηση $n \mapsto (n,n)$ είναι μια εμφύτευση του N στο $N \times N$. Για το αντίστροφο, ορίζουμε $f : N \times N \longrightarrow N$ θέτοντας $f(m,n) = 2^m 3^n$. Αν $f(m,n) = f(r,s)$ τότε $2^m 3^n = 2^r 3^s$ και συνεπώς, χρησιμοποιώντας κανόνες δυνάμεων, έχουμε $2^{m-r} = 3^{s-n}$.

Αν $m = r$, τότε $2^{m-r} = 2^0 = 1 = 3^{s-n}$ και, συνεπώς, $3^{s-n} = 3^0$, οπότε $s - n = 0$ (επειδή η εκθετική συνάρτηση είναι μονοσήμαντη), δηλαδή $s = n$.

Αντίστοιχα, ξεκινώντας από την υπόθεση ότι $s = n$, καταλήγουμε με παρόμοιο επιχείρημα ότι θα πρέπει επίσης να ισχύει $m = r$.

Εστω τώρα ότι $m - r = k \neq 0$ και $s - n = t \neq 0$. Τότε όμως θα πρέπει ο αριθμός 2 να διαιρεί την παράσταση 3^t. Αυτό όμως είναι αδύνατο, επειδή ο 2 δεν διαιρεί τον 3.

Καταλήγουμε ότι θα πρέπει να ισχύει $m = r$ και $n = s$. Αυτό δείχνει ότι η συνάρτηση f είναι μονοσήμαντη. Συνεπώς, δείξαμε ότι υπάρχει εμφύτευση $f : N \times N \preceq N$. Προκύπτει, από το Θεώρημα Cantor-Bernstein, ότι $N \approx N \times N$.

Για να δείξουμε ότι $Z \approx Z \times Z$ χρησιμοποιούμε την προηγούμενη απόδειξη για το N, καθώς και το Παράδειγμα 1.33. Ωστε, αφού $N \approx Z$, θα είναι και $N \times N \approx Z \times Z$. Αλλά δείξαμε επίσης ότι $N \approx Z$ και $N \approx N \times N$. Συνεπώς έχουμε

$$Z \times Z \approx N \times N \approx N \approx Z$$

1.35 Τα σύνολα $A \times B$ και $B \times A$ είναι ισοδύναμα.

Λύση: Πράγματι, έστω $f : A \times B \longrightarrow B \times A$ η συνάρτηση που ορίζεται με τη σχέση $f(a,b) = (b,a)$. Η f είναι εμφύτευση, αφού αν $(b,a) = (b',a')$, τότε $b = b'$ και $a = a'$. Ορίζεται, επομένως, και η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : B \times A \longrightarrow A \times B$, με τον προφανή κανόνα, $f^{-1}(b,a) = (a,b)$. Ωστε $A \times B \approx B \times A$.

1.36 Ισχύει $A \times (B \times C) \approx (A \times B) \times C$.

Λύση: Πράγματι, έστω $f : A \times (B \times C) \longrightarrow (A \times B) \times C$ η συνάρτηση $f(a,(b,c)) = ((a,b),c)$. Η f είναι 1-1, διότι αν $f(a,(b,c)) = f(a',(b',c'))$, τότε εύκολα προκύπτει από τη βασική ιδιότητα διατεταγμένων ζευγών ότι $a = a', b = b'$ και $c = c'$. Επομένως, $A \times (B \times C) \preceq (A \times B) \times C$. Αντιστρόφως, έστω $g : (A \times B) \times C \longrightarrow A \times (B \times C)$ η συνάρτηση $g((a,b),c) = (a,(b,c))$. Η g θα είναι επίσης εμφύτευση, ώστε προκύπτει ότι $A \times (B \times C) \approx (A \times B) \times C$.

1.37 Το σύνολο N όλων των φυσικών αριθμών είναι ισοδύναμο, τόσο με το σύνολο E των αρτίων φυσικών, όσο και με το σύνολο O των περιττών φυσικών.

Λύση: Η συνάρτηση $f : E \longrightarrow N$ που είναι η ταυτότητα στο E, δηλαδή $f(x) = x$, είναι εμφύτευση του E στο X. Αντίστροφα, η συνάρτηση $g : N \longrightarrow E$ που ορίζεται με τη σχέση $g(x) = 2x$ είναι εμφύτευση, διότι αν $2x = 2y$, τότε $x = y$ (επίσης, βέβαια, αν x είναι φυσικός, τότε $2x$ είναι άρτιος φυσικός). Επομένως, προκύπτει από το θεώρημα των Cantor-Bernstein ότι $N \approx E$. Παρόμοια είναι και η κατάσταση με το σύνολο των περιττών αριθμών, επιλέγοντας τη συνάρτηση $h : N \longrightarrow O$ που ορίζεται με τη σχέση $h(n) = 2n + 1$.

1.38 Να δειχθεί ότι $[(A \times B) \to C] \approx [A \to [B \to C]]$

1.39 Να δειχθεί ότι το σύνολο των αρτίων φυσικών αριθμών είναι ισάριθμο με το σύνολο των περιττών φυσικών αριθμών.

1.40 Να δειχθεί ότι το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι ισάριθμο με το σύνολο των ρητών αριθμών.

1.41 Εστω n τυχόν φυσικός αριθμός. Επειδή ο n είναι σύνολο, έχει νόημα να γράφουμε $[n \to A]$ για το σύνολο των συναρτήσεων από το n στο σύνολο A. Δείξτε ότι $[n \to A] \approx \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n-\pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\varepsilon\varsigma}$.

1.42 Δείξτε ότι ισχύει $[(A \times B) \to C] \approx [A \to [B \to C]]$.

1.43 Να δειχθεί ότι $A \times ((B \times C) \times D) \approx (A \times B) \times (C \times D)$.

1.44 Δείξτε ότι $[A \to B] \preceq P(A \times B)$, όπου P είναι ο τελεστής δυναμοσυνόλου.

1.45 Δείξτε ότι, αν $a \approx m$, $b \approx n$, τότε $a + b \approx m + n$, αλλά $a \cup b \approx m + n$ αν και μόνον αν $a \cap b = \emptyset$.

1.3 Καλές Διατάξεις και Επαγωγή

Εστω A σύνολο και $R \subseteq A^2$ μια σχέση πάνω στο A. Η σχέση R ονομάζεται

- **αντισυμμετρική** (antisymmetric), όταν για κάθε $a, a' \in A$ ισχύει: αν aRa' και $a'Ra$ τότε $a = a'$
- **σχέση μερικής διάταξης** (partial order), αν είναι μη-αυτοπαθής και μεταβατική
- **σχέση (ολικής ή γραμμικής) διάταξης** (total order, linear order ή απλά order), αν είναι σχέση μερικής διάταξης και επιπλέον για κάθε $a, b \in A$ ισχύει τουλάχιστον μια από τις σχέσεις $a = b$, aRb ή bRa (αρχή τριχοτομιας).

Παρατήρηση 1.3.1 Συνήθως, χρησιμοποιούμε το σύμβολο $<$ για σχέση (μερικής ή ολικής) διάταξης. Το αυτοπαθές κλείσιμο μιας ολικής διάταξης συμβολίζεται με $\leq$, όπου $a \leq b$ αν και μόνον αν $a = b$ ή $a < b$. Παρατηρούμε ότι αν η σχέση $<$ είναι μια μερική διάταξη, τότε το αυτοπαθές κλείσιμό της $\leq$ είναι μια σχέση αυτοπαθής, αντισυμμετρική και

μεταβατική. Αντίστροφα, αν $\leq$ είναι μια σχέση με τις παραπάνω ιδιότητες και ορίσουμε $x < y$ αν και μόνον αν $x \neq y$ και $x \leq y$, τότε η $<$ είναι μη-αυτοπαθής και μεταβατική. Θα αναφερόμαστε στις σχέσεις $<$ ή $\leq$ σαν σχέσεις μερικής διάταξης, εκτός και αν χρειάζεται να κάνουμε την αυστηρή διάκριση.

Τα διαστήματα σε μια δομή διάταξης $\langle X, <\rangle$ ορίζονται με το γνωστό τρόπο:

$$[x, y] = \{z \in X |\, x \leq z \leq y\} \qquad (x, y] = \{z \in X |\, x < z \leq y\}$$

$$(x, y) = \{z \in X |\, x < z < y\} \qquad [x, y) = \{z \in X |\, x \leq z < y\}$$

Εστω τώρα A σύνολο, $\leq$ μια σχέση μερικής διάταξης στο A και $a \in A$. Θα λέμε ότι το a είναι το **ελάχιστο στοιχείο** του A (ως προς τη διάταξη $\leq$) όταν για κάθε $b \in A$ έχουμε $a \leq b$.

Γενικότερα, το a είναι το ελάχιστο στοιχείο του A με την ιδιότητα Φ, όταν ισχύει $\Phi(a)$ (δηλαδή το a έχει την ιδιότητα Φ) και αν για κάθε $b \in A$, αν $\Phi(b)$, τότε $a \leq b$. Με άλλα λόγια, το a σ'αυτή την περίπτωση είναι το ελάχιστο στοιχείο του συνόλου $\{b \in A |\, \Phi(b)\} = A \cap \{b |\, \Phi(b)\}$.

Εστω A σύνολο και $<$ μια διμελής σχέση στο A. Η δομή $\mathcal{A} = \langle A, <\rangle$ ονομάζεται **δομή καλής διάταξης** (well-ordering) όταν ισχύει

1. Η σχέση $<$ είναι γραμμική διάταξη, και
2. Κάθε μη-κενό υποσύνολο του A έχει ελάχιστο στοιχείο.

Το τυπικό παράδειγμα δομής καλής διάταξης, με το οποίο είναι εξοικειωμένος ο αναγνώστης, είναι η δομή των φυσικών αριθμών με τη συνηθισμένη τους διάταξη

$$0 < 1 < 2 < \cdots < n < n + 1 < \cdots$$

Ωστόσο, η δομή $\langle Z, <\rangle$ των ακεραίων

$$\cdots < -(n{+}1) < -n < \cdots < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < \cdots < n < n{+}1 < \cdots$$

δεν είναι καλή διάταξη, αφού για παράδειγμα το υποσύνολο $\{x \in Z | x < 0\}$ είναι μη-κενό, αλλά δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. Η δομή αυτή είναι μια γραμμική (ολική) διάταξη, αλλά όχι μια καλή διάταξη.

Θεώρημα 1.3.2 (Αρχή Ελάχιστου Στοιχείου και Επαγωγή) *Εστω* $\langle A, < \rangle$ *μια δομή καλής διάταξης και* Φ *μια ιδιότητα.*

1. *Αν υπάρχει* $x \in A$ *ώστε* $\Phi(x)$ *(δηλαδή το* x *να έχει την ιδιότητα* Φ*), τότε υπάρχει ένα* ελάχιστο $a \in A$ *ωστε* $\Phi(a)$.

2. *Αν* $\forall x \in A$ *ισχύει* $(\forall y \in A)(y < x \Rightarrow \Phi(y)) \Longrightarrow \Phi(x)$, *τότε ισχύει* $(\forall x \in A)\Phi(x)$. *Δηλαδή, η υπόθεση ότι για κάθε* $x \in A$ *συμβαίνει ότι το* x *έχει την ιδιότητα* Φ, *υπό την προϋπόθεση ότι κάθε προηγούμενο στοιχείο* $y < x$ *έχει την ιδιότητα* Φ, *συνεπάγεται ότι κάθε στοιχείο* $x \in A$ *έχει την ιδιότητα* Φ. ∎

Συνέπεια του Θεωρήματος Επαγωγής σε Καλές Διατάξεις είναι και το θεώρημα επαγωγής σε φυσικούς αριθμούς, το οποίο διατυπώνουμε παρακάτω.

Πόρισμα 1.3.3 (Μαθηματική Επαγωγή) *Εστω* Φ *μια ιδιότητα φυσικών αριθμών. Αν έχουμε*

1. $\Phi(0)$

2. *Για κάθε φυσικό αριθμό* n, *αν* $\Phi(n)$ *τότε* $\Phi(n+1)$

τότε κάθε φυσικός αριθμός έχει την ιδιότητα Φ. ∎

Παραδείγματα και Ασκήσεις

1.46 Εστω $\langle A, < \rangle$ μια δομή καλής διάταξης και $B \subseteq A$. Γράφουμε $\langle B, < \rangle$ για τη δομή που προκύπτει περιορίζοντας τη σχέση $<$ στα στοιχεία του B. Να δειχθεί ότι και η δομή $\langle B, < \rangle$ είναι δομή καλής διάταξης.

Λύση: Η σχέση $<$ είναι μη-αυτοπαθής και μεταβατική στα στοιχεία του B επειδή αυτά είναι και στοιχεία του A. Επίσης, αν $b, b' \in B$ τότε $b, b' \in A$ ώστε θα ισχύει $b = b'$, ή $b < b'$, ή $b > b'$, δηλαδή η δομή $\langle B, < \rangle$ είναι μια γραμμική διάταξη. Εστω επίσης $x \in X \subseteq B$ ένα μη κενό υποσύνολο του B. Τότε το X είναι ένα μη κενό υποσύνολο του A και συνεπώς έχει ελάχιστο στοιχείο u. Συμπεραίνουμε επομένως ότι η δομή $\langle B, < \rangle$ είναι δομή καλής διάταξης.

1.47 Αποδείξτε ότι αν $f : A \approx B$ και το A είναι καλή διάταξη, τότε και το B είναι καλή διάταξη.

1.48 Εστω $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Δείξτε ότι το δυναμοσύνολο του X, $P(X)$, αποτελεί μια σχέση μερικής διάταξης. Είναι η διάταξη αυτή γραμμική; Είναι καλή διάταξη; (Αν ναι, αποδείξτε το. Αν όχι, δώστε ένα αντιπαράδειγμα).

1.49 Εξηγείστε γιατί το σύνολο των πραγματικών αριθμών με τη συνηθισμένη διάταξη των πραγματικών δεν αποτελεί δομή καλής διάταξης.

1.50 Θεωρείστε το κλειστό διάστημα [0,1] ως υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Αποτελεί το διάστημα αυτό γραμμική διάταξη; Μήπως αποτελεί καλή διάταξη;

1.51 Να δειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει $2^n \geq 1$.

Λύση: Το σύνολο των φυσικών αριθμών αποτελεί μια καλή διάταξη και επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Επαγωγής. Δεχόμαστε ως υπόθεση ότι

$$(\forall n)[(\forall m)(m < n \Longrightarrow 2^m \geq 1) \implies 2^n \geq 1]$$

Θα δείξουμε ότι $(\forall n)(2^n \geq 1)$. Εστω n τυχόν φυσικός. Αν είναι $n = 0$, τότε $2^n = 2^0 = 1 \geq 1$. Εστω τώρα $n > 0$. Υποθέτουμε για την επαγωγή ότι για κάθε $m < n$ ισχύει $2^m \geq 1$. Αλλά τότε έχουμε $2^n = 2 * 2^{n-1} \geq 2 * 1 \geq 1$, διότι $0 \leq n - 1 < n$ και άρα ισχύει για τον $n - 1$ ότι $2^{n-1} \geq 1$. Επομένως μπορούμε να συμπεράνουμε ότι για κάθε n ισχύει $2^n \geq 1$.

1.52 Να δειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό n, $0+1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Λύση: Για $n = 0$ η πρόταση είναι προφανής. Εστω ότι $1 + \cdots + m = \dfrac{m(m+1)}{2}$. Τότε

$$\begin{aligned} 1 + \cdots + m + (m+1) &= \frac{m(m+1)}{2} + (m+1) = \frac{m^2+m}{2} + \frac{2m+2}{2} = \\ &= \frac{m^2+3m+2}{2} = \frac{(m+1)(m+2)}{2} = \frac{(m+1)[(m+1)+1]}{2} \end{aligned}$$

Από το αξίωμα επαγωγής, συμπεραίνουμε ότι για κάθε $n \in \omega$ έχουμε $0 + 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

1.53 Να δειχθεί ότι $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^{n+1}-1}{2^n}$.

1.54 Να δειχθεί ότι $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

1.55 Να δειχθεί ότι για $n \geq 1$ ισχύει $2^{n-1} \leq n!$.

1.56 Να δειχθεί ότι $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1.57 Εστω $(A, <)$ μια δομή καλής διάταξης και υποθέστε ότι $\emptyset \in A$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα ελάχιστο μεταβατικό σύνολο στην A (ένα σύνολο x είναι μεταβατικό, αν και μόνον αν $\forall y, z$ αν $z \in y \in x$, τότε και $z \in x$).

1.58 Γράφουμε $-A$ αντί για $X \setminus A$. Να δειχθεί ότι

$$-(A_0 \cap \cdots \cap A_n) = (-A_0) \cup \cdots \cup (-A_n)$$

για κάθε φυσικό αριθμό n.

1.59 Να δειχθεί επίσης ότι

$$-(A_0 \cup \cdots \cup A_n) = (-A_0) \cap \cdots \cap (-A_n)$$

για κάθε φυσικό αριθμό n.

1.60 Δείξτε ότι $n \times B \approx \underbrace{B + \cdots + B}_{n-\pi\rho o\sigma\theta\varepsilon\tau\alpha\acute{\iota}o\iota}$, όπου $+$ είναι ο τελεστής διαχωρισμένης ένωσης.

1.61 Χρησιμοποιώντας τις Ασκήσεις 1.41 και 1.42, αποδείξτε ότι

$$[(m \times n) \to A] \approx \underbrace{A \times \cdots \times A}_{mn-\pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\varepsilon\varsigma}$$

για όλους τους φυσικούς αριθμούς m, n.

1.62 Να δειχθεί ότι $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

1.63 Να δειχθεί ότι $\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$.

1.64 Να δειχθεί ότι $\mathcal{N} \approx \{10, 11, 12, 13 \ldots\} = \{n \in \mathcal{N} \mid n \geq 10\}$.

1.4 Διατακτικοί και Πληθικοί Αριθμοί

Ενας φυσικός αριθμός μπορεί να αναπαρασταθεί συνολοθεωρητικά ως το σύνολο όλων των προηγουμένων του φυσικών αριθμών (ώστε $0 = \emptyset$, $1 = \{0\} = \{\emptyset\}$, και $n+1 = \{0, \ldots, n-1, n\} = n \cup \{n\}$. Ενα σύνολο A ονομάζεται **μεταβατικό** (transitive), όταν για κάθε μέλος $a \in A$ και κάθε b, αν $b \in a$, τότε $b \in A$, δηλαδή αν τα μέλη των μελών του είναι επίσης και δικά του μέλη. Ενα σύνολο x ονομάζεται **διατακτικός αριθμός** (ordinal number), αν είναι μεταβατικό και καλά διατεταγμένο από τη σχέση $\in$.

Συμβολίζουμε με On τη συλλογή $\{x |\ x \text{ είναι διατακτικός αριθμός}\}$.

Για παράδειγμα, έστω $a = \emptyset$, $b = \{a\}$, $c = \{a, b\}$. Τα σύνολα αυτά είναι μεταβατικά και καλά διατεταγμένα από τη σχέση μέλους, και επομένως είναι διατακτικοί αριθμοί. Το σύνολο $\{b\}$ δεν είναι διατακτικός αριθμός διότι δεν είναι μεταβατικό. Πράγματι, $a \in b$ αλλά $a \notin \{b\}$.

Πρόταση 1.4.1 *Κάθε φυσικός αριθμός είναι διατακτικός. Επίσης, το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι διατακτικός αριθμός (ο οποίος συμβολίζεται με ω).* ∎

Από τον τρόπο που έχουμε αναπαραστήσει τους φυσικούς προκύπτει ότι για κάθε n ισχύει $n + 1 = n \cup \{n\}$. Γενικεύοντας, λέμε ότι ένας διατακτικός αριθμός α είναι **επόμενος** (successor) του β αν $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$. Θα λέμε απλά ότι ο α είναι *επόμενος*, αν υπάρχει κάποιος διατακτικός αριθμός β έτσι ώστε $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$. Κάθε διατακτικός αριθμός που δεν είναι επόμενος ή 0 ονομάζεται **οριακός** (limit ordinal).

Προκύπτει επίσης ότι και $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$ είναι διατακτικός αριθμός, αυστηρά μεγαλύτερος του ω αφού $\omega \in \omega + 1$. Δημιουργείται έτσι μια ακολουθία διατακτικών αριθμών

$$\omega,\ \omega + 1, \ldots, \omega + n, \ldots$$

Επειδή $\bigcup_{n \in \omega} n = \omega$, έχουμε και $\bigcup_{n \in \omega} (\omega + n) = \omega + \omega$. Συμβολίζουμε το διατακτικό αριθμό $\omega + \omega$ με $\omega \cdot 2$. Προκύπτει έτσι μια άπειρη ακολουθία

$$\omega, \omega \cdot 2, \ldots, \omega \cdot n, \ldots$$

της οποίας η ένωση είναι ο αριθμός $\omega \cdot \omega = \omega^2 = \bigcup_{n \in \omega} \omega \cdot n$. Προκύπτει και πάλι μια ακολουθία

$$\omega, \omega^2, \ldots, \omega^n, \ldots$$

της οποίας το όριο (η ένωση) είναι ο αριθμός $\omega^\omega = \bigcup_{n \in \omega} \omega^n$. Συνεχίζοντας κατ'αυτόν τον τρόπο παίρνουμε την ακολουθία

$$\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \ldots$$

της οποίας το όριο (ένωση) συμβολίζουμε με ω_1. Φυσικά μπορούμε να επαναλάβουμε τα προηγούμενα με τον ω_1 αντί για τον ω, παίρνοντας έτσι τον ω_2, και τα λοιπά!

Διατυπώνουμε χωρίς απόδειξη το ακόλουθο θεώρημα επαγωγής σε διατακτικούς αριθμούς.

Πρόταση 1.4.2 (Επαγωγή σε Διατακτικούς Αριθμούς) *Εστω Φ μια ιδιότητα διατακτικών αριθμών. Αν έχουμε*

1. $\Phi(0)$ *(δηλαδή το μηδέν έχει την ιδιότητα Φ)*
2. *Για κάθε α, αν $\Phi(\alpha)$ τότε $\Phi(\alpha \cup \{\alpha\})$ (δηλαδή αν ο α έχει την ιδιότητα Φ, τότε την έχει και ο επόμενός του)*
3. *Για κάθε οριακό διατακτικό αριθμό λ, άν όλα τα μέλη $\beta \in \lambda$ έχουν την ιδιότητα Φ, τότε και ο λ έχει την ιδιότητα Φ*

τότε όλοι οι διατακτικοί αριθμοί έχουν την ιδιότητα Φ. ∎

Ολοκληρώνουμε αυτό το υποκεφάλαιο, εισάγοντας στοιχειωδώς την έννοια του πληθικού αριθμού.

Ενα σύνολο είναι **πεπερασμένο** ανν είναι ισάριθμο με κάποιο φυσικό αριθμό. Αλλιώς είναι **άπειρο** Ενα άπειρο σύνολο x θα ονομάζεται **αριθμήσιμο** (countable) αν και μόνον αν $x \preceq \omega$ και **αναρίθμητο** (uncountable) στην αντίθετη περίπτωση. Ισοδύναμα, το x είναι αριθμήσιμο αν $x \approx \omega$ ή υπάρχει φυσικός αριθμός $n \in \omega$ έτσι ώστε $x \approx n$. Στην περίπτωση που $x \approx \omega$ το σύνολο θα ονομάζεται *απειραριθμήσιμο*.

Η σχέση ισαριθμίας μας δίνει τη δυνατότητα να ορίσουμε ένα μέτρο μεγέθους ενός συνόλου. Ο **πληθικός αριθμός** $|x|$ ενός καλά διατεταγμένου συνόλου x είναι ο μικρότερος διατακτικός αριθμός α που είναι ισάριθμος με το x, $\alpha \approx x$. Αν υιοθετήσουμε την αρχή καλής διάταξης (κάθε σύνολο είναι καλά διατάξιμο) τότε ορίζεται ο πληθικός αριθμός κάθε συνόλου. Κάθε φυσικός αριθμός είναι ταυτόχρονα διατακτικός και πληθικός αριθμός, αφού ο μικρότερος διατακτικός αριθμός που είναι ισάριθμος με το φυσικό αριθμό n είναι ο ίδιος ο n. Επίσης, το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι ταυτόχρονα διατακτικός και πληθικός αριθμός. Χρησιμοποιούμε μάλιστα το συμβολισμό ω όταν σκεφτόμαστε το σύνολο των φυσικών ως διατακτικό αριθμό και το συμβολισμό $\aleph_0$ όταν το σκεφτόμαστε ως πληθικό αριθμό. Δεν είναι όμως όλοι οι διατακτικοί αριθμοί και πληθικοί αριθμοί. Για παράδειγμα, $\omega + n \approx \omega$, για κάθε φυσικό αριθμό n, ώστε $|\omega + n| = \aleph_0 = |\omega|$.

Παραδείγματα και Ασκήσεις

1.65 Να δειχθεί ότι αν a, b είναι πεπερασμένα σύνολα, τότε και $a \cup b$ είναι πεπερασμένο.

Λύση: Εστω m, n φυσικοί αριθμοί ώστε να ισχύει $a \approx m$ και $b \approx n$. Αρκεί να δείξουμε ότι $a \cup b \preceq m + n$. Εστω $f : a \approx m$ και $g : b \approx n$ και $a + b$ η διαχωρισμένη ένωση των a, b, $a + b = (\{0\} \times a) \cup (\{1\} \times b\})$. Τότε η συνάρτηση $h : a \cup b \longrightarrow a + b$

$$h(x) = \begin{cases} (0, x) & \text{αν } x \in a \\ (1, x) & \text{αν } x \in b \setminus a \end{cases}$$

εμφυτεύει την ένωση στη διαχωρισμένη ένωση, ώστε $a \cup b \preceq a + b$. Ορίζουμε τώρα τη συνάρτηση $k : a + b \longrightarrow m + n$ θέτοντας $k(0, x) = f(x)$ και $k(1, x) = g(x)$. Επειδή οι f, g είναι 1-1, θα είναι και η k 1-1. Συνεπώς $a \cup b \preceq a + b \preceq m + n$. Αυτό δείχνει ότι η ένωση έχει το πολύ $m + n$ στοιχεία και, επομένως, είναι πεπερασμένο σύνολο.
(Γενικά, ισχύει $a + b \approx m + n$ και $a \cup b \approx m + n$ αν και μόνον αν $a \cap b = \emptyset$.

1.66 Αν $e : N \longrightarrow A$ είναι επιμορφική συνάρτηση, τότε το σύνολο A είναι αριθμήσιμο.

Λύση: Ορίζουμε μια συνάρτηση $f : A \longrightarrow N$ ως εξής. Αν $a \in A$, έστω $N_a = \{n \in N|\ e(n) = a\}$. Από το Παράδειγμα 1.46 προκύπτει ότι το N_a είναι καλή διάταξη. Επειδή η e είναι επιμορφική, $N_a \neq \emptyset$, ώστε υπάρχει $n \in N$ με την ιδιότητα: $\Phi(n)$ αν και μόνον αν $e(n) = a$. Συνεπώς, υπάρχει ένα ελάχιστο $m \in N_a$ για το οποίο ισχύει $e(m) = a$. Συμβολίζουμε το ελάχιστο αυτό στοιχείο με $\mu x.e(x) = a$ και ορίζουμε $f(a) = \mu x.e(x) = a$. Η συνάρτηση f είναι 1-1 (μονομορφική) διότι αν $f(a) = f(b) = n$, τότε θα έπρεπε να ισχύει $e(n) = a$ και $e(n) = b$, άτοπο, αφού η e είναι συνάρτηση. Επομένως $A \preceq N$ και το A είναι αριθμήσιμο.

1.67 Αριθμήσιμες ενώσεις αριθμήσιμων συνόλων είναι αριθμήσιμα σύνολα.

Απόδειξη: Εστω $B = \bigcup_n A_n$ και $f_n : N \approx A_n$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $h : N \times N \longrightarrow B$ θέτοντας $h(n,m) = f_n(m)$. Αν $b \in B$, τότε $b \in A_n$ για κάποιο φυσικό αριθμό n. Επειδή η $f_n : N \longrightarrow A_n$ είναι επιμορφική, έστω $m \in N$ ώστε να είναι $b = f_n(m)$. Τότε όμως $b = h(n,m)$. Συμπεραίνουμε ότι η $h : N \times N \longrightarrow B$ είναι επιμορφική. Στο Παράδειγμα 1.34 δείχνουμε ότι $N \times N \approx N$, δηλαδή το $N \times N$ είναι αριθμήσιμο. Χρησιμοποιώντας ως Λήμμα την Ασκηση 1.66 και την Ασκηση 1.47, προκύπτει ότι το B είναι αριθμήσιμο.∎

1.68 Να δειχθεί ότι $|\omega + n| = \aleph_0$, για κάθε φυσικό αριθμό n.

1.69 Εστω A ένα αριθμήσιμο σύνολο, $|A| = \aleph_0$. Με επαγωγή στο φυσικό αριθμό n, να δειχθεί ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $|\underbrace{A \times \cdots \times A}_{n-\pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\epsilon\varsigma}| = \aleph_0$.

1.70 Εστω A ένα αριθμήσιμο σύνολο συμβόλων, $A \approx \omega$. Μια λέξη στο αλφάβητο A είναι μια πεπερασμένη ακολουθία $a_1 \cdots a_n$, για $n \geq 1$. Εστω $W(A)$ το σύνολο των λέξεων στο αλφάβητο A. Δείξτε ότι $|W(A)| = |A|$.

1.71 Δείξτε ότι η μικρότερη σχέση ισοδυναμιας $\widehat{R}$ που περιέχει μια σχέση R (Παράδειγμα 1.26) ταυτίζεται με τη σχέση $R^\sharp$ που κατασκευάζεται θέτοντας

$R_0 = R$

$R_{\alpha+1} = \{(x,z)|(z,x) \in R_\alpha\} \cup \{(x,z)|\exists y\ (x,y),(y,z) \in R_\alpha\}$

$R_\lambda = \bigcup_{\alpha\in\lambda} R_\alpha$ (λ οριακός διατακτικός)

$R^\sharp = \bigcup_{\alpha \in On} R_\alpha$

1.72 Εστω $Rel(A)$ το σύνολο των διμελών σχέσεων στο αριθμήσιμο σύνολο $A \approx \omega$. Δείξτε ότι $Rel(A) \approx P(A)$.

1.73 Δώστε ένα παράδειγμα συνόλου x για το οποίο ισχύει $x \approx x \cup \{x\}$ και ένα παράδειγμα για το οποίο $x \prec x \cup \{x\}$.

Κεφάλαιο 2

Στοιχεία Θεωρίας Δικτυωτών

2.1 Ημιδικτυωτά, Δικτυωτά, Πλήρη Δικτυωτά

Ως σχέση μερικής διάταξης θα εννοούμε στη συνέχεια μια αυτοπαθή, αντισυμετρική και μεταβατική σχέση, σύμφωνα με την Παρατήρηση 1.3.1.

Εστω $\langle x, \leq \rangle$ μια δομή μερικής διάταξης, $y \subseteq x$ και $a \in x$. Λέμε ότι το a είναι **πάνω φράγμα** του y όταν για κάθε $b \in y$ ισχύει $b \leq a$. Αντίστοιχα, το a είναι **κάτω φράγμα** του y όταν για κάθε $b \in y$ ισχύει $a \leq b$. Το σύνολο y θα το ονομάζουμε **φραγμένο από πάνω** (αντίστοιχα, από κάτω) αν και μόνον αν υπάρχει ένα άνω (αντίστοιχα, κάτω) φράγμα. Θα λέμε ότι το y είναι **φραγμένο** όταν είναι φραγμένο ταυτόχρονα από πάνω και από κάτω.

Εστω x, y όπως παραπάνω. Εστω επίσης z το σύνολο

$$z = \{a \in x | \text{ το } a \text{ είναι άνω φράγμα του } y\}$$

Τότε το σύνολο z με τον περιορισμό της σχέσης διάταξης $\leq$, δηλαδή η δομή $\langle z, \leq_{|_z} \rangle$, αποτελεί μια δομή μερικής διάταξης. Αν η δομή αυτή έχει ένα ελάχιστο στοιχείο u, τότε το u είναι το **ελάχιστο πάνω φράγμα** (least upper bound) του y. Συμβολικά γράφουμε $u = \bigvee x$ ή $u = \sup(x)$ (από τη λέξη supremum) ή $u = lub(x)$ (από τα αρχικά της φράσης least upper bound). Αντίστοιχα ορίζεται το μέγιστο κάτω φράγμα ℓ, infimum ή glb (greatest lower bound), και γράφουμε $\ell = \bigwedge x$ ή $\ell = \inf(y)$ ή $\ell = glb(y)$.

Εστω τώρα A μια κλάση και $R \subseteq A^2$ μια σχέση. Με $\langle A, R\rangle$ συμβολίζουμε τη (*σχεσιακή*) **δομή** που αποτελείται από την κλάση A και τη σχέση R. Ιδιαίτερης σημασίας είναι οι δομές (μερικής ή ολικής) διάταξης $\langle A, \leq\rangle$.

Εστω $\langle A, R\rangle$ και $\langle B, S\rangle$ δύο δομές και $f : A \to B$ μια συνάρτηση. Λέμε ότι η f είναι **μορφισμός** δομών, και συμβολίζουμε $f : \langle A, R\rangle \longrightarrow \langle B, S\rangle$, όταν για κάθε $a, a' \in A$ αν ισχύει aRa', τότε ισχύει και $f(a)Sf(a')$.

Οι μορφισμοί $f : \langle A, \leq\rangle \longrightarrow \langle B, \sqsubseteq\rangle$ δομών διάταξης ονομάζονται **μονοτονικές** (ή αύξουσες) συναρτήσεις. Αν $f : \langle A, \leq\rangle \longrightarrow \langle B, \sqsubseteq^{-1}\rangle$, τότε η f ονομάζεται **αντιτονική** (ή φθίνουσα) συνάρτηση.

Ορισμός 2.1.1 *Ονομάζουμε* **δικτυωτό** *μια δομή* $(L, \leq)$ *μερικής διάταξης στην οποία κάθε ζευγάρι στοιχείων* $a, b \in L$ *έχει ελάχιστο πάνω και μέγιστο κάτω φράγμα.*

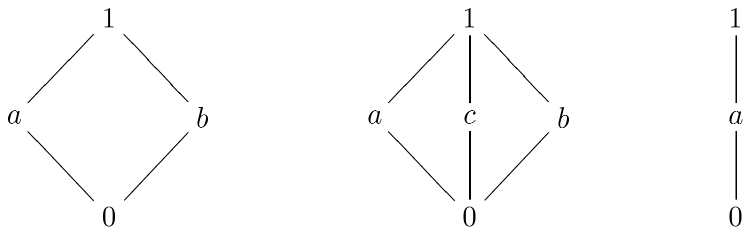
Γράφουμε $a \vee b$ για το ελάχιστο πάνω φράγμα και $a \wedge b$ για το μέγιστο κάτω φράγμα των a, b. Ενα δικτυωτό είναι **φραγμένο**, όταν έχει ελάχιστο και μέγιστο στοιχείο, τα οποία συμβολίζουμε με 0, 1 ή $\perp, \top$. Μια δομή μερικής διάταξης $(L, \leq)$ στην οποία υπάρχουν μόνο τα ελάχιστα πάνω φράγματα $a \vee b$ ζευγών στοιχείων θα ονομάζεται **άνω ημιδικτυωτό**. Αντίστοιχα, ένα **κάτω ημιδικτυωτό** είναι μια δομή μερικής διάταξης $(L, \leq)$ στην οποία υπάρχουν μόνον τα μέγιστα κάτω φράγματα $a \wedge b$ ζευγών στοιχείων. Ενα δικτυωτό είναι **πλήρες**, όταν κάθε υποσύνολό του έχει ελάχιστο πάνω και μέγιστο κάτω φράγμα. Αν $A \subseteq L$ είναι υποσύνολο του πλήρους δικτυωτού L, γράφουμε $\bigvee A$ και $\bigwedge A$ για την ένωση και τομή του A αντίστοιχα.

Εστω A, B δικτυωτά και $f : A \longrightarrow B$ μια συνάρτηση. Λέμε ότι η f είναι **μορφισμός δικτυωτών** αν και μόνον αν η f διατηρεί τομές και ενώσεις, δηλαδή $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ και $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$. Αν τα δικτυωτά είναι φραγμένα και επιπλέον η f διατηρεί το μέγιστο πάνω και ελάχιστο κάτω φράγμα, δηλαδή $f(1_A) = 1_B$ και $f(0_A) = 0_B$, τότε λέμε ότι η f είναι ένας 01-μορφισμός δικτυωτών.

Ενα δικτυωτό $(L, \leq, \wedge, \vee)$ ονομάζεται **επιμεριστικό**, αν ισχύουν οι παρακάτω ταυτότητες

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \qquad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

Σχήμα 2.1: Διαγράμματα Πεπερασμένων Δικτυωτών, Ι



Πρόταση 2.1.2 *Αν $(A, \leq, \wedge, \vee)$ δικτυωτό, τότε οι συναρτήσεις τομής και ένωσης, $\wedge, \vee : A \times A \longrightarrow A$, είναι μονοτονικές.*

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι αν $x \leq x'$ και $y \leq y'$, τότε $x \wedge y \leq x' \wedge y'$ (και αντίστοιχα για την ένωση $\vee$). Ισχύει $x \wedge y \leq x \leq x'$ και $x \wedge y \leq y \leq y'$. Επομένως, $x \wedge y$ είναι κάτω φράγμα του συνόλου $\{x', y'\}$. Επειδή $x' \wedge y'$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα, θα είναι επομένως και $x \wedge y \leq x' \wedge y'$.

Αντίστοιχα, ισχύει $x \leq x' \leq x' \vee y'$ και $y \leq y' \leq x' \vee y'$. Συνεπώς, το $x' \vee y'$ είναι πάνω φράγμα του συνόλου $\{x, y\}$. Επειδή το $x \vee y$ είναι το ελάχιστο πάνω φράγμα, θα έχουμε υποχρεωτικά $x \vee y \leq x' \vee y'$. ∎

Παραδείγματα

Παράδειγμα 2.1.1 Μικρά (πεπερασμένα) δικτυωτά μπορούν να αναπαρασταθούν με διαγράμματα όπως στο Σχήμα 2.1. Το δικτυωτό στη μέση (Σχήμα 2.1) είναι το τυπικό παράδειγμα μη επιμεριστικού δικτυωτού. Πράγματι, έχουμε

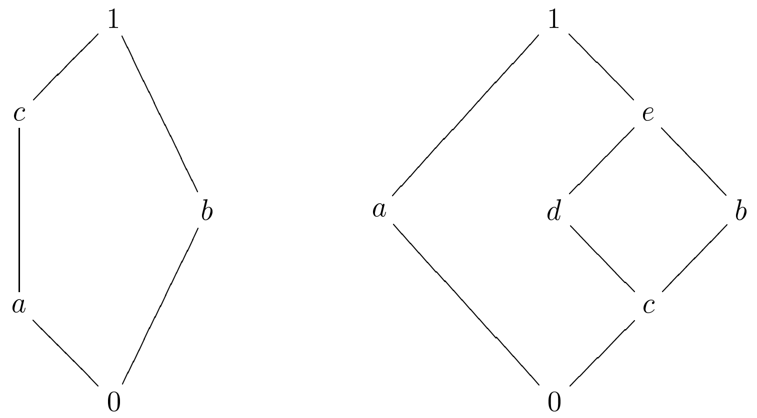
$$a \vee (b \wedge c) = a \vee 0 = a \neq 1 = 1 \wedge 1 = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

Δύο ακόμη παραδείγματα διαγραμμάτων δικτυωτών δίνουμε στο Σχήμα 2.2.

Παράδειγμα 2.1.2 Αν X είναι οποιοδήποτε σύνολο τότε το σύνολο όλων των υποσυνόλων του είναι πλήρες δικτυωτό με διάταξη τον εγκλεισμό συνόλων.

Απόδειξη: Το ελάχιστο στοιχείο είναι το κενό σύνολο και το μέγιστο στοιχείο είναι το ίδιο το σύνολο X. Το ελάχιστο πάνω φράγμα των υποσυνόλων

Σχήμα 2.2: Διαγράμματα Πεπερασμένων Δικτυωτών, II



$A_i \subseteq X, i \in I$, είναι η ένωση $\bigcup_{i\in I} A_i$ και το μέγιστο κάτω φράγμα είναι η τομή $\bigcap_{i\in I} A_i$.

Παράδειγμα 2.1.3 Το σύνολο F όλων των *πεπερασμένων* υποσυνόλων του X είναι δικτυωτό με ελάχιστο στοιχείο το κενό σύνολο αλλά χωρίς μέγιστο στοιχείο.

Απόδειξη: Πράγματι, αν $A, B \subseteq X$ είναι πεπερασμένα υποσύνολα, τότε και η ένωσή τους $A \cup B$, αλλά και η τομή τους $A \cap B$ είναι πεπερασμένα υποσύνολα του X. Οπως παρατηρήσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, η ένωση είναι το ελάχιστο πάνω φράγμα και η τομή το μέγιστο κάτω φράγμα.

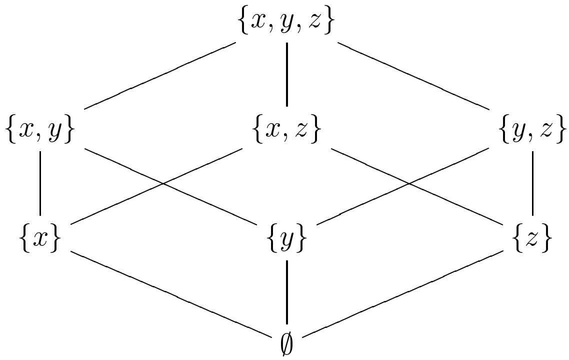
Παράδειγμα 2.1.4 Και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις τα δικτυωτά είναι επιμεριστικά.

Απόδειξη: Πράγματι, όπως είδαμε στο Κεφάλαιο της Βασικής Θεωρίας Συνόλων, ισχύουν οι ταυτότητες

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{και} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Παράδειγμα 2.1.5 Απεικονίζουμε το διάγραμμα του δικτυωτού των υποσυνόλων του $X = \{x, y, z\}$ στο Σχήμα 2.3.

Σχήμα 2.3: Το Δικτυωτό των Υποσυνόλων του Συνόλου $X = \{x, y, z\}$



Παράδειγμα 2.1.6 Δείξτε ότι το σύνολο των μη κενών πεπερασμένων υποσυνόλων ενός συνόλου X είναι άνω ημιδικτυωτό. Εξηγείστε γιατί δεν είναι δικτυωτό.

Απόδειξη: Εστω $A, B \subseteq X$ δύο πεπερασμένα και μη κενά υποσύνολα του X. Τότε $A \cup B$ δεν είναι κενό και είναι πεπερασμένο υποσύνολο του X (με αριθμό στοιχείων μικρότερο η ίσο του αθροίσματος των αριθμών των στοιχείων των A και B). Επομένως κάθε ζευγάρι μη κενών, πεπερασμένων υποσυνόλων A, B έχει ελάχιστο πάνω φράγμα, την ένωση $A \cup B$. Συνεπώς, το σύνολο των μη κενών πεπερασμένων υποσυνόλων ενός συνόλου X είναι άνω ημιδικτυωτό.

Δεν είναι δικτυωτό διότι δεν έχουν όλα τα ζεύγη μη κενών, πεπερασμένων υποσυνόλων του X ένα μέγιστο κάτω φράγμα. Πράγματι, αν A, B είναι ξένα μεταξύ τους, μη κενά, πεπερασμένα υποσύνολα, τότε $A \cap B = \emptyset$.

Παράδειγμα 2.1.7 Εστω X τυχόν σύνολο και $C : P(X) \longrightarrow P(X)$ μια απεικόνιση του X στον εαυτό του με τις ιδιότητες

1. Αν $x \subseteq y$ τότε $Cx \subseteq Cy$
2. $x \subseteq Cx$
3. $CCx \subseteq Cx$